

<b>Problemas y problemas aritméticos elementales</b> .....	1
Introducción .....	1
Noción de problema aritmético .....	5
El proceso de resolución. ....	7
Concepto, perspectiva y niveles de análisis .....	8
Concepto y perspectiva .....	8
Niveles de análisis.....	9
La descripción macroscópica por fases.....	10
El proceso de resolución de un PAE. ....	12
Descripción de las fases. ....	13
Variables de la tarea .....	14
Idea de variable de una tarea. ....	16
Variables sintácticas.....	18
Variables de contenido y de contexto. ....	20
Variables de la tarea y fases del proceso de resolución .....	21
Finalidades y reservas .....	23
Finalidades .....	23
De la intención a la práctica .....	24
“La edad del capitán” .....	25
Los alumnos inventan enunciados .....	27
La naturaleza estereotipada de los PAEV .....	28



---

## Problemas y problemas aritméticos elementales

*Se desconoce qué inventó primero el hombre,  
si la escritura o la aritmética.*

Hans Freudenthal

### INTRODUCCIÓN

Aunque se desconozca si la aritmética fue anterior o no a la escritura, lo que sí se sabe es que ya 3000 años antes de Jesucristo, en Babilonia, los “escolares” aprendían a calcular la distancia que mediaba entre el pie de la escalera y la pared en que ésta se apoyaba; a obtener el peso de la piedra que pesaba un kilo más que la mitad de su propio peso; y recibían, también, la instrucción necesaria para saber la parte de herencia que su padre, ya anciano, les había legado tras un peculiar y ecuánime reparto, como atestigua uno de los problemas que se encuentran en las tablillas babilónicas:

Un anciano dejó al morir 65 monedas de oro, que debían repartirse entre sus 5 hijos de modo que cada uno recibiera 3 monedas menos que el hermano que le antecede.

En los textos escritos que se conservan, junto a los enunciados de los problemas pueden encontrarse instrucciones precisas y particulares para resolver cada uno de los problemas.

Los griegos quizá despreciaron los problemas que hoy llamamos de aplicación, o se preocuparon poco de dar ejemplos que mostrasen la utilidad práctica de los conocimientos aritméticos que poseían, en pocas palabras, descontextualizaron los problemas aritméticos. Sin embargo, mostraron por primera vez una preocupación por tratar de desentrañar la naturaleza de los problemas aritméticos considerados no uno por uno, sino en general. Así, Diofanto en su aritmética se dirige a Dionisos con afán pedagógico del siguiente modo:

Como sé, muy honorable Dionisos, que quieres aprender a resolver problemas numéricos, he emprendido la tarea de exponer la naturaleza y el poder de los números, empezando por las bases que sustentan estas cuestiones. [...]

Es bien sabido que la combinación de muchos problemas aritméticos resulta de la suma, diferencia, producto y cociente de estos números y de las relaciones que tienen con sus propias raíces, los cuales problemas se resolverán si sigues el camino que te indicaré después.

Y los primeros problemas que Diofanto trata, y con los que enfrenta a Dionisos, son:

- Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada.
- Descomponer un número en dos partes cuya razón sea dada.
- Descomponer un número en dos partes que estén en una razón dada con una diferencia dada.

Los contextos –reales, verosímiles o fantásticos– reaparecen en algunos problemas que se plantean como acertijos, pasatiempos o divertimentos matemáticos. Así, el genio de Arquímedes promete contar entre los sabios a aquel que sea capaz de conocer a cuánto se eleva la multitud de los bueyes del Sol.

Amigo: Si has heredado la sabiduría, calcula cuidadosamente a cuánto se elevaría la multitud de los bueyes del Sol que, en otro tiempo, pacían en las llanuras de la isla Tinacria distribuidos en cuatro rebaños de colores distintos: uno blanco como la leche, otro berrendo en negro, el tercero colorado y el cuarto jabonero.

En cada rebaño había un número considerable de bueyes repartidos en las proporciones siguientes: el número de los blancos era igual a la mitad aumentada en el tercio de los negros más todos los colorados, mientras que el de negros era igual a la cuarta y quinta partes de los jaboneros más todos los colorados también, y considera, además, que el número de los jaboneros era igual a la sexta y séptima partes de los blancos, aumentado, igualmente, en los colorados.

Las vacas estaban repartidas así: El número de las blancas era, precisamente, igual a la tercera y cuarta partes de todo el rebaño negro, mientras que el de las negras era igual a la cuarta y quinta partes de las jaboneras, todas las cuales habían ido a pacer en compañía de los bueyes, y el número de las jaboneras era igual a la quinta y sexta partes de todo el rebaño colorado, mientras que las coloradas eran en número igual a la mitad de la tercera parte aumentada en la séptima del rebaño blanco.

Amigo: Si me dices exactamente cuántos eran los bueyes del Sol y cuál, en particular, el de bueyes y vacas de cada color, no se te calificará de ignorante ni de inhábil, pero no podrás aún contarte entre los sabios.

Observa ahora los diversos modos de estar dispuestos los bueyes: cuando los blancos juntaban su multitud a los negros, se mantenían en un grupo compacto que tenía la misma medida en profundidad que en anchura, y este cuadrado llenaba completamente las llanuras de Tinacria. Por otra parte, reunidos los colorados y los jaboneros, sin que estuvieran presentes los bueyes de otros colores o sin que faltasen, quedaban agrupados de tal suerte que, constituida la primera fila por uno solo, formaban gradualmente una figura triangular.

Amigo: Si encuentras estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu ingenio, expresas todas las medidas de estas multitudes, te glorificarán por haber alcanzado la victoria y se te juzgará como consumado conocedor de esta ciencia. (Vera, ed., 1970, Vol 2, pgs. 218-219)

Aunque aquí nos estemos limitando voluntariamente, al sobrevolar la historia, a los problemas aritméticos (o a extensiones de ellos que no se alejen demasiado de lo que es práctica usual en la escuela), es preciso hacer mención, al menos de pasada, al papel nada desdeñable que han desempeñado en el progreso de las matemáticas los tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo. La historia concreta de los intentos de solución de estos problemas es hartamente conocida y puede encontrarse en cualquier buen libro de historia de las matemáticas; lo que nos interesa subrayar aquí es cómo al enfrentarse con estos problemas los matemáticos han aprendido mucho, esto es, al no poder abordarlos con los conocimientos y los procedimientos que tenían a mano, se han visto obligados a introducir nuevos conceptos, mirar los objetos implicados desde nuevos puntos de vista, forjar procedimientos y técnicas capaces de tratar con estos nuevos enfoques, etc. En definitiva, al margen de que los problemas hayan sido finalmente resueltos o hayan sido sancionados como irresolubles, puede decirse que en el trabajo de su resolución ha habido una significativa producción de conocimiento. La historia de las matemáticas señala, pues, que la resolución de problemas de matemáticas es uno de los lugares en que producir matemáticas; la historia nos indica, por tanto, una de las intenciones con que la resolución de problemas ha de ser abordada en la escuela.

Por otro lado, también valdría la pena tomar nota de cómo aparecen formulados algunos problemas en la Grecia clásica: como reto, incitación a tomar el problema como problema, promesa de que el que lo haga es un elegido, enigma propio de dioses o semidioses. Así, la presentación del problema de la duplicación del cubo como enunciado por el oráculo de Delos pudo crear el ambiente adecuado para motivar a los “escolares” de la época<sup>1</sup>.

En el siglo XVI, en el que los matemáticos no eran profesores, pero casi, la afición a poner problemas –y a plantearse problemas– era cultivada y fomentada por la necesidad de ganarse el sustento atendiendo las peticiones de los mecenas y por el aumento de prestigio que suponía ser capaz de resolver cualquier problema por enrevesado que fuera. La interpretación de las soluciones y la búsqueda de nuevos métodos para resolver problemas aritméticos como “dividir el número 10 en dos partes cuyo producto sea 40” llevó a Cardano a expresar las cantidades que resuelven este problema mediante el uso de raíces de números negativos. Éste es un ejemplo de nuevo de cómo los problemas producen –al menos de forma operativa– nuevos objetos matemáticos, que, aunque inicialmente sólo posean sentido en ese problema particular como solución “imaginaria” –esto es, que manipulando aritméticamente esos objetos de forma similar a como se manipulan los números corrientes, se verificarían las condiciones del problema–, pueden encontrar después interpretaciones

---

<sup>1</sup> Asolado el país por una terrible plaga, el oráculo de Delos, al que se va en petición del origen de tan terrible mal y de la forma de aplacar a los dioses, transmite el deseo de éstos de que se construya un altar de doble volumen que el altar cúbico que existe en el templo. Pese a haberlo construido, la plaga no desaparece; y es el oráculo de nuevo quien ha de demostrar que la construcción es errónea por haber sido realizada con regla y compás.

en otros problemas o contextos y llegar a ser institucionalizados como objetos legítimos del saber matemático.

Volviendo al interés de los matemáticos por enseñar a resolver problemas, vale la pena traer a colación, por ejemplo, a Euler que deja entrever su interés por este asunto en la secuencia de problemas siguientes, en los que se conserva el contexto, y se modifica gradualmente la estructura:

Un padre de tres hijos dejó en herencia 1600 coronas. El testamento precisaba que el primogénito debía recibir 200 coronas más que el segundo y el segundo 100 coronas más que el último. ¿Qué cantidad recibió cada uno de los hijos?

Un padre murió dejando cuatro hijos. Estos se repartieron sus bienes de la manera siguiente:

El primero cogió la mitad de la fortuna, menos 3000 libras.

El segundo cogió un tercio de ella, menos 1000 libras.

El tercero cogió exactamente un cuarto de los bienes.

El cuarto cogió 600 libras, más la quinta parte de los bienes.

¿Cuál era la fortuna total, y qué cantidad recibió cada uno de los hijos?

Un padre murió dejando varios hijos. Estos se repartieron sus bienes de la manera siguiente:

El primero recibió 100 coronas y la décima parte de lo que quedaba.

El segundo recibió 200 coronas y la décima parte de lo que quedaba.

El tercero recibió 300 coronas y la décima parte de lo que quedaba.

El cuarto recibió 400 coronas y la décima parte de lo que quedaba, etc.

Al final del reparto descubrieron que la fortuna había sido dividida en partes iguales entre los hijos. Se pregunta a cuánto ascendía esa fortuna, cuántos hijos tenía y cuánto recibió cada uno de ellos. (citado en Polya, 1966, pg. 53)

Como puede verse en los problemas que siguen, tomados literalmente de libros de texto recientes, los currículos de matemáticas escolares reflejan en su diseño y desarrollo, y obligan a resolver de nuevo a los estudiantes, problemas que han sido resueltos siempre. Si se compara el problema de la herencia encontrado en una tablilla babilónica, los problemas de Euler y el problema 3, se puede decir que poco ha cambiado en el curso de los siglos.

