CAPÍTULO 6

LA ACTUACIÓN DE LOS ALUMNOS: ESTUDIO DEL GRUPO

Daughter: Daddy — has anybody ever measured how much anybody knew?

Father: Oh yes. Often. But I don't quite know what the answers meant. They do it with examinations and tests and quizzes, but it's like trying to find out how big a piece of paper is by throwing stones at it.

D.: How do you mean?

F.: I mean — if you throw stones at two pieces of paper from the same distance and you find that you hit one piece more often than the other, then probably the one you hit most will be bigger than the other. In the same way, in an examination you throw a lot of questions at the student, and if you find that you hit more pieces of knowledge in one student than in the others, then you think that student must know more. That's the idea.

G. Bateson

6.1. LA FINALIDAD DEL ESTUDIO.

Los elementos del modelo de competencia que postulamos forman parte de la descripción del resolutor de problemas que quiere la enseñanza. El estudio de un grupo de alumnos que han sido instruidos según el modelo de enseñanza indicado, con la intención de que avancen hacia la competencia en el uso de esos elementos, lo concebimos con el fin de describir de manera global cómo se presentan los elementos del modelo de competencia antes y después de esa instrucción.

Esos elementos son los que intervienen en la resolución de problemas de matemáticas cuando éste se analiza desde el punto de vista del proceso de resolución, así que para poder obtener datos sobre su uso por los alumnos era necesario disponer de un instrumento que permitiera reflejar aspectos del proceso y no, simplemente, de su producto. Ya hemos discutido en el capítulo anterior una manera de obtener datos sobre el proceso observando a sujetos individuales resolver problemas oralmente. Aquí, la intención de estudiar a un grupo de individuos nos hizo recurrir a pruebas escritas. Es obvio que en una prueba escrita no puede pretenderse que el resolutor dé cuenta de lo que está pensando mientras resuelve el problema, ya que se sabe que esto perturba el proceso de resolución al incorporar la tarea de esa escritura, de modo que hay que contar con que lo que se va a tener como datos no puede ser una transcripción del proceso de resolución, sino su resultado más o menos elaborado. Lo único que cabe es introducir instrucciones para la realización de la prueba que hagan que quede el mayor rastro posible sobre el papel de aquellas acciones que *de forma habitual el resolutor realiza en el papel*

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares

cuando resuelve un problema, es decir, hacer que el resolutor no haga desaparecer todo lo que él consideraría “sucio”, para dejar sólo el “limpio”.

Por otro lado, puede pedirse al resolutor que, no sólo dé la solución del problema, sino que una vez acabado, de forma retrospectiva, describa lo que ha hecho para obtenerlo. Ahora bien, si se hace esto, suelen suceder dos fenómenos que hay que tener en cuenta. A menudo, lo que los sujetos describen cuando se les pide esta retrospección no es el proceso de resolución del problema, entendiendo por tal lo que nosotros hemos definido, sino la solución del problema, es decir, el conjunto de operaciones con las que se obtiene el resultado del problema a partir de los datos —o, eventualmente, el argumento que de las premisas lleva a la conclusión—, que es sólo el producto final del proceso de resolución, de modo que en esa descripción desaparece prácticamente todo rastro de los elementos del proceso cuyo uso pretendemos observar. Además, los sujetos carecen habitualmente de un discurso para hablar de los elementos del proceso que les permita organizar esa descripción, de modo que o bien la eluden describiendo la solución, para lo que sí que poseen un discurso más o menos instalado, o bien acumulan enunciados de carácter general en los que expresan su concepción de lo que es resolver un problema o de lo que les supone. Como consecuencia de ello, decidimos observar precisamente los *juicios* de los alumnos sobre los elementos que intervienen en el proceso de resolución de un problema.

Para lo primero, era preciso seleccionar unos problemas cuya complejidad hiciera posible que pudieran presentarse los elementos del proceso cuyo uso pretendíamos observar. Esto excluía toda posibilidad de que el número de problemas propuestos fuera elevado. También era necesario además que los alumnos dispusieran del tiempo suficiente para afrontar su resolución de modo que no se produjera un abandono general ante la primera dificultad que se presentara. Por otro lado, parecía conveniente que los problemas fueran variados y que se correspondieran de alguna manera de la prueba inicial a la prueba final. Estas consideraciones condujeron a elegir cuatro problemas para cada una de las pruebas, que ya habíamos utilizado anteriormente, como material de instrucción o en sesiones de resolución por parejas descritas en el capítulo 5, o eran similares a problemas ya utilizados en uno de esos dos ámbitos, y de los que, por tanto, ya sabíamos mucho. En el apartado siguiente, presentamos y analizamos esos problemas.

Para lo segundo, decidimos que los juicios de los alumnos sobre qué elementos intervienen en el proceso de resolución de problemas no había que recogerlos como respuesta a una pregunta desnuda sobre ello, sino que la pregunta había que hacerla tras pedir una descripción retrospectiva de la resolución de cada uno de los problemas propuestos —con la intención de que no se contestara lo primero que les viniera a la mente, sino que de alguna manera se vieran forzados a analizar lo que habían hecho—, y, además, que la pregunta no la formularíamos en general, sino referida a cada uno de los problemas en cuestión. Sólo después de esto, formularíamos de nuevo la pregunta en general.

Planteada de esta manera la recogida de datos sobre los juicios de los alumnos, sería posible examinar no sólo cuáles eran, sino su dependencia de las características de los problemas concretos que se les planteaban. Para el examen, se decidió utilizar la técnica de rejilla que se discute en Rivas y

Marco Taverner (1985), tomando los problemas como lo que allí se llaman elementos y los juicios como los constructos. En el apartado siguiente se describe la forma de recoger los datos y en el 6.4.1, la versión de la técnica de rejilla utilizada y la técnica de análisis taxonómico con que se examinaron.

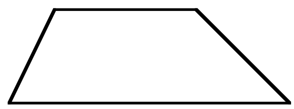
6.2. DESCRIPCIÓN DE LAS PRUEBAS INICIAL Y FINAL.

Los problemas que se plantearon en la prueba inicial fueron los siguientes:

> 1.— Unas personas pensaban realizar un viaje de 5000 km. En su presupuesto habían incluido una cierta cantidad de dinero para gastarse en gasolina. Sin embargo, una oportuna bajada del precio de la gasolina les permitió ahorrar 0'4 pesetas por kilómetro, con lo cual pudieron recorrer 250 km más. ¿A cuánto ascendía su presupuesto para gasolina?
>
> 2.— Sea $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. ¿Para qué valores de n se puede dividir S_n en dos subconjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea la misma? Por ejemplo, $S_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ puede dividirse en $\{1, 6, 7\}$ y $\{2, 3, 4, 5\}$.
>
> 3.— Dividir un triángulo en dos partes iguales mediante una paralela a la base.
>
> 4.— Probar que el cuadrado de un número impar cualquiera da resto 1 al dividirlo por 8.

Los que se plantearon en la prueba final fueron los siguientes:

> 1.— Unos granjeros almacenaron heno para 57 días. Pero como el heno almacenado era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, y tuvieron heno para 73 días. ¿Cuánto heno almacenaron?
>
> 2.— a) Cuando $2n+1$ es un cuadrado perfecto, $n+1$ es la suma de dos cuadrados perfectos. b) Cuando $3n+1$ es un cuadrado perfecto, $n+1$ es...
>
> 3.— Los enteros positivos se agrupan así: {1}, {2,3}, {4,5,6}, {7,8,9,10}..., de manera que hay k números en el k–ésimo grupo. Encontrar la suma del k–ésimo grupo.
>
> 4.— Dividir un trapecio en dos partes iguales mediante una paralela a su base.



> [Después, esbozar el plan para los siguientes problemas: a) Dividir un pentágono regular en dos partes iguales mediante una paralela a uno de sus lados. b) Dividir un hexágono regular en tres partes iguales mediante paralelas a uno de sus lados. c) Dividir un triángulo en n partes iguales mediante paralelas a su base...]

Estos problemas se analizan en detalle en el apartado 6.3.2, aquí sólo queremos señalar que procuramos que los problemas de la prueba final se correspondieran con los de la prueba inicial, pero que no fueran equivalentes, sino que fueran más difíciles o más complejos. Aparte de lo que salta a la vista, la naturaleza concreta de estos cambios y su consecuencia sobre la medida que hicimos de las respuestas de los alumnos se trata en detalle también en 6.3.2. La correspondencia entre los problemas es la siguiente:

problema	prueba inicial	prueba final
PAVOC	1	1
aritmético de encontrar	2	3
geométrico	3	4
aritmético de probar	4	2

En la prueba inicial, los problemas se presentaron en dos sesiones de una hora cada una, dos en cada sesión. No se había realizado ninguna sesión del curso antes de éstas. Al presentar la tarea se les indicó que con ella se pretendía hacer una evaluación inicial de sus conocimientos respecto de lo que iba a constituir el contenido del curso. No se les dio ninguna explicación oral sobre la manera de realizar la prueba. En la primera sesión se entregó una hoja con los enunciados de los dos primeros problemas, acompañados de las siguientes instrucciones:

> Resuelve en las hojas adjuntas los problemas que están enunciados a continuación.
>
> No utilices unas hojas para "sucio" y otras para "limpio". Si haces algo que crees que está mal o que no te sirve finalmente para nada, táchalo con una cruz, pero no lo borres, ni dejes de entregarlo.
>
> Escribe todo lo que vayas pensando que sirve para resolver el problema, tanto si sigues por ese camino como si finalmente atacas o resuelves el problema de otra manera.
>
> Si resuelves los problemas y aún tienes tiempo, intenta resolverlos de otra manera.

En la segunda sesión se entregó una hoja con los enunciados de los dos problemas restantes, en la que figuraban de nuevo las instrucciones.

Puede verse cómo están recogidas las consideraciones hechas en el párrafo anterior en estas instrucciones básicamente en las indicaciones sobre no borrar y no hacer un "sucio" y un "limpio". Obsérvese por este uso de "sucio" y "limpio", p. e., que se procuró que las instrucciones no utilizaran ninguna expresión técnica de la teoría sino expresiones usuales en el lenguaje coloquial o incluso en la jerga escolar. Por otro lado, la indicación de que se intentara hacer el problema de otra manera en caso de tener tiempo para ello se incluyó ya que las prácticas escolares no dan por supuesto que haya que resolver un problema de más de una manera —por lo que no cabe esperar que los alumnos lo hagan— y, sin embargo, la medida de productividad que se iba a aplicar a los resultados se ve muy afectada si esto se hace. Dado que en la prueba final los alumnos tendrían la experiencia de todo un curso en que se pone el énfasis en ello, quisimos así intentar que la medida no se limitara a reflejar que las tareas de las pruebas inicial y final, pese a estar formuladas de la misma manera, fueran en realidad distintas por las instrucciones implícitas en las reglas del juego.

Una vez transcurrido el tiempo asignado para resolver los problemas y con las soluciones delante se les entregó cuatro hojas, una para cada problema, en la que figuraba de nuevo el enunciado del problema acompañado de las dos preguntas siguientes, una escrita inmediatamente a continuación del enunciado del problema y la otra en el envés de la hoja:

> 1.— ¿Puedes describir, desde tu punto de vista, qué has hecho para resolver —o intentar resolver— este problema? Por ejemplo, qué has utilizado de lo que sabías de matemáticas o de tu experiencia en resolver problemas, cómo lo has utilizado o por qué; si has tenido alguna "idea feliz"; dónde has fijado tu atención…
>
> Indica además cualquier otra cosa que pienses que has hecho, utilizado o puesto en práctica.
>
> Procura ser minucioso e indicar todas las cosas que te parezcan importantes.
>
> 2.— Una vez hayas acabado esta descripción, resume en pocas palabras en qué ha consistido para ti la tarea de resolver este problema.

También en la formulación de estas instrucciones procuramos no usar ningún término de la teoría, incluso si esto nos obligó a utilizar la palabra comodín 'cosa', o la expresión, poco afortunada, aunque perteneciente a la jerga escolar, "idea feliz". La combinación de *descripción detallada* en 1 con *resumen* en 2 y la indicación de que el resumen tenía que ser de "en qué ha consistido para ti la tarea" es la forma como intentamos tomar en consideración los fenómenos que hemos señalado antes que se producen cuando se les pide a los resolutores un análisis retrospectivo: si la descripción, pese a las indicaciones sobre el sentido en que se pedía que se hiciera, se deslizaba hacia la solución del problema, el resumen podía ser el lugar para encontrar lo que se quería tomar como datos.

Finalmente, se les entregó una quinta hoja con el texto siguiente, para preguntar también, como ya hemos señalado, por la tarea de resolver problemas de matemáticas en general:

> Lo que has contestado en las hojas anteriores corresponde a tus opiniones o ideas sobre la tarea de resolver cuatro problemas particulares. Contesta a las siguientes preguntas pensando en *todos los problemas de matemáticas* que puedas imaginar y *no sólo* en los que acabas de resolver.
>
> 1.— A tu entender, ¿en qué consiste la tarea de resolver un problema?
>
> 2.— […][1]

Las descripciones de los alumnos de sus resoluciones, y sus respuestas a en qué consiste la tarea, tanto problema por problema como en general, se examinaron de inmediato extrayéndose de ellas una lista de frases que indicaran las acciones que según ellos se realizan en la resolución. Dicha lista se examinó entre varias personas para homogeneizarla y agrupar las que no fueran sino maneras distintas de expresar acciones similares hasta llegar a una lista de 21 acciones. Éstas se escribieron comenzando

---

[1] El análisis de las respuestas a la segunda pregunta, que trataba sobre lo que debería saber un profesor para enseñar a resolver problemas, no lo presentamos en este trabajo.

con un verbo en infinitivo para subrayar que se consideraban como acciones y se procuró utilizar las palabras con que las habían expresado los alumnos en sus respuestas y evitar en todo caso los términos de la teoría.

Dos días después de la realización de la primera parte de la prueba, se les entregó a los alumnos sus respuestas a la prueba y se les presentó la lista de las 21 acciones en una rejilla con cuatro casillas para cada una de ellas, una para cada uno de los problemas que habían resuelto. En una hoja adjunta se les dieron los enunciados de los problemas numerados y referidos a las columnas de la rejilla y las instrucciones siguientes:

> En la hoja adjunta tienes una lista de lo que hemos entresacado, reformulado y agrupado a partir de lo que habéis dicho y habéis hecho en la resolución de los problemas de la encuesta anterior.
> Califica de 0 a 10 el grado de importancia que tuvieron para ti cada una de las cosas que aparecen en la lista para cada uno de los problemas que hiciste, y escribe la puntuación en la columna correspondiente al número del problema.
> Puedes consultar la resolución o tus comentarios por si te falla la memoria.

También se les presentó una hoja en la que se les pedía dar esa calificación "para la tarea de resolver problemas en general".

La escala de calificación que se eligió fue de 0 a 10, a pesar de que no cabe esperar que nadie pueda juzgar lo que aquí se pide con tanta discriminación como para distinguir entre tantos valores, por la familiaridad de los alumnos con esa escala ya que es la habitual para las notas escolares. Así, los números llevarían asociados naturalmente los significados de 'suspenso', 'aprobado', etc.

La prueba final se realizó como parte de las pruebas de evaluación finales del curso. Las instrucciones incluidas en las hojas entregadas a los alumnos fueron más someras, ya que se quiso asumir que mucho de lo indicado en ellas no había que hacerlo explícito ya que formaba parte de la instrucción recibida durante el curso. En el mismo sentido, se incluyó la posibilidad de no resolver efectivamente los problemas sino indicar cómo se haría, ya que esto había sido práctica habitual durante el curso. Las valoraciones de la lista de acciones no se pidieron para la tarea en general.

6.3. EL SUBESTUDIO SOBRE EL ESTILO DE LAS RESOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS.

6.3.1. LA MEDIDA DE PRODUCTIVIDAD.

La intención de este estudio es dar cuenta de algunos rasgos distintivos de la manera en que los alumnos resuelven los problemas que se les presentaron en las pruebas antes y después de la instrucción. El modelo de competencia que hemos descrito y el tipo de experto resolutor que implica nos obliga a no utilizar como medida de la actuación de los alumnos al resolver los problemas el número de problemas bien resueltos —aunque esto pueda tomarse en cuenta. En la revisión de la literatura sobre medidas diseñadas para pruebas sobre resolución de problemas presentadas por medio de cuestionarios, apenas pueden encontrarse medidas que intenten situarse en el punto de vista que nosotros hemos adoptado aquí. En efecto, la mayor parte de las que hay disponibles y contrastadas son medidas del producto y no del proceso de resolución. En Zalewski (1980) puede encontrarse un minucioso examen de la literatura hasta la fecha de su trabajo que concluye con serias dudas sobre su validez para el propósito que a nosotros nos ocupa ya que los problemas que se usan en la mayor parte de las pruebas son meras preguntas de respuesta múltiple, las medidas no toman en cuenta el proceso y el tiempo asignado para la realización de las pruebas no suele permitir nada más que el recuerdo de alguna rutina. Los procedimientos diseñados para dar cuenta del proceso en los trabajos de Kilpatrick (1967), Kantowski (1974) o los recogidos en Goldin & McClintock, eds. (1979), por su parte, son adecuados para el análisis de protocolos, pero no para el tipo de prueba que aquí hemos planteado a los alumnos.

Por ello, apenas queda más recurso en la literatura que la medida que Schoenfeld (1982, 1985) diseñó para evaluar la frecuencia y la variedad de los enfoques de resolución de problemas generados por los alumnos. Con una ligera adaptación de esa medida a las peculiaridades de nuestra prueba, examinamos una parte de los datos obtenidos de ella. Ésta es la medida que calificamos de "medida de productividad". Esta medida de productividad se acompaña de una descripción de la complejidad de las resoluciones de los alumnos, que no forma parte de la medida de Schoenfeld y que completa lo que es una descripción cuantitativa con una referencia más cualitativa a los elementos del modelo de competencia.

Lo que hace la medida de Schoenfeld es contar el número de enfoques razonables que cada alumno genera para cada problema y evaluar para cada uno de los enfoques el grado en que se prosigue por él en una escala indicada convencionalmente por "algo", "poco", "casi", y "resuelto"[2]. Para que esto pueda hacerse es necesario analizar los problemas, tener una lista de enfoques razonables que puedan presentarse y establecer el criterio con el que se va a situar en la escala lo hecho por los alumnos, para cada uno de los enfoques. Aunque realizamos tal análisis y tal lista previamente al examen de las respuestas de los alumnos, eramos conscientes de la imposibilidad de prever la variedad de enfoques que pudiéramos encontrar efectivamente[3]. Por ello, realizamos un primer análisis y una lista

---

[2] Hay una diferencia entre la forma en que nosotros planteamos la tarea a nuestros alumnos y la original de Schoenfeld. Él pedía a los alumnos que mencionaran todos los enfoques posibles para abordar el problema. Nosotros, que resolvieran el problema de otra manera, a ser posible. Esta diferencia entre pedir la mención o el uso efectivo tiene su reflejo en que Schoenfeld ha de prever que haya enfoques mencionados, pero que no se usen. Por ello, contó en su estudio los enfoques mencionados y los que se usan, y sólo de estos últimos valoró el grado en que se prosiguieron con la escala señalada.

[3] El análisis de los problemas que establece los enfoques razonables y el análisis que establece el espacio de problemas están relacionados ya que los enfoques pueden describirse en términos de la generación de

provisional de enfoques razonables; hicimos un primer examen de las respuestas de los alumnos, de la que se derivó nuevos elementos para el análisis y más enfoques razonables; y, finalmente, examinamos y valoramos las respuestas de los alumnos. A continuación exponemos los análisis de los problemas de las pruebas.

6.3.2. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS.

6.3.2.1. *Los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas.*

Los problemas 1 de la prueba inicial y de la prueba final son muy similares. De hecho, el problema 1 de la prueba inicial —que vamos a llamar "gasolina"— lo elaboramos a partir del otro —que vamos a llamar "heno" y que es un problema cuya resolución ya habíamos estudiado previamente—, cambiando el contexto y los datos con el fin de que fuera más fácil. El diccionario siguiente permite pasar de uno a otro mostrando las equivalencias entre las cantidades que aparecen explícitamente en los enunciados o que están implícitas:

Diccionario gasolina/heno

G_m	ahorro por km	heno ahorrado diario
A_t	ahorro total	ahorro total
D_P	distancia prevista	días previstos
D_r	distancia recorrida	días reales
D_M	distancia de más	días de más
G_P	gasto previsto por km	heno previsto diario
G_r	gasto real por km	heno consumido diario
G_{DP}	gasto en la distancia prevista	heno consumido en los días previstos
G_{DM}	gasto en la distancia de más	heno consumido en los días de más
P	presupuesto	heno almacenado

En el caso del problema de la gasolina, los datos son G_m, D_M, y D_P; en el caso del problema del heno, G_m, D_r, y D_P. El cambio de D_M por D_r hace que el problema del heno no pueda representarse como un problema-cadena, como veremos en los diagramas correspondientes, y sabemos por Kalmykova (1975) que, si estos problemas se intentan resolver por análisis o síntesis, los problemas-cadena son los más fáciles. Por otro lado, el contexto de "gasolina" es más familiar que "heno", no sólo por el mundo motorizado en que viven los alumnos y lo ajena que puede resultarles la vida en una granja, sino también por lo habitual que es el cambio del precio de la gasolina.

---

problemas del espacio, y el espacio de problemas teórico se obtiene combinando lo que produce cada enfoque o cada tipo de enfoque.

El problema del heno está tomado de Kalmykova (1975)[4], quien, a su vez, lo tomó de un texto escolar soviético de 1940 en el que aparece su análisis como ejemplo. Sabemos, gracias a Kalmykova, que los alumnos de 4º grado de la escuela soviética (10-11 años) fueron incapaces de resolverlo pese a tener el análisis previamente hecho, aunque no presente en el momento en que se les planteó el problema. Kalmykova (1975) trae a colación este ejemplo para concluir que el método de análisis no puede ser un método para la descomposición previa de problemas suficientemente complejos. Para nosotros, lo que parece concluyente de lo que ella narra es que los alumnos fueron incapaces de recordar el análisis hecho, porque alguna de las cantidades que aparecen como incógnitas auxiliares no son cantidades usuales —en el sentido de ser las cantidades de un campo conceptual conocido—, sino que son cantidades cuyo sentido hay que forjar en el contexto del problema, al igual que el sentido de las relaciones con las otras cantidades que son pertinentes para el análisis. En particular, una de las relaciones fundamentales para que el problema pueda resolverse con el método de análisis-síntesis es la identidad de dos cantidades, el "heno ahorrado" y el "heno gastado en días de más": sin forjar esa segunda cantidad y establecer esa relación, cualquier otro análisis de la incógnita conduce inexorablemente de nuevo a la incógnita del problema y, por tanto, no puede dar origen a una solución aritmética, sino que precisa que el análisis se exprese en el sistema de signos del álgebra y que se traduzca en la ecuación algebraica correspondiente. La complejidad de este problema, que Kalmykova deriva de la actuación de sus alumnos, se puede caracterizar desde nuestro punto de vista a partir del análisis de la estructura de su proceso de resolución que nosotros hemos realizado para la clase de problemas a la que pertenece.

En efecto, tanto el problema del heno, como la versión de gasolina, son problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (PAVOC), cuya estructura general desde el punto de vista del proceso de resolución hemos descrito en Puig y Cerdán (1989, 1990a y 1990b). También hemos discutido en esa serie de trabajos desde qué punto de vista puede juzgarse que el proceso de resolución de un problema sea más o menos aritmético o algebraico, el papel del análisis-síntesis y el método cartesiano en ello y su dependencia de la posibilidad de dotar de sentido en el contexto a las incógnitas auxiliares y la manera de hacerlo.

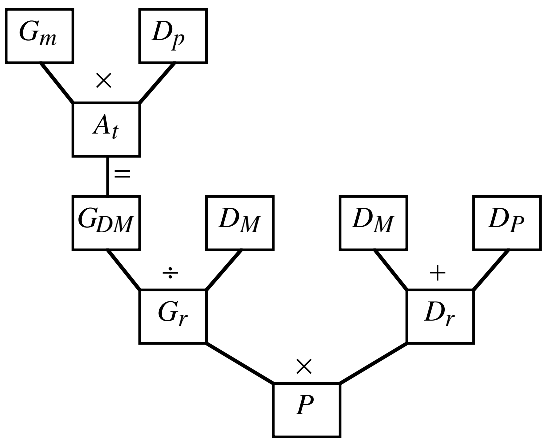
Por otro lado, ambos son problemas de encontrar y cabe colocarlos en la clasificación jerárquica como problemas de aplicación para los sujetos a los que les planteamos que los resolvieran, como sucede en general con todos los PAVOC. El hecho de que sean problemas de encontrar lo comparten con otros problemas de las pruebas, pero son los únicos que en la jerarquía se pueden situar en el nivel

---

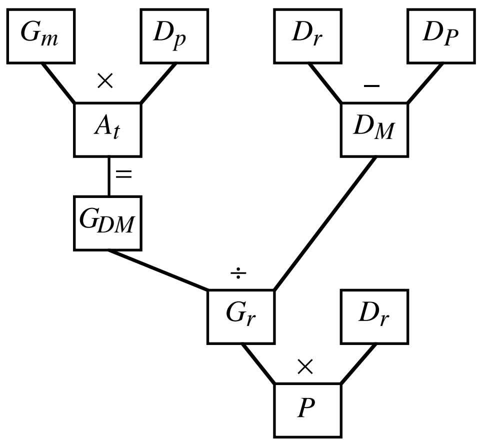
[4] Con algunas modificaciones. En el problema original, los valores de los datos son distintos —198 días previstos, 217 días reales y 171 kg de ahorro diario—, lo que tiene como consecuencia que el resultado sea 386649 kg. Un número como éste no es habitual que aparezca en la práctica de nuestro sistema escolar (y menos en el nivel del que habla Kalmykova), pero en la escuela soviética era una consecuencia más del pretendido realismo de los enunciados de los problemas verbales, que en el original se muestra también en que no habla de unos granjeros, sino de una granja colectiva y de planificación.

de la aplicación: los demás es razonable pensar que sean problemas de búsqueda para todos los sujetos a los que se los planteamos. Sin embargo, aunque puedan considerarse como problemas de aplicación ya que se puede suponer que los sujetos disponen de los métodos o esquemas adecuados para resolverlos, la aplicación concreta de tales métodos o esquemas a estos problemas no es en absoluto trivial, por lo que cabe esperar que las resoluciones de los sujetos no se limiten a la selección del método o esquema adecuado y su aplicación automática. Examinemos con cierto detalle cuál es la complejidad de los procesos de resolución de ambos problemas, empezando por los que pueden describirse con la herramienta del método de análisis-síntesis, en los casos en que los análisis culminan reduciendo las incógnitas a datos y por tanto es posible la síntesis aritmética. Usaremos para la descripción, en vez de los diagramas de análisis que introdujimos en Puig y Cerdán (1989), los diagramas inversos —que podemos llamar consecuentemente “diagramas de síntesis”— ya que estos diagramas permiten modelar directamente las soluciones de los alumnos tal y como aparecen presentadas en sus contestaciones[5].

