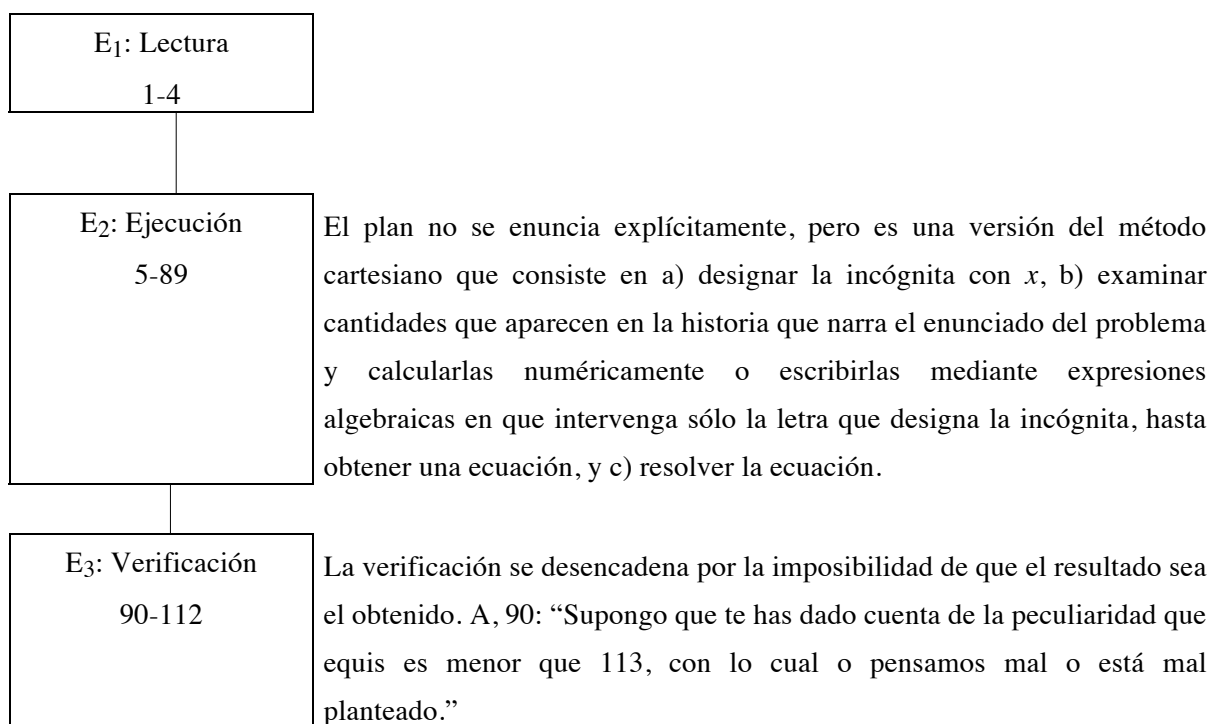


5.4.7. EL CASO DE A Y J CON EL PROBLEMA DEL HENO.

5.4.7.1. El diagrama de episodios del proceso de resolución.

Este problema está analizado en el apartado 6.3.2.1, por las mismas razones que ya hemos expuesto en el caso del problema del triángulo. El enunciado que les planteamos a A y J es el mismo que usamos posteriormente en las pruebas con el grupo de alumnos: “Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?”.

Un diagrama de episodios de la resolución de A y J es extremadamente simple, ya que, tras cuatro ítem de lectura, se pasa a un episodio de ejecución de un plan que es una versión del método cartesiano y luego a un episodio de verificación en el que se corrige un error de cálculo y se da por resuelto el problema. Como ya hemos hecho en el caso de D y R con el problema del triángulo, lo que nos interesa examinar es el desglose detallado del episodio en que se ejecuta el plan dictado por el método cartesiano y, en este caso, también la forma como se realiza la verificación; ambas cosas las presentaremos en los apartados siguientes. Aquí, presentamos el diagrama de episodios, para tener una primera visión global del proceso de resolución.