<p>Problema 1 En una caja hay el doble de monedas que en otra. Si se pasan 7 monedas de la primera a la segunda caja, quedan en ambas el mismo número de monedas. ¿Cuántas monedas tenía al principio cada caja?</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>Problema 2 Tres ciclistas recorren una pista circular. El primero tarda 32 minutos, el segundo 40 minutos y el tercero 44 minutos. Si salieron juntos a las 7h, ¿a qué hora coincidirán, por primera vez?</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Problema 3 Se quieren repartir 1200 ptas. entre tres personas, de manera que una tenga la mitad de la otra, y la tercera persona tenga igual que las otras dos juntas. Calcula lo que corresponde a cada una.
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## NOCIÓN DE PROBLEMA ARITMÉTICO

En la escuela los problemas aritméticos se proponen, se *enuncian* o se presentan enunciados, y se *resuelven*. Así que, situados ahora en el ambiente escolar, si queremos saber qué entenderemos por un problema aritmético, habrá que describir las características de su enunciado y de su resolución.

En el enunciado, la información que se proporciona tiene carácter cuantitativo ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades. La resolución del problema, o lo que es preciso hacer para contestar la pregunta del problema, fundamentalmente parece consistir en la realización de una o varias operaciones aritméticas.

Además, si estos problemas se consideran inmersos en el currículo escolar, por el momento en que aparecen en éste no cabe el recurso al álgebra para su resolución.

Los ejemplos que siguen pretenden que se entienda mejor los matices de lo que entendemos por un problema aritmético.

Problema 4 Un día el padre de Raúl se da cuenta de que el cuentakilómetros marca 4320 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para hacer la revisión del coche que es a los 5000 km?
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Problema 5 El Sr. Ferrer desea hacer una valla alrededor de su piscina. El metro de valla vale 2000 ptas.
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

Problema 6 En unos grandes almacenes hacen un 20% de descuento, pero hay que pagar el 12% de IVA. Cuando hagas una compra, ¿qué prefieres que te calculen primero el descuento o el IVA?
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Estos tres problemas son aritméticos, poseen por tanto las características descritas, pero presentan algunas diferencias entre sí. El problema del padre de Raúl es lo que podría llamarse un problema aritmético standard, ya que la información está explícitamente dada en el enunciado y además en forma numérica, y se pregunta por otra cantidad. En el problema del Sr. Ferrer se pregunta también por una cantidad, el valor de la valla, pero la información cuantitativa que es precisa para responder a tal pregunta –a saber, las dimensiones de la piscina y la distancia que media entre la valla

y el borde de la piscina— no aparece en el enunciado; sin embargo, lo consideraremos un problema aritmético ya que para alcanzar la solución es preciso realizar una serie de operaciones aritméticas. El problema de los grandes almacenes sólo se diferencia del primero en que no se pregunta por una cantidad determinada, pero se puede responder al mismo estableciendo una relación de comparación entre dos cantidades que hay que determinar previamente.

Los problemas aritméticos son, en general, problemas de aplicación, lo que hace que aparezcan enunciados en contextos variados. Así puede parecer difícil en ocasiones decidir si un problema puede ser considerado como un problema aritmético, cuando está embebido en un contexto geométrico, físico o biológico. Para nosotros en este libro, un problema será un problema aritmético siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado no sean decisivos a la hora de resolver el problema.

Por otro lado, un problema como el siguiente, que se resuelve haciendo uso de conceptos y relaciones aritméticas, no será considerado aquí como un problema aritmético, ya que la respuesta no se obtiene como consecuencia inmediata de la realización de operaciones aritméticas; siendo además crucial para su resolución el uso de técnicas tales como el examen de posibilidades, el análisis de los supuestos implícitos o la utilización de representaciones adecuadas.

Problema 7 Un hombre debe llevar un mensaje a través del desierto. Cruzar el desierto lleva nueve días. Un hombre puede llevar únicamente alimento para 12 días. No hay alimento en el lugar donde debe dejarse el mensaje. Se dispone de dos hombres. ¿Puede llevarse el mensaje y volver sin que falte alimento?

Delimitado el campo de los problemas que van a ser objeto de nuestra atención en este libro, hay que señalar también desde qué óptica van a mirarse. La óptica elegida es la que enfoca los problemas desde el estudio y descripción de su proceso de resolución.

Como además nos interesa la resolución de problemas que realizan *niños que están aprendiendo*, veremos, siquiera sea someramente, qué aprenden los niños mientras resuelven problemas, esto es, qué conocimientos construyen o qué significados producen para los conceptos implicados en los problemas que resuelven.

Más aún, como nos interesa la resolución de problemas que se hace por *alumnos en la escuela*, se hace necesario considerar además el contexto escolar y los currículos de matemáticas en los que éstos están inmersos; así como las características que confieren a los problemas el hecho de ser problemas escolares: por ejemplo, que los problemas no se proponen sólo para que sean resueltos, sino con bastantes finalidades más (que se aprenda, evaluar lo aprendido, etc.).



Por el lado de lo que queda fuera del campo de visión, al no ser los PAE problemas de búsqueda, sino de aplicación, no aparecerán procesos generales – generalización, particularización, analogía, etc.–, ni puede esperarse tampoco que este libro sea un tratado de heurística. También queda excluido de este libro el estudio de la aproximación curricular que intenta organizar las matemáticas escolares a través de la resolución de problemas.

## EL PROCESO DE RESOLUCIÓN.

El interés por el proceso de resolución de problemas se despierta en los años setenta, algunos años después de la publicación de los libros pioneros de Polya, con el comienzo de la investigación en educación matemática considerada como un campo de estudio específico y la pérdida en el terreno de la educación del predominio de las posiciones traídas del conductismo frente a otras de índole cognitivista.

Este interés viene reforzado por la constatación del “fracaso de las matemáticas modernas”<sup>2</sup>, producto de las reformas de los años sesenta, que lleva, tras el episodio pendular de “vuelta a lo básico”, a una influencia en el diseño del currículo escolar de matemáticas de las teorías de la ciencia que ven al científico normal, fundamentalmente, como un resolutor de problemas<sup>3</sup>

La conjunción de ambas causas produce que este centrarse en la resolución de problemas no pueda consistir en la mera introducción de problemas en el currículo, al modo “ejercicio y práctica” para consolidar los conocimientos adquiridos, o al modo “aplicación” de conocimientos adquiridos previamente, sino que haya de mostrar una atención especial a aquellos aspectos de la resolución de problemas que tienen que ver con la producción de conocimientos significativos para el que aprende.

Esto tiene una implicación curricular clara: el núcleo del currículo no viene determinado por los conocimientos que hay que transmitir, sino por los procesos de producción de conocimiento. La atención es para el proceso, no para los conocimientos. El conocimiento que se valora por su significación no es el conocimiento transmitido, sino el conocimiento producido por el que está en situación de aprender.

Así si la resolución de problemas ha de ser el lugar de la producción del conocimiento, o el lugar donde se apliquen los conocimientos adquiridos a situaciones no familiares nuevas, esto es, el lugar donde mostrar y poner de manifiesto la transferencia del mismo, se concluye que la tarea de resolver problemas es una tarea

---

<sup>2</sup>Aunque nos resistimos a usar la palabra ‘fracaso’ por toda la palabrería que se ha producido en torno al denominado ‘fracaso escolar’, la hemos conservado aquí para hacer referencia al título castellano del libro de Morris Kline *Why Johnny Can't Add*, que fue una de las primeras llamadas de atención sobre el asunto.

<sup>3</sup>Nos referimos a la concepción de Khun (1962)

privilegiada para el aprendizaje. De ahí que si se quiere comprender cómo se produce naturalmente el aprendizaje o cómo se puede facilitar éste en una situación de instrucción, sea preciso analizar con detalle las conductas de los sujetos mientras resuelven problemas.

## CONCEPTO, PERSPECTIVA Y NIVELES DE ANÁLISIS

### Concepto y perspectiva

Se entiende por proceso de resolución de un problema la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume<sup>4</sup> que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea<sup>5</sup>.

La actividad del resolutor, a la que hemos llamado proceso de resolución de un problema, puede observarse, describirse y explicarse desde diversos puntos de vista.

Así, desde una perspectiva que se podría llamar la implícita tradicionalmente en los libros de texto de matemáticas y la practicada usualmente por los profesores, ante un “problema-tipo”, se puede observar: si el resolutor resuelve el problema según un patrón standard; si da los pasos adecuados y en el orden apropiado; si utiliza los métodos más eficaces o pertinentes, o aquellos métodos en los que ha sido instruido... Sin embargo, aquí no entraremos en general en análisis de este tipo al menos por dos motivos: uno, porque no permite descripciones generales; y dos, porque no se centra en el estudio de los procesos y aspectos cognitivos pertinentes para ser coherentes con el papel de producción de conocimientos, que se ha atribuido a los problemas con anterioridad.

Interesa señalar también que en el análisis del proceso de resolución no se adoptará el punto de vista que se podría llamar “exclusivamente” psicológico, ni tampoco el punto de vista de la Inteligencia Artificial. El motivo es obvio, no se trata

---

<sup>4</sup>Es importante que el sujeto perciba que tiene un problema en el sentido usual de lo que se entiende por un problema (datos, incógnita o meta que hay que alcanzar, relaciones significativas entre ellos). La importancia se deriva de que si el sujeto no lo percibe como tal, se desarrollan conductas patológicas y no los mecanismos usuales de resolución para los que el investigador o el profesor dispone de alguna teoría con la que mirar. Aún es más importante cuando se trata con niños pequeños, para los que el concepto de problema se desarrolla gradualmente, porque su actividad no se puede describir como la conducta de quien tiende a resolver el problema, sino que éstos tienden a operar con el texto del problema de otra manera (cf. Menchinskaya, 1969, pgs. 12-22).

Por otro lado, la voluntad de resolver el problema es importante que se dé por presente para no mezclar en el análisis del proceso de resolución elementos que no son propios de él, sino que pertenecen al campo de la afectividad o de la motivación.

<sup>5</sup> Dar por acabada la tarea no quiere decir que el resolutor haya encontrado la solución del problema, sino que para él la situación ha dejado de ser problemática porque la ha dotado de sentido. En palabras de Lesh (1982, 1985), el modelo conceptual con el que explica la situación, que al comienzo de la tarea era inestable, ha llegado a ser estable.

de construir aquí teorías generales del aprendizaje, ni sistemas expertos. Los problemas que analizamos son los problemas de matemáticas y no los problemas en general. Además, el resolutor, ahora alumno, se encuentra inmerso en un sistema educativo y el aprendizaje no puede calificarse de “natural”, sino que se intenta provocar mediando una situación de instrucción, en el interior de una institución del estado. Y, finalmente, lo que debe aprenderse viene marcado por la organización social, la propia disciplina y el modo como ésta es vista por la sociedad. Éste es el punto de vista de la “educación matemática”, desde el que se intentará hablar aquí del proceso de resolución.