Hay tres variantes razonables de tales procesos de resolución, cuyos diagramas presentamos a continuación —cada uno en las dos versiones correspondientes al problema de la gasolina y al problema del heno— y que aparecieron de hecho en las soluciones de los alumnos[6].



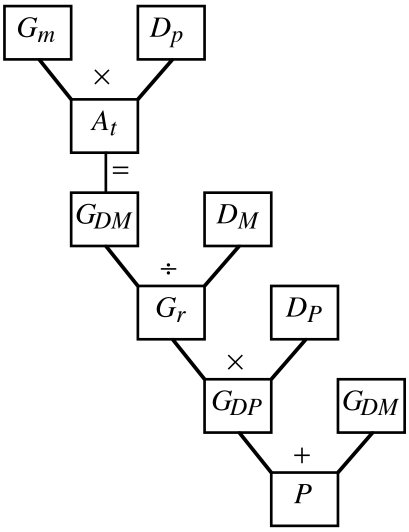
S_1 Gasolina



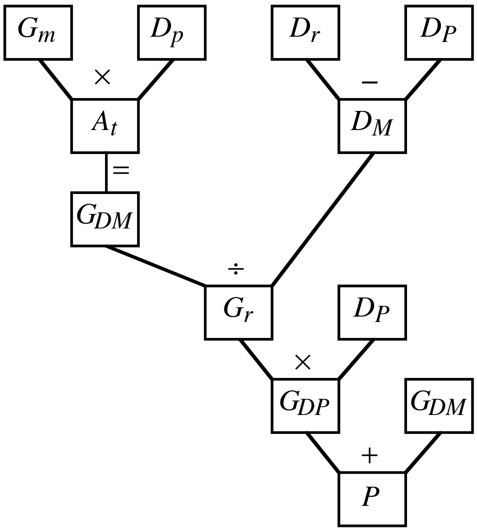
S_1 Heno

[5] A diferencia de los alumnos soviéticos de los que habla Kalmykova, éstos no han sido instruidos en el método de análisis, por lo que en su actuación no suelen hacer análisis metódico; en todo caso, la presentación de la solución, que es lo que normalmente puede observarse en las pruebas escritas, sigue el orden de la síntesis. Sin embargo, ver en 6.3.3.4 cómo hay alumnos que, después de la instrucción, describen el análisis en los comentarios retrospectivos.

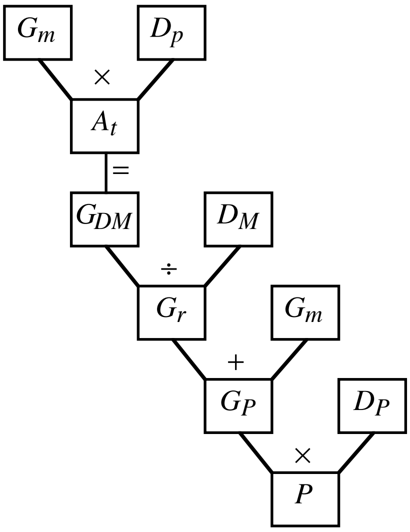
[6] Como veremos en 6.3.3, S_1 apareció en las soluciones a ambos problemas, S_2 apareció en el problema del heno y S_3 apareció en el problema de la gasolina.



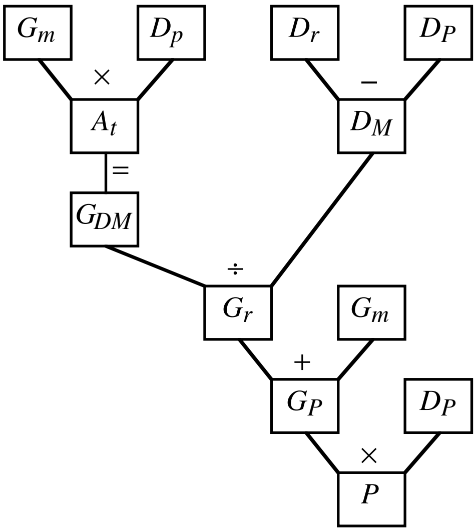
S$_2$ Gasolina



S$_2$ Heno



S$_3$ Gasolina



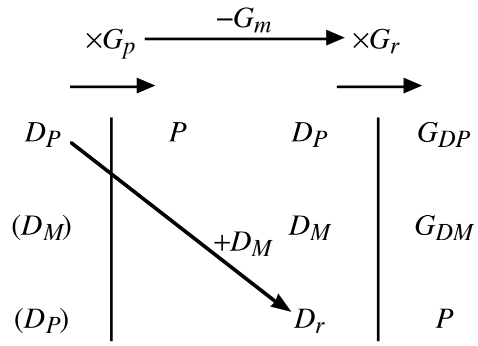
S$_3$ Heno

Los diagramas muestran la similitud entre los dos problemas y cómo la diferencia que introduce entre ellos el cambio de un dato es precisamente que el problema del heno en ningún caso resulta ser un problema-cadena y, sin embargo, el proceso de resolución del problema de la gasolina tiene esa estructura en dos de los casos (S$_2$ y S$_3$). También muestran que la relación A_t=G_{DM} —que aparece en todos ellos— es el núcleo del proceso.

Las tres variantes comparten la parte superior del diagrama hasta la determinación de G_r. A partir de ahí, se utiliza la estructura conceptual “gasto unitario × número de unidades = gasto total” y la relación “previsto + de más = real” y las variantes se derivan de si se decide usar esa estructura conceptual entre unas cantidades u otras —o, dicho de otra manera, si se usa la relación “previsto + de más = real” entre los gastos unitarios, los números de unidades o los gastos totales.

Como en estos problemas está subyacente la estructura conceptual "gasto unitario × número de unidades = gasto total", también pueden abordarse con enfoques en cuyo centro se sitúa alguna regla de tres que funciona como esquema para la comprensión del problema y establece el plan de su solución. Usando la terminología de Vergnaud (1983), la situación descrita por el enunciado del problema tiene la estructura semántica del tipo "isomorfismo de medidas": dos espacios de medida —medidos en kilómetros o días y pesetas o kilos— entre los que hay una regla de correspondencia —el gasto unitario— que es la razón de una proporción simple y directa. La historia que narra el enunciado del problema se traduce entonces en un cambio en la razón que regula la correspondencia entre los espacios de medida.

	M_1	M_2	M_1	M_2
	"distancia"	gasto	"distancia"	gasto
gasolina:	km	ptas	km	ptas
heno:	días	kg	días	kg



Las reglas de tres que pueden presentarse son las que se derivan de las proporciones cuya razón es G_r, es decir, la de la regla de correspondencia entre los espacios de medida después de la transformación producida por G_m.

$$\frac{P}{D_r} = \frac{G_{DP}}{D_P} = \frac{G_{DM}}{D_M} = G_r$$

Los enfoques posibles que usan reglas de tres son, por tanto, tres, que designaremos por R_1, R_2 y R_3 y que presentamos mediante las proporciones[7] correspondientes:

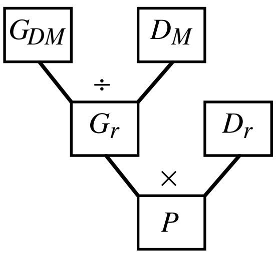
[7] Los alumnos no escriben las reglas de tres así, sino mediante la presentación esquemática clásica —que es lo que para ellos es una regla de tres—, de la que derivan después la proporción correspondiente. El alumno 21, sin embargo, al resolver el problema del heno, escribe directamente la proporción del tipo $R_3: \frac{x}{73} = \frac{x-6441}{57}$, sin escribir la regla de tres. Pero previamente ha usado la herramienta heurística "variación parcial", ha escrito la regla de tres en el problema transformado y ha derivado de ella la proporción. Al problema original está trayéndose pues el procedimiento de solución obtenido en el problema transformado.

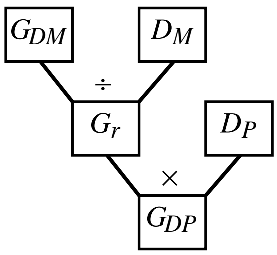
$$R_1: \frac{P}{D_r} = \frac{G_{DM}}{D_M} \qquad R_2: \frac{G_{DP}}{D_P} = \frac{G_{DM}}{D_M} \qquad R_3: \frac{P}{D_r} = \frac{G_{DP}}{D_P}$$

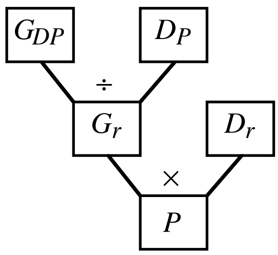
Por supuesto que la solución ha de completarse recurriendo a otras relaciones entre las cantidades involucradas en el problema como las analizadas en los enfoques que se pueden modelar con el análisis-síntesis, pero, cuando se usa algún esquema de regla de tres, éste se convierte en el núcleo que articula el conjunto de la solución.

Además, el esquema de la regla de tres no sólo funciona como esquema de comprensión sino también como esquema de acción, ya que se dispone de unas reglas para operar con los términos que aparecen en el esquema. Esas reglas, tomadas como reglas formales, pueden aplicarse tanto a números como a expresiones algebraicas. Si se aplican a números, conducen a la obtención del valor de la única cantidad desconocida —la cuarta proporcional—; si se aplican a expresiones algebraicas, dan como resultado una ecuación y la cantidad desconocida —si es sólo una— habrá de obtenerse después en el sistema de signos del álgebra. En el caso de los problemas que nos ocupan, las variantes R_1 y R_2 es posible plantearlas de modo que las reglas operatorias se apliquen a números, pero esto no es posible con la variante R_3, que conduce inexorablemente a una ecuación con más de una ocurrencia de la *x*.

En efecto, si el esquema de la regla de tres se analiza con el método de análisis-síntesis, se obtiene un diagrama en el que, además de los cuatro términos de la proporción, aparece también la razón[8], así que R_1, R_2 y R_3 se corresponden con los diagramas que se muestran a continuación:







$$R_1: \frac{P}{D_r} = \frac{G_{DM}}{D_M} \qquad R_2: \frac{G_{DP}}{D_P} = \frac{G_{DM}}{D_M} \qquad R_3: \frac{P}{D_r} = \frac{G_{DP}}{D_P}$$

El diagrama correspondiente a R_1 es una parte del diagrama de síntesis S_1 y el correspondiente a R_2, del de S_2, pero no es posible realizar un análisis de la incógnita que culmine en datos y que contenga el diagrama correspondiente a R_3. Así que, pese a la semejanza de las tres reglas de tres

[8] Ver en Puig y Cerdán (1989) cómo está relacionado el diagrama de análisis-síntesis correspondiente a una regla de tres con el procedimiento de "reducción a la unidad".

consideradas, unas conducen a soluciones puramente aritméticas —R_1 y R_2—, mientras que la otra, R_3, precisa para su uso un cierto dominio de la operatividad algebraica[9].

Además de estos dos tipos de enfoques, también son razonables los enfoques que pueden modelarse con el método cartesiano, esto es, aquellos en que se analiza la incógnita del problema, u otra cantidad de las que aparecen en él, con el fin de expresarla de dos maneras diferentes en el sistema de signos del álgebra y traducir así el enunciado verbal del problema a una ecuación o un sistema de ecuaciones. Análisis de ese estilo de los problemas del heno y la gasolina los hay muy variados, aquí sólo señalaremos los que sirven para modelar las soluciones de los alumnos y no todos los que habíamos previsto[10].

En todos los casos observados, la cantidad que aparece analizada[11] es la incógnita del problema, P, y el análisis responde al esquema que proporciona la estructura conceptual "gasto unitario × número de unidades = gasto total". Como el gasto unitario sufre una variación en el curso de la historia que narra el enunciado, esto puede proporcionar dos análisis $P=D_P \times G_P$ y $P=D_r \times G_r$. Las cantidades desconocidas en $P=D_r \times G_r$ se analizan a su vez hasta que sólo se tiene una incógnita además de la incógnita del problema y las expresiones algebraicas obtenidas se escriben en una única ecuación —que corresponde a $D_P \times G_P=D_r \times G_r$— o bien conservando las dos ecuaciones correspondientes a $P=D_P \times G_P$ y $P=D_r \times G_r$. Los diagramas de análisis siguientes muestran que, visto desde este proceso de resolución, el problema del heno tiene una estructura más simple que el de la gasolina, al ser D_r un dato y no D_M.

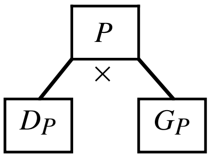
---

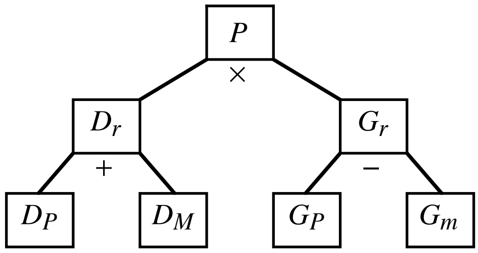
9 El alumno 2 aborda el problema de la gasolina con R_3 —es el único que lo hace—, pero tan sólo escribe la regla de tres, sin convertirla ni en proporción ni en ecuación. Lo que hace en vez de ello es escribir la regla de tres R_1 y resolver con ella el problema.

10 En el capítulo anterior, ha aparecido otra variante de este enfoque en el episodio de ejecución del protocolo de A y J; además, los procedimientos de comprobación que se elaboran en el episodio de verificación del protocolo de M y J también pueden considerarse otras variantes de este enfoque, si se piensa en su uso para resolver el problema.

11 La descripción de este enfoque la hacemos desde el método cartesiano; por ello, hablamos de *analizar* cantidades. Estos análisis producen la escritura de ecuaciones. Las respuestas escritas de los alumnos las modelamos según este enfoque, cuando ellos han producido las mismas ecuaciones que produce el modelo teórico. Ahora bien, esas ecuaciones pueden haber sido escritas por los alumnos haciendo un análisis previo de las cantidades que se acaban igualando o por otros procedimientos menos metódicos o distintos; pero la manera en que los alumnos elaboran las ecuaciones no suele poder observarse en las pruebas escritas. En las resoluciones examinadas en el capítulo anterior, por el contrario, estos hechos sí que son observables; así, en la actuación de A y J con el problema del heno, pudimos examinar en detalle cómo elaboraron ellos las ecuaciones.

Gasolina

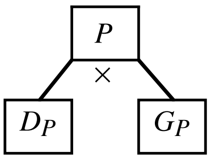


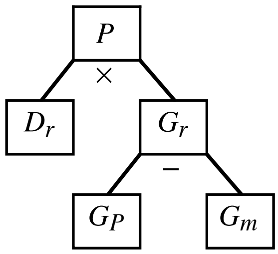


$y = 5000\ x$

$y = (5000 + 250)\ (x - 0'4)$

Heno:



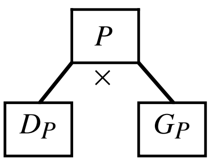


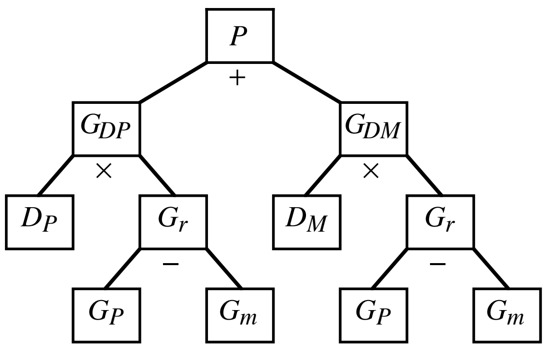
$y = 57\ x$

$y = 73\ (x - 113)$

En el caso del problema de la gasolina, también apareció un enfoque de este tipo en el que el segundo análisis de la incógnita del problema no se realiza con la estructura conceptual "gasto unitario × número de unidades = gasto total", sino con la relación "previsto + de más = real". En ese caso, siempre se escribieron las dos ecuaciones, correspondientes a los dos análisis.

Gasolina:





$y = 5000\ x$

$y = 5000\ (x - 0'4) + 250\ (x - 0'4)$

En ninguno de los enfoques de este tipo que aparecieron se usaron en los análisis las relaciones $G_m \times D_P = A_t$ y $A_t = G_{DM}$, que en los enfoques anteriores representaban un papel importante.

La lista siguiente resume las tres variantes, y muestra las ecuaciones correspondientes. Las variantes se designan con MC_1, MC_2 y MC_2', donde MC recuerda el modelo cartesiano, y el subíndice, el número de ecuaciones que se escriben.

MC_1 Gasolina:

$$5000\,x = (5000 + 250)\,(x - 0'4)$$

MC_1 Heno:

$$57\,x = 73\,(x - 113)$$

MC_2 Gasolina:

$$\begin{cases} y = 5000x \\ y = (5000 + 250)(x - 0'4) \end{cases}$$

MC_2 Heno:

$$\begin{cases} y = 57x \\ y = 73(x - 113) \end{cases}$$

MC_2' Gasolina:

$$\begin{cases} y = 5000x \\ y = 5000(x - 0'4) + 250(x - 0'4) \end{cases}$$

Las ecuaciones que hemos escrito son los arquetipos de ecuaciones correspondientes a los análisis, las que los alumnos escribieron presentan un buen número de variantes, que, sin embargo, no consideramos como enfoques distintos. Vale la pena mencionar, entre ellas, que los alumnos no suelen escribir 5000 + 250, sino 5250 en la ecuación correspondiente, y que alguna de las presentaciones del enfoque MC_1 podría quizá clasificarse como MC_2[12], ya que aparecen designadas dos incógnitas de manera explícita.

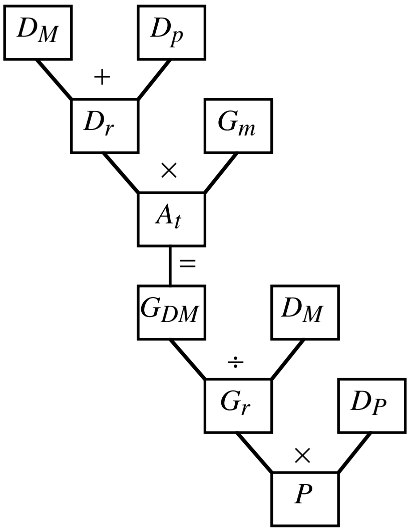
En las soluciones de los alumnos, hay también presentes enfoques que son razonables, pero que contienen algún error —ya sea de comprensión o de otro estilo— que hace que sea imposible resolver el problema. Aquí señalamos los que son dignos de mención porque forman parte de la complejidad psicológica de los problemas, clasificándolos también como enfoques modelables por el análisis-síntesis, el método cartesiano o basados en el esquema de la regla de tres.

Así, algunos alumnos interpretaron que el ahorro producido por la bajada del precio de la gasolina no sólo se realizaba durante los kilómetros previstos, sino también durante los kilómetros de más que podían recorrer gracias a tal ahorro, y calcularon consecuentemente el ahorro total, A_t, multiplicando G_m por D_r, en vez de por D_P. Este enfoque[13], razonable aunque errado, lo designaremos por S_R. Mostramos a continuación el diagrama de síntesis, correspondiente a una de las soluciones que contienen esta interpretación errada, que tiene de singular que, al calcular P multiplicando G_r por D_P, en vez de por D_r, la simetría de este error con el anterior produce el resultado correcto.

---

[12] Así, el alumno 32 escribe la ecuación, $T = C \cdot 57 = (C - 113) \cdot 73$, después de haber escrito "Preguntan: heno almacenado → T".

[13] En las pruebas que estamos analizando sólo se presentó en el problema de la gasolina. Esta misma interpretación errada para el problema del heno se nos presentó en otras ocasiones, tanto cuando el enfoque era de este tipo como de otros. En el capítulo anterior, hemos visto un argumento para rechazarla en el protocolo de R y S, las dudas sobre ello de M y J sin grandes consecuencias, y las discusiones y dificultades serias que produce en el protocolo de A y J.



S_R Gasolina

Entre los alumnos que usaron el esquema de la regla de tres, hubo quien escribió,

días de más ———————— heno ahorrado

días previstos ——————— x

siendo x el "heno almacenado para los 57 días", tomando como proporción lo que no lo es:

$$G_r = \frac{G_{DM}}{D_M} \neq \frac{P}{D_P} = G_P\,.$$

Esto es un ejemplo del error derivado de no distinguir las razones "prevista" y "real", que el análisis que hemos realizado antes muestra que caracteriza la estructura de este problema, o, simplemente, de no tener presente la razón de proporcionalidad a la hora de usar el esquema de la regla de tres[14]. En general, cualquier enfoque usando el esquema de la regla de tres en el que se quisiera poner en él —lo que no deja de ser razonable—

$$P \text{ ———————— } D_P$$

estaba abocado a completar la regla de tres de forma errónea[15], ya que éstas son las únicas cantidades presentes cuya razón sea G_P. Los enfoques de este estilo los designaremos con R_R.

Dentro de los enfoques correspondientes al modelo cartesiano, es difícil determinar, en lo que escriben en estas pruebas, cuándo las producciones erróneas de los alumnos se deben a comprensiones

---

[14] Ver el caso de M y J en el capítulo anterior.

[15] Así, por ejemplo, el alumno 16 en el problema de la gasolina fuerza el significado de las cantidades escribiendo $P{\cdot}G_m$ ——————— D_r, para completar la regla de tres, probablemente empujado porque en un primer momento ve el valor de G_m, 0'4, como la expresión decimal de un porcentaje; luego, sin embargo, resuelve bien el problema con el enfoque MC_2.

erradas de las cantidades involucradas o las relaciones entre ellas, cuándo a deficiencias en el uso del lenguaje algebraico y cuándo la causa pueda estar en que ambas cosas están imbricadas.

Así, el alumno 4 escribe el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 57(y-113)=x \\ 73(113)=x-y \end{cases}$$

pese a que ha identificado con claridad las cantidades que toma como incógnitas —ha escrito "llamando y a la cantidad que pensaban tener por día a la hora de suministrarlo, x sería la cantidad total"— sin que parezca percatarse de que $x-y$ no puede ser dotada de sentido, y lo resuelve sin encontrar motivos para revisar lo que ha hecho[16]. Otras ecuaciones erróneas son abandonadas sólo cuando al resolverlas se obtienen resultados que los alumnos juzgan absurdos (p. e., cantidades negativas o 0'4 ptas en el problema de la gasolina al resolver una ecuación cuyo significado, obviamente no examinado, es $D_r \times G_r=0$).

Hay, sin embargo, algunos casos en que se muestra con nitidez una mala instalación del lenguaje algebraico, ya que se escriben expresiones como

$$(x-113)\times 57=$$

que vulneran las reglas de la sintaxis del álgebra[17].

Estos enfoques los designaremos con MC_R.

Finalmente, aunque estos problemas sean problemas de aplicación y pertenezcan a una familia de problemas para los que existen métodos aplicables, también cabe el uso de herramientas heurísticas para su resolución. Señalaremos solamente que es razonable usar la herramienta heurística "variación parcial" cambiando los valores de los datos del problema de forma que las relaciones entre las cantidades involucradas aparezcan con más claridad o que la atención que es preciso mostrar a esas relaciones no se vea perturbada por la complejidad de los cálculos o lo inhabitual de los números concretos con los que haya que calcular. Un cambio que hace aparecer la relación $A_t=G_{DM}$ consiste en

---

[16] El comportamiento de este alumno es digno de mención además porque, en realidad, no comienza escribiendo este sistema de ecuaciones, sino que primero hace uso de la herramienta heurística "variación parcial" cambiando los datos por números más pequeños. Con ellos es con los que analiza el problema —el trasformado— y con los que escribe las ecuaciones e, incluso, resuelve el sistema. Sólo después de ello vuelve al problema original, escribe las ecuaciones calcándolas de las del problema transformado y resuelve el sistema.

[17] Además, la carencia de miembro segundo de la ecuación no le impide al alumno 19 despejar la x, escribiendo $57x = 6641$, $x=113$. El alumno 12 también despeja la x de forma similar y obtiene el mismo resultado, aunque lo que él ha escrito es $H_T=(x-113)\times 57$. Este alumno no acepta el resultado que ha obtenido y "repara" la ecuación escribiéndola $H_T=(x\cdot 57-113)\times 16$, pero mantiene la forma de despejar, que ahora le da $x=1808/912$.

darle a D_P el valor 1 y a D_r el valor 2, pero no entraremos en el examen de las relaciones entre el problema original y el transformado en este caso, ya que ningún alumno optó por esta transformación[18]. Lo que apareció en las soluciones de los alumnos —y que designaremos como enfoque VP— fue la substitución de los valores de los datos por números más pequeños, como ya hemos señalado en sendas notas a pie de página. Cuando se hace esto con un PAVOC, los problemas original y transformado tienen la misma solución[19], pero distinto resultado, de modo que una vez resuelto el problema transformado hay que llevarse el procedimiento de solución al problema original para obtener su resultado con sólo usar los datos originales en vez de los del problema transformado.

6.3.2.2. *Los problemas aritméticos de encontrar no verbales*.

El problema número 2 de la prueba inicial —que designaremos con I_2— y el problema número 3 de la prueba final —que designaremos con F_3— tienen en común que ambos son problemas aritméticos que no son problemas de enunciado verbal y que son problemas de encontrar. También cabe situarlos ambos en la jerarquía en el mismo nivel, como problemas de búsqueda, ya que no se pueden reconocer como pertenecientes a una familia de problemas para la que haya procedimientos que se sepa que son aplicables a ellos y que los resuelven. Además, aunque estén enunciados como problemas de encontrar, a diferencia de lo que ocurre con los PAVOC que acabamos de analizar, que también son problemas de encontrar, en éstos hay que resolver el problema de probar asociado, de modo que la solución no es sólo el procedimiento mediante el cual se obtiene el resultado, sino también el *argumento* que justifica que ese resultado efectivamente es el caso[20].

Comparten también un cierto parecido al tratar de sumas de trozos consecutivos de la sucesión de los números naturales, parecido que no sólo es superficial ya que tiene como correlato en sus procesos de resolución la posibilidad de usar la fórmula de la suma de enteros consecutivos con provecho en ambos casos.

---

[18] En Puig y Cerdán (1989) está ilustrado este uso de la herramienta heurística "variación parcial" en el problema del heno. En la entrevista con M y J, posterior a su resolución del problema del heno que describimos en el capítulo 5, a la pregunta de por qué números hubiera substituido los datos del problema para que fuera fácil, J contestó precisamente con esos cambios, "[…] vamos a ver, por ejemplo, si tienen que consumirlo en un día y luego resulta que les da para dos". Ahora bien, cuando le preguntamos si "se hubieran visto las relaciones que había detrás mejor" contestó con una observación aguda "Parece…, no, quizá *por ser tan fácil* a lo mejor no" (cursiva nuestra), que contradice lo que acabamos de afirmar.