5.4.7.2. La ejecución del método cartesiano en la actuación de A y J.

El desglose en subepisodios del episodio de ejecución lo hemos realizado utilizando los mismos criterios que los que ya hemos expuesto para el caso del problema del triángulo. La versión del método cartesiano que aquí se está utilizando no es exactamente la misma, por un lado, por la diferencia entre la forma que ha de tener el resultado que aquí ha de ser un número y no una expresión algebraica, pero además porque se presenta como la descomposición atómica de uno de los pasos de la versión que hemos analizado en otras ocasiones. Aquí sólo se construye una ecuación y la relación que se escribe en forma de ecuación no se encuentra de entrada y una vez encontrada se traduce al lenguaje del álgebra: los pasos de esta versión “atómica” del método cartesiano consisten en la escritura de cantidades o su cálculo aritmético que se van combinando hasta construir finalmente una relación entre cantidades que queda expresada en forma de ecuación.

En el desglose en subepisodios examinamos en detalle cómo A y J van construyendo cantidades, analizando su significado y el significado de las relaciones entre ellas y ponemos de relieve cómo las tareas de gestión en la ejecución de un plan como éste están ligadas al examen del significado de las expresiones que se escriben para expresar las cantidades. La actuación de A y J es rica desde el punto de vista de esta gestión y sólo gracias a ello consiguen resolver correctamente el problema (ver los tres intentos de escribir la misma cantidad y cómo se repara en cada nuevo intento la expresión anterior en vez de volver a empezar desde cero, en los ítem 22-25, 33-39 y 50-69 y las discusiones intermedias). También muestra cómo el análisis del significado de las cantidades y las relaciones entre ellas se ve favorecido en ocasiones y perturbado en otras por el trabajo cooperativo: favorecido, por la necesidad de explicar al compañero el significado de las cantidades que se construyen — ver por ejemplo el final del subepisodio constituido por los ítem 50-69—; perturbado, por las discrepancias de interpretación. Este último asunto está aquí presente en que, ante la alternativa de si el ahorro se produce en los días previstos o los días reales⁵³, J opta por lo primero y A por lo segundo, y la discusión sobre ello aparece varias veces a lo largo del episodio.

En el desglose en subepisodios, hemos utilizado para designar las cantidades la notación que desarrollamos en el apartado 6.3.2.1. Ver también en ese apartado los análisis de las relaciones entre ellas.

G_m : heno ahorrado diario

A_i : ahorro total

D_p : días previstos

D_r : días reales

D_M : días de más

G_p : heno previsto diario

⁵³ Ver las observaciones que hacemos en el apartado 6.3.2.1 a propósito de esta alternativa, que también se presenta en los otros casos que presentamos.

G_r : heno consumido diario

G_{DP} : heno consumido en los días previstos

G_{DM} : heno consumido en los días de más

P : heno almacenado

<p>5-6</p>	<p>El plan implícito Designación de la incógnita y anotación de su significado. P: 'x = heno almacenado'</p>	<p>A, 6: "Lo que está claro es aclarar un poco la nomenclatura. [...]" A, 6: "[...] la pregunta de cuántos kilos de heno, ponemos eso que equis será."</p>
<p>7-19</p>	<p>Cálculo de A_t. Discusión sobre el tiempo durante el que se ahorra. A_t: 'heno ahorrado = 113×73' (erróneo) $A_t = G_m \times D_r$</p>	<p>Aparece la discrepancia sobre durante cuánto tiempo se ahorra. J mantiene que es D_p y A que es D_r. J, 7: "[...] serán por 57 días, ¿no?" A, 12: "[...] ¿Será por 73 [...]?" A, 16: "Entonces será por 73, [...]", decide que es D_r y J, 18: "[...] es por día, por cada día de los que se tenía previsto el heno [...]" no está de acuerdo, pero no le convence.</p>
<p>20-22</p>	<p>Escritura de G_p. G_p: '$\frac{x}{57}$ cada día inicialmente' $G_p = \frac{P}{D_p}$</p>	<p>A, 20: "O sea, cada día pensaban gastar..." A, 22: "[...] Eso es lo que pensaban inicialmente. [...]"</p>
<p>22-25</p>	<p>Escritura de G_r, primer intento. No se hace un análisis de la cantidad que se quiere expresar, sino que se intenta obtener combinando la incógnita y los datos. A, 24 escribe $\frac{x-113}{73}$ $G_r = \frac{P-G_m}{D_r}$ (erróneo)</p>	<p>A, 22: "Y luego en realidad lo que gastan son... [...]" A, 22: "[...] cada día gastan equis menos 113 partido... ¿Y ahora por qué partimos?" Reaparece la discrepancia sobre qué días hay que considerar. Aunque el significado ahora sea otro, A, 24 sigue optando por D_r y J, 25, por D_p.</p>