## Niveles de análisis

En el análisis del proceso nos podemos situar en dos niveles de descripción: microscópico o macroscópico. En el nivel microscópico, lo que se observaría sería conductas puntuales, esto es, podríamos encontrar al resolutor: *buscando* una información proporcionada en el texto del problema, *utilizando* un algoritmo para una operación que considera imprescindible realizar, *tratando de recordar* un problema parecido que resolvió alguna vez, *decidiendo* qué alternativa seguir ante dos vías de solución que considera razonables...; o, simplemente, *atascado*, esto es, no sabiendo qué hacer, pero siendo consciente de ello; o, por acabar esta enumeración, no desplegando actividad mental alguna.

Hay, por supuesto, en este nivel de descripción multitud de preguntas que uno puede hacerse y cuyas respuestas incrementan de modo considerable la comprensión del proceso de resolución de problemas. Por ejemplo:

¿Cómo se sabe qué problema parecido utilizar y cómo dar con él?

¿Cómo se entresaca la información deseada del texto del problema?

¿Cómo se decide qué alternativa es la mejor?

¿Qué se hace cuando se está atascado?

En el nivel de descripción macroscópico, se observa por el contrario la totalidad del proceso, buscando categorizar conductas puntuales que han tenido lugar en un determinado lapso de tiempo del proceso y atribuirles no un significado aislado, sino el sentido que el bloque de conductas puede tener respecto de la finalidad última que el resolutor ha dado a la tarea que está realizando al resolver el problema.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>El resolutor siempre pretende obtener la solución. De paso, aprende cosas. La finalidad del profesor o del que ha hecho el desarrollo curricular dentro del que está inmersa la tarea, puede ser otra: no tanto que se encuentre la solución, como que se aprenda. El resolutor sólo se da cuenta de que ha aprendido después de haber realizado la tarea y –usando por un momento la terminología de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau– a condición de que medien situaciones de institucionalización de aprendizajes.

Esta descripción macroscópica se ha realizado de dos maneras distintas, una que utiliza la introspección y la otra la observación.

La primera se pone en el lugar del resolutor ideal y trata de describir conceptualmente las tareas generales que éste realiza o las fases que atraviesa en el proceso. *Resolutor ideal* se entiende aquí como aquel que avanza linealmente y sin tropiezos desde el enunciado del problema hasta su solución, aquel que sabe en todo momento qué hacer y por qué lo hace; y aquel que, para acabar, examina la solución, comprueba que es adecuada y ve hacia dónde le conduce. Un ejemplo del comportamiento de tal resolutor ideal puede verse en la solución descrita por Polya del problema “Hallar el volumen de un tronco de pirámide recta de base cuadrada” (Polya, 1966, pgs. 172-179)

La segunda se vale de una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales, y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas que se dan en un período de tiempo; hecho esto, califica, pone nombre o caracteriza los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Un buen ejemplo de esto puede verse en Schoenfeld (1985).<sup>7</sup>

### **La descripción macroscópica por fases**

Dewey propuso una lista de fases o etapas que se siguen para la solución de problemas, no elaborada para los problemas de matemáticas, sino para cualquier cosa que en la vida cotidiana se llama “problema”:

- 1.– Identificación de la situación problemática.
- 2.– Definición precisa del problema.
- 3.– Análisis medios-fines. Plan de solución.
- 4.– Ejecución del plan.
- 5.– Asunción de las consecuencias.
- 6.– Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

Más que describir cada una de estas fases, quizá el mejor modo de hacerse una idea del modelo propuesto por Dewey sea situarse ante un problema como, por

---

<sup>7</sup>Aún hay una tercera forma de describir el proceso de resolución en este nivel macroscópico, que no pretende ser un instrumento de estudio o análisis sino una ayuda para la instrucción. Lo que sirve para caracterizar a las fases no es lo que se hace, sino lo que se siente, los estados afectivos del resolutor. De este estilo es el modelo desarrollado a partir del trabajo de Burton (s.f.), que aparece en Mason, Burton & Stacey (1982): el resolutor aparece en él tomando contacto, enfrascado, rumiando o atascado. La sencillez del esquema y la rapidez con que el resolutor puede juzgar dónde se encuentra (ya que *lo siente*), lo hace útil para el aprendizaje de la resolución de problemas.

ejemplo, el problema que supone tener que ir a clase una mañana en la que se descubre al mirar por la ventana que está diluviando.

Dewey comienza con una *situación* que el sujeto siente como problema, ya que pretende construir un modelo de los problemas en la más amplia acepción del término. En el contexto escolar los problemas de matemáticas tradicionalmente aparecen *enunciados*. La descripción de su proceso de resolución más clásica y ampliamente difundida es la de Polya (1957), que dice lo siguiente:

“Para resolver un problema se necesita:

- 1.– Comprender el problema.
- 2.– Concebir un plan.
- 3.– Ejecutar el plan.
- 4.– Examinar la solución obtenida.”

Esta división en fases está hecha desde el primer punto de vista antes mencionado, esto es, el del resolutor ideal, cuyo comportamiento supuesto se determina por introspección. Polya acompaña la descripción de cada una de estas fases con una serie de sugerencias útiles para el resolutor. De esta manera, el modelo de Polya no es estrictamente hablando un modelo *descriptivo*, porque las sugerencias heurísticas que incluye pretenden a la vez marcar pautas, indicar caminos y hacer posible que el resolutor tome conciencia de lo que necesita hacer y del lugar del proceso en el que se encuentra para actuar en consecuencia. El modelo tiene, por tanto, también un carácter de guía para la acción.

Este carácter de guía, de modelo ejemplar y deseable, o de modelo a imitar por el resolutor real, ha hecho que en ocasiones se haya utilizado como punto de partida del que extraer técnicas para elaborar estrategias de instrucción. En definitiva, los que hacen esto entienden –desvirtuando a nuestro entender el carácter del modelo de Polya– que éste nos enseña las fases que el resolutor tiene necesariamente que recorrer para resolver un problema y el orden en que tiene que hacerlo, y se creen en la obligación de *prescribir* las fases y las sugerencias heurísticas del modelo como lo que hay que aprender para saber resolver problemas<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup> En efecto, si se analizan con detalle protocolos de resolución de problemas –como hace por ejemplo Schoenfeld–, puede verse que no hay fases perfectas, incluso es casi imposible calificar a cualquier episodio de resolución como *comprensión* o *elaboración del plan* y se prefiere utilizar otras etiquetas como *exploración*, *análisis*..., que permiten describir con mayor precisión lo que el resolutor real está haciendo. Aún más, los mejores resolutores o los resolutores *expertos* se caracterizan más que por un recorrido secuencial de las fases del modelo de Polya, por un rápido zigzag entre episodios.

En cuanto a las heurísticas generales que acompañan a las fases del modelo de Polya, el mismo Schoenfeld ha mostrado que es inútil prescribirlas. La razón de que su prescripción no sea efectiva no es que las heurísticas generales no tengan ningún valor, sino que cada heurística se multiplica en

## EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE UN PAE.

En cierto sentido, el modelo de Polya se puede ver como la concreción del de Dewey para los problemas de matemáticas. Si el campo del análisis se restringe aún más, como hay que hacer en este libro, a los problemas aritméticos elementales que aparecen en el contexto escolar, una adaptación de los modelos anteriores lleva a distinguir en el proceso de resolución de un PAE las fases siguientes:

- 1.– Lectura.
- 2.– Comprensión.
- 3.– Traducción.
- 4.– Cálculo
- 5.– Solución.
- 6.– Revisión. Comprobación<sup>9</sup>.

La diferencia entre comenzar por una *situación* o comenzar por un *problema enunciado*, que separa el mundo real del contexto escolar, hace que en este modelo – como en el de Polya– no aparezcan las fases 1 y 2 de Dewey. En las visiones del currículo o las estrategias de enseñanza en que se pone el énfasis en acercar las situaciones escolares a las situaciones del mundo real, se comienza por fases similares a las dos primeras del modelo de Dewey. Sin embargo, es difícil que la fase *Revisión. Comprobación*. se transforme en algo similar a las dos últimas fases de Dewey –en particular, que aparezca la fase *Asunción de las consecuencias*. Las tendencias pedagógicas que conciben el aprendizaje escolar como un aprendizaje de la vida, hacen lo posible por simular al máximo ésta en el contexto escolar; la resolución de problemas se transforma en el trabajo en situaciones reales representadas en el aula. Por ejemplo, la organización de un mercado en el aula o el colegio hace que todos los problemas aritméticos en el contexto de la compra-venta dejen de aparecer

---

infinidad de ellas más cercanas a los problemas concretos. De ahí que una de las principales tareas de la instrucción en resolución de problemas consista en hacer posible que los alumnos elaboren una versión efectiva de la heurística general apropiada en función del problema con el que estén trabajando. (cf. Schoenfeld, 1987b)

<sup>9</sup>Esta división en fases es más fina que la que con más frecuencia se encuentra en la literatura, que suele reducirse a distinguir traducción y cálculo. La razón de optar por una subdivisión más menuda es que permite, como más adelante se verá, poner el énfasis en algunos aspectos del proceso, o precisar mejor dónde predomina cada tipo de dificultades, y, por tanto, hace posible organizar sugerencias para la instrucción en función de ello. Naturalmente, éste es un modelo para el estudio del proceso y no tienen por qué darse todas las fases en la resolución particular de cada problema por cada resolutor individual. Así, una solución que use hechos numéricos elude la fase de cálculo, una estrategia del tipo “contar todos” no traduce –estrictamente hablando– el enunciado verbal a una expresión aritmética, y si el problema está presentado mediante un grabado o se presenta oralmente, la fase de lectura sólo puede recibir ese nombre si se amplía correlativamente la noción de texto.

*enunciados*, para ser *situaciones*. Aquí cabe que aparezcan todas las fases del modelo de Dewey, incluida la *Asunción de las consecuencias*. De hecho, cuando en las recomendaciones que acompañan a los objetivos del currículo oficial se indica que hay que “Utilizar las operaciones aritméticas para resolver situaciones problemáticas del mundo real”, la tarea de formular un problema aritmético que se corresponda con una situación de este tipo suele ser asumida por el autor del libro de texto o por el profesor. Más tarde examinaremos cómo este paso de los problemas cuantitativos reales a los problemas aritméticos escolares, realizado al margen del resolutor, acaba siendo una fuente de dificultad añadida para el resolutor que se enfrenta al problema en la escuela, esto es, el alumno.

## DESCRIPCIÓN DE LAS FASES.

Las fases *lectura y comprensión* de un PAE constituyen una subdivisión de la fase comprensión del modelo de Polya. Esta división se ha hecho para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del problema en las primeras etapas de instrucción en resolución de problemas en el comienzo del currículo escolar. No se puede olvidar que en este nivel educativo inicial los niños están, a la vez, aprendiendo a leer, y que, por tanto, la complejidad sintáctica del problema y la familiaridad con las palabras que aparecen en los enunciados pueden ser una de las causas que imposibiliten la comprensión y, como consecuencia, la resolución del problema. De la misma manera que los niños están experimentando por primera vez qué es un texto narrativo, descriptivo, etc., también están tomando contacto con la estructura del texto de un problema y aprendiendo a reconocer que un texto presentado de una manera determinada es un problema. Aunque hayamos querido separar *lectura y comprensión* con la finalidad indicada, la línea divisoria entre ambas no se puede trazar con un cuchillo: son aspectos de una misma operación. Del lado de la *comprensión* hemos dejado las transformaciones que el que lee realiza sobre la base del texto usando los esquemas o modelos conceptuales que le parecen pertinentes con el fin de dotarlo de sentido<sup>10</sup>.