[19] Salvo si en la solución se utilizan propiedades particulares de los números que se han puesto como datos del problema transformado.

[20] Las soluciones de los PAVOC que hemos examinado llevan el argumento incorporado en las reglas de los métodos que las modelan. Tanto el método de análisis-síntesis como el cartesiano *encuentran y prueban a la vez* —son "heurísticos y demostrativos", por usar los calificativos que Beth aplicó al método de análisis-síntesis (cf. Beth y Piaget, 1961).

Y, finalmente, también comparten las herramientas heurísticas que es razonable usar para transformarlos en problemas más fáciles. En concreto, la "consideración de un caso", que para estos problemas adopta la forma de una serie de casos ordenados por el parámetro entero n, y que tiene como finalidad la búsqueda de una pauta en los resultados que pueda llevarse al problema original como una conjetura. Además, el "examen de posibilidades", que aquí desglosa los problemas separando los números en clases residuales, cuya finalidad es la habitual de esta herramienta heurística, y la "división del problema en partes", que, en el caso del problema F_3, puede venir simplemente dictada por la fórmula de la suma de enteros consecutivos[21]. También representan un papel importante en ambos problemas las destrezas "usar una notación adecuada", "ser sistemático" y "hacer una tabla".

El problema I_2 puede abordarse examinando las condiciones para que un subconjunto S_n cualquiera pueda dividirse de la forma que pide el enunciado. Esto conduce a establecer que la suma de los elementos de S_n ha de ser par, con lo que hace falta determinar cuándo esa suma es par y cómo puede dividirse entonces S_n de modo que la suma de los elementos de cada parte sea la misma, es decir, si esa condición, además de necesaria, es suficiente. El problema de cuándo la suma es par puede abordarse invocando la fórmula de esa suma, $\frac{(n+1)n}{2}$, y derivando de ella que, para que la suma sea par, $(n+1)n$ ha de ser múltiplo de 4, para lo que es preciso que lo sea uno de los dos factores, o, lo que es lo mismo, hace falta que n sea $\dot{4}$ o $\dot{4}-1$. Una manera de probar que esa condición es suficiente utiliza la estructura de la prueba de la fórmula de la suma de los n primeros números que la leyenda atribuye a Gauss niño. Para ello, se examinan una tras otra las dos posibilidades. Cuando $n = \dot{4}$, se puede emparejar los n números, como en dicha prueba, el primero con el último, el segundo con el penúltimo, y así sucesivamente: como $n = \dot{4}$, hay un número par de tales parejas de números y, como todas ellas suman lo mismo, basta con poner la mitad de las parejas en una parte y la otra mitad en la otra para que las dos partes sumen lo mismo. Cuando $n = \dot{4}-1$, basta con formar el conjunto $S_n \cup \{0\}$, cuyo número de elementos será múltiplo de 4, para poder repetir el argumento anterior y obtener las dos partes que pide el enunciado.

$S_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$S_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
1 2 3 4 5 6 7 8	0 1 2 3 4 5 6 7
1+2+7+8=18	1+6+7=14
3+4+5+6=18	2+3+4+5=14

En las soluciones de los alumnos se encuentran maneras de abordar el problema que están emparentadas con la solución que acabamos de describir, y las designaremos con S —por el papel que

[21] Schoenfeld (1985) incluye este problema en la lista de problemas con la que ejemplifica las formas distintas que adopta lo que él llama la "estrategia" heurística "establecer submetas".

representa en ellas la fórmula de la suma—. En ningún caso, sin embargo, tuvieron en cuenta los alumnos que el que la suma fuera par era sólo una condición necesaria y que había que probar también que era suficiente, ni, por tanto, dividieron el problema en partes o examinaron posibilidades.

Otro enfoque razonable se basa en el uso de la herramienta heurística “consideración de un caso”. Lo que se observa es para qué valores de n se puede hacer la descomposición que pide el enunciado. Dispuestos los valores sucesivos de n en una tabla acompañados de “sí” o “no” según sea el caso, salta a la vista la pauta “dos no, dos sí”, que se traduce en términos de clases residuales de forma natural y se obtiene como conjetura que hace falta que n sea $\dot{4}$ o $\dot{4}-1$. Queda probar que esa conjetura es el caso, lo que puede hacerse como ya hemos indicado. Este enfoque, que designaremos con C_S, está presente en las soluciones de los alumnos. Ahora bien, ningún alumno tuvo en cuenta que lo observado en los casos tuviera que considerarse como una conjetura y, por tanto, ninguno se planteó siquiera que hubiera que hacer prueba alguna[22]. Tras encontrar la pauta, el problema que muchos alumnos se plantearon, en vez del problema de probar correspondiente, fue cómo expresar la pauta en algo que para ellos fuera “forma matemática”[23].

En el caso del problema F_3, hay también enfoques que, por su semejanza con el primero que hemos analizado para el problema I_2, podemos designar también con S. En efecto, es fácil sumar un grupo cualquiera, ya que es una porción de la sucesión de los números naturales, mediante la fórmula usual, $\frac{a_1+a_n}{2}n$. El examen de la fórmula conduce a la herramienta heurística “dividir el problema en partes” y la propia fórmula estructura la división y la relación entre las partes. El número de términos del k-ésimo grupo es k, así que quedan los problemas correspondientes a encontrar el primer elemento, a_1, y el último, a_n. Para cada uno de estos problemas cabe un enfoque que también podemos llamar del tipo S, o el recurso a la herramienta heurística “consideración de un caso”. Un enfoque del tipo S puede transcurrir como sigue. Como el primer y último elementos están relacionados de forma simple, $a_n = a_1 + k - 1$, ya que en el grupo hay k elementos, k números consecutivos, basta encontrar uno de los dos. Ahora bien, cualquiera de los dos puede encontrarse con un argumento similar: veámoslo en el caso de a_n. Como en cada grupo hay $1, 2, \ldots, k$ elementos, el último del grupo S_k es la suma de los k primeros números, ya que cada número cuenta los elementos que hay en un grupo y, por tanto, su suma cuenta cuántos hay en total, pero, como los elementos son los de la secuencia contadora, ese número es también el último elemento. Así que

$$a_n = 1+2+\ldots+k = \frac{1+k}{2}k = \frac{k^2+k}{2}$$

De ahí,

[22] Como veremos en detalle más adelante, decir que los alumnos estaban usando la herramienta heurística “consideración de un caso” es, en realidad, un abuso de lenguaje.

[23] Veremos más adelante la variedad de intentos de este estilo.

$$a_1 = a_n - k + 1 = \frac{1+k}{2}k - k + 1 = \frac{k^2 + k - 2k + 2}{2} = \frac{k^2 - k + 2}{2}$$

Y, por tanto, la suma del *k*-ésimo grupo valdrá

$$\left(\frac{k^2 - k + 2}{2} + \frac{k^2 + k}{2}\right)\frac{k}{2} = \frac{k^3 + k}{2}$$

Por otro lado, el problema F_3 puede abordarse de entrada con el mismo estilo de uso de la herramienta heurística "consideración de un caso" que hemos designado con C_S. Ahora bien, mientras que la pauta que hay que obtener en el problema I_2 salta a la vista, la de éste sólo aparece si se es capaz de analizar los números que se obtienen en el examen de cada caso.

En efecto, como la fórmula en cuestión es de tercer grado, es muy difícil que la mera observación de los valores correspondientes a los casos conduzca a encontrar la conjetura, salvo si se utiliza alguna técnica para ello. Por supuesto que la técnica más adecuada es la que es específica para esta situación, es decir, las diferencias finitas. No fue esto, sin embargo, lo que hicieron los alumnos, sino que ellos usaron otras técnicas de carácter más universal que se habían examinado en clase. En particular, tras probar las primeras diferencias y ver que no eran iguales, algunos alumnos dividieron por *n* cada valor y buscaron la pauta en los cocientes y los restos de estas divisiones. Esa tabla de cocientes y restos se separa para los pares y para los impares, y en la de los pares puede encontrarse —como hicieron de hecho varios alumnos— una pauta que se expresa mediante la fórmula

$$k\frac{k}{2}k + \frac{k}{2}$$

Otra solución, que no previmos en el análisis previo del problema pero que apareció en las soluciones de los alumnos se basa en la observación de que el grupo {7, 8, 9, 10}, p. e., puede expresarse como {7, 7+1, 7+2, 7+3}, de modo que su suma equivale a 7·4+1+2+3, o, en general, la suma del grupo *k*-ésimo vendrá dada —usando las palabras del alumno 13— así:

"Conjetura: la suma es el primer número del grupo multiplicado por *k* más 1+2+3+…+(*k*–1)".

La vía abierta por esta consideración se completa con una división del problema en partes y la obtención del "primer número", llevándose a ese problema el procedimiento con que se ha obtenido la fórmula anterior, como 1+(1+2+…+(*k*–1)), y sólo resta combinar los resultados[24].

Los enfoques que estamos examinando pueden presentarse imbricados en el curso del proceso de resolución de estos problemas, sobre todo cuando se hace uso de herramientas heurísticas, ya que, aunque el problema original se aborde con un enfoque determinado, el problema transformado puede serlo con otro. Así, en lo que los alumnos hicieron en el problema F_3 se encuentran ejemplos de

[24] El alumno 13 describe el proceso en términos del espacio de problemas: "me surge el problema […] el problema se me transforma en averiguar cuál es el primer número del *k*-ésimo grupo" y "Ahora volvemos al problema anterior para poder enlazar las dos fórmulas."

consideración de casos que conducen a examen de posibilidades; examen de posibilidades que luego se desarrollan mediante consideración de casos; consideración de casos seguida de una nueva consideración de casos en un problema encontrado en el curso de la solución (por ejemplo, para elaborar una conjetura sobre el resto de la división de cada suma por n); enfoque directo, seguido de división del problema en partes y de consideración de casos para algunos de los subproblemas.

6.3.2.3. *Los problemas aritméticos de probar*.

El problema aritmético de probar de la prueba inicial, que designaremos con I_4, está tomado de Schoenfeld (1979), que describe un estudio en el que se usó en un test como ejemplo de problema que puede probarse por inducción completa. Para ello, basta considerar que la propiedad se cumple para el primer impar, lo que es obvio y ver que si $(2n+1)^2$ es un múltiplo de 8 más 1, lo mismo ocurre con el siguiente impar y la prueba transcurre por la vía de una manipulación algebraica que se propone descomponer $[2(n+1)+1]^2$ en $(2n+1)^2$ —que ya se sabe que es un múltiplo de 8 más 1— y un múltiplo de 8. Esta descomposición conduce en la revisión-extensión a plantear el problema más ambicioso de qué múltiplo de 8 más 1 es el n-ésimo impar, problema que ya está resuelto por el argumento inductivo que indica que el cuadrado del n-ésimo impar se obtiene del anterior sumando el n-ésimo múltiplo de 8, de modo que el cuadrado del n-ésimo impar es la suma de todos los múltiplos de 8 desde 1 hasta n, más 1, es decir, $8\frac{n^2+n}{2}+1$. Pero este problema más ambicioso puede abordarse directamente y no como consecuencia de la resolución del anterior por inducción completa, y entonces el enfoque que cabe esperar que se presente estaría organizado por la herramienta heurística "consideración de un caso", en su forma serie de casos ordenados por el parámetro n y con la intención de encontrar una pauta en los resultados que vuelva al problema original como conjetura. De hecho, este enfoque, que designaremos con C_S, se presentó en las respuestas de los alumnos, mientras que el único alumno que dijo que lo resolvía mediante el método de inducción hizo un puro desatino.

Otros enfoques directos posibles parten de la manipulación algebraica de $(2n+1)^2$ para obtener $4n^2+4n+1$, expresión en la que ya aparece el 1 y a cuyo resto le falta muy poco para ser múltiplo de 8: sólo que n^2+n sea par. La prueba de que es par puede hacerse de dos maneras al menos, o bien observando que n^2 y n son de la misma paridad o bien descomponiéndolo en n por $n+1$ y observando que, como son dos enteros consecutivos, uno de los dos ha de ser par. Designaremos estos enfoques con A.

También es posible atacar el problema de forma no tan directa, si no se recurre a la expresión usual para un impar cualquiera. El asunto transcurre entonces como sigue. Si $n^2 = 8p+1$, entonces $n^2-1 = 8p$, y $(n+1)(n-1) = 8p$. Como esas tres expresiones son equivalentes, lo que hay que probar es que si n es impar, $(n+1)(n-1)$ es múltiplo de 8. Ahora bien, si n es impar, $(n+1)$ y $(n-1)$ son dos pares consecutivos, así que uno es múltiplo de 2 y el otro múltiplo de 4 y su producto es múltiplo de 8.

Además, otros alumnos lo que hicieron fue dividir —enfoques que designaremos con D—, mediante el algoritmo usual de la división o expresando la división mediante una fracción y manipulándola con las técnicas usuales, $4n^2+4n+1$ por 8 —o $(2n+1)^2$ o $(x+1)^2$—, con mayor o menor conciencia de que no sólo había que obtener 1 como resto, sino también probar que el cociente obtenido es entero.

El problema aritmético de probar de la prueba final, ya desde su mismo enunciado, es más complejo.

La prueba puede trancurrir directamente por transformaciones algebraicas —enfoque que designaremos con A— con sólo partir del hecho de que, si $2n+1$ es un cuadrado perfecto, es el cuadrado de un impar, de modo que $2n+1 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1$. Pero entonces $2n+2 = 2(n+1) = 4p^2+4p+2$; así que $n+1 = 2p^2+2p+1 = p^2+(p+1)^2$.

La aplicación de la herramienta heurística "consideración de un caso" —enfoque que designaremos con C_S— conduce a observar *cuáles* son los cuadrados en que se descompone $2n+1$, lo que puede permitir volver con este resultado más fuerte al problema original como conjetura y probar el problema más ambicioso que no sólo enuncia que $n+1$ es la suma de dos cuadrados sino de qué cuadrados[25]. La complejidad de lo que hay que observar en cada caso hace que represente un papel importante la destreza "utilizar una notación adecuada". Así, por ejemplo, la notación utilizada por el alumno 32 para organizar sus observaciones en la tabla siguiente le facilitaron observar que $c = \frac{a-1}{2}$ y $d = \frac{a+1}{2}$ y enunciar el problema de probar correspondiente "probar que si $2n+1$ es el cuadrado de a, $n+1$ es la suma de los cuadrados de $\frac{a-1}{2}$ y $\frac{a+1}{2}$", que resolvió por manipulaciones algebraicas.

$2n+1$	a^2	$n+1$	c^2+d^2
1	1^2	1	0^2+1^2
9	3^2	5	1^2+2^2
25	5^2	13	2^2+3^2

En las respuestas de los alumnos, los enfoques que se encontraron están relacionados con los dos anteriores, aunque la consideración de casos también se usara en ocasiones sólo para comprender el problema —enfoque que designaremos con C_C— y luego se prosiguiera con algún procedimiento de prueba por manipulaciones algebraicas. Además, se presentó un enfoque no previsto, que designaremos con D_S: la descomposición sistemática en sumas de los números implicados. También hubo un enfoque errado, el del alumno 15, que vale la pena referir porque muestra cómo la resolución de un problema puede verse afectada por el hecho de ser una tarea encomendada por un profesor a un

[25] Obsérvese que este paso posible a un problema más ambicioso lo comparte este problema con el correspondiente de la prueba inicial, no sólo porque pueda hacerse, sino porque la manera de hacerlo es similar: el paso de *un* múltiplo de 8 o *dos* cuadrados a *qué* múltiplo o *qué* cuadrados.

alumno: “divido el problema en partes, 1º pruebo una dirección de la implicación y luego la contraria”. Poco le importa al alumno 15 que el enunciado del problema no pidiera probar una equivalencia, lo que le importa es que la descripción está hecha con las palabras de la teoría que él supone que espera el profesor.

6.3.2.4. *Los problemas geométricos.*

Los problemas del triángulo y del trapecio son claramente similares. También está claro que el del trapecio es más difícil que el del triángulo, no sólo porque la figura es menos familiar y lo son también las fórmulas que es razonable utilizar en la resolución, sino además por la dificultad técnica que se presenta por el hecho de que la fórmula que es la respuesta del problema del trapecio es cualitativamente más compleja que la del problema del triángulo.

El problema del triángulo está tomado de Schoenfeld (1985), pero hemos modificado el enunciado de modo que no se pide la construcción de la paralela con regla y compás sino que lo que se está pidiendo, aunque no se enuncie explícitamente, es que se encuentre una relación expresada mediante una fórmula entre una cantidad que fije esa paralela y otras cantidades que se puedan suponer conocidas. Una de las características diferenciales de este problema resulta ser, tanto como el que sea de geometría, precisamente el que la naturaleza de la incógnita es la que se acaba de describir: no un número, ni un procedimiento de construcción o una argumentación, sino una expresión algebraica que relaciona cantidades, sin que esté dado en el enunciado del problema qué cantidad es la incógnita del problema y cuáles son los datos[26].

Los enfoques razonables pueden clasificarse según presenten uno o varios de los rasgos siguientes a) se usan ecuaciones que provienen de igualdades de áreas, b) se usan relaciones de proporcionalidad y c) se considera algún caso particular con distintos fines.

Para examinar las variantes del enfoque por ecuaciones —que responde a la versión del método cartesiano adecuada a estos problemas— comenzaremos por considerar el triángulo dividido en un triángulo pequeño y un trapecio y usaremos la notación siguiente:

t_g: triángulo grande

t_p: triángulo pequeño

t: trapecio

y la S con los signos anteriores como subíndice para indicar las áreas correspondientes.

[26] La situación es distinta en el caso del problema del área lateral del tronco de cono examinado en el capítulo anterior, en el que el enunciado proporciona la información sobre qué cantidades se toman como datos y cuál como incógnita.

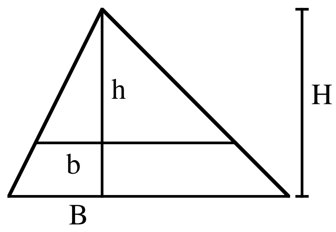


Figura 6.1

Las ecuaciones que traducen las condiciones del enunciado del problema son las que se obtienen a partir de las relaciones siguientes:

E_1: $S_t = S_{t_p}$

E_2: $S_{t_g} = S_t + S_{t_p}$

E_3: $S_{t_g} = 2\ S_t$

E_4: $S_{t_g} = 2\ S_{t_p}$

La ecuación E_2, $S_{t_g} = S_t + S_{t_p}$, se verifica obviamente para cualquier división del triángulo mediante una paralela a la base, por lo que, si esa ecuación se expresa usando precisamente las cantidades h, H, b y B, que aparecen en la figura, es equivalente a la condición de proporcionalidad de bases y alturas, que se deriva también del teorema de Thales

$$\mathrm{T}: \frac{h}{H} = \frac{b}{B}$$

Las otras tres ecuaciones, E_1, E_3 y E_4, sólo se verifican en la condición del problema, y expresan esa condición de tres maneras distintas. Ahora bien, aunque las tres ecuaciones expresen la misma condición, ninguna se puede obtener mediante una transformación lineal de una sola de las otras dos. En efecto, si se manipulan las expresiones algebraicas correspondientes, se pueden reducir a las ecuaciones (o proporciones) que presentamos en la tabla siguiente, y tanto la expresión en forma de ecuación como de proporción pone en evidencia que $E_1=E_4+E_2$ y $E_3=E_4+2E_2$.

E_2	$S_{t_g} = S_t + S_{t_p}$	$bH = Bh$	$\frac{h}{H} = \frac{b}{B}$
E_4	$S_{t_g} = 2S_{t_p}$	$BH = 2bh$	$\frac{h}{H} = \frac{B}{2b}$
E_1	$S_t = S_{t_p}$	$(B+b)H = (B+2b)h$	$\frac{h}{H} = \frac{B+b}{B+2b}$
E_3	$S_{t_g} = 2S_t$	$(B+2b)H = 2(B+b)h$	$\frac{h}{H} = \frac{B+2b}{2B+2b}$

El que estas tres ecuaciones sean linealmente independientes dos a dos tiene una consecuencia importante para la complejidad de la estructura del proceso de resolución del problema, a saber, que la elección de dos ecuaciones cualesquiera de las cuatro[27] conduce a un sistema compatible y determinado, por lo que la decisión de qué pareja de ecuaciones tomar nunca conlleva el riesgo de que no se obtenga el resultado del problema y haya que volver a elegir otra pareja de ecuaciones, sino que sólo tiene consecuencias sobre la complejidad de las manipulaciones sintácticas de las expresiones correspondientes —complejidad que, por otro lado, no es excesiva en ninguno de los casos posibles y que es mínima si se elige E_2 y E_4.

Ahora bien, hay dos escollos: el primero, la elección de las cantidades que se van a designar mediante una letra y las que se van a designar mediante expresiones algebraicas compuestas. En efecto, si se decide representar mediante letras las alturas del triángulo grande y del triángulo pequeño —como hemos hecho aquí— y expresar la altura del trapecio como diferencia entre ellas, las expresiones son sencillas —ya que lo es la expresión de la proporcionalidad entre esas cantidades. Pero, si se decide representar mediante una letra la altura del trapecio y una de las otras dos alturas se escribe como diferencia o como suma, las expresiones se tornan más complejas y, además, es más difícil ver en ellas la expresión de la proporcionalidad. Cabe pensar que el enunciado apunta más a que se tome la decisión que lleva al camino arduo, ya que "mediante una paralela a la base" centra la atención en ésta y parece más natural determinar la posición de la paralela con respecto a la base que con respecto al vértice opuesto, es decir, desde abajo, más que desde arriba —respuesta natural a la pregunta ¿a qué altura está la paralela?

El segundo escollo se deriva del tipo de respuesta de este problema —una expresión algebraica y no un número— y de que no esté indicado en el enunciado cuál es la incógnita y qué cantidades se consideran dadas. Esto hace que haya que decidir qué cantidad se toma como incógnita del problema, ya que ésta puede ser cualquiera que permita fijar la posición de la paralela: la altura del triángulo pequeño, la altura del trapecio, la base del triángulo pequeño, el punto en que la paralela corta a uno de los lados (determinado a su vez por la distancia a uno u otro vértice del lado en cuestión), etc. También obliga a que haya que examinar qué cantidades —de las que se usen para escribir las expresiones algebraicas que traduzcan las relaciones que expresan las condiciones del problema— se pueden considerar como dadas y cuáles no —ya que el número de relaciones necesarias depende del número de cantidades que no se consideren dadas—, y que haya que decidir qué cantidades de las que se pueden considerar como dadas se van a usar para expresar la incógnita en función de ellas. Pero la decisión sobre cuál ha de ser la incógnita y cuáles las cantidades dadas en función de las que se va a expresar ésta en el resultado no puede zanjarse por criterios de verdad, sino por criterios de facilidad o posibilidad —o elegancia—, que sólo pueden provenir de lo que se observe en el curso de la propia resolución. Una decisión afortunada es tomar como incógnita h, como datos B y H, y eliminar b, que

---

[27] La ecuación E_2 expresa una condición distinta a la que expresan las ecuaciones E_1, E_3 y E_4: no cabe pues que dependa linealmente de una sola de ellas. Así que, si estas tres son linealmente independientes dos a dos, lo serán las cuatro.

es entonces la única cantidad que no puede considerarse como dada; pero también lo es tomar como incógnita b, como datos B y H, y eliminar h, aunque esta segunda opción parezca menos natural.

En el caso del problema del trapecio, si adoptamos las notaciones que indica la figura 6.2, las ecuaciones posibles son las que se obtienen a partir de las relaciones siguientes:

E_1: $S_{t_2} = S_{t_1}$

E_2: $S_T = S_{t_1} + S_{t_2}$

E_3: $S_T = 2\ S_{t_2}$

E_4: $S_T = 2\ S_{t_1}$

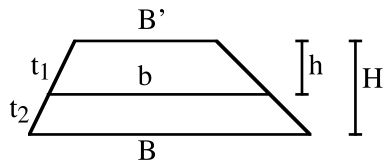


Figura 6.2

De nuevo aquí la ecuación $S_T = S_{t_1} + S_{t_2}$ no depende de las condiciones que la paralela ha de tener en el problema y es, por tanto, equivalente a la expresión de la proporcionalidad que también se obtendría a partir del teorema de Thales:

$$\mathrm{T}: \frac{h}{H} = \frac{b - B'}{B - B'}$$

De nuevo, las otras tres ecuaciones son independientes dos a dos —y se dan las mismas relaciones de dependencia lineal $E_1 = E_4 + E_2$ y $E_3 = E_4 + 2E_2$— de modo que cualquier par de ecuaciones de las cuatro forma un sistema compatible y determinado y permite resolver el problema.

Ahora bien, como ya hemos indicado, hay una diferencia dramática entre la forma que ha de adoptar necesariamente la expresión algebraica final en este problema, si se compara con el del triángulo, que no sólo produce complicaciones de orden técnico sino que hace más difícil concebir cuál es la forma que cabe esperar que tenga el resultado y cuáles son las decisiones más eficaces, lo que tiene consecuencias no sólo para la obtención final de la solución, sino para la propia organización del plan. Esta diferencia radica en la necesaria aparición de la cantidad *B*' como dato en la fórmula final. Una de las consecuencias de ello es que tomar ahora como incógnita h no es la decisión más afortunada: tanto los cálculos como la expresión final son mucho más simples si se toma b como incógnita y se elimina la h. Hay una razón para ello derivada de dónde se sitúan las cantidades involucradas en el triángulo del que se puede suponer que se deriva el trapecio: B sigue siendo un elemento del triángulo y b puede ser visto de alguna manera como una división de éste. Sin embargo, H no es ningún elemento del triángulo original, sino que está relacionado con el corte *B*'.

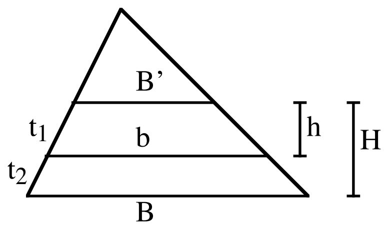


Figura 6.3

Optar por que *b* sea la incógnita permite conducir las manipulaciones algebraicas a través de un camino más transitable que cualquier otro, pero de todas maneras acaba en la expresión $b = \sqrt{\frac{B^2 + B'^2}{2}}$, que es más compleja que las del problema del triángulo.

Si se decide, como hizo el alumno 32, que sea *h* la incógnita, tras tediosos y engorrosos cálculos se puede llegar, como hizo este alumno, a

$$h = \frac{\sqrt{\frac{B^2 + B'^2}{2}} - B'}{B - B'} H$$

Las variantes que presenta este enfoque en las actuaciones de los alumnos tanto en el problema del triángulo como en el del trapecio las designaremos indicando cuáles son las ecuaciones que se usan. También designaremos de forma similar los enfoques en que se derive una ecuación a partir de la proporcionalidad y otra de alguna igualdad entre áreas. Así, E_1E_2 indica que se usan esas dos ecuaciones y que E_2 se ha obtenido de la relación entre áreas correspondiente, y E_1T indica que se usa la ecuación E_1 y que la E_2 se deriva de la relación de proporcionalidad.