26-32	<p>Examen del significado de la expresión para G_r, inducido por la discusión. Rechazo de la expresión para G_r.</p>	<p>A, 26 intenta convencer a J. Al analizar el significado de cada una de las expresiones algebraicas ya escritas y de las partes de la que acaba de escribir para G_r, descubre que “113 tampoco, 113 por día.” (A, 28) y que, por tanto, la expresión está mal: “Bueno, esto está mal, sí.” (A, 30).</p>
33-39	<p>Escritura de G_r, segundo intento. $G_r: \frac{x - 113 \times 57}{73}$ $G_r = \frac{P - G_m \times D_p}{D_r} \text{ (erróneo)}$ <p>El numerador es la cantidad G_{DP}, que J y A no consideran como tal, y no lo que dice J, que parece significar A_t. G_r se obtendría dividiendo por D_p.</p> <p>Si el numerador realmente significara lo que J dice, habría que dividir por D_M, cantidad que J y A tampoco consideran en ningún momento.</p> </p>	<p>Esta vez es J quien comienza a escribir la expresión, y se detiene a examinar el significado de una parte de ella, “eso será la cantidad de heno que te queda” (J, 39) antes de decidir que hay que dividir por D_r.</p>
40-49	<p>Nueva discusión sobre el tiempo en que se ahorra. Rechazo de la expresión para G_r.</p>	<p>J no sabe replicar el argumento de A, 48 en favor de D_p, por lo que decide que la expresión que ha escrito está mal: “Esto está mal.” (J, 49)</p>
50-69	<p>Escritura de G_r, tercer intento. $G_r: \frac{x}{57} - 113$ $G_r = G_p - G_m; G_p = \frac{P}{D_p}$ </p>	<p>J, 53 piensa en intercambiar D_r y D_p en la expresión anterior, sin volver a examinar el significado de nada; A, 54 parte de la expresión de G_p: “[...] ahora lo veo, la misma cantidad que pensaban menos los 113.”</p> <p>El diálogo J, 55, “113 por 73”; A, 56, “No, estamos hablando de cada día.”; J, 57, “Ah, sí, sí, si dividimos por 57, sí”, zanja la discusión.</p>