La fase “elaboración de un plan” de Polya se ha denominado aquí *traducción*. Esta etapa crucial en la resolución de cualquier problema consiste en los problemas aritméticos en el paso del enunciado verbal a la expresión aritmética correspondiente: de ahí el nombre adoptado. Usualmente, el término *traducción* se ha utilizado para los problemas que requieren una única operación aritmética para su solución. De ahí que la fase de traducción superficialmente, mirada desde este punto de vista parcial, parezca consistir sólo en la toma de decisión acerca de la operación que es preciso realizar. Ahora bien, en los problemas que requieren más de una operación, la traducción es un proceso más complejo, que tiene al menos tres componentes: qué

---

<sup>10</sup>Estas transformaciones pueden materializarse en ocasiones mediante el uso de representaciones (ver lo que se dice a propósito de los problemas de árboles y circuitos en el capítulo 2) o de estrategias que son reflejo de acciones (ver el apartado *Estrategias de resolución* del capítulo 3).

operaciones hay que realizar, entre qué datos, y en qué orden. En este sentido más global es en el que la emplearemos aquí.

Vale la pena señalar, por otro lado, que esta fase de traducción es la única que puede observarse usualmente en los libros de texto, aunque en la mayoría de los casos sólo aparezca de forma implícita. Un buen testimonio de ello es una página de un best seller de hace unos pocos años en la que, bajo el texto del problema 8 y el simpático dibujo del tiburón joven y el viejo desdentado, aparecía la leyenda “VAMOS A SUMAR”.

Problema 8 Un tiburón joven tiene 26 dientes. Al viejo le quedan sólo 8 dientes. ¿Cuántos dientes tienen entre los dos?

Además, también vale la pena señalar que esta fase es percibida por los alumnos casi de forma explícita cuando éstos identifican los problemas con la decisión que han de tomar para resolverlos y los clasifican en consecuencia: “es de sumar”, “es de restar”, etc.

Finalmente, la fase cálculo corresponde a la fase “ejecución del plan” de Polya, y se ha calificado como de cálculo, porque ésa es la naturaleza de la tarea que suele predominar en esta fase. Es importante además señalar que la ejecución del plan consiste en la realización de un cálculo porque en ella no intervienen las destrezas traductoras de los alumnos, sino sus destrezas algorítmicas (o de cálculo mental, si es el caso), y las destrezas traductoras y algorítmicas suelen ser independientes una de otra<sup>11</sup>. Esta distinción es importante para los profesores que a la hora de planificar la instrucción pueden incidir sobre aquella de las destrezas que un alumno en particular carezca, y no pensar que el alumno que comete constantes errores en los ejercicios rutinarios de sumas o restas, no resuelve los problemas aritméticos que se le presentan simultáneamente por este motivo.

## VARIABLES DE LA TAREA

La descripción del proceso dividido en fases está hecha desde el punto de vista macroscópico. La actividad concreta, microscópica, es la lucha contra las pequeñas dificultades del terreno y éstas dependen de la naturaleza de la tarea. En este párrafo, pues, vamos a volver a dirigir nuestra mirada al problema, tratando en la medida de lo posible de mantener al resolutor individual ausente. Fijaremos nuestra atención en aquellas características del problema mismo que pueden hacer variar la conducta del resolutor e influir de modo más o menos acusado en el logro de la solución.

La importancia de un estudio de esas características del problema y la ayuda que éste puede prestar tanto al investigador como al profesor puede entenderse fácilmente.

---

<sup>11</sup>Cf. Neshet (1985) en el que ésta muestra su sorpresa de que, según las investigaciones, esto parezca ser así y describe algunos de los intentos de encontrarle explicación.



El investigador utiliza problemas como instrumento para el estudio de la resolución de problemas y, por tanto, cualquiera de las variables del problema interaccionará con cualquier otra en la que fije su atención. El profesor, por su parte, instruye a sus alumnos en la resolución de problemas, o propone un problema al que asigna una finalidad específica en una situación de aprendizaje; las características del problema mismo pueden interferir en la instrucción o en el objetivo de aprendizaje perseguido y distorsionarlos

Para hacernos una idea de la importancia de este asunto podemos recurrir a unos ejemplos. Para empezar, tomemos los problemas 9, 10 y 11, que tienen la misma estructura matemática y cuyo formato de presentación es, sin embargo, totalmente diferente.

<p><b>Problema 9. El hotel de los líos.</b> Un hotel tiene infinitas puertas numeradas así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... Todas ellas están abiertas. Pero llega alguien y, comenzando desde el principio, las cierra ordenadamente de 2 en 2, la 2, la 4, la 6, etc. Contento de su hazaña se va a dormir. Pero otro viene después que decide cambiar la posición de las puertas de 3 en 3; empieza también por el principio y, yendo de 3 en 3, la que está abierta la cierra y la que está cerrada la abre. Divertido también por lo que ha hecho se va a dormir. Sin embargo, otro viene después y comenzando también desde el principio, va cambiando la posición de las puertas de 4 en 4; de manera que la que está abierta la cierra y la que está cerrada la abre. Cuando termina, viene otro que altera la posición de las puertas de 5 en 5; abre las cerradas y cierra las abiertas. Y luego otro que hace lo propio pero de 6 en 6. Y luego otro de 7 en 7. Y así hasta el infinito porque en el hotel había infinitos bromistas. Tú, que eres el conserje del hotel, estás durmiendo tan tranquilo y no te has enterado de todos estos líos. ¿Qué puertas crees que estarán abiertas y qué puertas estarán cerradas cuando te despiertes por la mañana?</p>
<p><b>Problema 10</b> Sea <math>d(n)</math> el número de divisores de <math>n</math>. Probar que <math>d(n)</math> es impar si y sólo si <math>n</math> es cuadrado.</p>
<p><b>Problema 11</b> ¿Qué números tienen un número impar de factores? Justifica tu respuesta.</p>

El problema 9 está presentado con el estilo narrativo propio de algunos pasatiempos o divertimentos matemáticos. El problema 10 tiene la presentación standard de los problemas que exigen que se pruebe un teorema. El problema 11 tiene también una presentación típica: una pregunta que conduce a la búsqueda de uno o

más objetos que cumplen una propiedad. No es extraño que si se observa cómo suelen ser resueltos estos problemas, se encuentre que los resolutores tienen dificultades de distinta naturaleza y utilizan recursos y destrezas diferentes. Por citar algunas: el infinito en el problema 9, la capacidad de generar hipótesis y buscar explicaciones en el problema 11, el recurso a teoremas conocidos en el problema 10, etc. Lo que no debe llevar al profesor a pensar que los tres son, en definitiva, un problema *de divisores*, y el resto de lo que ocurre es cuestión de arte del resolutor; que el problema –o los problemas– sólo se deben plantear en los temas de divisibilidad; ni tampoco debe llevarle a despreciar las destrezas recursos y técnicas propias de la resolución de problemas, frente al contenido o estructura matemática del problema –lo que sería equivalente a dejar de lado el proceso de producción del conocimiento. En resumen, no hay que infravalorar la importancia que el formato de presentación del problema tiene en la puesta en marcha de este proceso.

El lector puede juzgar cuál de los dos problemas que siguen resulta más fácil y cuáles son las variables que pueden servir para explicar este hecho.

<p>Problema 12 Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?</p>
<p>Problema 13 Unas personas pensaban realizar un viaje de 5000 km. En su presupuesto habían incluido cierta cantidad de dinero para gastarse en gasolina. Sin embargo, una oportuna bajada del precio de la gasolina les permitió ahorrar 0'4 pesetas por kilómetro, con lo cual pudieron recorrer 250 km más. ¿A cuánto ascendía su presupuesto para gasolina?</p>

## IDEA DE VARIABLE DE UNA TAREA.

Se entiende como variable de la tarea<sup>12</sup> cualquier característica del problema que asume un valor particular dentro de un posible conjunto de valores. Las variables pueden ser tanto numéricas (p. e., el número de palabras de un problema) como clasificatorias (p. e., la parte de las matemáticas en que está contenido el problema), o cualitativas (p. e., la posición de la pregunta en el enunciado del problema).

---

<sup>12</sup>Se utiliza el término 'tarea' porque se plantea para estudiar lo que los sujetos hacen y no con finalidades de enseñanza, y, por tanto, está aislada, sin relación con ninguna situación o secuencia de aprendizaje.

Kilpatrick (1978), tratando de clarificar las distintas variables que intervienen en la resolución de problemas, presenta la siguiente clasificación, con el fin de organizar todos los elementos que hay que tener presentes si se quiere estudiar de forma sistemática la resolución de problemas con cierto nivel de detalle:

1) Variables independientes:

Variables del sujeto.

Variables de la tarea.

Variables de la situación.

2) Variables dependientes:

Variables del resultado.

Variables del proceso.

Variables de evaluación.

Variables concomitantes.

Las variables independientes son las que pueden medirse antes de la ejecución de la tarea. En esta clasificación puede verse cómo las variables que reciben el nombre específico de ‘variables de la tarea’ aparecen como variables independientes, siendo dentro de ellas las que tienen que ver exclusivamente con el *problema*. Les acompañan las variables propias del *sujeto* que se enfrenta a la tarea (psicológicas, o que describen sus conocimientos matemáticos pertinentes –nivel en el contexto escolar) y las que vienen de la *situación* didáctica en que ésta se desarrolla (y, por tanto, describen el entorno físico, psicológico o social en que transcurre la tarea). No vamos a entrar en las variables del sujeto –de las que se ocupa fundamentalmente la psicología– y sobre las situaciones didácticas nos limitaremos a hacer sugerencias que pueden favorecer la aparición de procesos y resultados deseables.

Las variables dependientes son las que se obtienen de la medida de las respuestas de los sujetos a las tareas que se les plantean. De ellas no trataremos aquí. La división que hizo Kilpatrick distingue lo que tiene que ver con el resultado (correcto/incorrecto, completo o parcial, tiempo empleado, etc.), con el proceso (uso de herramientas heurísticas, algoritmos, etc.) y con cómo el sujeto evalúa lo que ha hecho, e incluye una última categoría –“concomitantes”–, cajón de sastre en que echar todo lo que pueda medirse y no pertenezca a ninguna de las otras tres categorías (por ejemplo, las habilidades del sujeto que puedan variar entre el comienzo y el fin de la tarea).

En la descripción que sigue restringiremos las características del problema a aquellas que son de particular interés para la resolución de problemas aritméticos: así,

las variables de la tarea que consideraremos serán las variables sintácticas, de contexto y de contenido.

