2.

Números, operaciones y problemas

Dseta: ¿Comenzar? ¿Por qué tendríamos que comenzar? Mi mente no está en blanco cuando descubro (o invento) un problema.
Imre Lakatos

INTRODUCCIÓN

Como ya se dijo antes, desde los primeros días en que los niños entran en la escuela, por la propia construcción de la secuencia que marca el currículo escolar de matemáticas, ellos se ponen en contacto simultáneamente con tareas aritméticas en las que aparecen entremezclados números, operaciones y problemas.

Por lo que respecta a los números y las operaciones, aprenden a contar, recitar la secuencia numérica; a reconocer las cifras y escribirlas; a coordinar y comparar conjuntos de objetos, a decir cuántos objetos hay, dónde hay más o menos; a expresar simbólicamente estas relaciones; a sumar con los dedos, o mediante la recta numérica, o con regletas de colores; a distinguir entre valor absoluto y relativo de las cifras, asociando la posición con el orden de la unidad y adentrándose con ello, por tanto, en la comprensión del sistema de numeración. También dedican su tiempo a escribir sumas de forma standard y realizarlas en el papel; a memorizar las tablas de sumar –o, más adelante, multiplicar–; y aprenden un conjunto de hechos numéricos producto de estas y otras tareas como contar a saltos, componer y descomponer números, etc. Junto a estas tareas, más o menos organizadas por temas o lecciones, hay, con cada tema o lección, problemas que han sido elegidos, fundamentalmente, en función del contenido del tema o lección, de manera que, en principio, no se exige del alumno como resolutor de problemas ninguna destreza o conocimiento que no esté explícitamente tratado en la lección correspondiente, o problemas en los que lo nuevo de ellos corresponde a lo aprendido en esa lección.

Este reflejo de los contenidos del tema o lección en los problemas que se plantean a los alumnos trae consigo que los números y las operaciones involucrados en los problemas sólo puedan, en principio, concebirse o interpretarse según la aproximación al concepto de número y de operación, y según el modelo de operación por el que el constructor del currículo haya optado. Por ejemplo, si la presentación de la multiplicación que ha escogido el constructor del currículo –o es la que toca, por imperativos legales, en ese momento– es la de suma de sumandos iguales, el problema 1 –o el problema 1bis– será el que acompañe naturalmente a la lección; y un problema como el 2 lo más probable es que no se plantee, y, si se hiciera, sería resuelto en el mejor de los casos porque al estar en la lección de multiplicación los alumnos multiplicarían las cantidades que aparecen, sin poder tener detrás un modelo de multiplicación que les permita hacer la traducción de forma significativa.

Problema 1	Una bolsa tiene 24 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen 7 bolsas iguales?
Problema 1bis	Juan tiene 7 canicas. Pedro tiene 5 veces más canicas que Juan, ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
Problema 2	Una niña tiene 4 blusas y 3 faldas. Blusas = {azul, rosa, blanca, verde}. Faldas = {azul, roja, marrón} ¿De cuántas formas distintas puede vestirse esa niña?

Cuando se miran los problemas aisladamente, fuera del contexto o secuencia curricular, puede verse detrás de cada problema una interpretación particular del concepto de número y de operación, o un modelo de operación, que permite efectuar la traducción correspondiente y alcanzar la solución. Como no suele ser el caso que el desarrollo del currículo se haga desde la perspectiva de los problemas, sino que se suele hacer desde la perspectiva de los contenidos matemáticos –con apoyo de teorías psicológicas o pedagógicas–, el currículo no ofrece normalmente a los alumnos la variedad de interpretaciones y modelos de números y operaciones que son necesarios para abordar con suficientes garantías de éxito los problemas. Esto es particularmente importante para los problemas aritméticos de una operación, en los que no sólo el punto crucial del proceso es la traducción, sino que, por esto, dejando el cálculo aparte, estos modelos e interpretaciones de números y operaciones y los significados que comportan son casi el único recurso matemático que se requiere.

En este capítulo trataremos de estudiar desde su reflejo en los problemas, y la importancia que ello tiene para la resolución de los mismos, las distintas interpretaciones de los números y de los modelos de las operaciones. El reflejo inverso esperamos que quede también de manifiesto.

NÚMEROS Y OPERACIONES

NÚMEROS: CONTENIDO DEL CONCEPTO VERSUS ACCESO AL CONCEPTO

Freudenthal (1973), al tratar del “concepto de número”, señala que el singular conduce a confusiones dado que el contenido y forma del concepto es múltiple según se mire desde los puntos de vista metodológico, genético o didáctico.