En lo que hemos examinado hasta ahora, las relaciones de proporcionalidad se usan para derivar una ecuación que, junto con otras obtenidas de otro tipo de relaciones, permiten resolver el problema. También caben enfoques en que sólo se usen relaciones de proporcionalidad y se razone con proporciones. Entre éstos hay uno que fulmina el problema del triángulo: el que parte de saber que, cuando los triángulos son semejantes, sus áreas son proporcionales a los cuadrados de las alturas, o a los cuadrados de las bases. De donde se sigue de inmediato que $\frac{h^2}{H^2} = \frac{S_{t_p}}{S_{t_g}} = \frac{1}{2}$, y de ahí $h = \frac{1}{\sqrt{2}} H$.

Ningún alumno usó, sin embargo, un enfoque puramente de proporciones como éste, por lo que no examinaremos sus variantes posibles en el caso del triángulo; tampoco examinaremos el caso, factible, pero mucho más complejo, del uso de estos enfoques puramente de proporciones en el problema del trapecio.

La herramienta heurística “consideración de un caso” adopta para estos problemas la forma de “considerar un caso particular” —siendo el rectángulo, triángulo o trapecio, el caso más útil—, pero no examinaremos la fecundidad de su uso, ya que, en las soluciones de los alumnos, su uso —que sólo se produjo en la prueba final— tuvo como finalidad la comprensión del problema y algún esbozo de análisis[28], pero no la resolución del problema transformado, para volver luego al original.

Otros enfoques presentes en la actuación de los alumnos que pueden admitirse como razonables aunque no dieron mucho de sí o era imposible que lo dieran son los que siguen. El más notable —que designaremos con FA— pretendía utilizar como figura auxiliar en el problema del trapecio el triángulo del que se puede suponer que deriva éste[29]. Otros, que designaremos con EN, se fijan en elementos notables del triángulo como las alturas, el baricentro o lo que los alumnos llaman el "centro" y hacen razonamientos cualitativos. En otros, el trapecio se descompone en otras figuras más familiares y se sigue generalmente con razonamientos de tipo cualitativo o por vías erróneas o inconsistentes como pretender dividir cada una de las figuras en dos partes iguales y que la división estuviera siempre en la misma recta —enfoques que designaremos con D_F. Y, finalmente, hay alumnos que se embarcan en cálculos de áreas variados —enfoques que designaremos con C.

6.3.3. LOS RESULTADOS.

6.3.3.1. *Enfoques presentes*.

En este apartado relatamos qué enfoques aparecieron efectivamente en las pruebas inicial y final, para cada uno de los problemas, con sus frecuencias de aparición.

En la tabla 6.1 presentamos los datos correspondientes a los PAVOC, usando los símbolos introducidos en el apartado anterior. S_i designa los enfoques modelados por análisis-síntesis; R_i, los que reposan en el uso del esquema de la regla de tres, y MC_i, los modelados por el método cartesiano. En todos esos casos los subíndices indican las variantes analizadas, correctas si son números y erróneas si es una R. VP designa el uso de la herramienta heurística "variación parcial" y NC, un enfoque no clasificado entre los analizados en el apartado anterior, que incorporamos a los razonables aunque poco se puede progresar por él.

En la tabla 6.2, presentamos los datos correspondientes a los problemas aritméticos de encontrar no verbales. C_S designa los enfoques en que se considera una serie de casos[30]; S, los que usan la fórmula de la suma, y EP, los que utilizan la herramienta heurística "examen de posibilidades". S_P, por su

---

[28] En el protocolo de D y R, analizado en el capítulo anterior, la herramienta heurística "consideración de un caso" se pretendía usar con otra finalidad, aunque no lo consiguieran.

[29] Este enfoque conduce a una solución particularmente brillante y que, además, puede usarse para problemas similares con otras figuras, que no es éste el lugar de relatar, ya que los alumnos que lo emprendieron fueron incapaces de progresar apenas por él.

[30] Como aquí nos referimos a lo que hicieron realmente los alumnos, no escribimos "en que *se usa la herramienta heurística* "consideración de un caso", en la versión…": ver la discusión de este asunto en el apartado 6.3.3.4.

parte, designa enfoques en que los alumnos se limitaron a aplicar la fórmula de la suma a un S_n particular, que no hemos juzgado dignos de incluir en el análisis del problema.

Hemos de señalar que los datos compilados en la tabla 6.2 no cubren la totalidad de lo que los alumnos realizaron. En efecto, en la prueba inicial, además de los enfoques razonables y de la ausencia de respuesta, también se dieron enfoques que hemos sido incapaces de ver qué sentido podían tener para los alumos que los siguieron ya que, para nosotros, carecen totalmente de sentido. Esos enfoques no los hemos incluido entre los enfoques razonables y, además, no hemos valorado el progreso en ellos de ninguna manera, por lo que no contribuyen a la medida de productividad. En el apartado 6.3.3.4, mencionaremos empero algunos de ellos, ya que ilustran algunas de las cuestiones que allí se discuten.

En la tabla 6.3, presentamos los datos correspondientes a los problemas aritméticos de probar. C_S designa los enfoques en que se considera una serie de casos; C_C, aquellos en que la herramienta heurística "consideración de un caso" se usa sólo para la comprensión del problema; A, los que se basan en manipulaciones algebraicas; D, los que se basan en divisiones realizadas con la presentación del algoritmo de lápiz y papel; D_S, los que consisten en descomponer en sumas de forma sistemática, y, finalmente, I_R y DP_R los dos enfoques en que los alumnos pretendían estar usando el método de inducción completa o la herramienta heurística "dividir un problema en partes".

En la tabla 6.4, presentamos los datos correspondientes a los problemas geométricos. E_i designa una de las ecuaciones razonables que expresan igualdades de áreas; T, la relación de proporcionalidad derivada del teorema de Thales, y estos símbolos o sus combinaciones, los enfoques correspondientes. EN designa los enfoques que se centran en consideraciones sobre elementos notables del triángulo; C, aquéllos en que se hacen cálculos de áreas con valores numéricos; D, los que se basan en descomposiciones del trapecio; C_P, enfoques en que se usa la herramienta heurística "consideración de un caso (particular)", y FA, el enfoque en que se usa una figura auxiliar.

Enfoque	Gasolina	Heno
S_1	8	20
S_2	0	4
S_3	5	0
R_1	2	2
R_2	6	0
R_3	1	3
MC_1	2	5
MC_2	6	3
MC_2'	2	0
VP	0	2
S_R	3	0
R_R	1	1
MC_R	3	2
NC	1	0
Total	40	42

tabla 6.1

Enfoque	I_2	F_3
C_S	25	30
S	4	16
S_P	2	0
EP	0	2
Total	31	48

tabla 6.2

Enfoque	I_4	F_2
C_S	7	31
C_C	0	7
A	11	5
D	3	0
D_S	0	2
I_R	1	0
DP_R	0	1
Total	22	46

tabla 6.3

Enfoque	triángulo	trapecio
E_1T	1	3
E_3T	1	0
E_4T	1	0
E_1E_2	0	2
E_1	9	4
E_2	1	4
E_3	1	1
E_4	0	2
T	1	3
EN	7	0
C	2	2
D_F	0	15
C_P	0	10
FA	0	1
Total	24	47

tabla 6.4

6.3.3.2. *La medida de productividad*.

Una vez analizados los problemas y establecida la lista de enfoques razonables que se presentaron en las soluciones de los alumnos, falta, para poder dar cuenta cabal de la productividad del grupo de alumnos con la medida adoptada para ello, relatar los criterios que adoptamos para valorar el progreso en los enfoques en la escala convencional "algo", "poco", "casi", "resuelto". Detallamos aquí tales criterios sólo en los casos en que se presentó tal nivel de progreso en las soluciones de los alumnos y no en todos los posibles, ya que éstos son los que son necesarios y suficientes para leer los resultados. No indicamos cuál fue el criterio adoptado para valorar que el nivel alcanzado es “resuelto”, más que cuando puede haber duda.

a) Los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas.

El problema de la gasolina. Se valoró en “casi” un enfoque del tipo S por un error en los cálculos no revisado, ni, por tanto, corregido. Se valoró en “algo” los enfoques del tipo R, cuando sólo se plantea la regla de tres y no se opera con ella. Se valoró en “algo” un enfoque del tipo S_R en que no se calcula la incógnita del problema. Se valoró en “poco”, cuando la falta de control impide detectar la comprensión errada. Se valoró en “algo” un enfoque del tipo MC_R si no se aprovecha nada del trabajo hecho. Finalmente, se valoró en “algo” el enfoque NC, que no hemos analizado.

El problema del heno. Se valoró en “poco” un enfoque del tipo S cuando no hay evidencia de que se haya realizado el análisis de la incógnita y sólo se calculan las primeras cantidades. Se valoró en “casi”, por un error en los cálculos no revisado. Se valoró en “algo” un enfoque del tipo R, cuando sólo se usa para comprensión. Se valoró en “poco” un enfoque del tipo R_R en que todas las cantidades tenían especificado su significado y los cálculos se llevaron hasta el final. Se valoró en “poco” un enfoque del tipo MC cuando se plantean las ecuaciones y no se sabe seguir o las operaciones algebraicas que se realizan son muy erróneas.

b) Los problemas aritméticos de encontrar no verbales.

El problema de la prueba inicial (I_2). Fuera cual fuera el enfoque, cuando se dio el resultado sin probarlo se valoró en “casi”, excepto cuando la forma de expresarlo no describía ninguna propiedad de los números con claridad, que se valoró en “poco”[31] En los enfoques del tipo C_S, se valoró en “poco” si la respuesta era “la suma ha de ser par” y en “algo” cuando no se obtenía ningún resultado de la observación de los casos. En los enfoques del tipo S, se valoró en “poco” cuando sólo se concluye que $(n+1)n = \dot{4}$ y en “algo” cuando ni siquiera se obtiene de la fórmula de la suma ese resultado[32]. El progreso en los enfoques del tipo S_P se valoró siempre en “algo”.

El problema de la prueba final (F_3). Al igual que en el problema anterior, fuera cual fuera el enfoque, o la combinación de enfoques, cuando se dio el resultado sin probarlo se valoró en “casi”. En los enfoques del tipo S, se valoró el progreso en “poco” cuando se resuelven sólo partes del problema o no se es consciente de todo lo que hay que hacer o se cometen errores algebraicos graves que no se revisan, se valoró en “algo” cuando apenas se pasa de invocar la fórmula de la suma o manipularla sin saber con qué propósito. En los enfoques del tipo C_S, se valoró en “poco” cuando no se encontró la

[31] Se valoró así, por ejemplo, el progreso de un alumno en el enfoque C_S, que da como resultado “n = 3, 3+1, 3+4, 3+4+1, 3+4+4, 3+4+4+1 y así sucesivamente”.

[32] El ejemplo paradigmático de esto es el alumno que, habiendo escrito a partir de la fórmula de la suma $n(n+1)=4a$, comentó: “llegué a una ecuación sin solución”.

fórmula, pero se usaron técnicas para buscarla, y en "algo" cuando sólo se calcularon o tabularon los valores, sin manipularlos de ninguna manera.

c) Los problemas aritméticos de probar.

El problema de la prueba inicial (I_4). En los enfoques del tipo C_S, se valoró en "algo" cuando no se encuentra ninguna regularidad o se enuncian regularidades disparatadas, y se valoró en "poco" cuando se encuentra una pauta, pero, al no saber escribirla en una expresión algebraica, no se puede hacer nada con ella. En los enfoques del tipo A, se valoró en "algo" cuando no se pasa de decir, p. e., que $4x(x+1)$ es par; en "poco" cuando se llega, p.e., a comprobar que n^2+n es par en algunos casos; y en "casi" cuando la prueba se hace sólo para n impar. En los enfoques del tipo D, se valoró en "algo" las divisiones disparatadas y en "poco" las que no se preocupan de probar que el cociente obtenido es un número entero.

El problema de la prueba final (F_2). En los enfoques del tipo C_S, se valoró en "casi" cuando la regularidad observada incluía cuáles son los cuadrados en que se descompone $n+1$; en "poco", siempre que las observaciones estuvieran bien hechas, y en "algo" cuando simplemente se intentaba presentar en una tabla cualquier tipo de observación. En los enfoques del tipo C_C, del tipo D_S (y el singular DP) se valoró siempre el progreso en "algo". En los enfoques del tipo A, se valoró el progreso en "algo" cuando no se hizo nada con las expresiones algebraicas escritas, o no se hizo nada sensato.

d) Los problemas geométricos.

El problema del triángulo. En los enfoques del tipo T, E_i y sus combinaciones, se valoró en "poco" cuando la ecuación que se escribe se manipula de alguna manera y en "algo" cuando sólo se escribe la ecuación o las ecuaciones. En los demás enfoques, se valoró en "algo".

El problema del trapecio. En los enfoques del tipo T, E_i y sus combinaciones, se valoró en "casi" cuando se escriben dos ecuaciones, se sabe cuál tiene que ser la forma del resultado, pero no se obtiene; y en "poco" y "algo" en las situaciones equivalentes a las del problema del triángulo. En los enfoques del tipo C_P, se valoró siempre en "algo", por no usar el problema transformado más que para comprensión. En los demás enfoques, siempre se valoró en "algo".

Estos criterios de valoración específicos para cada uno de los enfoques realmente presentes se adoptaron una vez examinadas las respuestas de los alumnos, a partir de los criterios de tipo general que usó Schoenfeld (1982, 1985) en los que simplemente se establece qué es "algo", "poco"[33], "casi" y "resuelto", procurando que la concreción de los criterios generales a cada uno de los enfoques fuera similar. Sin embargo, hay que tener en cuenta de nuevo que una cosa es el alcance del enfoque tal como lo hemos establecido en el análisis del problema —enfoque que usamos como modelo para

[33] En la escala de Schoenfeld las palabras inglesas equivalentes a éstas están en orden inverso: "little" es menos que "some". Nosotros cambiamos el orden para que "algo" significara no "un cierto progreso" o "algo substancial" sino "muy poco", "apenas nada", ya que ésta fue la situación con que nos encontramos en un buen número de las respuestas de los alumnos.

designar la actuación de los alumnos— y otra cosa el alcance del enfoque tal y como se presenta en la actuación de los alumnos. Lo que visto desde el enfoque competente es quedarse a un paso de la solución, que no se da o se da mal por motivos accidentales, puede ser, en la actuación de los alumnos, quedarse a un paso de la solución que *ni siquiera se sabe que hay que darlo*. Los criterios concretos adoptados valoran la actuación de los alumnos —haciendo uso de la máxima jurídica *in dubio pro reo*— desde el enfoque competente: por eso, por ejemplo, se valora en "casi" el progreso en los enfoques del problema I_2 cuando se obtiene el resultado, pero no se prueba, incluso si no aparece prueba alguna de que se sepa que hay que probarlo.

En las tablas 6.5 y 6.6, presentamos un resumen de la cantidad de enfoques razonables producidos por los alumnos en las pruebas inicial y final, valorados de acuerdo con estos criterios. Presentamos también en ellas las medias correspondientes por alumno y la media por alumno y problema correspondiente al total de enfoques. Como los resultados correspondientes a los PAVOC fueron —como estaba previsto, ya que es el único que es un problema de aplicación— tan distintos de los de los otros problemas, presentamos también los totales y las medias correspondientes a los otros tres problemas.

Problema	total	algo	poco	casi	resuelto
PAVOC	40	7	2	1	30
arit. encontrar	31	6	11	14	0
arit. probar	22	10	7	1	4
geométrico	24	15	8	0	1
total	117	38	28	16	35
media alumno	3’55	1’15	0’85	0’48	1’06
media alum. problema	0’89				
total (sin PAVOC)	77	31	26	15	5
media alumno	2’33	0’94	0’79	0’45	0’15
media alum. problema	0’78				

tabla 6.5

Resultados de la medida de productividad correspondientes a la prueba inicial

Problema	total	algo	poco	casi	resuelto
PAVOC	42	1	8	1	32
arit. encontrar	48	8	26	11	3
arit. probar	46	21	14	10	1
geométrico	47	28	16	1	2
total	183	58	64	23	38
media alumno	5’55	1’76	1’94	0’70	1’15
media alum. problema	1’39				
total (sin PAVOC)	141	57	56	22	6
media alumno	4’27	1’73	1’70	0’67	0’18
media alum. problema	1’42				

tabla 6.6

Resultados de la medida de productividad correspondientes a la prueba final

6.3.3.3. *Discusión de los resultados de la medida de productividad.*

La comparación de los resultados de las pruebas inicial y final muestra que los alumnos después de la instrucción *son más productivos* que antes de ella, en el sentido de que son capaces de producir más maneras razonables de abordar los problemas que se les plantean. El número total aumenta de 117 a 183, esto es, más del 50%, pasando en media de 0’89, es decir, menos de un enfoque por alumno y problema, a 1’39. Ahora bien, aunque haya este aumento de productividad, el aumento en el número de enfoques que se prosiguen hasta resolver el problema es muy escaso: 38 frente a 35. Hay incluso un tipo de problema —el aritmético de probar— en el que en la prueba final se baja a 1, frente a los 4 de la prueba inicial[34]. Por el contrario, hay un aumento muy notable —más del doble— en el nivel “poco” y también un aumento substancial en el nivel “algo”.

Este aumento de productividad se muestra de forma más patente si se separa el único problema que no es de búsqueda. En efecto, el caso del problema aritmético de varias operaciones combinadas presenta una pauta totalmente distinta de la del resto de los problemas. En la prueba inicial, hay 30 enfoques que culminan resolviendo el problema y, en la final, 32, que los realizaron 27 alumnos en ambos casos —aunque no los mismos veintisiete—, mientras que los demás problemas están entre 0 y 4. Esto muestra simplemente que están en distinto nivel de dificultad para los alumnos, como ya preveíamos. Ahora bien, si se compara el total de enfoques, mientras el PAVOC es en la prueba inicial

[34] En este caso, la explicación reside probablemente en que el problema aritmético de probar de la prueba final es mucho más difícil que el de la prueba inicial, como hemos mostrado en su análisis.

el que tiene un número mayor de enfoques de todos los problemas —40 frente a 31, 24 y 22—, en la prueba final la relación se invierte y es el que tiene un número menor —42 frente a 48, 47 y 46. Más aún, en la prueba inicial, el PAVOC es el único problema en que hay algún alumno que prosigue más de un enfoque; en el resto de los problemas, o bien no hacen nada o no hacen nada razonable o se limitan a proseguir un único enfoque aunque sean conscientes de que no saben proseguirlo hasta resolver el problema. Sin embargo, en la prueba final, la proliferación de enfoques se produce precisamente en los otros problemas.

Así, en los totales y las medias correspondientes a los tres problemas de búsqueda, pueden verse más acusados los rasgos ya indicados: el total aumenta de 77 a 141 —casi el doble—, y la media por alumno y problema pasa de 0'78 a 1'42 —también casi el doble— y ese aumento de productividad está concentrado sobre todo en el nivel "poco" que pasa de 26 a 56 —más del doble.

Estos datos muestran pues que los alumnos antes de la instrucción son capaces de producir un enfoque razonable —, y que algunos de ellos pueden incluso producir más de uno si se les pide— cuando el problema es un problema de aplicación y conocen el método o el esquema propio de esa clase de problemas; pero que, cuando el problema no es de aplicación, producen un enfoque razonable como mucho para intentar resolverlo y, si no lo resuelven, abandonan. Después de la instrucción, no producen apenas más enfoques para el problema de aplicación, que resuelven aproximadamente el mismo número de veces. Sin embargo, su comportamiento en la resolución de los problemas de búsqueda es muy distinto, desde este punto de vista, al que tenían antes de la instrucción, ya que todos son capaces de generar enfoques razonables y una buena proporción de ellos no abandonan a la primera.

Schoenfeld (1985), al discutir los resultados del estudio en que diseñó la medida de la que nosotros hemos adaptado la que ahora comentamos, escribió que sus resultados indicaban "claramente que esos alumnos habían aprendido algo; el asunto es averiguar qué aprendieron y por qué" (pág. 230). En nuestro caso, está claro que lo que aprendieron los alumnos no se refleja en las pruebas con que lo estamos midiendo en que encuentren la solución de los problemas en mayor medida[35], sino en que tienen más maneras de buscar la solución de los problemas y las usan efectivamente. No se trata de un aumento de eficacia, sino de un cambio de estilo.

---

[35] En el trabajo de Schoenfeld citado, sí que se da este aumento. Si se quiere comparar sus resultados con los nuestros, hay que tener en cuenta las diferencias en el diseño y no sólo la similitud de las medidas utilizadas. Al menos, hay que considerar que en el trabajo de Schoenfeld los problemas de las pruebas inicial y final son equivalentes en cuanto a su dificultad, que se les pedía a los alumnos que enunciaran todos los enfoques posibles para cada problema y no, como en nuestro caso, que los usaran y, finalmente, que el número de alumnos a los que instruyó era 11.

6.3.3.4. *La complejidad heurística.*

En este apartado complementamos la indicación cuantitativa del cambio de estilo que da la medida de productividad con algunas indicaciones más cualitativas. Para ello, utilizamos los datos correspondientes a cuáles fueron los enfoques presentes en las respuestas de los alumnos, que ya hemos presentado en el apartado 6.3.3.1, y observaciones tomadas tanto de las soluciones de los alumnos como de los análisis retrospectivos de éstas hechos por ellos al contestar a las preguntas correspondientes de las pruebas inicial y final. Las observaciones las analizamos desde el modelo de competencia examinando de qué manera están presentes los elementos del modelo en la actuación del grupo de alumnos.

En términos generales, concluimos que el cambio de estilo se caracteriza porque después de la instrucción se usan herramientas heurísticas con conocimiento de los efectos de su uso, se gestiona el curso del proceso de resolución teniendo recursos para ello y se ponen en juego destrezas con potencial heurístico que soportan el trabajo de resolución; además, se concibe que las herramientas heurísticas y los razonamientos plausibles son elementos legítimos del trabajo matemático y se tiene un discurso para hablar sobre el proceso de resolución[36].

Antes de la instrucción, esos rasgos están ausentes o lo que está presente es una forma de ellos que carece de potencial heurístico. Así, que no se usen herramientas heurísticas en el sentido que nosotros damos a este término podría atribuirse simplemente a que no han sido instruidos en ese sentido, pero lo que es característico de lo que se presenta es que, cuando se usa algún procedimiento relacionado en cierta forma con las herramientas heurísticas, no sólo no se conoce el alcance del uso de tal procedimiento, sino que se concibe que lo que se está haciendo no es legítimo. Esta concepción de lo que es legítimo hacer para resolver un problema de matemáticas no se limita a excluir lo que pueda calificarse de heurístico, sino que hace prevalecer cualquier enfoque en que aparezca lo que para los alumnos es la notación algebraica sobre otros y convierte el uso de la notación en una parte del problema que hay que resolver en vez de una destreza con potencial heurístico. Gestión, por su parte, no se observa más que esporádicamente, y lo que se observa parece que se realice de forma involuntaria. Finalmente, la ausencia de un discurso para hablar del proceso de resolución de los problemas se manifiesta en que se describe más la *solución* del problema que el *proceso de resolución*.

En lo que sigue discutimos las observaciones que nos han conducido a estas conclusiones.

Antes de la instrucción, los alumnos utilizan enfoques en los que se consideran casos. Ahora bien, lo que hacen se distingue del uso competente de la herramienta heurística “consideración de un caso” ya que a) creen que lo que están haciendo no es legítimo —o no es “matemático”— y b) no son

[36] Estos caracteres del estilo heurístico de resolución de problemas los atribuimos aquí al comportamiento del grupo tomado conjuntamente; por supuesto que se presentan en los alumnos en diversa medida y, en ocasiones, de manera viciada, pero en este capítulo, aunque consideremos eventualmente la variación a través de los sujetos, estamos analizando precisamente el comportamiento del grupo.

conscientes de estar resolviendo un problema distinto del problema original. Lo primero aparece claramente en los comentarios retrospectivos hechos por alumnos que abordan el problema aritmético de encontrar no verbal mediante enfoques de este tipo, que presentamos a continuación[37].

> "Como no sabía demostrarlo no lo he hecho, pero intuitivamente, a partir de unos ejemplos [...]" (1)
>
> "Probar valores sucesivos hasta llegar a obtener algún criterio — ha sido un problema de lógica." (5)
>
> "No he utilizado nada de las matemáticas que sabía sino que me he guiado por mi intuición." (7)
>
> "Más que utilizar los recursos matemáticos, he comenzado a comprobar [...] ha consistido en aplicar un poco la lógica, en comprobar cosas." (12)
>
> "Ir probando hasta llegar al resultado, es decir, un poco por el «cuento de la vieja»." (13)
>
> "Lo que más he utilizado ha sido la lógica. Básicamente ha sido eso, un problema donde se tiene que pensar y tratar de resolver la solución pensando." (14)
>
> "Lo que sabía de matemáticas no lo he utilizado mucho en este problema, más bien ha sido un poco de atención en el ejemplo, que es donde me he fijado especialmente." (18)
>
> "He procurado combinar unos números sucesivos, pero sin emplear ninguna fórmula ni nada que ya supiera teóricamente de matemáticas." (27)
>
> "[...] por la cuenta de la vieja [...] ir realizando sumas y divisiones mentales a boleo." (sic) (28)
>
> "La solución de este problema ha sido totalmente asistemática, por tanteos, y tratar de ver alguna relación lógica, para construir una pequeña ley." (31)

Los calificativos "intuitivamente" o "totalmente asistemática" aplicados a la solución, la insistencia en que no se ha usado nada de matemáticas —"ninguna fórmula", como precisa el alumno 27, indicando así uno de los rasgos que para él caracteriza lo que son las matemáticas—, o la expresión escolar "la cuenta de la vieja" —que el alumno 13 escribe "el cuento de la vieja", quizá para indicar aún más su carácter poco matemático— sacan lo que se ha hecho fuera del terreno de la práctica matemática legítima[38] y los comentarios adoptan el tono de justificaciones por no haber hecho lo que se debería. La resolución de problemas en matemáticas o la resolución matemática de problemas

---

[37] El número entre paréntesis es el del alumno que hace cada comentario.