## VARIABLES SINTÁCTICAS.

Se entiende por variable sintáctica a cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Desde este punto de vista, palabras, grupos de palabras, símbolos y relaciones entre ellos se consideran al margen de cualquier referencia a su contenido.

Pueden darse numerosas listas de variables sintácticas; sin ánimo de ser exhaustivos –y por señalar las que han resultado más interesantes en los estudios realizados para dar cuenta de las variables dependientes– algunos ejemplos de variables sintácticas pueden ser:

El *tamaño del problema*, que se puede medir por el número de caracteres (letras o números), de palabras, o de frases.

La *complejidad gramatical*, que puede referirse al número de sustantivos, calificativos, pronombres, etc.; o al tipo de oraciones que constituyen el texto del problema, esto es, coordinadas o subordinadas.

La *presentación de los datos*, mediante números, símbolos o palabras.

La *situación de la pregunta* en el texto del problema, esto es, si ésta está aislada al final del texto y separada de la parte informativa, o al comienzo del texto; o bien el texto completo es una interrogación en la que se entremezclan la información y la pregunta del problema.

La *secuencia* o el orden de presentación de los datos, fundamentalmente si el orden en que aparecen en el texto del problema se corresponde con el orden en que éstos han de ser considerados al efectuar la o las operaciones necesarias para la solución del problema.

El formato de presentación del problema, esto es, si es narrativo, telegráfico o jeroglífico –un combinado de palabras y dibujos–, aunque puede considerarse como una variable sintáctica, lo trataremos dentro de las variables de contexto, ya que la presencia de dibujos sitúa el texto del problema en un mundo de referencia de significados.

Cuando estas y otras variables sintácticas se han considerado explícitamente, esto se ha hecho atendiendo sólo al enunciado del problema que se presenta al resolutor. Los datos que hemos incluido en el capítulo tercero resumen estudios de las dificultades que los resolutores tienen en función de las variables sintácticas del enunciado. Ahora bien, la importancia de estas dificultades obliga a considerar las

transformaciones sintácticas que el texto del problema sufre en el curso del proceso de resolución; este aspecto no ha sido estudiado hasta la fecha, o, al menos, no tenemos noticia de ello, pero ejemplos como los que siguen ponen de manifiesto que el profesor ha de estar atento a ello.

Supongamos que se está resolviendo con un material concreto un problema del estilo de

“Juan tiene  $a$ . Da  $b$ . ¿Cuántos le quedan?”.

Los alumnos manipulan el material, realizando las acciones concretas correspondientes al problema. Si no dan de inmediato con la solución, o aparecen dificultades, el profesor puede preguntarles, reflexionando sobre las acciones *ya realizadas*:

“Juan tenía  $a$ . Dio  $b$ . ¿Cuántos le quedaron?”.

con lo que ha cambiado los tiempos verbales del enunciado, al ser coherente con el transcurso de la actividad de resolución. Si las dificultades persisten, no es extraño que, con el ánimo de ayudar a comprender el asunto, intente que éstos fijen su atención en cada una de las partes del problema, en las acciones correspondientes, en la secuencia temporal de su realización, en las consecuencias de las acciones... En el diálogo con el o los alumnos, el problema será enunciado oralmente de la forma más adecuada para el énfasis que se persigue, con lo que aparecerán versiones como las siguientes:

“Juan tiene  $a$ . Si da  $b$ , ¿cuántos le quedan?”.

“Juan tiene  $a$ . Cuando dé  $b$ , ¿cuántos tendrá?”

“Si Juan tiene  $a$  y da  $b$ , ¿cuántos le quedarán?”

“Antes Juan tenía  $a$ , pero dio  $b$ . Lo que te preguntan es cuántos tiene ahora.”

Conviene tener presente que estas transformaciones del enunciado del problema, que se utilizan como ayuda –y son las ayudas razonables en la instrucción–, conducen, sin embargo, a enunciados distintos desde el punto de vista sintáctico que en los estudios realizados son, de hecho, de niveles de dificultad distintos y, en ocasiones, superiores. En particular, la versión hipotética del enunciado de un problema, que es razonable que aparezca en diálogos de este tipo, es siempre más difícil que la versión de hecho (cf. Caldwell<sup>13</sup>)

---

<sup>13</sup> En concreto, Caldwell encontró que esto es cierto en general; pero que si se distingue además entre problemas enunciados en contextos concretos y en contextos abstractos, la dificultad de los enunciados hipotéticos es menor en contextos abstractos, aunque parezca sorprendente.

## VARIABLES DE CONTENIDO Y DE CONTEXTO.

La resolución de un problema empieza por su lectura. Una vez leído, reconocido como un trozo normal del castellano y como el tipo de texto que es un problema, el resolutor se interesa por su significado. Las variables de contenido y de contexto dan cuenta, pues, del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo, mientras que las variables de contexto lo hacen a los significados no matemáticos, incidentales en el texto del problema. Aunque esta distinción es operativa, es preciso señalar que no todo el significado matemático queda agotado por las variables de contenido: contextos no matemáticos sitúan a menudo el texto del problema en un campo de las matemáticas. Por ejemplo, la tradición escolar hace que un problema enunciado en el contexto “de grifos” evoque los significados matemáticos correspondientes al campo de la proporcionalidad.

Siguiendo las ideas de Webb (1979) las variables de contenido pueden clasificarse utilizando varios criterios:

1.– *Tema matemático*. Donde además de la distinción entre áreas, materias o disciplinas (álgebra, geometría, etc.), hay que considerar pequeñas parcelas de las matemáticas, que en la tradición educativa han cristalizado como partes de las matemáticas escolares con rasgos peculiares (regla de tres, mezclas, monedas, edades...)

2.– *Campo de aplicación*. Donde el enunciado del texto del problema y los conceptos que en él aparecen provienen de otras disciplinas como la física, la química, la biología, la economía, etc. ; y los conceptos matemáticos tienen un mero carácter instrumental.

3.– *Contenido semántico*. Aquí se considera el vocabulario matemático y las palabras-clave.

4.– *Variables que describen los elementos del problema*. Los tres criterios anteriores pueden aplicarse al contenido de cualquier texto matemático, aunque no sea un problema. Este cuarto criterio pretende tomar en consideración los elementos distintivos del tipo de texto que es un problema de matemáticas y no otro texto matemático cualquiera. El significado del problema puede cambiar en función de la naturaleza de los datos y en función del tipo de meta del problema. De este estilo es la distinción clásica de Polya entre problemas de encontrar y problemas de demostrar, que está hecha en función del tipo de meta; o los análisis de la parte informativa del problema que permiten hablar de datos suficientes, redundantes, relevantes, contradictorios, etc.

5.– *Equipo matemático utilizable*. Finalmente, este último criterio de clasificación pretende no dejar de lado que en una situación didáctica concreta el

propio material cuya utilización está permitida por el texto del problema es portador de contenido matemático.<sup>14</sup>

Por lo que se refiere a las variables de contexto, no tiene sentido hacer una relación pormenorizada de los contextos a los que hacen referencia usualmente los problemas escolares. Lo que hace Webb (1979) es dar varios criterios para clasificar los tipos de contextos que suelen aparecer. El *formato de presentación* o la representación del problema y el *escenario-marco* o contexto verbal son los dos que vamos a comentar.

Con respecto al formato, el problema puede presentarse de modo manipulativo, pictórico, simbólico, verbal, o con una combinación de varios de estos modos. La presentación de problemas mediante dibujos o grabados se hace en los primeros niveles escolares; en esos niveles, el dibujo, el grabado o la historieta contiene todo el texto del problema. Progresivamente van apareciendo problemas con texto escrito, acompañado de dibujos. Los dibujos pueden reflejar la estructura del problema, ser esquemas para la solución o constituir meras ilustraciones del contexto del problema<sup>15</sup>.

En cuanto al escenario-marco uno puede distinguir entre familiar y no familiar, aplicado y teórico, concreto y abstracto, hipotético y de hecho, convencional e imaginativo, etc.

## **VARIABLES DE LA TAREA Y FASES DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN**

La determinación de las variables de la tarea y la división del proceso de resolución en fases pertenecen a análisis distintos. En el caso de las variables de la tarea lo que se hace es medir el porcentaje de éxito para problemas cuyos enunciados se han variado sistemáticamente y establecer, mediante las técnicas estadísticas usuales, los factores que explican los niveles de dificultad que aparecen, o correlacionar estos niveles de dificultad con variables supuestas previamente. No se mira, por tanto, la conducta del resolutor mientras realiza el problema. Por su parte, la división en fases del proceso está hecha fijándose en la naturaleza de las acciones que desarrolla el resolutor en el curso del proceso, e intentando caracterizar esa conducta con etiquetas que la describen de modo más o menos preciso.

A partir de estos dos tipos de estudio es posible construir un esquema que muestre en qué lugares del proceso es más razonable que se presenten las dificultades asociadas a cada una de las variables de la tarea que han sido determinadas. La única