Si hacemos referencia al contenido matemático del concepto –tras el esfuerzo sistematizador del siglo pasado–, los sistemas numéricos clásicos, naturales, enteros, racionales, reales y complejos, aparecerán inmediatamente en la mente del lector. Estos sistemas son una herramienta conceptual inmejorable a la hora de organizar nuestro conocimiento matemático de los hechos, relaciones numéricas, propiedades de los números y propiedades de las operaciones que pueden realizarse con ellos. Así, por ejemplo, sabemos qué operaciones pueden realizarse sin restricción alguna en cada uno de esos sistemas, qué tipo de ecuaciones son siempre resolubles en cada uno de ellos, o la estructura algebraica de semianillo, anillo, etc. que les corresponde y que describe las propiedades algebraicas de las operaciones definidas en ellos. También tenemos organizados en función de estos sistemas otros conocimientos como, por ejemplo, la no existencia de enteros entre 0 y 1, frente a la existencia de una infinidad de números racionales entre dos cualesquiera de ellos; o la completitud de **R**, frente a **Q**; así como las relaciones entre los sistemas descritas por los correspondientes morfismos.

Sin embargo, esta organización sistemática del contenido del concepto *número,* imprescindible para una organización global del conocimiento matemático, pertenece al mundo del saber matemático establecido, a las *matemáticas hechas,* al saber que puede encontrarse en los manuales o las enciclopedias, y desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje o del acceso al concepto debe situarse en el último nivel. Desde esta perspectiva de acceso al concepto de número debe atenderse en primer lugar al hecho numérico tanto en función de los fenómenos para los que el número es un instrumento útil de organización y explicación, como en función del uso del número en distintas actividades y situaciones.[1]

Freudenthal (1973) distinguió cuatro grandes maneras como se produce el acceso al concepto de número: número de contar, número de la numerosidad, número de medir y número de calcular. Una explicación breve, en sus propias palabras, de estos términos es la que citamos a continuación:

> *Número de contar.* Para empezar, es el desenvolvimiento en el tiempo de la sucesión de los números naturales, cuyos primeros pasos son tan arduos para los niños como aprender los nombres de los colores y de las letras, hasta que aprehenden de repente la secuencia como totalidad que continúa ilimitadamente –una aprehensión conceptual que no tiene su análogo en el aprendizaje de los nombres de los colores y las letras. El número de contar se convierte en el objeto irreemplazable de la actividad de calcular. Pronto se siente la necesidad de contar hacia atrás, hacia el pasado, esto es, mediante números negativos. El número de contar, llamado matemáticamente el *número ordinal,* se formaliza en la inducción completa, y ulteriormente en los axiomas de Peano; su apoteosis son los ordinales transfinitos.
>
> *Número de la numerosidad.* Quizá el número de la numerosidad sea anterior genéticamente al número de contar. Hay animales que reconocen numerosidades pequeñas aunque, ciertamente, no pueden contar. El niño, sin embargo, aprende a contar desde tan pronto que inicialmente no se da cuenta de que contar puede servir para determinar la numerosidad de un conjunto. Al mismo tiempo, sin embargo, como cualquiera puede verificar fácilmente, identifica numerosidades pequeñas independientemente del contar, en particular si están dispuestas según ciertos patrones. El número de la numerosidad se formaliza mediante la potencia o cardinalidad de los conjuntos; su apoteosis es los cardinales infinitos.

[1]Nótese que se habla de *acceso* al concepto y no de *génesis* del concepto como harían los psicólogos piagetianos. Los que están influidos por Piaget sustituyen el término 'génesis' por *formación del concepto* o *adquisición del concepto,* cuando hablan en el terreno de la enseñanza y no en el del desarrollo; en cambio, desde la perspectiva de Freudenthal se habla de *constitución de objetos mentales.* Las diferencias que, en la práctica de la enseñanza, suponen estas dos perspectivas son importantes. Además, el contenido del concepto número al que se refieren los influidos por Piaget es más pobre, pues como mucho se agota en **N**. Mientras que el acceso al concepto, que después describiremos, lleva al menos hasta **Q** y trata de aspectos como el *número de calcular* que no parecen estar en la preocupación de la ortodoxia piagetiana. Por otro lado, parece imposible encontrar coherencia o correspondencia entre las vías de acceso al número y las etapas piagetianas