[38] El único alumno de cuyos comentarios retrospectivos se deriva que no comparte esta concepción es el alumno 11. Éste califica lo que hace de "el metodo matematico deductivo" (sic) y lo describe como "basarse en ejemplos viendo la relación que existía entre los resultados para poder dar luego una conclusión final". Este alumno es el mismo que intenta abordar el problema de probar mediante el método de inducción completa, sin saber en realidad en qué consiste tal método y llamándolo también "el metodo matematico deductivo" (sic). El que dé nombre al método, pero se equivoque en el nombre y no sepa en qué consiste indica que está evocando algo que se le ha enseñado y que recuerda vagamente. Pero al haberle sido enseñado en una clase de matemáticas, la versión que él ha hecho ya está legitimada.

parece además consistir en la aplicación de reglas matemáticas *sin tener que pensar*, ya que se presenta como algo distinto de “la lógica” en comentarios como los de los alumnos 5, 12 y 14, en los que lo que se llama “la lógica” parece ser precisamente tener que pensar, como dice explícitamente el alumno 14: “se tiene que pensar y tratar de resolver la solución pensando”. El alumno 12 usa una expresión algo embrollada, pero aún más explícita, al comentar su intento de resolver el problema aritmético de probar, con un enfoque en que consideraba casos en el que no progresó absolutamente nada: “Para resolver este problema me he visto un poco mal, y he recurrido más que a nada *a lo que yo pensaba*, a lo que *sería lógico* que sucediera, y no a *ninguna regla matemática*” (subrayado nuestro).

Más aún, antes de la instrucción, la actuación de los alumnos con enfoques de este tipo no sólo no les parece legítima, sino que no les conduce en ningún caso a la solución del problema[39]. A tenor de los comentarios retrospectivos, ningún alumno parece saber que, una vez obtenida la pauta en los casos considerados, hay que volver al problema original, transformarlo en un problema de probar y resolverlo. Dicho de otra manera, ningún alumno está en realidad usando la herramienta heurística “consideración de un caso (una serie de casos)” con conocimiento de los efectos de su uso para la solución del problema planteado.

Esta falta de legitimidad de los enfoques en que se consideran casos tiene su contrapartida en el papel crucial que representa la notación algebraica para caracterizar lo que sí que es matemático. Esto aparece, por ejemplo, en la preferencia que los alumnos muestran por los enfoques en que se hace uso del álgebra en el problema aritmético de probar en la prueba inicial (14 frente a 7), preferencia que se invierte en la prueba final (5 frente a 38). O también en los datos correspondientes al número de enfoques de tipo cartesiano en los PAVOC. Pero también aparece en algunas actuaciones disparatadas que, pese a ser singulares, nos parecen significativas precisamente porque, aunque para nosotros carecen de sentido, para el alumno tienen el sentido de estar usando lo que para él es un “método matemático” y de estar expresando lo que escribe en lo que para él es la “notación matemática”.

Así, por ejemplo, el alumno 22, para resolver el problema aritmético de encontrar, comienza escribiendo

$$S_n = \{a, b, c, \ldots, n\} \rightarrow \{a, b, \ldots, n\} \cup \{c, d, \ldots, n{-}1\}$$

Luego escribe la igualdad

$$a{+}b{+}\ldots{+}n = c{+}d{+}\ldots{+}n{-}1$$

---

[39] En el caso del problema aritmético de encontrar, ningún alumno lo resolvió y en el del problema de probar, los que lo resolvieron lo hicieron con otro tipo de enfoque.

y no sabe cómo seguir. Pero el sentido de lo que ha hecho está claro para él: en el comentario retrospectivo escribe que lo que pretendía era “Hacer, *mediante letras*, un conjunto y dividirlo en dos subconjuntos de modo que sumándolos diera lo mismo” (subrayado nuestro).

El alumno 2, por su parte, también parece querer usar el álgebra a toda costa y, para ello, designa con $n-z$ al número de elementos de uno de los subconjuntos en que se divide S_n, con $n-y$ al otro, escribe la ecuación $n-z = n-y$, deduce de ella que $z=y$ y de ahí que n ha de ser par, ya que $z+y=n$, siendo capaz de dotar de sentido no sólo a las expresiones algebraicas que escribe sino a las derivaciones que hace de ellas mediante un uso impecable de las reglas de transformación sintáctica de las ecuaciones.

Esta identificación de la expresión en un lenguaje simbólico como un rasgo característico de lo matemático aparece también en las soluciones de los alumnos a este mismo problema de otra forma, que no se da en unos pocos casos como sucede con la que acabamos de mostrar, sino que es más frecuente: la expresión en un lenguaje simbólico es una parte de la tarea de resolver el problema.

Un caso extremo es el del alumno 30, que ha encontrado obervando casos la pauta y la ha expresado “dos sí, dos no”, pero escribe “no puedo establecer ninguna similitud ni buscar un modelo único”, porque no es capaz de escribir una expresión simbólica que la traduzca.

Un caso ejemplar es el del alumno 9 que, tras compilar bien casos en que la descomposición puede hacerse, la expresa mal escribiendo “Todos los múltiplos de 4 y de 4–1” y se embarca en la tarea de traducir esa expresión a una notación simbólica. Se queda satisfecho cuando escribe $\forall n / n = \dot{4}\, \Delta\, n = (\dot{4} - 1)$ (sic), y, en el comentario retrospectivo, dice que, después de observar lo que pasaba en los casos, lo que tenía que hacer era “expresarlo de forma matemática general”.

Otros alumnos, se proponen la misma tarea y escriben, según su grado de dominio de los lenguajes simbólicos, expresiones como las siguientes:

“$4x+3$, $4x+4$ para $x = 1, 2\ldots$”

“para los pares $n+4$ y los impares también $n+4$”

“$n = 3+4z$, $n = 4+4z$ siendo z un valor del 0 al ∞”

“$n = 3+\overline{4}, 4+\overline{4}$”

“$n\Big|_{a=1}^{a=\infty} = 4a-1 \quad n\Big|_{a=1}^{a=\infty} = 4a$”

La expresión en una notación adecuada es una de las destrezas más útiles en el proceso de resolución de problemas ya que permite a menudo hacer visible lo que de otro modo es difícilmente percibible y establecer conexiones en el propio nivel de la expresión cuyo significado puede explorarse a menudo con provecho. Nada hay que objetar a que se intente expresar los resultados obtenidos en una notación simbólica cuando el enfoque es el que aquí están usando los alumnos, más bien al contrario, esa destreza está naturalmente asociada al uso competente de la herramienta heurística “consideración de una serie de casos”. Lo perverso del uso de la notación en la actuación de los alumnos es que la expresión en una notación simbólica no es un *medio* que por su potencial heurístico se usa para resolver el problema, sino un *fin* que hay que conseguir para dar el problema por resuelto —o para presentarle el problema al profesor. Así, si la expresión simbólica no se consigue, se afirma que "no puedo establecer ninguna similitud", como hemos visto que hace el alumno 30 pese a haberla expresado verbalmente; la expresión en la notación simbólica se convierte en una tarea pródiga en dificultades ya que, al no concebirse como un medio de expresión para usarlo, la forma de la expresión se piensa que es tanto mejor cuanto más ostentación hace de los aspectos más de iniciado de la jerga del oficio, como los signos ∞ o $\forall$ o la disposición $\left| \begin{array}{l} a = \infty \\ a = 1 \end{array} \right.$ que exhibe el alumno 32 como muestra de lo que sabe. Pero además, en todos los casos, la tarea de expresar el resultado en notación simbólica substituye a la prueba de que el resultado es válido en general, probablemente porque, como dice el alumno 9, así está expresado "de forma matemática general".

El estilo de los alumnos antes de la instrucción también se caracteriza porque la gestión del proceso o no hay indicios de ella o sólo se manifiesta de forma esporádica y accidental. Lo primero está patente desde el mero hecho de que apenas se den cambios de enfoque —sólo en el problema de la gasolina y en escaso número— prosiguiendo en el primero emprendido aunque no conduzca a ninguna parte, no se sepa con certeza a dónde conduce o no se sepa proseguir por él. Pero también en la ausencia de control puntual que acaba siendo responsable del abandono, como muestran los dos ejemplos siguientes, tomados de soluciones al problema aritmético de probar.

El alumno 19 está buscando una pauta en los cocientes de los cuadrados de los impares al dividirlos por 8. Se equivoca y escribe $25=8\cdot4+1$. En el resto de las divisiones que realiza —las correspondientes a los cuadrados de 3, 7, 9, 11 y 13— no comete errores. Observa la pauta en los cocientes —6, 10, 15, 21— de los impares a partir del que ha calculado mal, pero, como le falla el 4 que ha obtenido erróneamente como cociente de 5^2, es incapaz de concluir nada, sin que se le ocurra siquiera revisar los cálculos ante la evidencia de la pauta observada.

El alumno 20, que está siguiendo un enfoque similar, al llegar a calcular el cociente de 121 por 8 obtiene 140 y, sin inmutarse porque sea mayor que el dividendo, escribe la lista de cocientes 1, 3, 6, 10, 140, ve la pauta que siguen los primeros, pero, como 140 no la verifica, la rechaza y abandona.

Lo que caracteriza a estos dos ejemplos no es simplemente que no se detecte el error cometido, sino que ni siquiera se piensa que haya que buscar un posible error en una situación en la que no es que se esté sin ideas, sino que la idea que se ha encontrado tropieza con un obstáculo. Dicho de otra manera, la gestión puntual de lo que se hace no es un elemento de lo que hay que hacer para resolver un problema. Esta ausencia absoluta del gestor, que no puede hacer aparición porque no existe, tan gráficamente mostrado en estos dos ejemplos, es una característica compartida con la gran mayoría de las actuaciones de los alumnos antes de la instrucción.

Por otro lado, en los casos observados en que los errores se descubren, esto no parece suceder porque se haya querido controlar el curso de la resolución, sino porque el error ha saltado a la vista, y la consecuencia de su descubrimiento no ha sido nunca el análisis de su causa, sino el abandono de lo que se había hecho hasta ese momento, para comenzar de nuevo, sin que parezca que se intente aprovechar nada del trabajo realizado en el enfoque abandonado. Dicho de otra manera, el gestor, cuando aparece, es un gestor no instruido. Esto se presenta en realidad sólo en el problema de la gasolina —en los demás problemas nunca se cambió de enfoque— ante resultados negativos o claramente imposibles, o al obtener de una regla de tres merced a varios errores encadenados $x = \frac{-2200}{-5149}$, que, por ser el cociente de dos negativos, le parece al alumno 12 que "no vale".

Otros hechos observados, que podrían atribuirse a una mera falta de control, responden quizá a que dificultades conceptuales imbricadas con concepciones generales sobre los hechos matemáticos pueden inhibir el control de los errores. Éste es el caso de lo que el alumno 12 hace, en el problema aritmético de probar, al calcular el cociente por 8 del primer cuadrado impar, es decir, del 1. Como los cálculos los hace con el algoritmo típico de lápiz y papel no parece tener más remedio, para hacer algo, que añadir un 0 al 1 y hallar el cociente con un decimal, 0'1, con lo que el resto no es 1, sino 2. Pero ante esto, no se da cuenta de su error, sino que escribe "caso excepcional el 1 se convierte en par al hacer la division" (sic). A pesar de que este comentario parezca un puro disparate, creemos pertinente traerlo a colación porque no es un hecho singular. Aunque en las soluciones del grupo de alumnos que estamos analizando sólo se presentara en el caso del alumno 12, en otras ocasiones en que hemos pasado esta prueba a otros grupos de alumnos antes de la instrucción, hemos encontrado reiteradamente la división de 1 por 8 hecha con decimales cuando todas las demás eran divisiones enteras; las divisiones se han proseguido hasta dar como cociente 0'1, 0'12 o 0'125 y como resto, por tanto, 2, 4 o 0; y los comentarios han oscilado entre los que concluían "no se puede probar ∀ número impar puesto que existe un contraejemplo" y los que ajustaban el monstruo por la vía de la misma concepción popular que el alumno 12: "[…] menos con el 1, y tal vez este, sea la excepcion que confirma la regla" (sic). En sus años escolares de práctica del algoritmo típico de la división, ninguno de estos alumnos habrá tenido nunca que hacer una división entera en que el dividendo sea menor que el divisor, con toda seguridad. La automatización del algoritmo parece entonces dispararles el tipo de división que sí que han tenido ocasión de practicar, es decir, la división con decimales. Y este efecto de la práctica en el campo de aplicación que conciben para uno y otro tipo de división cuando se realiza con el algoritmo típico, tiene como consecuencia que no se pueda ver el resultado obtenido como un error sino como una irregularidad[40].

La carencia de un discurso para hablar del proceso de resolución es patente en los comentarios retrospectivos que llevamos citados. Sólo añadiremos que, en las descripciones retrospectivas que los alumnos hacen del problema de la gasolina, ninguno de ellos describe el análisis, que es la parte esencial del *proceso de resolución*: lo que describen en todos los casos en que utilizan enfoques de este estilo es la síntesis, es decir, lo que en este enfoque es la *solución* del problema. Esto contrasta con las descripciones retrospectivas que realizan del problema del heno después de la instrucción, en las que hay intentos más o menos logrados de no describir exclusivamente la síntesis. La descripción

[40] También vale la pena aprovechar este fenómeno observado para señalar que como consecuencia de éste y otros similares se incorporó a la instrucción en el uso de la herramienta heurística "consideración de una serie de casos" la atención a la previsible singularidad de los primeros casos, en particular, de los casos n=1 y n=0.

del alumno 24 —que usó el enfoque S_1— es la más ejemplar por su estilo, aunque olvide relatar uno de los pasos que, sin embargo, está presente en su solución:

> En principio el heno que había almacenado sería igual al producto del heno que se gasta cada día por el nº de días totales. Como el heno que se gastaba cada día no lo sabíamos había que hallarlo, y para ello en el problema se nos daban los días en que se gastó lo que habían ahorrado en los 57 días. Bastaba con dividir lo ahorrado entre los días en que se había gastado esa cantidad. Tampoco teníamos lo ahorrado, pero sólo había que multiplicar la cantidad ahorrada cada día por el nº de días que se ahorraba. Esta cantidad se divide entre los días en que se gasta y tenemos lo que se consume cada día. Ahora con sólo multiplicar por los días totales sabremos cuánto habría en un principio.

También puede encontrarse este contraste entre las descripciones del proceso de resolución antes y después de la instrucción en las que hacen los alumnos que utilizan enfoques correspondientes al modelo cartesiano en estos mismos problemas: sólo después de la instrucción se encuentran descripciones que vayan más alla de decir que se han usado ecuaciones. La descripción del alumno 30 de su resolución del problema del heno es el mejor ejemplo de este cambio:

> 1.— Entender el enunciado.
> 2.— Saber qué me pregunta.
> 3.— Considerar dos casos en el problema.
> 4.— Representarlos con expresiones matemáticas.
> 5.— Aunar los dos casos en uno para poder resolverlo.
> 6.— Comprobación.

Finalmente, los análisis que acabamos de referir de las observaciones aportadas para apoyar las conclusiones sobre la actuación de los alumnos antes de la instrucción, que hemos avanzado al comienzo de este apartado, muestran que los rasgos del estilo de resolución de problemas que lo caracterizan no son rasgos independientes que se acumulan uno sobre otro, sino que, por el contrario, están todos relacionados entre sí. La concepción de lo que es legítimo y lo que hay que hacer en la tarea de resolver problemas puede verse como causa de los demás rasgos, pero, a su vez, esa concepción está conformada porque lo que podría haber contribuido a que los demás rasgos no se dieran ha estado ausente de la instrucción previa o la instrucción previa ha actuado en su contra: la concepción no es sino el resultado de unas prácticas escolares en las que tales rasgos se han generado como consecuencia de la instrucción explícita o de forma implícita. Así, por ejemplo, hemos observado que las herramientas heurísticas, que no están legitimadas por las prácticas escolares, se conciben como ilegítimas, pero también hemos observado que lo que se usa espontáneamente para descubrir es un *ersatz* de las herramientas heurísticas, que no deja de ser razonable que no se legitime, y cuya legitimación, en cualquier caso, no debe constituir un objetivo de la instrucción matemática, y este doble vínculo lo hemos puesto de manifiesto también para otros elementos del modelo de competencia.

Analizamos a continuación algunos de los fenómenos observados en la actuación de los alumnos después de la instrucción, sobre los que se basan las conclusiones que ya hemos nombrado al comienzo de este apartado.

La legitimación de lo heurístico es patente en la total ausencia en los comentarios retrospectivos de afirmaciones similares a las que aparecían en los comentarios correspondientes a la prueba inicial que lo coloquen fuera de la actividad matemática. Esto puede explicarse meramente porque lo heurístico ha sido precisamente el centro de la instrucción que acaban de recibir y, por tanto, no es sólo que esté legitimado por el discurso del profesor, sino que es lo que los alumnos pueden suponer que el profesor espera que digan en sus comentarios retrospectivos. Pero lo que los alumnos *dicen* no es el único indicio de ello, también hay pruebas numerosas en lo que *hacen* —y en lo antes hacían y ahora no hacen. Así, al analizar la situación antes de la instrucción, ya hemos señalado que la preferencia por los enfoques en que se hace uso del álgebra se invierte después de la instrucción; pero nos parece más significativo que este aumento también se acompaña del abandono de enfoques centrados en el álgebra cuando no conducen a ningún sitio, sin que ello tenga como consecuencia que se abandone todo intento de resolver el problema. Esto sucede incluso en los casos en que el enfoque algebraico es del estilo disparatado que hemos examinado anteriormente.

Por ejemplo, el alumno 17 aborda el problema aritmético de probar escribiendo la regla de tres

$$\begin{array}{l} 2n{+}1 \text{ ———————— } y^2{+}z^2 \\ 3n{+}1 \text{ ——————————— } ? \end{array}$$

Esa regla de tres parece tener sentido para él, ya que traduce directamente el enunciado del problema al lenguaje algebraico, por el intermedio de la generalización de ese esquema, más allá de su campo de aplicación, hasta incluir el esquema “cuando…, entonces…; cuando…, entonces…”, y además le permite usar el esquema de acción asociado para obtener $\frac{(3n+1)\left(y^2+z^2\right)}{2n+1}$ y transformar sintácticamente esta expresión algebraica. Ahora bien, apenas se empeña en dotar de sentido a las expresiones que escribe a partir de ésta para ofrecerlas como el resultado que busca. Por el contrario, abandona ese enfoque y aborda de nuevo el problema considerando casos, enfoque por el que progresa, aunque poco.

De la misma manera que la actuación del alumno 17 puede tomarse como muestra de que las herramientas heurísticas se conciben como algo que cabe usar legítimamente, porque su uso es una opción pensable ante el fracaso de enfoques de otro tipo, también constituye una prueba de ello el hecho de que ningún alumno dejara ningún problema en blanco en la prueba final y que ningún alumno dejara de emprender al menos un enfoque que pudiera calificarse como razonable en cada uno de los problemas, aunque no progresaran apenas en ninguno de ellos.

Finalmente, que las herramientas heurísticas es pensable usarlas se muestra también en el número de veces en que se consideran casos —que está recogido en las tablas correspondientes a las frecuencias de los enfoques presentes— o en la presencia explícita —aunque no sea en gran número— de las herramientas heurísticas “variación parcial”, “dividir un problema en partes” y “examen de posibilidades”. Más importante empero que su aparición es que también pueden encontrarse pruebas de la presencia de un gestor del proceso que regula su uso y pruebas de su uso consciente.

Así, el uso de la herramienta heurística “variación parcial” en el problema del heno está acompañada de los comentarios retrospectivos “como no encontraba la forma de relacionarlo he pensado buscar números más bajos para ver si podía operar mejor y seguir el problema para no perderme” (alumno 4) o “los números que se dan en el problema son demasiado grandes para trabajar rápidamente” (alumno 21). En ambos comentarios aparece explícitamente la intención del uso de esa herramienta heurística y los alumnos son consecuentes con esa intención, ya que resuelven el problema transformado y luego repiten el procedimiento de solución en el problema original[41].

El uso de la herramienta heurística “consideración de una serie de casos”, que es tan frecuente en los problemas aritméticos de encontrar y de probar, se acompaña a menudo de la manifestación explícita en los comentarios retrospectivos de que lo que se ha obtenido es una conjetura que hay que probar, pese a que casi ningún alumno consigue probarla. El alumno 3, por ejemplo, así lo enuncia en la misma formulación de su plan para abordar el problema de probar, aunque su expresión sea torpe: “¿Por qué no busco los cuadrados perfectos que existen y luego compruebo que es verdad?” El alumno 13 es mucho más explícito cuando, tras encontrar la conjetura correspondiente, afirma “El problema se convertirá en: Demostrar…”. Y el alumno 17, que ha encontrado una pauta en el problema aritmético de encontrar hallando las diferencias y las diferencias segundas y viendo que éstas son múltiplos consecutivos de 3, comenta más parcamente: “aún me queda el último paso”.

Otras muestras de la presencia del gestor apuntan a tareas diversas como

a) Que el descubrimiento de los errores no conduzca directamente al abandono, sino al análisis de lo realizado: “el plan o el proceso de resolución están mal” (alumno 2).

b) Controlar la comprensión: “intentando saber qué datos tenía y qué es lo que cada uno representaba (es decir, realmente, ¿qué es lo que tengo?)” (alumno 21); “Acabo de entender el sentido del enunciado. Lo que me dice en realidad el enunciado es que […]” (alumno 3).

c) Controlar la elaboración del plan o su desarrollo: “Lo que busco es relacionar o encontrar alguna correspondencia […] y pasarla al caso siguiente” (alumno 4); “Plan: hallar la formula del área del trapecio para luego en función de una incógnita saber por dónde tengo que trazar la paralela” (alumno

[41] El uso de la herramienta heurística es impecable en ambos casos. Ahora bien, el alumno 21 resuelve bien el problema transformado y, por tanto, el original; sin embargo, como el alumno 4 resuelve mal el problema transformado, también resuelve mal el original. El buen uso de una herramienta heurística no garantiza resolver un problema sin el acompañamiento de otros elementos del modelo de competencia.

13); "hay un pequeño inconveniente y es que al despejar h_2 me queda otra incógnita que es B_2" (alumno 6).

En contraste con lo que hemos examinado que sucedía antes de la instrucción, no encontramos en las contestaciones a la prueba final ejemplos de que la notación simbólica fuera un fin: el uso de la notación siempre es un medio para la organización de las observaciones que se realizan en el curso del trabajo de resolución, aun en los casos en que los alumnos son escasamente competentes en ello.

Finalmente, los comentarios retrospectivos de los alumnos que hemos citado y los ejemplos de descripciones del problema del heno aportados antes bastan, sin necesidad de añadir más, para sostener la conclusión de que los alumnos tienen un discurso que les permite hablar de su proceso de resolución de los problemas, que está compuesto por los elementos de la teoría. Este discurso les permite situarse no sólo en el estado de resolutor o de resolutor consciente, sino también en el de resolutor-observador-investigador, como pretende el modelo de enseñanza. Ahora bien, esto sólo puede concluirse con respecto al grupo en general y, además, matizando que el cambio que pretendemos describir que se ha producido entre la prueba inicial y la prueba final es un cambio de estilo y no supone aumento de eficacia. Dicho de otra manera, la actuación del grupo antes y después de la instrucción es *cualitativamente* diferente, responde a estilos diferentes, y la actuación después de la instrucción puede modelarse con los elementos del modelo de competencia que corresponde a lo que hemos llamado el "estilo heurístico". Sin embargo, el que el estilo con que resuelven los problemas pueda modelarse con este modelo de competencia no significa que las actuaciones concretas de los alumnos sean competentes: lo único que significa es que los elementos del modelo de competencia están presentes en la actuación de los alumnos, aunque puedan presentarse de forma errada o, incluso, pervertida[42].

6.4. EL SUBESTUDIO SOBRE LOS COMPONENTES SUBJETIVOS DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

6.4.1. LAS TÉCNICAS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS.

Ya hemos señalado en 6.1. las razones que nos condujeron a examinar en estas pruebas escritas los juicios de los alumnos. El uso de la técnica de rejilla para la recogida de datos nos pareció adecuado

---

[42] Ejemplos que responden a una aparición pervertida de los elementos del modelo de competencia se dieron efectivamente en los comentarios retrospectivos de los alumnos. Uno de ellos ya lo hemos citado en 6.3.2.3. El alumno 23, por su parte, que ha resuelto el problema del heno con el enfoque S_1—, cree que debe excusarse ante el profesor y escribe: "Aunque parezca que no he utilizado ninguna HH yo mismo me las he ido sugiriendo ya que con mi nivel no han hecho falta muchas explicaciones." El alumno 8, que ha resuelto ese problema con el enfoque S_2, hace después una tabla que no tiene más sentido que poder decir que la ha hecho. Ver también el caso de V y M, en el capítulo 5.

precisamente porque lo que decidiéramos tomar como datos fueran *juicios*. Como dicen Rivas y Marco Taverner

> Detrás de cada acto simple de juicio que una persona hace, descansa su teoría implícita sobre el campo de hechos dentro del cual realiza sus juicios. La técnica de rejilla es, en sus múltiples formas, un modo de explorar la estructura y contenido de tales teorías implícitas, sin imponer estructura alguna sobre las respuestas del individuo (Rivas y Marco Taverner, 1985, págs. 73-74).

de modo que la técnica de rejilla nos permitía explorar más allá de cuáles fueran esos juicios, la concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas de matemáticas subyacente a ellos y sus cambios después de la instrucción.

También hemos señalado en el apartado 6.1 que tales juicios los pedimos con respecto a sus resoluciones de cuatro problemas concretos que acababan de realizar y las razones por las que decidimos hacerlo así, y en el apartado 6.2 hemos descrito el modo de realización de las pruebas, la elaboración de la lista de lo que en la técnica de rejilla se llaman "constructos" —que llamamos aquí "componentes"— y la forma de su valoración posterior.

En cada una de las pruebas, inicial y final, obtuvimos así 34 matrices componentes / problemas, 21×4, una para cada alumno del grupo. A partir de ellas, elaboramos las siguientes matrices:

Una matriz componentes / problemas, 21×4, promediando las 34 anteriores, que representa al grupo o al "alumno medio".

Cuatro matrices individuos / componentes, 34×21, una para cada problema.

Una matriz individuos / componentes, 34×21, promediando las 4 anteriores.

Además, elaboramos una matriz individuos / componentes, 34×21, con las valoraciones referidas a la tarea en general.

Esas matrices las sometimos a un análisis taxonómico con una técnica SAHN descrita en Sneath & Sokal (1973), mediante un programa de ordenador que elaboramos para ello, usando como medida de similitud la distancia euclídea y como métrica de agregación la media. El significado de los dendrogramas o árboles taxonómicos para cada una de las matrices lo describimos en el apartado siguiente, en cada uno de los casos.