	<p>A nombra la cantidad G_r para fijar que su significado es distinto de G_p, primero como:</p> <p>“$\frac{x}{57} - 113$ cada día ahorrando”</p> <p>y luego, por el desacuerdo de J, como</p> <p>“$\frac{x}{57} - 113$ gastan cada día ahorrando”</p>	<p>El nombre que A. le da a G_r, que J. no entiende, provoca un nuevo examen del significado de la expresión, un arreglo del nombre y el acuerdo final: A, 68, “Vale.”; J, 69, “Vale, vale.”</p>
70	<p>Gestión.</p> <p>La cantidad que se ha escrito mediante una expresión algebraica se da como “sabida”. Se recuerda la cantidad que es la incógnita.</p>	<p>A, 70: “¿Y ahora qué hacemos con esto? Sabemos que cada día gastan esto; lo que queremos hallar es el..., el heno inicial.”</p>
71-77	<p>Escritura de una expresión algebraica para la cantidad “heno gastado en total” a partir de la expresión algebraica de la cantidad G_r.</p> $\left(\frac{x}{57} - 113\right) \times 73$ <p>$G_r \times D_r$</p> <p>Establecimiento de una ecuación con dos incógnitas.</p>	<p>J, 71: “Sí, nosotros sabemos que si multiplicamos esto por 57..., nos saldrá la cantidad de heno que buscamos..., en incógnita, pero...” A, 72 corrige D_p cambiándolo por D_r.</p>
78-79	<p>Identificación —por A— de la cantidad “heno gastado en total” con la cantidad P que es la incógnita del problema, “heno almacenado” o “heno inicial”.</p> <p>Escritura de la ecuación con una incógnita:</p> $\left(\frac{x}{57} - 113\right) \times 73 = x$	<p>A, 76: “Esto es una y.”</p> <p>A, 78: “En fin, es el heno inicial. Cada día gastan esto, lo hacen durante 73 días, luego durante todo ese tiempo lo que gastan es la cantidad inicial, que es la equis.”</p>
80	<p>Gestión.</p> <p>La construcción de la ecuación culmina una etapa del método.</p> <p>La forma de la ecuación hace desconfiar.</p> <p>La etapa siguiente del método se enuncia.</p>	<p>A, 80: “[...] o sea, ya tienes una cosa con una incógnita y ya está. Lo que me temo es que hayamos puesto una identidad desde el principio y no lo podamos sacar. No, no... Y ahora es esto, resolver este sistema de ecuaciones..., este sistema, digo, esta ecuación.”</p>

81-87	Explicación de A a J de la identificación de la “cantidad que gastan en esos 73 días” con la “cantidad inicial”.	J, 81, “Lo que no veo claro de todas formas es esta equis de aquí.”, no ve que la cantidad que gastan sea la incógnita del problema, que antes han descrito como ‘ x = heno almacenado’. A, 86 lo explica.
88-89	Resolución de la ecuación.	

5.4.7.3. Reconstrucción del episodio de verificación.

El episodio de verificación está dividido en subepisodios en que se revisa alternativamente el planteamiento o los cálculos, ya que desde el comienzo se ha pensado que el error puede estar en el uno o en los otros (“o pensamos mal o está mal planteado”, A, 90). En 92-94 se vuelve a examinar el planteamiento, sin encontrar nada que parezca mal. En 95-97 se revisan los cálculos, sin encontrar el error. J, 98 regresa entonces a su duda sobre la identificación de las cantidades (“Están las equis, tío, eso no puede ser equis.”) y la discusión entre ambos culmina con el mejor examen de las relaciones entre las cantidades del problema que A ha hecho en todo el protocolo: “No, nene, lo que quiere decir es que si cada vez piensan de gastar esto (señala $\frac{x}{57}$ y en su lugar gastan esto (señala $\frac{x}{57}-113$, en vez de emplear 57 días para llegar a equis... Si esto lo multiplicas por 57 te va a salir equis, si esto lo multiplicas por 73, tienes que llegar a equis, que es la cantidad inicial, esto me parece que está bien...” (A, 107) Tras una explicación tan contundente, se pasa a revisar los cálculos de nuevo, se detecta el error y se calcula nuevamente el valor del resultado. El final del protocolo es una nueva verificación, ahora del nuevo resultado.

5.4.7.4. El protocolo escrito.

Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

{1} A: (Lee el enunciado.)

{2} A: Estamos hablando todo el rato de lo mismo, ¿no?, del mismo heno, vamos, nada de que haya...

{3} F: Sí.

{4} A: Cuántos kilos de heno almacenaron...

{5} A: Bueno, vamos a ver...

{6} A: Lo que está claro es aclarar un poco la nomenclatura, la pregunta de cuántos kilos de heno, ponemos eso que equis será (escribe ‘ x = heno almacenado’).

{7} J: Mira, y..., los 135 que almacenaron por día serán por 57 días, ¿no?