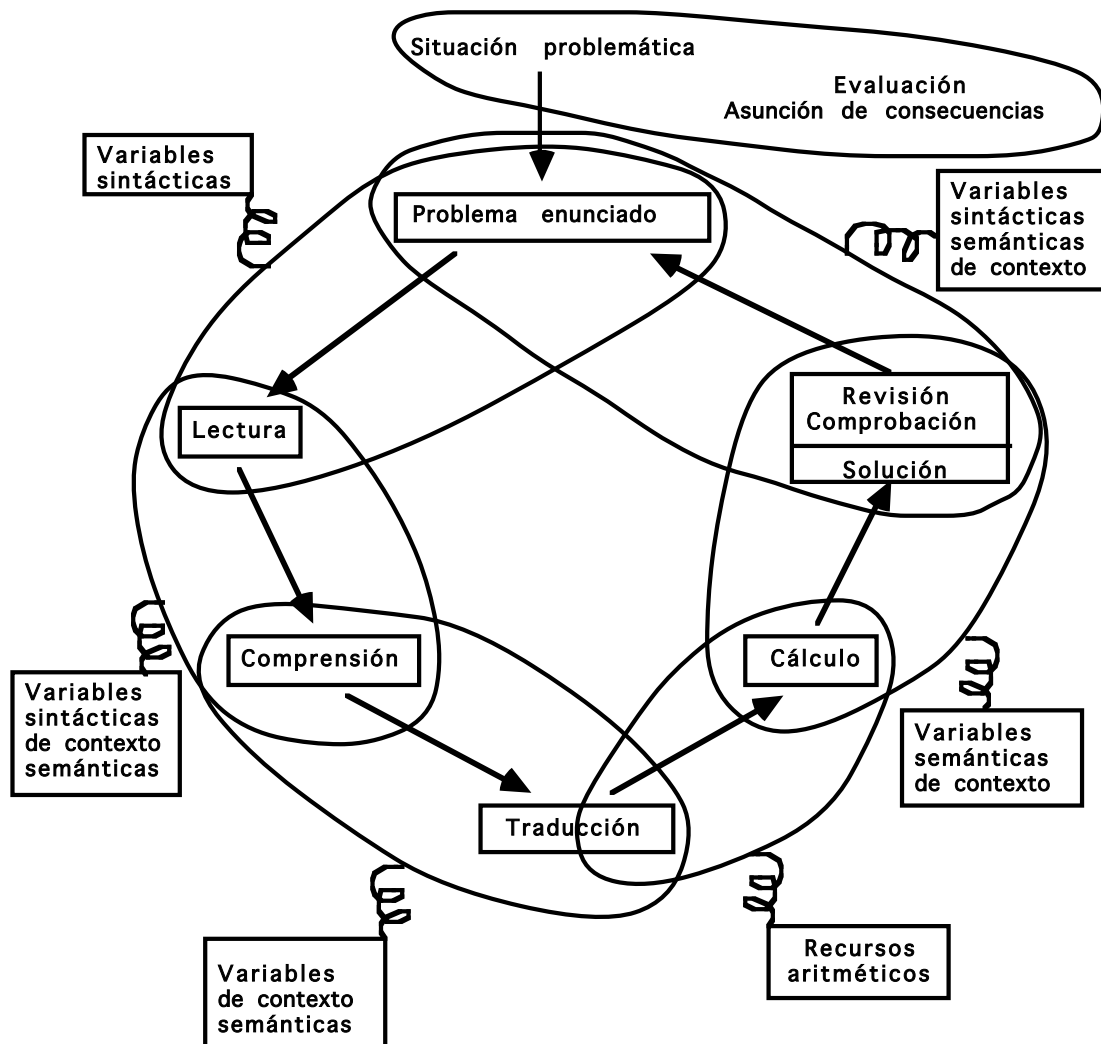
---

<sup>14</sup> Por ejemplo, la calculadora, cuyo uso acarrea nuevos contenidos para los números, como puede verse en Fielker (1986).

<sup>15</sup> Desafortunadamente, en la mayoría de los libros de texto los dibujos son meras ilustraciones. Puede que la causa no sea otra que el predominio del diseño.

evidencia que puede aportarse, y que hace razonable este esquema, viene de observaciones no sistemáticas de los puntos de atasco en el proceso de resolución que parecen provenir de las características del enunciado del problema.

En Kulm (1979) se puede encontrar un cuadro que ilustra la relación entre variables y fases, pertinente cuando quiere describirse la resolución de problemas de matemáticas de cualquier tipo. Para el caso particular de los PAEV y la descripción del proceso de resolución que hemos adoptado nosotros, un buen esquema puede ser el siguiente.





## **FINALIDADES Y RESERVAS**

### **FINALIDADES**

Con posterioridad, simultánea o previamente a la instrucción formal en las operaciones de suma y resta se plantean y resuelven en las aulas escolares problemas aritméticos. En el caso de la multiplicación y la división, el planteo y la resolución de problemas se hace generalmente después del inicio de la instrucción formal en las operaciones.

De la lectura de las directrices que regulan la enseñanza básica en nuestro país (Niveles Básicos de Referencia) se pueden extraer dos tipos de razones que avalan –y justifican, al menos en la intención del legislador– la presencia de estos y otros problemas en el currículo de matemáticas.

En primer lugar, los problemas están situados en la secuencia de objetivos después de los que se refieren a la adquisición de los conceptos relativos a los números y a las operaciones entre ellos. La taxonomía de objetivos utilizada obliga a situarlos en esta posición, ya que la jerarquía que establece los considera de un nivel superior. Además, subyace la concepción clásica de los problemas como refuerzo y consolidación de los conceptos adquiridos<sup>16</sup>. Por otro lado, objetivos como el 2.2.8. de 3º, “Aplicar los conocimientos del tema a plantear y resolver problemas tomados de la vida real...”, muestran explícitamente la segunda de las razones.

Naturalmente –y aunque no pueda desprenderse de ninguna directriz ministerial– la Tradición es quizá la razón de más peso; y la tradición indica que la educación matemática se ha acompañado siempre de problemas que ayudan a resolver pequeños conflictos cotidianos, o que ayudan a resolver conflictos susceptibles de plantearse en un mundo si no real, al menos verosímil.

Hay más razones que pueden aducirse en favor de los problemas, pero que no se encuentran usualmente en la práctica cotidiana en las aulas, ni están reflejadas en las orientaciones ministeriales, ni son el legado de la tradición. Las aportaciones hechas en la última década por los educadores matemáticos, los psicólogos cognitivos y los especialistas en inteligencia artificial sugieren la posibilidad de considerar la Resolución de Problemas con entidad dentro –o en los márgenes– del currículo matemático. En efecto, según estas sugerencias la resolución de problemas de matemáticas es una tarea privilegiada para desarrollar métodos y estrategias útiles a la hora de abordar cualquier problema; a su vez, en el transcurso de la tarea se invocan, se ponen de manifiesto y se ejercitan destrezas y procesos cognitivos generales difícilmente requeridos por cualquier otra tarea escolar. En tal dirección, Bell (1976)

---

<sup>16</sup> Concepción que está muy lejos de la idea de estructura conceptual, según la cual números, operaciones y problemas se consideran en el primer nivel del análisis como elementos que la constituyen.

ensayó un diseño de currículo –desarrollado en el Shell Centre–, que contenía objetivos de proceso embebidos en los problemas, pero considerados explícitamente. Otros proyectos, p. e. Burton (s.f.), han tratado de potenciar la resolución de problemas en el currículo de matemáticas, considerando esta tarea de modo autónomo, y sin hacer más referencia a su integración en el conjunto del currículo de matemáticas que la de los conocimientos mínimos requeridos para abordar los problemas. Sin embargo, en nuestro país, a pesar de algunas propuestas como Grupo Cero (1987), que, junto a una nueva noción del currículo de matemáticas, incluye alguno de los postulados de los puntos de vista recién mencionados, tal visión de la resolución de problemas parece estar lejos de las propuestas de los responsables educativos y, sobre todo, ha encontrado poco eco en las prácticas usuales en el sistema escolar.

## DE LA INTENCIÓN A LA PRÁCTICA

Descendamos un peldaño y pasemos de lo que es posible manifestar como intenciones en el diseño del currículo al examen de cómo los problemas cumplen –o pueden cumplir– el papel que se les asigna.

Tomemos para empezar la función de los problemas como refuerzo y consolidación de conceptos. Carpenter y sus colaboradores, que han estudiado profundamente la adquisición de los conceptos aritméticos (Carpenter & Moser, 1983; Carpenter, Hiebert & Moser, 1981, 1983; Carpenter, Moser & Romberg, eds., 1982), han observado que los niños ya resuelven pequeños problemas de adición y sustracción antes de recibir instrucción formal alguna sobre los conceptos aritméticos. Éste es un hecho conocido que no valdría la pena afirmar, si no fuera porque la concepción de la enseñanza como transmisión de conocimientos, considera a los alumnos como recipientes vacíos y, por tanto, lo olvida. Hay, sin embargo, una observación importante en los trabajos citados, que no se refiere a lo que los niños saben hacer, sino a los errores que se observa que cometen: Carpenter y sus colegas constataron que muchos de los errores en la elección de la operación adecuada para resolver un problema, que se observa que los alumnos cometen *después* de haber recibido instrucción formal en la suma y la resta, no solían observarse en esos niños *antes* de la instrucción. Éste es el hecho observado, el fenómeno, si se quiere. Carpenter y sus colegas nos proporcionan también algunos consejos prácticos –esto es, un tratamiento que implícitamente supone que han realizado alguna reflexión etiológica sobre el fenómeno observado:

[...] los problemas verbales también proporcionan interpretaciones diferentes de la adición y la sustracción, interpretaciones que son importantes para su comprensión por el niño. Quizás introduciendo las operaciones basadas en los problemas verbales e integrando a éstos en el currículo, mejor que usándolos como aplicación de los algoritmos ya aprendidos, el niño desarrollará su natural habilidad para analizar la estructura de un problema y desarrollará una concepción más amplia de estas operaciones (Carpenter, Hiebert & Moser, 1981, pgs., 38-39)

En realidad, la explicación de lo que está ocurriendo podría ser ésta: los problemas verbales, planteados, enunciados y resueltos por métodos intuitivos en diferentes contextos, contribuyen a dotar de significado a la adición y la substracción, más allá de los significados –podríamos decir que de índole matemática– que tales operaciones puedan adquirir al presentarse como operaciones entre números naturales. Como veremos más adelante, incluso tal presentación de las operaciones puede adquirir connotaciones distintas en función del estilo o aproximación escolar a  $\mathbb{N}$  que se realice. Lo que potencia o estimula, por un lado, y restringe o elimina, por otro, interpretaciones de las operaciones que, aunque estén aceptadas intuitivamente y sean operativas en contextos usuales, no son recogidas por la instrucción pensada y planeada desde un punto de vista estrictamente matemático.

### “LA EDAD DEL CAPITÁN”

Por otro lado, se poseen ejemplos paradójicos acerca del uso de las operaciones en la resolución de problemas verbales en un sentido no coherente, ni extraíble de modo alguno de su significado en un contexto dado. Es más, podríamos decir que el resolutor utiliza operaciones aritméticas para resolver el problema, con la conciencia explícita de estar forzando los límites del sentido en que tales operaciones se utilizan normalmente, hasta situarse fuera de su campo de significación.

Uno de tales ejemplos lo constituye la famosa experiencia del IREM de Grenoble con el problema de la edad del capitán<sup>17</sup>. El problema tiene su origen en el que Flaubert propuso a su hermana Caroline en una carta:

Puesto que estudias geometría y trigonometría voy a proponerte un problema:  
Un barco navega en el océano. Salió de Boston con un cargamento de lana. Desplaza 200 toneladas. Se dirige hacia Le Havre. El palo mayor se quebró; el camarero de las cabinas está en el puente; a bordo hay doce pasajeros. El viento sopla en la dirección ENE. El reloj marca las 3 y cuarto. Es el mes de mayo. ¿Qué edad tiene el capitán?

Los componentes del IREM de Grenoble escogieron para su experiencia un problema menos narrativo, más telegráfico y acorde con el modelo típico de los problemas aritméticos verbales.

En un barco hay 26 corderos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?

De entre los 97 alumnos de 7 a 9 años a los que se les propuso el problema, 76 lograron calcular la edad del capitán partiendo de estos datos. Animados por el éxito de sus alumnos, dispusieron otra batería de problemas entre los que se podían encontrar algunos como el siguiente:

Un pastor tiene 360 borregos y 10 perros. ¿Cuál es la edad del pastor?

---

<sup>17</sup>Ver IREM de Grenoble (1980).

Los resultados no variaron mucho, en cuanto al número de alumnos que consiguieron utilizar los datos para contestar. No es fácil dar una explicación satisfactoria de los resultados de esta experiencia. Freudenthal (1982) da una que nos satisface particularmente por lo que tiene que ver con los significados de las operaciones aritméticas en el contexto en que se utilizan y la supuesta relación entre la realidad y los problemas escolares. Esta explicación en el fondo supone la consideración de algunos contextos como *contextos mágicos* en los que se puede dotar de sentido a las operaciones fuera de su campo de significación habitual, aunque la atribución de sentido esté lejos de hacerse de forma arbitraria, como muestra el que se use una suma y una división, respectivamente, para calcular las edades del capitán y del pastor.