6.4.2. EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

6.4.2.1. *Descripción de la lista de componentes subjetivos.*

Ya hemos indicado que, a partir de las respuestas de los alumnos a la pregunta sobre qué era en lo que, a su entender, había consistido la tarea de resolver cada uno de los problemas propuestos, así como a partir de las respuestas a la misma pregunta, formulada con referencia a su experiencia escolar de resolver problemas, extrajimos una relación de acciones, y cómo elaboramos una lista agrupando las que a nuestro juicio eran similares. La lista de acciones así obtenida se formuló teniendo buen cuidado de que el nombre que se le diera a cada una de ellas utilizara las palabras que hubieran aparecido en las respuestas de los alumnos y no las palabras propias de la teoría. Esa lista fue la que se sometió posteriormente a su valoración por parte de los alumnos y la que constituye lo que denominamos *los componentes subjetivos* del proceso de resolución de problemas de matemáticas.

Los componentes que obtuvimos fueron los siguientes[43]:

1. Utilizar una notación adecuada.
2. Averiguar qué se desconoce.
3. Leer para comprender el contenido.
4. Cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado.
5. Cerciorarse de lo que se afirma en el enunciado.
6. Examinar algunos casos particulares.
7. Aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes.
8. Examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio.
9. Examinar las relaciones entre los datos.
10. Entresacar los datos.
11. Decidir entre varios enfoques posibles.
12. Examinar las combinaciones posibles.
13. Examinar ejemplos en busca de una idea feliz.
14. Imaginar que se realizan las acciones que se describen en el problema.
15. Probar ejemplos hasta dar con la respuesta.
16. Poner el problema en ecuaciones.
17. Recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes.
18. Traducir a una expresión matemática general.
19. Distinguir casos.
20. Usar la lógica y el razonamiento.
21. Suponer que ya se tiene el resultado del problema.

Describiremos en primer lugar qué componentes subjetivos son los que aparecieron, usando como instrumento para la descripción el modelo de competencia. Desde el punto de vista de la división del proceso en fases, aquí aparecen acciones correspondientes a la comprensión del problema y a la elaboración del plan, pero apenas hay nada que corresponda a la ejecución del plan, y nada en absoluto relacionado con la cuarta fase, ni siquiera si se reduce ésta a la mera revisión.

Así, “leer para comprender el contenido”, “averiguar qué se desconoce”, “entresacar los datos”, “examinar las relaciones entre los datos” y “cerciorarse de lo que afirma el enunciado” tienen que ver claramente con la comprensión del problema, ya sea en su aspecto de lectura del enunciado, ya sea en

---

[43] El orden en que los presentamos es el orden en que se los presentamos a los alumnos para su valoración. Puede observarse que procuramos que no aparecieran juntos los componentes que son de naturaleza similar.

el del análisis del enunciado que consiste en determinar cuáles son los datos, la incógnita —y quizá otras cantidades desconocidas—, y las relaciones entre los datos. Vale la pena observar que, en esta formulación de los sujetos, la condición del problema se expresa de manera parcial como “relaciones entre los datos”. Además, las acciones de comprensión están formuladas en los términos propios de los problemas de encontrar —incógnita, datos, condición—, mientras que no aparecen los términos propios de los problemas de probar, pese a que el enunciado del problema 4 dejaba bien patente que se trataba de un problema de probar. Sólo puede verse un reflejo, aunque vago, de lo que caracteriza a un problema de probar en la aparición de “lo que afirma” en el componente “cerciorarse de lo que afirma el enunciado”, en el que se expresaría que lo que hay que comprender es precisamente una afirmación.

Por su parte, los componentes “examinar algunos casos particulares”, “examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio”, “examinar las combinaciones posibles”, “imaginar que se realizan las acciones que se describen en el problema”, “probar ejemplos hasta dar con la respuesta”, “poner el problema en ecuaciones”, “traducir a una expresión matemática general” “distinguir casos” y “suponer que ya se tiene el resultado del problema” indican planes más o menos elaborados o herramientas heurísticas que se están usando para ello.

El resto de componentes que aparecen no es demasiado pertinente adscribirlos a una fase determinada del proceso. Así, “aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes”, “recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes” y “usar la lógica y el razonamiento” son formulaciones de ideas generales sobre qué hay que hacer para resolver un problema de matemáticas y constituyen lo que en esta lista ha aflorado de las concepciones que los alumnos han adquirido como consecuencia de las prácticas escolares que han experimentado a lo largo de su ya dilatada vida escolar[44].

“Decidir entre varios enfoques posibles” y “cambiar de enfoque si no se obtiene algún resultado”, aunque pueda suponerse que son acciones que tendrán lugar más razonablemente en unos momentos del proceso que en otros —la primera cuando se está elaborando un plan y la segunda cuando, durante la ejecución de un plan, se haya llegado a un punto muerto—, quedan mejor caracterizados como mecanismos de gestión del conjunto del proceso, que prestando atención al supuesto momento de éste en que puedan aparecer.

Finalmente, “utilizar una notación adecuada” es una destreza que puede actuar en cualquiera de las fases[45]. En efecto, puede ser un medio de tener una representación que ayude a la comprensión del problema, o puede ser un requisito para poner en marcha un plan, si en éste hace falta recurrir a destrezas algorítmicas o similares.

---

[44] Ver en el apartado 6.3.3.4 las observaciones que hemos hecho sobre “usar la lógica y el razonamiento”.

[45] Burton opina que ésta es una característica general de las destrezas, por lo que cuando en su proyecto (Burton, s.f.) va a clasificar los elementos del proceso que ella considera (destrezas, organizadores y procedimientos) en las fases de su modelo indica que “las destrezas no se clasifican de este modo, ya que no se relacionan específicamente con las fases” (Burton, s. f., pág. 21).

La lista de acciones que hemos dicho que indican planes más o menos elaborados tampoco son todas de la misma naturaleza. “Poner el problema en ecuaciones” y “suponer que ya se tiene el resultado del problema” remiten claramente a dos métodos generales, aunque la formulación dada por los alumnos no sea demasiado precisa: el primero es otro nombre del método cartesiano y el segundo, del método de análisis y síntesis. También puede considerarse que remite a un método “probar ejemplos hasta dar con la respuesta”, aunque su formulación en los términos usados por los alumnos engloba no sólo las formas de “probar ejemplos” que constituyen un método —aproximaciones sucesivas, tanteo sistemático— sino también probablemente el ensayo y error asistemático.

Otras de tales acciones se puede considerar que hacen referencia a herramientas heurísticas utilizadas por los alumnos[46]. Así, “examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio” y “examinar ejemplos en busca de una idea feliz” son dos versiones de la herramienta heurística *consideración de un caso*, en cuya formulación se ha incorporado lo que se espera de su uso o lo que se hace con ella. “Examinar algunos casos particulares” también es una versión de esa misma herramienta heurística, pero, formulada de esa manera, no se indica la finalidad con la que se utiliza, por lo que incluso puede pensarse que se utilice para la comprensión del problema en un episodio de exploración. “Distinguir casos” es la forma —poco precisa— en que aparece en esta lista la herramienta heurística *examen de posibilidades*. También puede pensarse que “examinar las combinaciones posibles” hace referencia a esta herramienta heurística, aunque cabe que la palabra “combinación” apunte no sólo a la transformación del problema que produce esta herramienta heurística, sino a su continuación con alguna forma de prueba por exhaustión.

Los dos componentes restantes tienen un carácter más singular. “Imaginar que se realizan las acciones que se describen en el problema” es un procedimiento propio de una clase de problemas[47].

---

[46] Con todos los matices que se derivan de las observaciones que hemos realizado en 6.3.3.4. En efecto, si decimos “se puede considerar que hacen referencia a herramientas heurísticas” y no “son herramientas heurísticas” es para subrayar la diferencia entre la herramienta heurística, elemento del modelo de competencia que usamos para la descripción de la actuación de los sujetos, y lo que éstos realmente hacen o dicen que hacen. En este caso, lo que dicen que hacen —en contestaciones a preguntas de las que no damos cuenta en este texto— se distingue al menos del uso competente de la herramienta heurística “consideración de un caso” en que a) creen que lo que están haciendo no es legítimo —o no es “matemático”— y b) no son conscientes de estar resolviendo un problema distinto del problema original.

[47] Los procedimientos propios de clases de problemas no formaron parte de la instrucción, ni se examinan en este trabajo. Pertenecen a lo que hemos llamado escenarios de carácter local. En versiones posteriores del curso de resolución de problemas de matemáticas que impartimos —en las que, por otro lado, la rejilla que aquí analizamos se ha usado como material de enseñanza— hemos incorporado también algunas clases de problemas y los métodos o los procedimientos propios asociados a ellas, en particular hemos introducido una versión refinada de este componente subjetivo. El análisis del comportamiento de los alumnos al resolver esas clases de problemas podría ser objeto de otro trabajo.

Finalmente, en “traducir a una expresión matemática general” aparece el sistema de signos del álgebra simbólica y la tarea de expresar en él lo que se produce en la resolución.

Por lo que respecta a las valoraciones que dieron los alumnos a los componentes que acabamos de describir, no hay que olvidar que tuvieron que calificar no sólo los componentes que se correspondían con los que ellos habían expresado en la primera parte de la prueba, sino los veintiuno que nosotros compilamos, y, además, que tenían que valorarlos con respecto a los cuatro problemas y no sólo con respecto al problema o a los problemas en cuya solución hubieran mencionado que, según ellos, habían desempeñado algún papel.

En la tabla 6.7, presentamos, en las dos primeras columnas, el número de orden de cada componente en el formulario que se entregó a los alumnos y los componentes ordenados según su valoración (media) en la prueba inicial, y, en las seis siguientes, las valoraciones de cada componente y el número de orden según esa valoración en la prueba inicial (media de los cuatro problemas), respecto de la tarea de resolver problemas en general y en la prueba final (media de los cuatro problemas), respectivamente.

ord.	Componente	P. inicial		P. ini. gen		P. final	
prev.		val.	ord.	val.	ord.	val.	ord.
3	Leer para comprender el contenido.	9’14	1	9’65	1	9’26	1
20	Usar la lógica y el razonamiento.	8’1	2	9’15	2	8’05	2
5	Cerciorarse de lo que se afirma en el enunciado.	7’93	3	8’56	4	8’04	3
7	Aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes.	7’12	4	7’85	6	6’91	8
2	Averiguar qué se desconoce.	6’98	5	8’85	3	7’55	4
9	Examinar las relaciones entre los datos.	6’69	6	7’5	8	7’24	5
1	Utilizar una notación adecuada.	6’49	7	8’06	5	7’13	6
16	Poner el problema en ecuaciones.	6’35	8	7’59	7	6’21	10
10	Entresacar los datos.	6’23	9	7’32	10	7’07	7
6	Examinar algunos casos particulares.	5’18	10	6’76	12	6’33	9
4	Cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado.	4’8	11	7’38	9	5’86	11
8	Examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio.	4’69	12	6’71	13	5’64	14
12	Examinar las combinaciones posibles.	4’66	13	6’06	14	4’96	15
11	Decidir entre varios enfoques posibles.	4’36	14	6’85	11	5’65	13
18	Traducir a una expresión matemática general.	4’08	15	5’56	15	5’79	12
15	Probar ejemplos hasta dar con la respuesta.	3’79	16	5’26	18	4’53	17
13	Examinar ejemplos en busca de una idea feliz.	3’54	17	4’29	20	4’9	16
17	Recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes.	2’99	18	5’79	16	3’36	20
19	Distinguir casos.	2’57	19	5’41	17	4’39	18
14	Imaginar que se realizan las acciones…	2’49	20	4’32	19	3’82	19
21	Suponer que ya se tiene el resultado del problema.	1’96	21	3’47	21	3’27	21

tabla 6.7

En las columnas tercera y cuarta de la tabla 6.7 puede verse la media de las valoraciones en la prueba inicial y cómo quedan ordenados los componentes. El rango de variación de las calificaciones es muy grande, con una media global que se sitúa escasamente por encima del centro de la escala (5’24). Los componentes que se sitúan en cabeza (media global mayor que seis) son los que corresponden a la fase de comprensión, algunos de los que hemos asociado con la concepción de la naturaleza de la tarea, el que corresponde a una destreza y la versión del método cartesiano. Como la pregunta que se les hizo a los alumnos se refería al valor de cada uno de los componentes para la resolución de los problemas que acababan de resolver, puede pensarse que esta distribución de valores medios de los componentes está muy ligada a la naturaleza concreta de esos problemas y a lo que efectivamente hicieron los alumnos. Sin embargo, las valoraciones dadas cuando la pregunta no se refería a lo hecho en esos problemas concretos, sino a la tarea de resolver problemas de matemáticas en general, no son muy diferentes, como puede verse en las columnas quinta y sexta de la tabla 6.7. La media global en este caso es mayor (6'78), así como el valor dado a cada uno de los componentes, pero apenas hay variaciones en el orden en que se colocan los componentes. En la prueba final, como puede verse en las columnas séptima y octava de la tabla, las medias de los valores dados suben con respecto a las de la prueba inicial, excepto en dos casos que bajan ligeramente, con una media global de 6, pero la ordenación apenas difiere de la obtenida en la prueba inicial, mostrando una notable estabilidad en los juicios de los alumnos, sobre todo si se tiene presente que entre la realización de las dos pruebas transcurrieron los nueve meses de instrucción.

6.4.2.2. *La matriz de medias componentes/problemas de la prueba inicial.*

Esta matriz está obtenida promediando las 34 matrices componentes/problemas correspondientes a las valoraciones de los alumnos del grupo y representa lo que podríamos llamar el juicio del alumno medio sobre el valor de cada uno de los componentes para cada uno de los problemas.

El análisis taxonómico se realizó tanto de los componentes, descritos por la distribución de las valoraciones a lo largo de los problemas, como de los problemas, descritos por la distribución de las valoraciones a lo largo de los componentes. En la figura 6.4, mostramos el árbol correspondiente al análisis de los componentes y la matriz reordenada de acuerdo con ambos árboles.

	Cerciorarse de lo que se afirma en el enunciado	Usar la lógica y el razonamiento	Leer para comprender el contenido	Aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes	Poner el problema en ecuaciones	Utilizar una notación adecuada	Examinar las relaciones entre los datos	Averiguar qué se desconoce	Entresacar los datos	Imaginar que se realizan las acciones ...	Recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes
2	7,79	8,41	9,15	5,82	4,85	5,97	6,26	5,91	5,62	0,88	1,24
4	8,32	8,15	9,21	7,79	7,15	7,21	7,18	6,32	5,82	2,06	3,62
3	7,18	7,68	8,65	7,65	7,09	5,68	5,26	6,91	4,82	2,03	2,12
1	8,41	8,15	9,56	7,21	6,29	7,09	8,06	8,79	8,65	5,00	4,97

	Distinguir casos	Suponer que ya se tiene el resultado del problema	Cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado	Decidir entre varios enfoques posibles	Examinar las combinaciones posibles	Examinar algunos casos particulares	Examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio	Examinar ejemplos en busca de una idea feliz	Probar ejemplos hasta dar con la respuesta	Traducir a una expresión matemática general
2	3,68	1,50	4,74	4,21	6,15	8,29	7,68	5,76	6,53	5,24
4	3,47	2,35	5,50	4,06	4,29	7,09	6,26	3,79	4,68	5,62
3	1,85	2,18	4,50	4,56	3,71	4,06	3,62	2,97	3,29	3,62
1	1,29	1,82	4,44	4,59	4,50	1,29	1,21	1,62	0,65	1,85

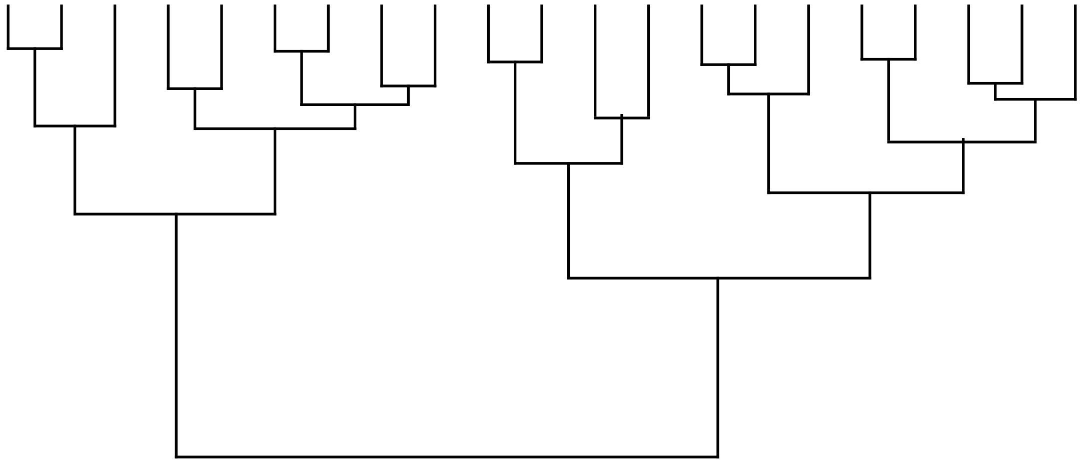


Figura 6.4

En el caso del análisis de los problemas, se obtiene un árbol con estructura de escalera en el que se unen en primer lugar los dos problemas aritméticos que no son PAVOC (distancia 22’09), luego se incorpora el problema de geometría (distancia 27’60) y, finalmente, y a mayor distancia (38’79) el problema que es un PAVOC. Aunque estas distancias no son demasiado grandes (en este caso la distancia máxima es 210), el que se le pueda encontrar coherencia a la manera como se organizan los cuatro problemas, indica que la distribución de las valoraciones de los componentes se ve afectada por algún rasgo de los problemas. El hecho de que el problema que está enunciado como un problema de probar se una antes con un problema de encontrar que éste con otros problemas de encontrar muestra que no parece que sea éste el rasgo distintivo más fuerte para los alumnos.

El árbol taxonómico de los componentes, por su parte, tiene estructura dicotómica: hay dos grandes grupos de componentes, entre los que la distancia es 16’88 (sobre un máximo de 40), que se pueden descomponer también en subgrupos de forma dicotómica. Esos dos grupos se pueden distinguir sin necesidad de atender a la distribución de las valoraciones a lo largo de los problemas, ya que en uno de ellos se encuentran todos los componentes cuya valoración media es inferior a 6 (en el rango 1'96-5'18) y en el otro aquellos cuya valoración media es superior a 6 (rango 6'23-9'14). Además, si se examina la lista de los componentes ordenados por su valoración media, no hay ningún par de componentes sucesivos entre cuyas medias haya una distancia mayor que la que hay entre 5'18 y 6'23, de modo que los grupos se distinguen más por estas medias que por la distribución de las valoraciones. Ya hemos indicado al examinar la ordenación por medias cuáles son los componentes cuya media es superior a 6, que ahora constituyen uno de los grupos.

El análisis taxonómico permite afinar algo más y no limitarse a constatar cuáles son los grandes grupos, ya que la técnica utilizada no construye la taxonomía por procedimientos divisivos —es decir, partiendo de todos los elementos como un grupo y dividiéndolo en grupos cada vez más finos— sino aglomerativos —es decir, que parte de los elementos separados y va construyendo grupos con ellos y con los grupos ya construidos— de modo que refleja de hecho de forma más fiel la similitud entre los elementos singulares que entre los grandes grupos[48].

Así, dentro del grupo con medias superiores a 6, se pueden distinguir otros dos. En el primero se agrupan los componentes "leer para comprender el contenido", "cerciorarse de lo que afirma el enunciado" y "usar la lógica y el razonamiento", que se caracterizan por tener valores muy altos para todos los problemas. En el segundo, cuyas medias son más bajas, se puede distinguir un subgrupo formado por "utilizar una notación adecuada", "averiguar qué se desconoce", "examinar las relaciones entre los datos" y "entresacar los datos" que ya no se caracteriza por la media sino porque tienen valores más altos para el problema 1 —el PAVOC— y más bajos para el problema 3 —el geométrico— que los otros componentes del grupo, "aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes" y "poner el problema en ecuaciones".

En el grupo de componentes con valores inferiores a 6, un subgrupo lo forman los cuatro componentes con medias más bajas, que se agrupan en dos parejas que se distinguen por tener valores muy bajos para el problema 2 y más altos para el 1 —"imaginar que se realizan…" y "recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes", o viceversa —"distinguir casos", "suponer que ya se tiene el resultado del problema". Los componentes cuyos valores medios se sitúan entre 3'54 y 5'18 se agrupan en dos subgrupos, que se distinguen en función de si la valoración del componente para el problema 1 es muy baja o no: los dos componentes que indican acciones de gestión y "examinar las combinaciones posibles" están en este segundo caso. El subgrupo en que los valores para el problema 1 es muy bajo tiene aún dos subgrupos que se distinguen porque en uno de ellos los valores para los problemas aritméticos que no son PAVOC son más altos: ahí están las dos versiones de la herramienta heurística "consideración de un caso" que incluyen indicación de lo que se espera de su uso, quedando en el otro subgrupo "examinar ejemplos en busca de una idea feliz", "probar ejemplos hasta dar con la respuesta" y "traducir a una expresión matemática general".

---

[48] Como indican Sneath & Sokal (1973), ésta es una de las características que distingue la técnica que estamos utilizando aquí del análisis de componentes principales.

La comparación de la ordenación por medias y la distribución en grupos que proporciona la técnica taxonómica y el examen de la matriz reordenada[49] muestra que las medias tienen una influencia importante en la configuración de los grandes grupos y en el agrupamiento de los componentes que presentan valores extremos. Ahora bien, en la zona central de la escala, los grupos que produce la técnica taxonómica no siguen estrictamente el orden de las medias, sino que dependen de la distribución de los valores a lo largo de los problemas. Cabe pues concluir que los grupos están formados por componentes que los alumnos juzgan que son siempre muy valiosos, otros cuyo valor les parece en cualquier caso escaso, otros que son muy valiosos en unos casos y en otros no y, finalmente, otros de valor no muy elevado en unos casos y escaso en otros. Además el valor de los componentes para el problema 1, que en la taxonomía de los problemas es el último que se agrupa, parece tener un papel destacado en la formación de esos últimos grupos.

6.4.2.3. *La matriz de medias componentes/problemas de la prueba final.*

Al igual que la matriz analizada en el apartado anterior, ésta está obtenida promediando las 34 matrices componentes/problemas correspondientes a las valoraciones de los alumnos del grupo.

El análisis taxonómico también se realizó tanto de los componentes, descritos por la distribución de las valoraciones a lo largo de los problemas, como de los problemas, descritos por la distribución de las valoraciones a lo largo de los componentes. En la figura 6.5, mostramos el árbol correspondiente al análisis de los componentes y la matriz reordenada de acuerdo con ambos árboles.

[49] A la hora de hacer esta comparación hay que tener en cuenta que la presentación de la estructura taxonómica en forma de árbol que se eligió al escribir el programa de ordenador que los dibuja no considera para nada las valoraciones medias de los elementos o de los grupos a la hora de decidir cuál de los dos que se juntan en una etapa del cálculo se va a colocar a la izquierda y cuál a la derecha. Lo que hace el programa cuando junta dos grupos es colocar a la izquierda el que se formó a menor distancia, de modo que el árbol tiene siempre una estructura iterativa de escaleras ascendentes.

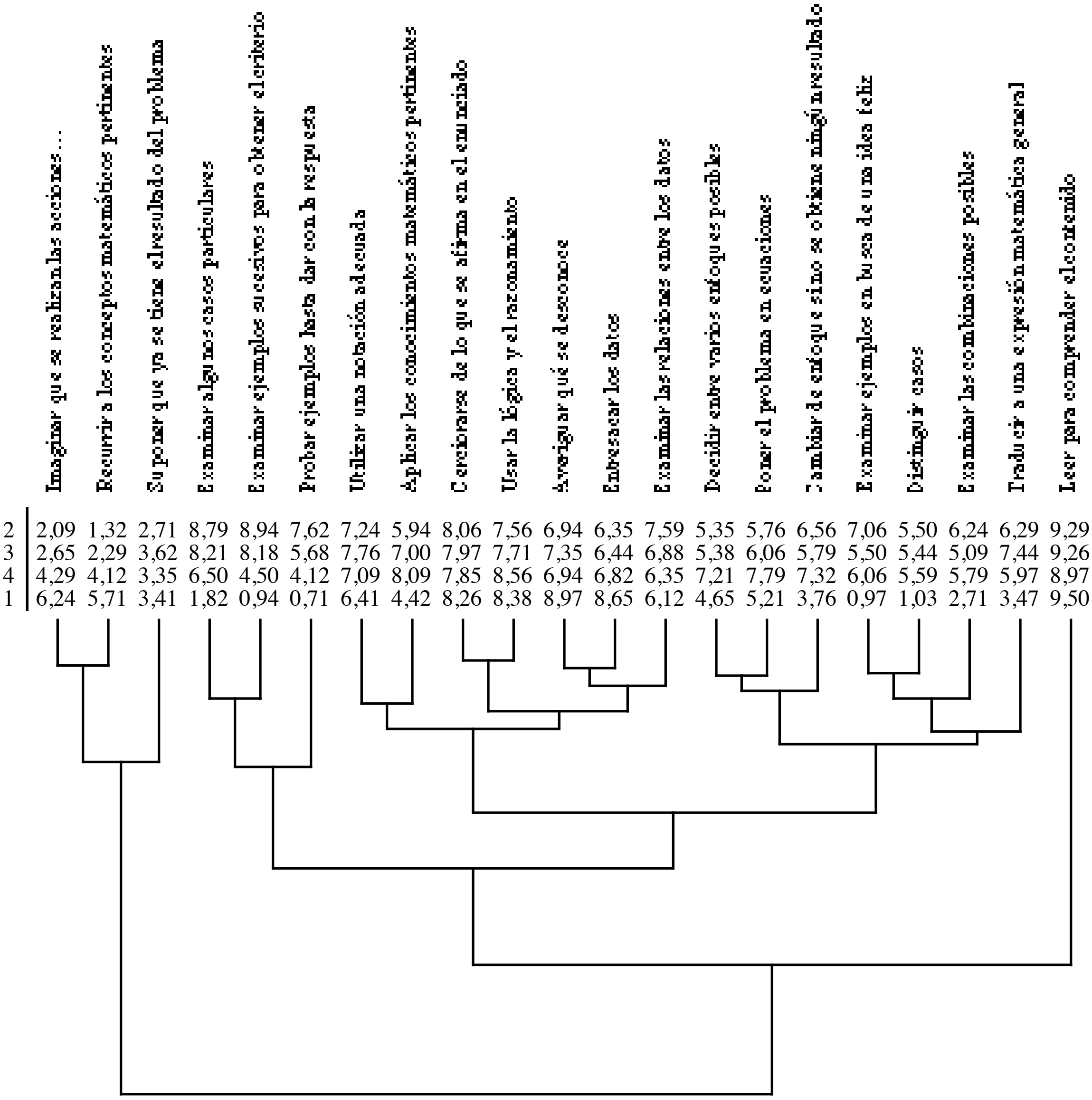


Figura 6.5

En el caso del análisis de los problemas, se obtiene de nuevo un árbol con estructura de escalera en el que, al igual que en la prueba inicial, se unen en primer lugar los dos problemas aritméticos que no son PAVOC (distancia 13’79), luego se incorpora el problema de geometría (distancia 25’46) y, finalmente, y a mayor distancia (52’13) el problema que es un PAVOC. Es decir, el grupo es similar al de la prueba inicial tanto desde el punto de vista de su forma como de la ubicación de los problemas de cada tipo. Los valores de las distancias nos indican que el problema que en la prueba inicial se veía como distinto ahora se concibe como aún más distinto y que los dos problemas aritméticos no verbales se juzgan como aún más similares, pese a que también ahora uno es de encontrar y el otro de probar.