- {8} A: Ahorraron 115 por día...
- {9} J: O sea, sabemos una cosa, son 113 kilos por día, almacenados; sabemos..., si hay 57 días, sabemos...
- {10} A: Se habrán ahorrado.
- {11} J: ...sabemos la cantidad, ¿no?
- {12} A: Heno ahorrado... (escribe 'heno ahorrado = 113'), igual 113..., ¿será por 73 en este caso?
- {13} F: Pensarlo, pensarlo.
- {14} A: ¿Todo esto lo tenemos que pensar nosotros?
- {15} F: Sí, sí.
- {16} A: Entonces será por 73, porque son los días que están empleando heno; luego es eso, han estado ahorrando 113 kilos durante cada uno de los 73 días. (Escribe 'heno ahorrado = 113×73 '.)
- {17} A: Bueno...
- {18} J: Son 113 kilos por día; esto (señala 113) es por día, por cada día de los que se tenía previsto el heno, ahorraron 113 kilos, ¿no? Después, con el resto del heno que tienen, tienen heno para 73 días.
- {19} A: Cada día van gastando lo mismo.
- {20} A: O sea, cada día pensaban gastar...
- {21} J: Sí, sí. (Escribe $\frac{x}{57}$.) Cada día, ¿no?
- {22} A: Y luego en realidad lo que gastan son... Eso es lo que pensaban inicialmente. (Escribe ' $\frac{x}{57}$ cada día inicialmente'.) Y luego en realidad lo que gastaron cada día son 113. Entonces cada día gastan equis menos 113 partido... (escribe $\frac{(x-113)}{57}$) ¿Y ahora por qué partimos?
- {23} J: Exacto, ahí está el problema.
- {24} A: Supongo que será: la cantidad inicial..., gastan cada día..., la cantidad inicial menos 113, pero durante 73 días; luego yo aquí pondría 73. (Escribe 73 debajo de la raya de fracción.)
- {25} J: Eso es lo que no veo yo claro, porque si son 113 kilos que se ahorrán por día, y que tienen éstos o éstos, y yo creo que son los primeros, y con la cantidad de heno que te ha sobrado tienes para los 73 días...
- {26} A: Mira, los días que están ahorrando heno serían 57, luego basta, ellos la idea que tenían era gastar cada día..., es equis dividido por 57, o sea, lo que tenían, pero..., o sea..., y en realidad lo que hacen es gastar cada día..., eso, cada día, gastar..., 113 es menos de lo que pensaban gastar en un principio, luego sería la cantidad inicial menos 113 (señala $x-113$)...
- {27} J: Pero es que...
- {28} A: 113 tampoco, 113 por día.
- {29} J: Exacto.
- {30} A: Bueno, esto está mal, sí. (Señala $\frac{(x-113)}{73}$.) ¿Lo borramos?
- {31} F: Sí, sí, podéis borrar siempre que lo consideréis necesario. Si lo queréis recordar...
- {32} A: Sí, bueno, esto es porque está mal, otra cosa son los pasos intermedios.
- {33} A: Bueno, vamos a ver...
- {34} J: Yo lo que sí consideramos es eso.