Lo que está claro es que este tipo de contestaciones es el resultado del aprendizaje escolar. En la misma experiencia del IREM de Grenoble uno de los profesores le propuso a un alumno de 7 años el problema siguiente: “Tienes 10 lápices rojos en tu bolsillo izquierdo. ¿Cuántos años tienes?”; y el niño contestó sin pestañear: “20 años”. Al hacerle notar el profesor que sabía perfectamente que no tenía veinte años, el niño le replicó: “¡Claro!, pero es culpa tuya, no me has dado los números buenos.” Otros comentarios de los alumnos ponen también de relieve el papel crucial que desempeña seguramente en la solución del problema el contexto escolar en que se plantea. En efecto, cualquier niño escolarizado sabe que los problemas –como cualquier otra tarea– se ponen en la escuela para que se dé con su respuesta.

Podría parecer que los alumnos que encontraron que el problema de la edad del capitán no tenía sentido, serían capaces de comportarse con la misma coherencia en situaciones análogas; lo contrario se muestra en los tres ejemplos siguientes, que comparan los comentarios de tres alumnos al problema de la edad del capitán y al problema de la “edad de la maestra”.

En una clase hay 7 filas de 4 mesas. ¿Cuántos años tiene la maestra?

	el capitán		la maestra
Anne	— ¿cómo se puede saber la edad del capitán? — no se puede saber	7 $\frac{x4}{28}$	la maestra tiene 28 años
Nathalie	— no entiendo por qué has hablado primero de borregos y luego de borregos y después del capitán — me parece que ese problema es un poco raro	— pienso que la maestra tiene 28 años porque yo he hecho $4 \times 7 = 28$ — pienso que este problema es bastante fácil	
Peter	— ¿por qué se habla de borregos y luego se pide la edad del capitán? — pienso que es tonto que se hable de borregos y después del capitán	— pienso que la maestra tiene 28 años porque $4 \times 7 = 28$ — pienso que éste es menos tonto que el otro	

Cabe sospechar que el contexto escolar del enunciado del problema les hace recaer en el contexto en que se están resolviendo los problemas: la escuela.

## LOS ALUMNOS INVENTAN ENUNCIADOS

Podría pensarse que los niños responden de esta manera a los problemas aritméticos verbales porque los enunciados que se les presentan están alejados del mundo de significados de su experiencia de la “vida real” y que el remedio a esta situación es construir enunciados de problemas que pertenezcan a su mundo de experiencias. Pero esta visión del asunto es cuanto menos ingenua. Cuando los alumnos se enfrentan con la tarea inversa de inventar problemas que correspondan a una expresión aritmética determinada, producen enunciados que sólo respetan la forma, esto es, cuya estructura es la del texto de un problema. Así, Nesher (1980) cuenta que Johnny (7 años) cuando se le pide que diga una historia que corresponda a la expresión aritmética  $1+6=7$ , produce el enunciado “Mamá compró una plancha y luego compró seis planchas más. Ahora tiene siete planchas”, y que Ruth (6 años), para  $3+4$ , dijo “Me comí tres tazas y cuatro platos...”

Este comportamiento persiste en edades algo más avanzadas, incluso entre alumnos de escuelas cuyo proyecto pedagógico pretende organizar las actividades de los alumnos en torno a centros de interés tomados del entorno. Los dos ejemplos siguientes, más elaborados que los que hemos citado de Nesher, fueron producidos por José María (10 años, 4º de EGB), alumno de una escuela valenciana en la que se practica una enseñanza “enraizada en el medio”. La tarea en ambos casos era construir un enunciado correspondiente a una expresión aritmética compleja. He aquí las expresiones y los enunciados correspondientes:

$$(548-321):52=42$$

En un bosque hay 548 animales y se provoca un incendio que causa 321 víctimas los demás se refugian en 52 ríos ¿cuantos animales hay en cada rio? (sic)

$$(452 \times 9):70=58$$

En el Guernica hay 452 pinturas y acen 9 copias del cuadro. Hay 70 sitios en el cuadro ¿cuantas pinturas hay en cada sitio? (sic)

Estos enunciados hacen ostentación de realismo –un incendio en el bosque y los animales en busca de refugio, el Guernica– y están marcados además por la ideología que impregna la enseñanza en esa escuela –ecologismo, emblemas de la izquierda. Las operaciones que aparecen en las expresiones tienen su reflejo en palabras clave: ‘los demás’ para la resta, ‘hacer copias’ para la multiplicación, ‘cuántos [...] en cada’ para la división. Sin embargo, las historias que narran pertenecen de nuevo a esa realidad aparte de los problemas escolares en la que los animales, aunque estén huyendo despavoridos, han de dirigirse en igual número a cada uno de los 52 ríos (!) que atraviesan el bosque en llamas con el fin de que la distribución sea uniforme; o en la que Picasso tuvo el buen cuidado de poner el mismo número de “pinturas” en cada uno de los “sitios” del Guernica, quizá previendo que algún día un escolar avisado pudiera usar su cuadro para contentar a su maestro al devolverle la tarea encomendada. (“¿Tú no querías un problema de división? Pues ahí lo tienes.”)

## LA NATURALEZA ESTEREOTIPADA DE LOS PAEV

Las consideraciones anteriores llevan a pensar que es prácticamente imposible que un problema aritmético escolar resulte un reflejo, aunque sea parcial y deformado, de un problema cuantitativo real. Nesher (1980), en un artículo demoledor, mantiene que los problemas aritméticos escolares al ser una versión simplificada de los problemas cuantitativos reales se convierten en un estereotipo, cuya realidad es la del aula y no la del mundo. Lo que sigue intenta mostrar cómo las prácticas escolares producen tal estereotipo.

Empecemos por el texto del problema. Ya hemos indicado que una de las cosas que un alumno aprende como parte de su experiencia escolar es a identificar un texto determinado como el texto de un problema. En efecto, aunque los PAE se presenten generalmente como textos que parecen tener las características propias de los textos narrativos, sin embargo, su interpretación semántica está moldeada por el juego de lenguaje de la instrucción aritmética y no por el del mundo de experiencias de los niños.

Por ejemplo, Nesher (1980) señala cómo cuando se lee el enunciado del problema 14 uno se fija en rasgos semánticos de los verbos ‘correr’ y ‘andar’

diferentes si el texto se considera como un texto narrativo –y nos interesa la historia que cuenta– o como el texto de un problema –y queremos resolverlo.

Problema 14 2 niños fueron corriendo a clase y 3 niños fueron andando. ¿Cuántos niños llegaron a clase en total?

La lectura narrativa enfatiza los rasgos semánticos de ‘correr’ y ‘andar’ que tienen que ver con la velocidad del movimiento, el tiempo empleado para llegar a clase, el carácter inquieto o tranquilo de los personajes de los que se habla, etc., y se puede inferir que unos tienen más ganas que otros de llegar a clase, o que se han levantado a tiempo o no, etc. Sin embargo, la lectura que exige el contexto escolar toma en cuenta los rasgos semánticos que se corresponden con la estructura lógica subyacente del problema: el tipo de movimiento no es pertinente, lo único que importa es que ‘correr’ y ‘andar’ califican a los que llegaron a clase de forma diferente, de manera que los personajes del texto del problema pertenecen a dos conjuntos disjuntos. Lo que hay que inferir ineludiblemente es que hay que sumar las cantidades, ya que la pregunta del problema contiene una propiedad común a ambos conjuntos y éste es el rasgo semántico de ‘llegar a clase’ pertinente. Nótese que éstos son los rasgos que permiten clasificar este problema en la categoría semántica *Combinar1* (ver capítulo 3).

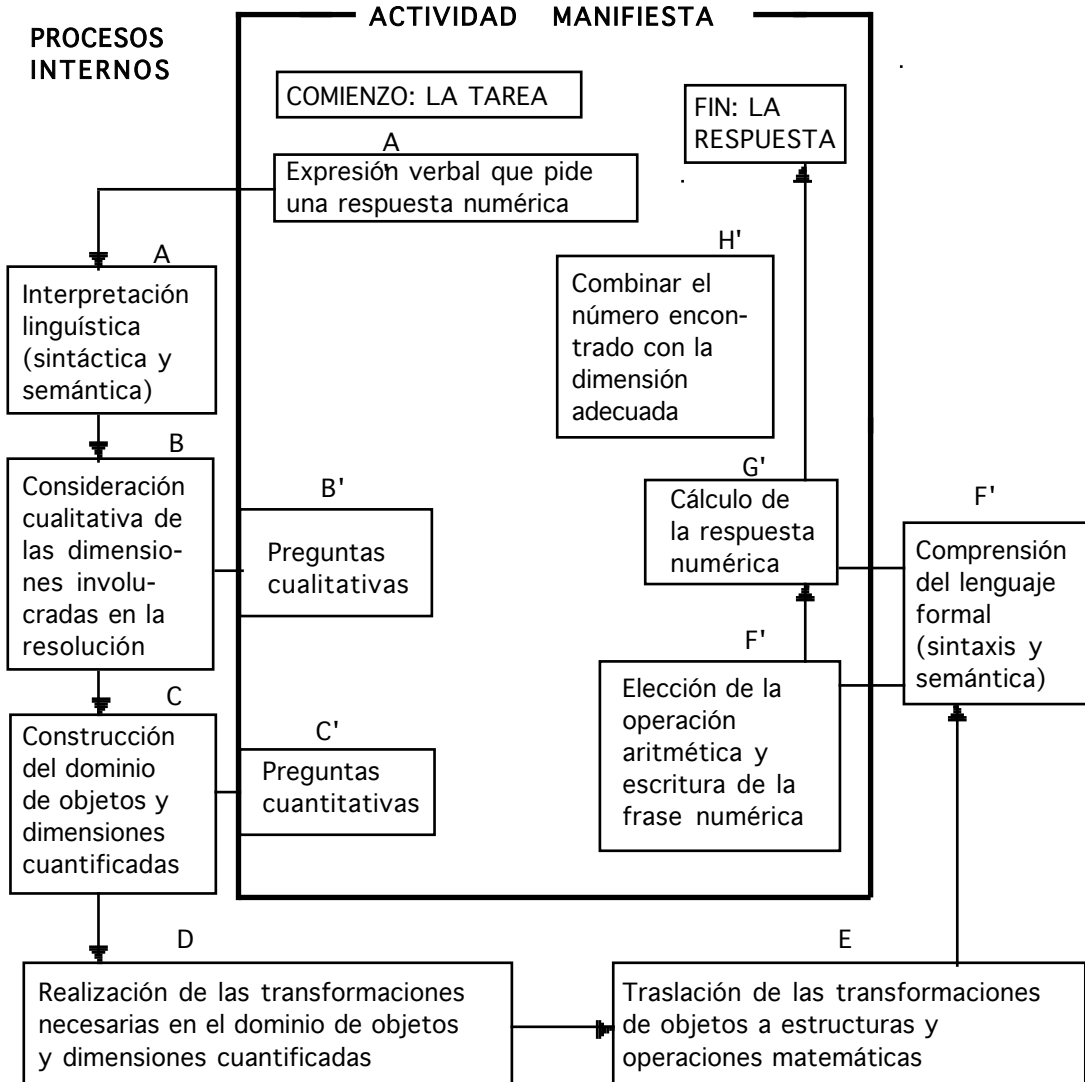
Por otro lado, a diferencia de los textos narrativos en los que la elipsis está permitida, el texto de un problema no autoriza al lector a suponer que en el transcurso del tiempo narrativo haya ocurrido ningún acontecimiento que no esté explícitamente presentado en el texto del problema. Así, por ejemplo, en el problema 15 Ruth *no puede* haberse comido ningún caramelo a lo largo de la mañana.