El árbol taxonómico de los componentes no tiene, por el contrario, una estructura global del mismo tipo que la de la prueba inicial: aquí no aparecen los componentes separados en dos grupos con una línea divisoria trazada por la media de las valoraciones, sino que una serie de grupos de componentes se van agrupando uno tras otro en forma de escalera. Aunque esta estructura global sea distinta, los grupos pequeños son bastante similares a los de la prueba inicial. Así, del grupo de componentes con valores muy altos se separa “leer para comprender el contenido” al aumentar de 9’14 a 9’26 su valor medio, mientras los otros dos se mantienen en valores casi idénticos a los anteriores, y se unen, a menor distancia que en la prueba inicial —4’29 frente a 7’81—, con el grupo de componentes de valores altos, en el que la única variación es la caída de “poner el problema en ecuaciones”. El grupo de componentes con valores bajos pierde a “distinguir casos”, que aumenta de valor y se incorpora a un grupo en el que hay otras versiones de herramientas heurísticas; además los valores de “imaginar que se realizan…” y “recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes” aumentan para el problema 1 y, en menor medida, para el problema de geometría, ampliando su diferencia respecto a los valores para los otros problemas, mientras que el aumento ligero de valor de “suponer que ya se tiene el resultado del problema” se distribuye uniformemente por los cuatro problemas.

El resto de componentes, que se sitúan en la zona central respecto a su valoración media, con las incorporaciones indicadas, sí que sufre un cambio notable en la forma en que se agrupan, ya que los componentes “examinar algunos casos particulares”, “examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio” y “probar ejemplos hasta dar con la respuesta” se separan de los demás para formar un grupo propio que está a más distancia del de los demás que éste del grupo de los componentes con valores altos. Esa separación se produce a pesar de que las valoraciones medias de estos tres componentes se encuentran repartidas entre las de los demás componentes de la zona central, por lo que sólo puede atribuirse a la distribución a lo largo de los problemas. Si se examina la matriz reordenada, salta a la vista que estos componentes tienen valores muy bajos para el problema que es un PAVOC y más bajos que los otros componentes para el problema de geometría, mientras que tienen valores más altos que los otros componentes para los otros dos problemas aritméticos. El grupo del que estos tres componentes se han desgajado, y que en esta ocasión se agrupa antes con los de valores altos, está formado por dos subgrupos, uno en que están los componentes de gestión y “poner el problema en ecuaciones”, que tiene valores similares para todos los problemas —con un ligero pico en el problema de geometría—, y otro en el que están “examinar las combinaciones posibles”, “examinar ejemplos en busca de una idea feliz” “traducir a una expresión matemática general” y “distinguir casos”, que se distingue del anterior por tener un valor bajo en el problema 1.

En líneas generales pues, la distribución de las valoraciones a lo largo de los problemas aumenta su importancia frente a la valoración media, al comparar la taxonomía correspondiente a la prueba final con la de la prueba inicial. Además, los valores de problema 1, siguen teniendo un papel importante en la descripción de la similitud entre los componentes.

Esta singularidad del problema que es un PAVOC también se pone de manifiesto si se calcula la media de las valoraciones de los componentes para cada problema. En efecto, a diferencia de los demás problemas cuyas medias aumentan de la prueba inicial a la final, la media de éste se mantiene estable, como puede verse en la tabla siguiente:

problema	media inicial	media final
PAVOC	5’02	5’03
geométrico	4’73	6’35
aritmético de probar	5’71	6’34
aritmético de encontrar	5’51	6’27

6.4.2.4. *Las matrices individuos/componentes.*

A partir de las 34 rejillas componentes/problemas se construyeron cuatro matrices individuos/componentes, una para cada problema, seleccionando las filas correspondientes de las rejillas iniciales. Estas matrices presentan pues la distribución de las valoraciones de los componentes entre los alumnos del grupo y, alternativamente, la distribución de las valoraciones que da cada alumno a lo largo de los componentes —para cada uno de los problemas. A partir de ellas se construyó otra matriz individuos/componentes promediando los valores correspondientes a los cuatro problemas. Esta matriz de medias permite por tanto examinar la similitud de los componentes sin tomar en consideración la variación debida a los problemas concretos que se usaron en la prueba. Dos componentes se agruparán aquí en la medida en que, si un individuo le da un valor determinado a uno de ellos, le dé un valor cercano al otro. También permite examinar a los individuos descritos por los valores que dan a los distintos componentes. En este caso, los grupos representarían estilos de resolutores. Otra matriz, cuyo análisis ofrece una información del mismo estilo, es la correspondiente a las valoraciones dadas cuando la pregunta se refería a la tarea de resolver problemas en general y no en cada uno de los problemas planteados.

El análisis taxonómico se realizó, pues, aunque con finalidades distintas, tanto de los componentes, descritos por la distribución de las valoraciones a lo largo de los individuos, como de los individuos, descritos por la distribución de las valoraciones a lo largo de los componentes. Ambos análisis se realizaron para los datos obtenidos de la prueba inicial y los obtenidos de la prueba final. También se realizaron los análisis de las matrices individuos/componentes de cada uno de los problemas.

En las figuras 6.6, 6.7 y 6.8, mostramos los árboles correspondientes a los análisis de los componentes y las matrices reordenadas de acuerdo con ambos árboles, para la prueba inicial, la prueba final y la tarea en general, respectivamente.

	Leer para comprender el contenido	Cerciorarse de lo que se afirma en el enunciado	Usar la lógica y el razonamiento	Averiguar qué se desconoce	Aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes	Poner el problema en ecuaciones	Examinar las relaciones entre los datos	Entresacar los datos	Utilizar una notación adecuada	Examinar algunos casos particulares	Examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio	Examinar ejemplos en busca de una idea feliz	Probar ejemplos hasta dar con la respuesta	Decidir entre varios enfoques posibles	Examinar las combinaciones posibles	Cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado	Recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes	Suponer que ya se tiene el resultado del problema	Imaginar que se realizan las acciones...	Distinguir casos	Traducir a una expresión matemática general
26	10,0	9,50	10,0	10,0	9,50	9,75	10,0	7,50	9,25	8,25	7,75	7,25	5,50	6,25	7,50	9,50	1,00	3,00	5,50	5,75	7,00
32	10,0	7,00	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	7,75	3,75	3,25	2,50	0,00	7,25	10,0	0,00	0,00	0,00	2,00	4,50	10,0
4	10,0	9,50	8,50	9,25	5,50	6,25	8,75	8,75	10,0	3,75	5,75	3,50	4,50	5,75	8,25	9,00	2,50	2,50	6,50	2,25	3,50
22	10,0	10,0	8,00	10,0	4,50	5,25	8,00	8,00	3,75	7,50	4,75	4,50	4,00	4,50	6,25	4,00	2,50	0,00	6,75	3,25	2,00
27	10,0	10,0	10,0	7,50	6,50	5,25	6,25	10,0	2,25	7,75	7,50	8,75	7,50	5,50	7,50	6,25	5,00	0,00	5,00	0,00	4,75
17	9,75	9,25	7,25	7,00	6,75	3,00	5,50	9,75	0,00	5,75	6,00	6,25	7,25	5,00	6,75	7,25	1,00	7,00	8,50	4,50	0,50
19	7,25	5,50	6,25	6,75	6,25	5,00	4,50	4,00	4,75	5,25	5,75	6,25	4,50	5,00	3,75	3,50	0,00	0,00	1,50	4,50	1,50
23	5,50	5,00	8,75	5,50	6,00	4,00	3,75	2,25	4,75	7,25	5,50	3,00	3,00	3,50	4,25	6,75	3,00	0,00	0,50	1,75	1,25
12	8,00	7,50	6,25	7,00	4,00	5,25	0,00	5,25	4,75	1,25	5,00	3,75	4,75	4,00	3,25	5,25	2,50	0,00	0,00	2,00	5,00
16	8,50	7,00	4,75	2,75	3,25	2,25	3,25	6,75	5,50	5,50	5,00	6,75	4,00	5,00	3,25	5,50	2,50	0,00	0,00	2,75	0,00
15	10,0	6,25	5,00	4,50	1,50	3,25	2,25	2,00	0,00	6,50	5,25	4,50	3,50	2,00	4,25	0,00	0,00	0,50	0,25	3,25	1,75
18	10,0	9,50	8,75	10,0	7,25	6,00	4,75	6,00	10,0	6,25	5,75	2,75	3,50	6,25	2,75	8,50	2,50	0,00	0,00	1,25	0,00
28	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	7,50	5,00	5,00	10,0	3,75	3,75	2,50	2,50	7,25	7,25	8,75	2,50	0,00	0,00	1,25	5,00
20	10,0	8,75	7,25	8,00	7,50	5,75	7,00	9,25	8,00	5,25	4,50	5,00	6,75	7,75	6,00	6,25	0,00	0,00	0,00	0,25	4,50
21	8,75	9,25	9,50	9,00	6,75	3,75	5,50	7,25	6,50	3,25	0,00	4,25	2,00	9,00	5,25	7,50	4,75	0,00	2,00	0,00	4,75
1	10,0	5,75	8,75	5,00	5,75	5,75	6,25	6,50	7,75	4,00	3,25	4,00	3,25	3,75	6,50	4,00	3,25	2,75	2,00	1,50	3,75
34	10,0	7,50	6,00	7,00	6,50	6,00	6,25	6,50	4,75	6,50	2,00	5,50	3,50	4,25	4,25	3,75	4,25	0,00	2,00	3,00	3,50
9	7,75	7,75	8,75	6,00	5,75	7,75	5,00	3,75	6,25	4,50	0,00	1,50	2,50	2,25	5,75	2,50	1,50	1,25	2,25	0,00	0,50
6	10,0	10,0	9,75	7,00	7,75	8,50	6,75	7,25	7,75	6,00	5,00	5,00	5,00	0,50	0,00	0,25	2,50	0,00	0,00	0,25	2,25
8	10,0	8,50	8,25	8,25	8,25	5,75	7,75	5,75	5,50	7,00	4,75	1,75	4,00	3,50	2,00	1,50	2,75	0,00	0,25	0,75	1,75
10	10,0	9,00	6,50	4,75	8,75	8,00	7,25	5,00	3,50	5,00	5,75	2,25	4,50	2,50	4,25	2,50	0,00	0,00	4,00	2,50	4,50
13	10,0	8,75	8,00	4,00	8,75	6,50	9,00	5,25	5,75	4,50	3,00	4,50	3,00	3,75	2,00	4,00	2,50	1,50	3,75	4,25	5,25
11	10,0	8,00	7,50	10,0	8,00	6,50	9,25	6,25	10,0	5,00	5,50	0,00	3,50	0,50	5,75	4,25	2,25	0,00	2,25	5,50	5,50
5	10,0	6,75	9,00	6,50	9,50	9,25	6,75	7,25	8,50	4,00	3,75	0,00	2,50	6,00	5,75	3,00	6,50	5,50	1,75	3,00	7,25
30	9,50	8,25	8,75	7,50	8,25	7,25	9,25	7,25	7,75	6,50	7,00	2,00	2,50	5,00	2,50	5,00	6,75	4,00	2,00	3,50	8,00
2	9,50	8,75	10,0	7,25	9,25	8,25	6,50	6,00	8,50	5,50	4,75	5,00	4,25	6,75	6,25	9,00	5,00	5,00	5,00	3,50	4,75
14	10,0	7,50	9,25	6,25	7,25	5,25	9,00	7,75	8,25	6,50	6,25	0,00	5,25	6,25	7,50	5,00	4,25	4,50	6,00	1,75	4,00
7	8,00	6,75	9,25	3,25	6,50	6,50	9,50	4,25	9,25	6,50	6,75	4,50	3,00	6,00	5,75	3,75	5,00	7,75	0,75	0,75	9,00
25	9,00	4,25	6,50	7,00	8,00	7,25	6,75	8,00	8,50	5,00	4,00	3,75	4,25	1,00	2,00	3,75	5,50	3,75	1,00	5,52	7,25
29	6,75	7,50	9,50	6,00	10,0	7,50	5,50	5,25	8,50	2,50	2,50	3,75	3,00	3,25	3,25	2,25	3,00	4,50	0,25	4,75	5,75
31	5,75	4,50	6,50	6,00	8,50	7,50	7,50	4,75	4,00	4,00	3,75	0,75	3,00	0,75	0,75	0,75	6,25	8,00	1,50	1,75	4,50
33	7,50	7,25	5,25	5,25	6,50	7,25	6,75	7,00	6,75	1,75	5,25	4,50	7,25	4,50	4,00	4,00	3,75	5,25	7,00	4,50	3,75
24	9,25	8,75	9,75	0,25	7,25	7,25	7,00	6,25	4,50	1,25	1,25	0,00	0,25	1,00	0,00	5,75	2,50	0,00	2,00	3,50	6,00
3	10,0	10,0	7,75	10,0	6,50	7,50	10,0	0,00	7,50	9,25	9,50	3,00	0,75	2,25	3,75	10,0	4,25	0,00	2,50	0,00	0,00

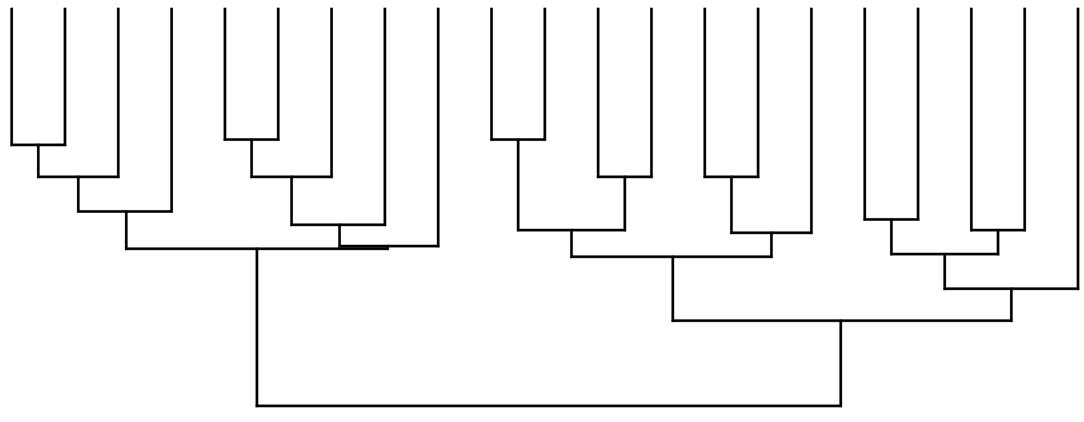


Figura 6.6

	Leer para comprender el contenido	Cerciorarse de lo que se afirma en el enunciado	Usar la lógica y el razonamiento	Averiguar qué se desconoce	Aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes	Poner el problema en ecuaciones	Examinar las relaciones entre los datos	Entresacar los datos	Utilizar una notación adecuada	Examinar las combinaciones posibles	Examinar ejemplos en busca de una idea feliz	Decidir entre varios enfoques posibles	Examinar algunos casos particulares	Examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio	Cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado	Traducir a una expresión matemática general	Probar ejemplos hasta dar con la respuesta	Distinguir casos	Recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes	Imaginar que se realizan las acciones...	Suponer que ya se tiene el resultado del problema
11	10,0	8,75	9,50	6,75	8,50	8,50	10,0	9,50	10,0	8,75	6,25	7,50	7,00	7,00	8,00	4,75	6,50	6,75	2,50	5,50	4,25
30	10,0	9,00	9,25	6,75	8,50	8,50	10,0	9,50	10,0	8,75	6,00	7,50	7,00	7,00	8,25	5,00	7,50	6,75	4,00	6,00	2,00
26	10,0	10,0	9,00	9,25	8,50	7,50	9,75	9,25	10,0	8,50	6,25	8,25	8,75	8,50	7,50	6,75	3,75	7,00	6,25	6,75	1,00
22	9,75	10,0	8,75	10,0	6,25	6,25	8,00	10,0	6,25	4,50	5,75	4,25	6,25	5,00	6,75	4,75	5,00	1,25	5,00	9,00	0,00
27	10,0	10,0	10,0	10,0	6,50	6,25	5,00	10,0	7,50	6,75	7,50	8,50	7,00	5,00	7,50	5,00	5,00	6,75	0,00	7,00	6,25
21	7,00	7,75	10,0	9,50	5,25	5,25	8,75	5,50	5,75	5,25	7,50	7,75	10,0	5,00	7,50	5,50	6,00	5,50	1,00	0,50	0,00
3	9,25	10,0	4,75	7,50	7,00	5,75	7,50	9,00	9,00	1,75	0,75	1,00	8,25	5,00	8,50	4,50	3,25	5,00	4,25	2,50	0,00
23	9,75	8,25	6,25	9,50	8,00	4,75	4,00	7,25	5,00	2,75	2,75	3,00	8,00	7,25	7,50	6,00	6,00	7,50	2,50	0,00	2,00
17	7,00	6,00	4,75	5,25	5,00	2,50	6,75	8,00	4,00	5,25	4,75	4,00	6,75	4,50	3,50	0,00	4,25	3,25	0,00	4,00	2,00
34	10,0	10,0	6,25	7,00	2,00	3,00	5,75	4,75	6,00	5,50	4,50	3,25	7,50	4,50	5,00	1,50	3,25	3,25	3,75	0,75	1,25
8	8,75	6,50	7,50	5,25	9,50	7,50	6,00	5,00	4,25	3,25	4,75	5,25	8,50	7,50	8,00	7,00	3,00	4,00	0,00	4,00	0,00
24	10,0	8,00	7,00	4,75	4,50	2,75	7,50	7,00	3,50	2,00	4,25	2,75	7,50	5,00	6,25	8,75	2,75	1,50	3,00	3,75	0,00
16	8,25	6,50	8,50	5,75	5,50	7,50	6,00	5,50	7,00	1,25	2,75	3,00	3,75	4,00	3,25	6,25	3,75	3,50	2,50	3,00	1,00
32	10,0	3,75	10,0	5,00	6,25	6,25	5,00	5,00	10,0	0,00	3,25	5,00	5,50	4,25	3,75	7,25	2,00	1,50	6,25	1,75	1,75
4	8,25	7,75	7,00	5,50	7,00	6,50	7,25	7,00	6,50	6,00	6,50	6,00	7,75	7,25	7,25	4,00	4,25	6,75	1,50	3,25	2,75
18	8,50	7,75	7,25	6,50	6,75	7,50	7,00	7,00	7,00	6,25	6,50	6,25	7,25	7,00	7,75	6,50	7,00	7,00	5,25	2,25	3,25
19	7,25	6,25	6,50	4,75	7,75	7,25	6,50	6,25	6,25	5,50	6,50	6,25	7,50	7,00	6,50	6,00	6,75	7,50	3,75	3,50	3,25
2	8,75	5,00	8,50	5,00	9,25	8,00	5,50	5,50	7,00	7,00	6,50	5,50	7,25	7,00	5,50	8,25	6,25	6,25	5,00	7,00	5,00
25	6,75	3,00	8,00	6,50	5,50	4,75	5,75	6,50	7,00	6,50	6,00	5,75	5,00	6,25	6,50	7,00	3,75	3,75	6,75	2,00	3,50
9	10,0	8,00	7,50	9,00	6,75	5,00	6,00	7,00	7,00	5,00	4,00	6,25	3,75	5,00	1,50	2,25	3,25	3,75	2,25	3,50	0,00
10	10,0	8,75	7,25	9,00	7,00	5,50	5,50	7,00	7,25	5,00	3,00	6,50	3,25	5,00	2,00	2,00	2,50	2,25	2,50	3,50	0,00
12	10,0	8,25	5,50	8,75	6,50	6,50	5,50	7,75	7,75	5,50	5,75	3,75	4,25	5,25	4,75	7,50	4,50	2,00	4,25	2,75	7,00
13	10,0	8,00	6,25	8,75	7,25	6,00	6,75	6,75	9,00	5,25	3,75	5,00	6,50	5,00	7,25	8,25	3,75	2,75	2,50	4,25	7,25
7	10,0	7,25	5,75	4,75	7,75	5,50	8,75	4,75	7,00	5,25	5,00	5,25	6,00	5,50	3,75	9,00	4,75	3,50	1,50	1,00	6,25
1	10,0	8,00	8,00	8,50	6,50	6,50	9,25	8,00	5,25	6,00	5,00	7,00	5,50	5,00	6,25	6,75	4,25	6,00	3,25	2,75	3,75
28	10,0	10,0	10,0	6,25	6,25	6,25	7,50	7,50	10,0	6,25	5,00	6,25	5,00	5,00	10,0	5,00	5,00	5,00	3,75	2,50	2,50
5	10,0	9,00	10,0	9,50	9,25	6,50	8,50	8,00	7,00	6,00	5,50	8,25	7,50	6,25	6,75	7,25	4,00	3,75	2,50	4,75	6,50
15	9,75	9,00	9,75	9,00	8,50	6,50	9,00	7,75	6,75	6,00	5,25	8,25	7,50	6,00	6,00	7,75	3,25	5,00	1,00	4,00	7,50
14	10,0	9,00	10,0	10,0	8,75	7,00	8,25	7,25	7,00	5,25	3,00	6,75	7,50	5,25	7,50	7,50	2,25	3,25	2,50	4,50	7,25
20	10,0	8,75	10,0	8,75	8,25	6,75	8,50	7,25	7,75	6,25	5,75	7,00	7,25	6,75	7,25	5,75	2,50	3,25	5,50	5,00	4,00
29	10,0	9,50	10,0	8,75	8,00	8,00	7,00	5,50	6,50	4,75	7,00	6,50	5,00	5,00	6,75	4,75	6,50	3,75	4,25	1,00	7,25
33	7,50	7,25	5,25	5,25	6,50	7,25	6,75	7,00	6,75	4,00	4,50	4,50	1,75	5,25	4,00	3,75	7,25	4,50	3,75	7,00	5,25
6	10,0	10,0	10,0	10,0	9,00	8,75	10,0	10,0	10,0	2,50	5,00	10,0	3,75	3,75	0,00	5,00	2,50	1,25	5,00	10,0	0,00
31	8,25	8,25	9,50	7,00	1,25	2,75	6,75	1,25	5,25	0,00	0,00	0,00	4,25	3,75	0,75	6,75	4,75	4,50	5,50	0,75	7,50

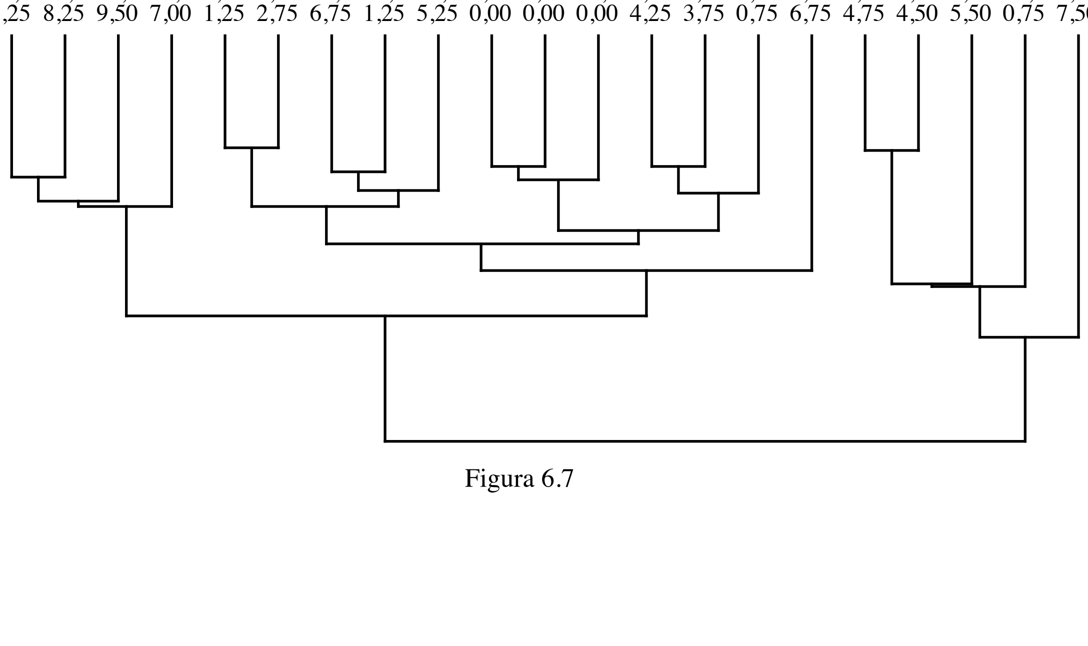


Figura 6.7

	Leer para comprender el contenido	Usar la lógica y el razonamiento	Averiguar qué se desconoce	Cerciorarse de lo que se afirma en el enunciado	Utilizar una notación adecuada	Decidir entre varios enfoques posibles	Examinar las combinaciones posibles	Cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado	Examinar algunos casos particulares	Examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio	Aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes	Poner el problema en ecuaciones	Examinar las relaciones entre los datos	Entresacar los datos	Traducir a una expresión matemática general	Distinguir casos	Recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes	Examinar ejemplos en busca de una idea feliz	Probar ejemplos hasta dar con la respuesta	Imaginar que se realizan las acciones...	Suponer que ya se tiene el resultado del problema
9	8	9	9	10	10	6	5	9	7	7	7	5	5	6	2	3	8	4	7	0	4
31	5	8	10	4	7	4	3	4	4	6	7	8	5	6	5	3	7	2	5	1	7
17	9	7	7	9	0	5	6	5	7	5	7	6	6	7	4	6	7	5	7	9	7
25	9	6	8	5	9	7	6	7	6	6	7	5	6	7	6	8	4	5	4	4	4
12	8	9	7	8	7	5	6	5	7	7	6	5	8	6	6	4	6	3	3	4	4
16	10	10	7	8	8	3	3	5	2	7	8	8	8	7	8	5	5	3	4	4	2
5	10	9	7	7	7	5	5	5	9	9	10	10	8	8	7	5	8	3	5	4	7
7	10	9	7	8	9	9	9	5	4	7	7	7	8	6	9	5	8	4	2	1	7
11	10	9	10	9	10	4	6	7	6	5	9	8	8	7	7	8	8	0	7	8	3
33	10	9	8	10	7	4	7	9	6	5	9	9	7	8	9	8	9	5	6	9	10
6	10	10	10	10	9	4	5	7	6	8	10	9	7	10	7	5	8	9	9	2	0
29	9	10	8	9	9	7	8	6	7	8	10	9	8	9	5	5	5	4	8	0	6
22	10	8	10	9	7	7	6	6	8	7	8	9	9	10	5	9	8	6	7	7	3
30	10	10	10	10	7	7	6	7	8	8	8	7	9	9	6	4	7	6	4	4	3
1	10	10	9	7	8	7	7	8	7	7	6	7	9	8	5	8	5	4	5	5	5
19	10	10	9	8	6	7	8	8	7	6	10	8	6	9	7	8	6	4	5	5	3
21	10	10	10	8	10	9	9	9	7	6	7	7	9	10	7	8	7	6	6	5	5
34	10	8	10	10	9	7	8	8	7	6	8	8	8	10	6	8	6	6	7	6	7
20	10	9	9	8	10	7	6	7	6	7	7	8	8	8	7	6	7	6	6	5	6
14	10	10	9	9	10	9	9	9	8	8	7	8	8	7	6	7	5	5	7	9	5
23	10	10	10	10	9	7	7	10	9	8	8	8	6	6	4	7	6	5	6	5	0
26	10	10	10	10	10	4	7	10	10	10	10	8	10	8	4	5	5	5	4	6	0
18	10	10	10	10	10	8	6	10	8	7	7	6	9	9	4	6	5	5	5	1	0
2	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	10	9	9	10	4	5	5	2	5	5	2
13	10	10	8	10	10	7	9	8	8	6	8	9	7	7	7	6	0	3	6	6	0
4	10	6	10	10	10	8	8	9	8	8	9	9	9	9	7	8	6	0	3	0	4
10	10	10	10	10	10	9	8	10	9	7	5	6	8	4	10	8	5	9	7	6	7
28	10	10	5	10	10	10	10	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	10	5	5	5
27	10	10	10	10	5	10	9	9	9	8	10	10	6	10	5	5	7	10	10	10	2
8	10	10	10	4	3	3	2	6	5	4	6	10	4	3	3	2	0	1	4	3	0
32	10	10	10	5	10	10	0	5	5	5	10	8	10	10	5	2	0	2	2	2	0
24	10	10	5	9	5	6	0	9	0	0	8	8	8	7	5	5	5	0	0	4	0
3	10	9	10	10	10	7	0	10	7	8	7	6	9	0	0	0	9	1	1	2	0
15	10	6	9	8	3	4	3	0	10	9	6	5	5	3	2	0	5	3	7	0	0