- {35} A: ¡Espera!, ¡ya está claro!
- {36} J: Equis menos 113 por 57 (escribe $x-113 \times 57$).
- {37} A: Bueno.
- {38} A: Por 57 el 113, ¿no?
- {39} J: Claro, eso será dividir..., no, eso no será a dividir por nada, no, eso será la cantidad de heno que te queda. De acuerdo, ¿no? Esa es la cantidad de heno, esa cantidad de heno que te queda será dividida, o sea, se repartirá en ese heno para esos 73 días.
- {40} A: Creo que..., no sé.
- {41} J: Sí.
- {42} A: Bueno, el asunto es entender el problema. Es que el problema...
- {43} J: Bueno, es que se ahorran 113 kilos por día, ¿de acuerdo?
- {44} A: Pero durante 73 días.
- {45} J: Eso es lo que no veo claro yo.
- {46} A: Yo sí que lo veo claro, macho. Ahora ya, después de comentarlo, yo sí que lo veo claro.
- {47} J: (falta)
- {48} A: Vamos a ver, es..., es lo que te estoy diciendo: si es durante 57 días, gastan lo que quieren, lo que tenían pensado en un principio; pues eso lo gastan en 57 días, gastan..., gastan en equis, al ahorrarlo..., cada vez que ahorran 113, cada día, va a ser durante 73, no va a ser en 57. Es que lo que tienes que ver es el tiempo que empleas para cada cosa.
- {49} J: (Borra $x-113 \times 57$.) Esto está mal.
- {50} A: Entonces vamos a ver, cada día lo que pensaban gastar, esto (señala $\frac{x}{57}$).
- {51} J: Sí.
- {52} A: Y..., y..., en realidad lo que se hizo fue gastar..., gastar..., cada día también se gastaban.
- {53} J: A esto (señalando $\frac{x}{57}$) le quitas 113 por 73, ¿o no?
- {54} A: No, la misma cantidad que pensaban, ahora lo veo, la misma cantidad que pensaban menos los 113.
(Escribe $\frac{x}{57} - 113$.)
- {55} J: 113 por 73.
- {56} A: No, estamos hablando de cada día.
- {57} J: Ah, sí, sí, si dividimos por 57, sí.
- {58} A: Cada día ahorrando. (Escribe 'cada día ahorrando' a continuación de lo anterior.)
- {59} A: Bueno, vamos a hacer una línea a todo esto.
- {60} J: No, eso no es lo que ahorran cada día, eso es lo que gastan.
- {61} A: Sí, pero quiero decir..., o sea, si no ahorraran, cada día gastarían equis partido por 57, pero como cada día gastan 113 menos de lo que pensaban, en realidad si lo que pensaban era esto (señala $\frac{x}{57}$), en realidad lo que gastan es esto (señala todo lo escrito).
- {62} A: Lo que pensaban era 113.

- {63} J: Que es lo que gastan.
- {64} A: Bueno, gastan. (Escribe 'gastan' delante de 'cada día ahorrando'.) (Ríe.)
- {65} J: (Ríe.)
- {66} A: Vale, creo que no valga nada, pero en fin...
- {67} J: (falta)
- {68} A: Vale.
- {69} J: Vale, vale.
- {70} A: ¿Y ahora qué hacemos con esto? Sabemos que cada día gastan esto; lo que queremos hallar es el..., el heno inicial.
- {71} J: Sí, nosotros sabemos que si multiplicamos esto por 57..., nos saldrá la cantidad de heno que buscamos..., en incógnita, pero...
- {72} A: Yo creo que..., por lo que hay que multiplicarlo es por 73.
- {73} J: Bueno, por eso te he dicho.
- {74} A: Has dicho 57.
- {75} J: Bueno, por 73, o sea, esto. (Escribe $\left(\frac{x}{57} - 113\right) \times 73$.)
- {76} A: Esto es una y.
- {77} J: Sí.
- {78} A: En fin, es el heno inicial. Cada día gastan esto, lo hacen durante 73 días, luego durante todo ese tiempo lo que gastan es la cantidad inicial, que es la equis.
- {79} J: Sí.
- {80} A: O sea si pones equis, (escribe $=x$ a continuación de la fórmula anterior, con lo que le queda $\left(\frac{x}{57} - 113\right) \times 73 = x$) o sea, ya tienes una cosa con una incógnita y ya está. Lo que me temo es que hayamos puesto una identidad desde el principio y no lo podamos sacar. No, no... Y ahora es esto, resolver este sistema de ecuaciones..., este sistema, digo, esta ecuación.
- {81} J: Lo que no veo claro de todas formas es esta equis de aquí (señala la del segundo miembro de la ecuación).
- {82} A: Vamos a ver...
- {83} J: Ésta es la cantidad que ahorra por día.
- {84} A: No, no, es la cantidad que gasta por día.
- {85} J: Eso, la cantidad que gasta por día, de acuerdo; si la multiplicamos por 73 días, nos saldrá la cantidad que gastan en esos 73 días, pero no la cantidad...
- {86} A: Es que la cantidad que gastan durante 73 días es la que tenían al principio. Lo que no sé..., es que no sé si lo he entendido bien, es eso. Y yo creo que basta con resolver...
- {87} J: Luego la equis es la cantidad inicial (escribe en la ecuación una flecha que sale de la x y 'cantidad inicial' y se pone a resolver la ecuación).
- {88} A: Despeja la equis, yo multiplico.