Problema 15 Ruth tenía 8 caramelos esta mañana. A mediodía le dio 2 a su hermana Susan. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?

Se puede concluir pues que, aunque los PAEV parezcan hablar del mundo porque las situaciones que en ellos aparecen corresponden a contextos cotidianos, el lenguaje con que están enunciados no es, estrictamente hablando, el lenguaje vernáculo, sino el lenguaje particular de la instrucción aritmética, y que, por tanto, el mundo de experiencias que expresan no es el mundo de experiencias del niño en general, sino el mundo particular de sus experiencias escolares.

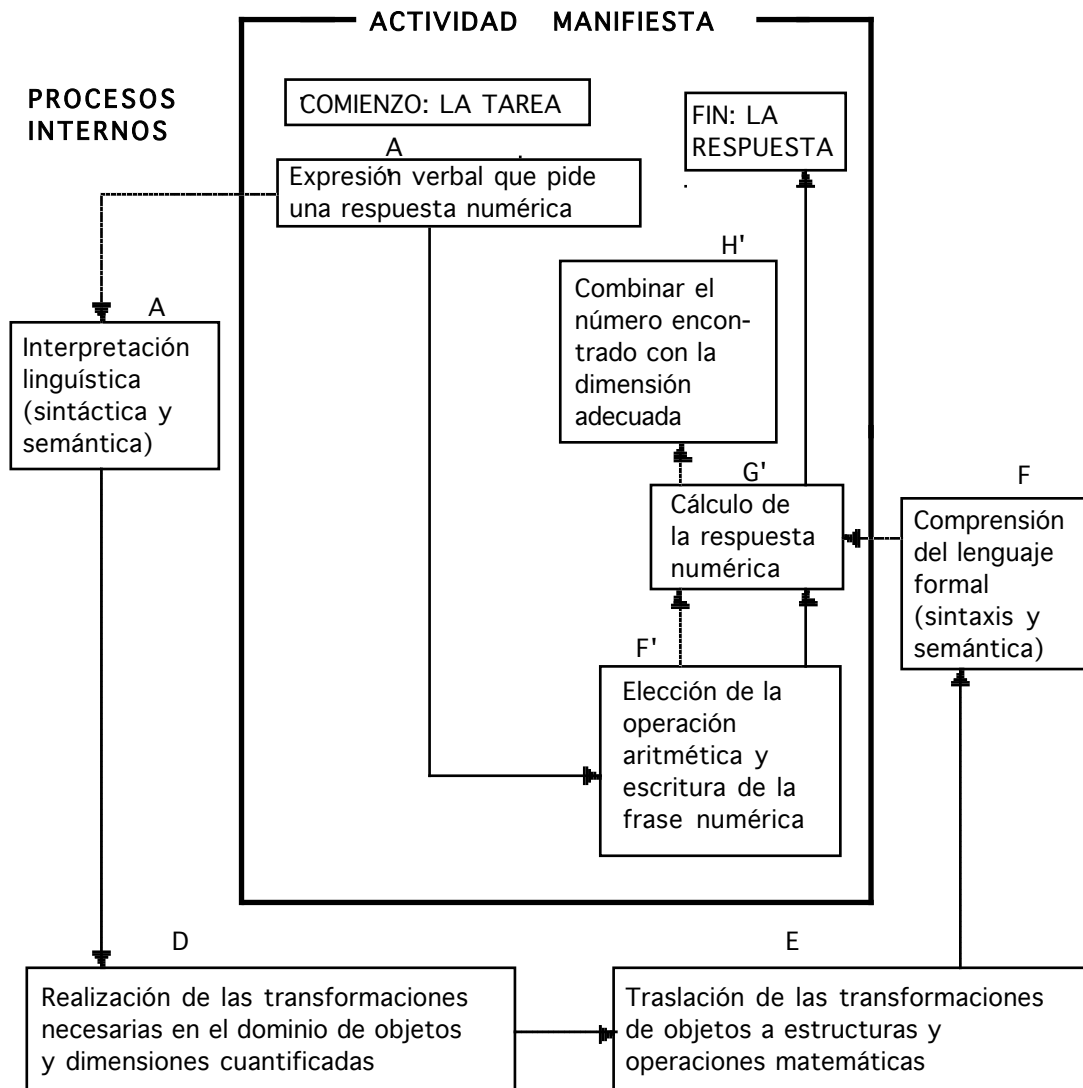
Esta pérdida de realidad del enunciado de los problemas –o, su pertenencia a una realidad al margen– es particularmente importante cuando se compara el proceso de resolución de un problema aritmético escolar con el de un problema cuantitativo real.

Nesher (1980) presenta dos esquemas con los que pretende comparar ambos procesos de resolución en los que distingue entre la actividad observable y los procesos internos asumidos.



PROCESO DE RESOLUCION DE UN PROBLEMA CUANTITATIVO REAL



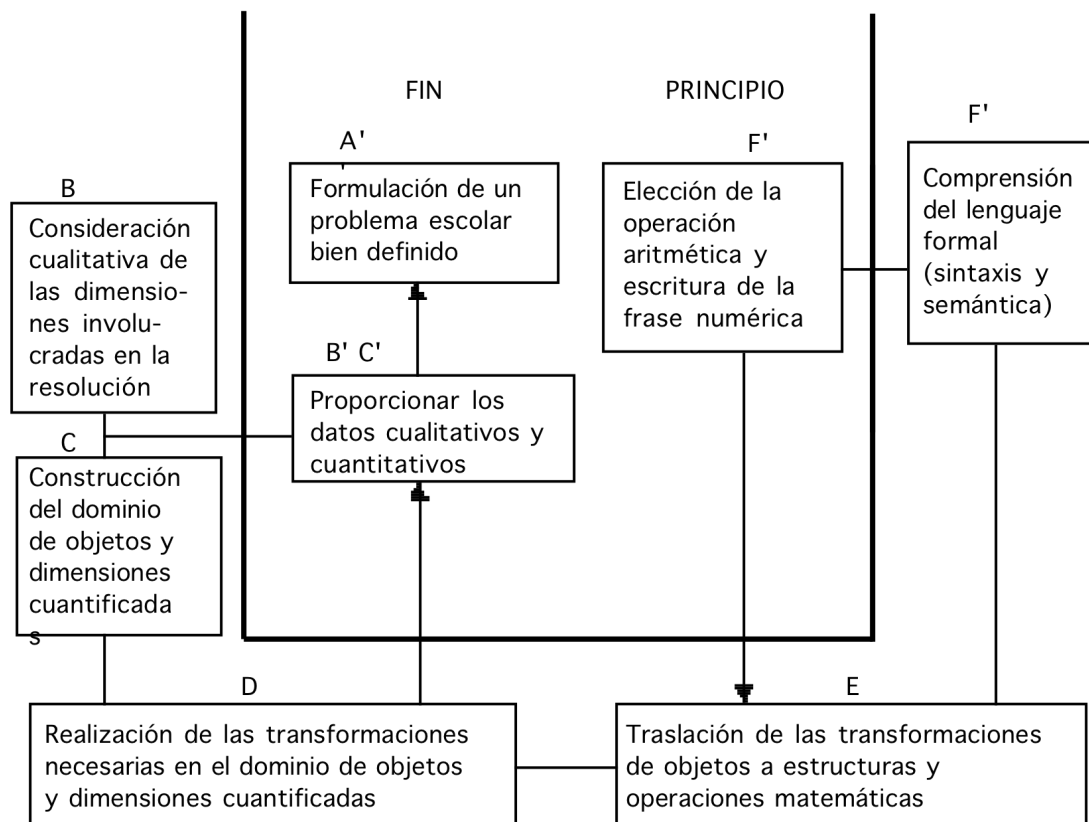


PROCESO DE RESOLUCION DE UN PROBLEMA ARITMETICO

Como puede verse en los esquemas, las diferencias fundamentales son de dos tipos: por un lado, en un problema cuantitativo real el proceso se desarrolla siguiendo los procesos internos, mientras que en un PAE la guía del proceso no es las transformaciones de los objetos y relaciones reales y sus equivalentes objetos y relaciones matemáticas, sino la presencia en el texto del problema de números y palabras claves que se combinan mecánicamente según reglas del juego pertenecientes a la realidad del aula. Además, en el caso de los PAEV han desaparecido dos fases cruciales que sí que están presentes en los problemas cuantitativos reales: las preguntas cualitativas que conducen a la *decisión* sobre qué dimensiones están implicadas, y las preguntas cuantitativas que *construyen* el dominio de objetos y dimensiones cuantificadas.

Nesher mantiene que el paso de D a E es crucial para la comprensión de la tarea que se está realizando y que en el proceso de resolución de un PAEV es difícil que pueda darse, y concluye que “sin transformaciones reales, en la mente del que resuelve el problema en el dominio pragmático de los objetos pertinentes y sin conciencia explícita de sus dimensiones y relaciones funcionales, es imposible aplicar las matemáticas de forma significativa, incluso en los casos en que se comprende totalmente el lenguaje matemático” (Nesher, 1980).

De hecho, en la práctica usual, el profesor, o el autor del libro de texto, es el único que realiza las transformaciones anteriormente mencionadas. Esto puede verse en el siguiente esquema –que también es de Nesher– y que representa la tarea del profesor desde que, partiendo de una operación aritmética, elige un contexto real, hasta que acaba formulando el problema escolar bien definido.



#### LA TAREA DE PROPONER UN PROBLEMA ARITMÉTICO ESCOLAR

Se ha constatado pues un hecho: la simplificación que se realiza para enunciar un PAE supone seleccionar los elementos claves que facilitan la comprensión. Creer que no hay posibilidad de superar las consecuencias de esta selección sería caer en un fatalismo que está lejos de nuestra intención.

Todas las reservas hechas no deben transmitir la idea de que la única finalidad del análisis inicial es poner de manifiesto la miseria en la que, inevitablemente, se ha de desarrollar la práctica de la enseñanza en las escuelas, miseria de la que nunca se podrá salir. No, afortunadamente se sabe cómo afrontar algunos de estos problemas, y los capítulos que siguen intentan dar armas teóricas y prácticas para ello.