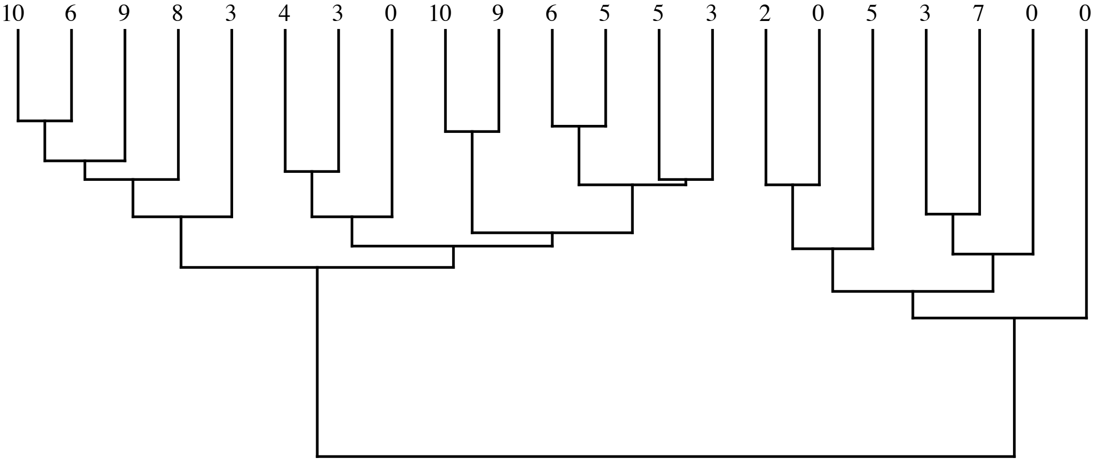


Figura 6.8

6.4.2.5. *Análisis de los componentes descritos por la distribución de las valoraciones por los individuos*.

En la matriz correspondiente a la prueba inicial (figura 6.6), aparecen los dos mismos grandes grupos que hemos descrito al examinar la matriz de medias componentes/problemas, que se encuentran ahora a 126’53 de distancia (sobre un máximo de 340). El grupo de los componentes con valoraciones altas aparece compuesto de dos subgrupos, que sólo se diferencian de los observados anteriormente en la posición del componente “averiguar qué se desconoce”, que se une en esta ocasión con los componentes que tienen que ver con la fase de comprensión. El otro grupo también está compuesto por subgrupos con composición casi idéntica a la observada en la matriz componentes/problemas, ya que el único componente que varía es “traducir a una expresión matemática general”, que se une en esta ocasión antes con los componentes cuya media es muy baja que con los que tienen una media similar a la suya, como ocurría en la matriz componentes/problemas; de hecho, este componente es el antepenúltimo que entra a formar grupo —y lo hace a distancia 89’25—, lo que permitiría considerarlo alternativamente como un componente singular.

En la matriz correspondiente a la prueba final (figura 6.7), desaparece la estructura global dicotómica, para dar paso a una estructura de escalera —de la misma forma que ocurría en el examen de la matriz componentes/problemas. Ahora bien, los grupos pequeños se mantienen de la prueba inicial a la final, sólo que ahora se ordenan en la estructura global de escalera siguiendo el orden de los valores medios de los componentes que los integran. Los únicos cambios que se producen son el paso de “probar ejemplos hasta dar con la respuesta” al grupo de valores medios bajos; el que “traducir a una expresión matemática general” siga siendo un componente singular, pero se una ahora con los grupos de valores medios; y el que “suponer que se tiene el resultado del problema”, cuyo valor medio es en esta ocasión más bajo que los del resto del grupo de valores bajos, sólo entre a formar parte de ese grupo en penúltimo lugar, y a una distancia de 95’78.

De la prueba inicial a la prueba final la composición de los grupos está más fijada pues por los valores medios de cada uno de los componentes que por la distribución a lo largo de los individuos.

Esto puede corroborarse además si se analiza también la matriz individuos/componentes correspondiente a las valoraciones respecto a la tarea de resolver problemas en general. En efecto, en ella los grupos (ver figura 6.8), aunque están marcados como siempre por los valores medios de los componentes que los integran, presentan una agrupación dependiente de la distribución por los individuos en la zona central del rango de variación de las medias, donde “cambiar de enfoque si no se obtiene ningún resultado”, “decidir entre varios enfoques posibles” y “examinar las combinaciones posibles” se agrupan separándose de “examinar algunos casos particulares” y “examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio”, que tienen medias similares. De modo que este hecho es achacable a los juicios de los alumnos tanto sobre el valor de los componentes respecto a los cuatro problemas que se les plantearon como con independencia de ellos. El hecho de que el análisis correspondiente a la prueba final indique una escasa influencia de la distribución de las valoraciones a lo largo de los individuos, puede interpretarse pues como una homogeneización del grupo de alumnos, en el sentido de que las diferencias entre ellos a la hora de valorar los componentes subjetivos —que, no hay que olvidarlo, son lo que formularon con anterioridad a la instrucción— tienen menos peso que las diferencias entre las valoraciones medias del grupo de alumnos.

6.4.2.6. *Análisis de los individuos descritos por la distribución de sus valoraciones a los componentes*.

Las matrices de medias individuos/componentes correspondientes a las pruebas inicial y final y la correspondiente a la pregunta sobre la tarea de resolver problemas en general las sometimos también al análisis taxonómico tomando a los individuos como elementos y las valoraciones dadas a los componentes como descripciones de los individuos. Con esta interpretación de los datos, los grupos producidos por la taxonomía representan pues las similitudes entre los individuos en función de sus juicios sobre lo que interviene en la tarea de resolver problemas.

En la matriz correspondiente a la prueba inicial, la taxonomía tiene el aspecto general de una escalera, es decir, no hay grupos claramente diferenciados sino una graduación de individuos y grupos de individuos que se encuentran a distancia cada vez un poco más grande. Además, las distancias no son grandes: si se desciende desde la última unión —que se produce a tan sólo 67’97— las distancias de los escalones siguientes son 66’26, 63’11, 60’87, 53’95, 51’25, 50’25: todos ellos muy cercanos entre sí.

El aspecto general de las otras matrices es muy similar en cuanto a su estructura global: de escalera más que dicotómico y con los peldaños superiores muy cercanos unos a otros, esto es, con distancias muy parecidas. Ahora bien, si la estructura global es tan similar, sucede todo lo contrario si se desciende a la observación de los grupos elementales que están integrados en tal estructura global: estos grupos elementales no contienen a los mismos individuos, ni cuando se compara la matriz de medias inicial con la correspondiente a la tarea general, ni cuando se compara con la final. Además, no resulta factible diferenciar qué es lo que caracteriza a los grupos por la descripción de ellos que proporciona la matriz reordenada, dado que las distancias entre unos y otros son tan pequeñas.

Cabe concluir de ello que la descripción de los individuos por las valoraciones que dan de los componentes subjetivos no permite diferenciar grupos estables de individuos que pudieran definir estilos de individuos.

6.4.3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

A partir de los análisis realizados cabe hacer las siguientes consideraciones, que resumen lo que han puesto de relieve tales análisis y apuntan explicaciones.

En primer lugar, la relación de los componentes subjetivos de la resolución de problemas de matemáticas antes de la instrucción dibuja un panorama del que está totalmente ausente cualquier acción que tenga que ver con la cuarta fase del modelo de Polya. Los problemas se conciben pues como una tarea que hay que realizar para darle una respuesta al profesor, tarea que culmina con la obtención de la respuesta: no se juzga que una parte del proceso de resolución del problema consista en cualquiera de las tareas que componen la fase de revisión-extensión, ni parece por tanto que se tenga presente otra función para la resolución del problema que la de obtener el resultado.

Esta ausencia de componentes que pudieran asociarse a la fase de revisión-extensión y su relación con la concepción de los alumnos de la naturaleza de la tarea de resolver problemas tiene su correlato con los componentes que sí que están presentes y que están además en primer lugar. En efecto, se observa que se destaca un grupo de componentes que los alumnos valoran como muy importantes para todos los problemas, que está formado por acciones correspondientes a la comprensión del problema, formuladas con más rasgos propios de los términos de los problemas de encontrar que de los problemas de probar. Junto a estos componentes relacionados con la fase de comprensión se encuentran también, valorados con calificaciones muy altas en todas las circunstancias, componentes que no están relacionados con fase alguna y que expresan rasgos de la concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas de matemáticas que tienen los alumnos, éstos son "usar la lógica y el razonamiento" y "aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes". Si la ausencia de componentes de revisión-extensión nos ha permitido atrevernos a enunciar rasgos de esa concepción, la presencia de estos dos sitúa claramente ésta en el mismo terreno: el de la aplicación de lo ya aprendido con el fin de obtener resultados, con "la lógica y el razonamiento" como una forma de proceder para obtenerlos. El cuadro se completa añadiendo que los otros dos componentes que forman parte del grupo de medias altas son "utilizar una notación adecuada" y "poner el problema en ecuaciones", con lo que el juicio de los alumnos sobre el proceso de resolución de problemas de matemáticas aparece como una versión escolar del ideal cartesiano.

Los componentes que están relacionados con elementos del modelo de competencia del tipo de las herramientas heurísticas y el gestor, aunque aparecieron mencionados y pudieron, por tanto, incorporarse a la lista de componentes subjetivos, no fueron calificados con valores altos, por término medio. Tanto ellos como el resto de los componentes que forman parte del grupo de valores que no son altos están "suspendidos" —con la excepción de "examinar algunos casos particulares" que "aprueba por los pelos"—, si se nos permite utilizar esa expresión de la vida escolar, que, por otra parte, es coherente con la elección de la escala de 0 a 10 para calificar, que fue la que se les propuso a los alumnos que utilizaran precisamente por el significado que ellos asocian a cada uno de los números de esa escala como consecuencia de su experiencia escolar. Hay que tener en cuenta que los valores que aquí se han examinado son medias y que, por tanto, lo que este suspenso indica no es que no haya individuos que los califiquen con otras notas, ni que los alumnos no juzguen que tales componentes no sean valiosos para resolver algunos problemas. De hecho, lo que muestra la taxonomía es precisamente que esos componentes forman grupos distintos en función de su distribución por los problemas y, también, aunque en menor medida, por los individuos; de modo que el valor de estos componentes no aparece para los alumnos como universal, sino dependiente del problema concreto que haya que resolver.

Dos observaciones pueden hacerse al menos. Por una parte, hay que tener en cuenta lo que para los alumnos es un problema de matemáticas. En el capítulo 2 ya indicamos que, al margen de cualquier caracterización que se haga de lo que es un problema de matemáticas, lo que *para un alumno* sea un problema de matemáticas no será tanto el reflejo de esa caracterización, sino la consecuencia de las prácticas escolares propias de su historia escolar, de modo que cualquier cosa que en una clase de matemáticas ha sido calificada de problema y asignada como tarea como tal contribuye a constituir lo que luego los alumnos identifican como problemas. Cualquier examen de las prácticas escolares usuales[50] conduce a que no pueda resultar extraño que estos componentes sean calificados con valores bajos en la prueba inicial.

Por otra parte, aunque los problemas que se propusieron a los alumnos en la prueba inicial, como hemos mostrado en los análisis que hemos realizado de ellos, sí que tengan potencial heurístico, ese potencial no se actualiza ni desde el punto de vista de la producción de enfoques razonables, ni desde el punto de vista de la complejidad heurística del proceso, en la actuación de los sujetos[51]. De modo que estos componentes, al estar poco presentes en la actuación de los alumnos, no pueden ser calificados con valores altos. Lo que nos parece que cabe concluir de ello es que, no sólo no pertenecen a la historia escolar del sujeto como acabamos de señalar, sino que tampoco son componentes *espontáneos*[52] del proceso de resolución de problemas de matemáticas. De hecho, los componentes que hemos relacionado con herramientas heurísticas, interpretándolos como versiones de ellas, se presentan a menudo en la actuación de los alumnos no como tales herramientas heurísticas, sino como procedimientos viciados por comprensiones erradas de lo que significa probar frente a comprobar, de la relación entre tipo y espécimen, o de los resultados que tienen el estatuto de conjeturas frente a los que están establecidos; quizá con la excepción de "examinar ejemplos sucesivos para obtener el criterio", ya que en él está incorporado el efecto de su uso y éste señala con relativa precisión su naturaleza[53]. Además, de la lista de herramientas heurísticas que hemos

---

[50] Cf., por ejemplo, Cerdán y Puig (1983) en donde lo que se examina es los problemas presentes en los libros de texto, o Schoenfeld (1988, 1989), para exámenes del funcionamiento de clases de matemáticas y de respuestas de alumnos a un cuestionario, respectivamente.

[51] Como hemos mostrado en el apartado anterior.

[52] Usamos aquí el término 'espontáneo' para aludir a lo que en los documentos que se han generado en torno a la reforma se han llamado 'estrategias espontáneas'. Queremos señalar que es un término que necesita ser precisado, si no se quiere que conduzca a interpretaciones viciadas por alguno de sus significados en el uso corriente.

[53] No es lo mismo "examinar ejemplos en busca de una idea feliz" porque lo que aquí se expresa como intención del uso de la herramienta heurística pertenece al terreno de las concepciones sobre la naturaleza de la

examinado en el capítulo correspondiente, sólo aparecen versiones de aquellas que de alguna manera están emparentadas con el ensayo y error asistemático[54] y nada que pueda ponerse en relación con las demás[55]. Si recordamos que el componente "probar ejemplos hasta dar con la respuesta" también lo hemos emparentado con el ensayo y error asistemático, podemos atribuir a esta manera de actuar un papel importante en la configuración de los componentes subjetivos que aparecen en la rejilla. Así, estos componentes entrarían a formar parte de la concepción que los alumnos tienen de la tarea de resolver problemas de matemáticas como lo que se hace a menudo para "ver si el problema se resuelve", por usar las palabras de un alumno. O, más aún, lo que se hace cuando no se hace lo que se debiera, como expresó otro alumno con las siguientes palabras: "en este problema *más que usar nada de matemáticas*, lo que he hecho ha sido probar con algunos ejemplos [...]" (cursiva nuestra).

Los componentes que se sitúan en el grupo calificado con valores muy bajos por término medio podría considerarse que no debieran incluirse en una lista de componentes subjetivos de la resolución de problemas de matemáticas ya que, pese a haber sido mencionados, los valores medios que reciben son realmente muy bajos. Sin embargo, el criterio que hemos adoptado ha sido, por el contrario, incorporarlos en la lista subrayando cuáles son los valores medios de modo que pueda interpretarse cuál es el sentido en que se presenta la lista: no se trata de establecer cuáles son los componentes subjetivos del proceso de resolución de problemas de matemáticas en cualquier circunstancia, sino de describir cuáles son los que se presentaron en unas circunstancias concretas cuando la descripción se hace desde una teoría particular y con unos instrumentos también particulares. En ese sentido, los componentes que se incorporaron a la rejilla al elaborarla a partir de las respuestas de los sujetos y que luego recibieron calificaciones bajas proporcionan también información para la descripción que se pretende, entre otras cosas precisamente el que su calificación haya sido baja.

---

resolución de problemas de matemáticas, vista, en este caso, como una versión de la "iluminación súbita", despojada de consideraciones sobre la estructura, y tornada pura magia.

[54] Kilpatrick (1967) encontró que lo que más a menudo hacían los alumnos es "ensayo y error", que él llama "una heurística" y que lo hacían incluso si no era lo mejor que se podía hacer. Nosotros, como consecuencia de la definición adoptada de herramienta heurística, hemos dejado de considerar que el ensayo y error sea una herramienta heurística. Sí que sería en este caso una "estrategia espontánea" de los alumnos, si precisamos que con "espontánea" estamos queriendo decir que los alumnos no han sido instruidos para actuar de esa manera, y no que tal manera de actuar responda a ninguna tendencia natural de los sujetos.

[55] Ni siquiera con la herramienta heurística "dividir el problema en partes" que en Cerdán y Puig (1983) se observó que era la que estaba más presente de forma implícita en el currículo del ciclo medio de EGB. Si no fuera porque las otras herramientas heurísticas, cuya presencia implícita en el currículo se determinó en ese trabajo que también era perceptible, fueron precisamente "consideración de un caso" y "examen de posibilidades", y por carecer de estudios equivalentes para otros niveles del sistema educativo, cabría deducir que los componentes subjetivos tienen poco que ver con lo que los problemas presentes en el currículo contienen de forma implícita desde el punto de vista de la heurística.

Algunas observaciones pueden hacerse sobre cuáles son los cuatro componentes que se encuentran en este caso. En primer lugar, podría pensarse que las calificaciones bajas provienen de la falta de comprensión de sus enunciados en la rejilla que se les dio a los alumnos para valorar. Sin embargo, precisamente estos cuatro componentes están expresados con palabras textuales extraídas de las respuestas de los alumnos y no sólo se corresponden, como ya hemos indicado anteriormente, con métodos o procedimientos, sino que responden efectivamente a acciones cuya realización puede constatarse en las resoluciones que los alumnos dieron a los problemas propuestos. A nuestro entender, "suponer que ya se tiene el resultado del problema" e "imaginar que se realizan las acciones…" son formulaciones excesivamente fieles a las propias del método y el procedimiento con que se corresponden, lo que hace que, sólo si se conocen el método o el procedimiento, puedan reconocerse como componentes que pueden ser valiosos en el proceso de resolución de problemas. Esto explicaría su presencia en la lista, su expresión en las respuestas de los alumnos en términos tan precisos y su escasa valoración media — unido a que el campo de aplicación de uno y otro sea restringido. "Distinguir casos", por su parte, es el único componente que, en la forma como está expresado, sólo indica de la herramienta heurística a la que parece hacer referencia estrictamente la acción mediante la cual el problema original se transforma en otro —aquí en otros—, sin que haya el menor indicio de lo que se va a obtener de su uso. Finalmente, "recurrir a los conceptos matemáticos pertinentes" queda claramente separado por el valor que le conceden los alumnos de "aplicar los conocimientos matemáticos pertinentes", componente con el que cabría pensar que los alumnos podrían haberlo asociado, asimilado o confundido. Para este hecho no nos atrevemos a dar ninguna explicación: sólo nos cabe constatar que es persistente ya que también ocurre en el caso de la pregunta sobre la tarea general y, sobre todo, es aún más acusado en la prueba final.

Las valoraciones que se recogen en las rejillas sobre los componentes, como son juicios emitidos por los alumnos, pueden interpretarse, como lo estamos haciendo, como el resultado de las prácticas escolares, aunque los componentes los hayamos descrito previamente desde un modelo de competencia que no se corresponde con dichas prácticas. Desde este punto de vista, la dificultad para determinar con claridad grupos de alumnos descritos por la distribución de sus valoraciones de los componentes puede encontrar una explicación que vaya más allá de la explicación mínima de que responde a una incoherencia de los alumnos al asignar valor a los componentes.

Los alumnos comparten entre ellos y con los de su generación unas prácticas escolares comunes y, en concreto, una colección de problemas escolares —que son los que efectivamente han resuelto en su ya dilatada vida escolar—, unas formas de recibir la tarea de resolverlos, unas formas de presentar el resultado de la tarea[56] y unos usos de ella, entre los que no hay olvidar el control de lo aprendido y la evaluación. El que no aparezcan grupos claramente diferenciados en el análisis que hemos realizado sería entonces el reflejo de esa historia escolar común en una concepción compartida sobre la

[56] Pluvinage (1990) pone de relieve el papel de la forma de presentación de las soluciones de los problemas en la escuela, incorporando la escritura final de la presentación a su modelo de fases del proceso.

naturaleza de la tarea de resolver problemas de matemáticas, que pesaría más *sobre sus juicios*, es decir, sobre lo que *dicen que hacen*, que las diferencias de estilo cognitivo que cabría encontrar si hubiéramos examinado no lo que dicen que hacen, sino lo que efectivamente *hacen*.

La comparación entre los análisis correspondientes a las pruebas inicial y final ha de tener en cuenta que en la prueba final la rejilla que se somete a los alumnos para que califiquen los componentes es la elaborada con las respuestas de la prueba inicial. La intención de comparar las valoraciones dadas por los alumnos antes y después de la instrucción obligaba obviamente a mantener la misma rejilla en las dos pruebas. Lo que, por tanto, puede examinarse en la prueba final no es cuáles son los componentes subjetivos después de la instrucción[57], sino sólo cómo valoran los alumnos los componentes subjetivos anteriores a la instrucción una vez recibida ésta y qué cambios se han producido en esas valoraciones.

Lo que queremos resaltar de esos cambios es lo siguiente:

— Todos los componentes aumentan su valor medio. Si este dato se combina con el obtenido sobre el aumento en el número de enfoques razonables y en la complejidad heurística de las soluciones, cabe afirmar que los alumnos, tras la instrucción, al menos juzgan que en la tarea de resolver problemas intervienen más elementos de lo que pensaban antes.

— Del análisis de las ordenaciones que dan las medias y la estructura de los grupos que dan las taxonomías, se deriva que los componentes que se corresponden con herramientas heurísticas o con acciones de gestión son los que sufren variaciones más patentes. El hecho en sí es lo que cabía esperar ya que sobre ello ha tratado buena parte de la instrucción. Lo que interesa es señalar a lo que apuntan los análisis realizados del sentido de esas variaciones. Así, se puede decir, por un lado, que “distinguir casos” se identifica en la prueba final como una herramienta heurística: aumenta de valor medio, se separa del grupo de valor medio muy bajo y se incorpora a un grupo en el que hay otras versiones de herramientas heurísticas. Por otro lado, todas las demás variaciones que hemos mostrado indican que estos componentes se han perfilado más: así, los componentes que se corresponden con herramientas heurísticas en cuya formulación está indicado lo que se espera de su uso se agrupan separándose de los que tienen media similar a ellos, y las acciones de gestión —que también están agrupadas— tienen valores similares para todos los problemas. Además, estos componentes no se juzgan como

---

[57] En el apartado anterior hemos tenido ocasión de examinar cómo después de la instrucción los alumnos usan efectivamente herramientas heurísticas en los problemas que se les plantea resolver. De hecho, se usan herramientas heurísticas, como la “variación parcial”, que no se corresponden con ninguno de los componentes subjetivos. Además, no sólo aparecen estos elementos del modelo de competencia en la actuación de los alumnos, sino que éstos describen lo que han hecho utilizando los elementos de la teoría —respondiendo así al estado de resolutor-observador-investigador del modelo de enseñanza. El uso de los elementos del modelo de competencia y, sobre todo, el discurso para referirse a ello que proporciona la teoría hubieran dado lugar sin duda a una lista diferente de componentes subjetivos, si ésta se hubiera vuelto a elaborar después de la instrucción.

universalmente valiosos —lo que podría esperarse de una respuesta de los alumnos que sólo tomara en cuenta lo que imaginan que espera el profesor que se le diga tras un curso destinado a su estudio— sino que los grupos que forman están caracterizados por la distribución de las valoraciones a lo largo de los problemas; es decir que los componentes de contenido heurístico se juzgan tras la instrucción en general como más valiosos, pero con valores más o menos grandes en función de los problemas concretos[58] Esta dependencia de los problemas concretos puede encontrar confirmación indirecta en la evolución de los grupos de componentes cuando se examinan descritos por la distribución de sus valoraciones a lo largo de los sujetos, en vez de a lo largo de los problemas, ya que, como hemos visto, lo que sucede en este caso es lo contrario: los grupos están más fijados por las medias en la prueba final que en la inicial.

[58] Esto no está en contradicción con nuestra caracterización de la heurística como el estudio de los elementos del proceso de resolución de problemas que son independientes del contenido. El que las herramientas heurísticas sean independientes del contenido no significa que sean métodos generales aplicables a todos los problemas, sino que lo que hacen se puede describir, en una teoría de nivel I, de forma independiente del contenido concreto del problema concreto sobre el que actúan. En una teoría de nivel II, una herramienta heurística no sólo ha de transformar el problema en otro, sino que el resolutor espera de su uso que el problema transformado le resulte más fácil: los valores que están recogidos en las matrices que aquí hemos analizado son juicios sobre esa facilidad —de forma similar a como lo son los valores de las funciones heurísticas usuales en inteligencia artificial (cf. Pearl, 1985)— y el que esos juicios varíen de problema a problema indica que los alumnos no se limitan a repetir la lección (mal) aprendida, sino que han incorporado a su conducta de resolutores un gestor que examina los efectos posibles del uso de las herramientas heurísticas antes de conducir el proceso hacia su uso.