[Resuelven la ecuación a dúo y les resulta $x = 112'78$. Aparte de otros errores de poca monta, la causa de que haya aparecido un resultado tan disparatado está en que al quitar el denominador en la expresión entre paréntesis que hay en la ecuación $\left(\frac{x}{57} - 113\right) \times 73 = x$, lo que han escrito es $(57x - 6441) \cdot 73 = x$.]

{89} A: Es el resultado...

{90} A: Supongo que te has dado cuenta de la peculiaridad que equis es menor que 113, con lo cual o pensamos mal o está mal planteado.

{91} J: Cuál, cuál es la jugada...

{92} A: Ah, no, espera, uy... Está mal planteado. (Revisa el planteamiento.)

{93} J: ¿Qué?

{94} A: Porque si tenemos 112'78 inicialmente, no pueden ahorrar 113 cada día..., porque no los tienen, entre otras cosas, lo cual quiere decir... Bueno, mal planteado me parece que no puede estar..., o sea, el problema en sí, lo que tiene lógica...

{95} J: Ya, ya..., este 73 multiplica a 113, y has multiplicado todo...

{96} A: Multiplica todo. Eso es por día.

{97} A: Es el sistema... (Revisan cálculos en el sistema. Intentan detectar el error. Hay una pausa en la que parecen volver al planteamiento.)

{98} J: Están las equis, tío, eso (señala la del segundo miembro de la ecuación) no puede ser equis.

{99} F: Bueno, como es un problema de la ecuación en el que estáis liados, para que tengáis tiempo, tiempo suficiente, de aquí a aquí (indica el primer paso de cálculos para que se revise) está bien.

{100} A: Lo que no tengo claro es que la ecuación está bien planteada, lo que queremos plantearnos primero...

{101} F: Ah, que quieres plantear primero eso. Bueno, si es ese tema, eh, ya habéis tomado un poquito la decisión respecto al planteo o bien de la ecuación o bien planteada y estabais en los cálculos, por eso quería yo centraros en alguna de las dos cosas: en los cálculos o...

{102} J: Eso es que ahorraron por...

{103} A: Eso es lo que se gasta por día.

{104} J: Vale, eso es lo que gastan por día, por 73, eso..., que será lo que gastaremos en 73 días, no la cantidad inicial.

{105} A: Es que durante esos 73 días hemos gastado todo.

{106} J: No, porque hemos ahorrado algo, una cosa.

{107} A: No, nene, lo que quiere decir es que si cada vez piensan de gastar esto (señala $\frac{x}{57}$) y en su lugar gastan esto (señala $\frac{x}{57} - 113$ en vez de emplear 57 días para llegar a equis... Si esto lo multiplicas por 57 te va a salir equis, si esto lo multiplicas por 73, tienes que llegar a equis, que es la cantidad inicial, esto me parece que está bien... Me parece que el asunto ahora es la ecuación, vamos a mirar...

[Detectan el error y corrigen la ecuación. Llegan a 29387'... Mientras J hace la división, A revisa el problema.]

{108} A: Bueno, ahora lo que vamos es a comprobar.

{109} J: Es a base de bien.

{110} A: Nos podemos haber equivocado en el planteamiento, si sobra tiempo, lo dedicamos... Entonces vamos a ver.

{111} J: Eso equis igual 29387 son los kilos.

{112} A: Los kilos iniciales. Si cada día se pensaban gastar..., vamos a repartirnos la faena, se pensaban gastar..., esto, 29387 entre 57... (Hacen la división.) El resultado es...

[A. le resta 113 al resultado y lo multiplica por 73. El error lo atribuye a los decimales que ha despreciado y da por terminada la comprobación.]