> *Número de medir.* Si se mide una magnitud, ésta se agota o se intenta agotar mediante copias de una unidad, de la misma manera que una vasija se vacía con una cucharilla. Como se hace al pesar o al manejar dinero, múltiplos de la unidad pueden ayudar en el proceso de medir. Como sucede en una regla graduada, se pueden tener marcadas de antemano copias de la unidad, pero una disposición lineal no es necesaria para medir: un área puede ser agotada en órdenes variados mediante unidades de área.
>
> El que el proceso de medida no agote completamente la magnitud conduce a la división con resto, por una parte, y, por otra parte, a las fracciones, si la unidad se divide. El número de medir se formaliza en el cuerpo de los racionales, a partir del cual se obtiene los números reales mediante procesos de carácter infinito. Una contrapartida de las magnitudes que pueden ser medidas una por otra se encuentra en los campos no-arquimedianos.
>
> *Número de calcular.* Éste es el aspecto algorítmico. El número se concibe operacionalmente, gracias a las reglas según las cuales el usuario juega con él. Se formaliza en el enfoque axiomático. Los números aparecen como elementos de anillos y cuerpos que se fijan axiomáticamente. (Freudenthal, 1973, pgs. 170-171.)

Freudenthal señala que esta distinción en cuatro formas de acceso es algo tosca y que, por ejemplo, «formas lingüísticas como "siete veces" o "un séptimo" ocultan aproximaciones más refinadas a los números» (Freudenthal, 1973, pg. 171).

Conviene indicar además la relación existente entre estas formas de acceso al concepto de número y algunas de las actividades que Bishop ha encontrado como la base a partir de la cual se han construido las matemáticas tanto en la cultura occidental –que es la que ha dado el estatuto de ciencia a las matemáticas que ella ha producido– como en otras culturas. Para Bishop (1988a, 1988b) a través de todas las culturas pueden encontrarse actividades relacionadas con el entorno, que desarrollan ideas importantes para lo que nosotros consideramos matemáticas, y que pueden clasificarse en actividades de contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Las actividades de contar, localizar y medir son, desde esta perspectiva, las responsables del acceso al número en ausencia de un sistema escolar y unas matemáticas como ciencia establecida. Bishop propone que, pese a la presencia de las matemáticas como ciencia establecida y de los sistemas escolares que, entre otras funciones, asumen el papel de darlas a conocer a las nuevas generaciones, una enseñanza de las matemáticas *culturizadora* ha de tener en cuenta lo que estas actividades básicas han supuesto históricamente y lo que aún suponen hoy en día para otras culturas, o para la propia cultura.

Conviene distinguir, por otro lado, gracias a las precisiones de Freudenthal, el acceso al número como concepto y el contenido matemático del concepto de número y tener en cuenta la relación entre una cosa y otra. Esto es particularmente importante en la escuela, ya que, en ella, si uno mira desde el contenido matemático, se está empezando por **N**. Ahora bien, la forma como se manejan los números, por las características de las actividades en que se realizan –o el contexto en que aparecen–, hace que éstos representen un papel que en matemáticas ha de considerarse más apropiadamente como el que corresponde a números de otras clases. El papel que desempeñan estas actividades se comprende mejor si en vez de mirarse desde ese punto de vista y empeñarse en dotarlas de contenido matemático, se miran desde el punto de vista de las formas de acceso al número, que tienen en perspectiva los sistemas numéricos.

Por último, ni en las actividades que ha determinado Bishop, ni en las formas de acceso al número que señala Freudenthal, aparece suficientemente subrayado el uso de los números y de las operaciones para hacer predicciones u obtener información nueva, que es uno de los usos fundamentales de los números en el contexto de los problemas.

NÚMEROS: USOS Y CONTEXTOS.

Si convenimos en llamar número a los nudos que hacen en una cuerda las mujeres de Nueva Guinea –uno cada vez que el marido las golpea– con la finalidad de presentarla al funcionario gubernamental como prueba del mal trato recibido[2], y a lo que aparece en la matriz

$$\begin{bmatrix} 125 & 131 & 111 & 97 & 253 & 354 \\ 75 & 73 & 58 & 87 & 154 & 199 \\ 223 & 175 & 187 & 222 & 453 & 551 \end{bmatrix}$$

que está inspeccionando el gestor de unos grandes almacenes y que le indica las ventas en miles de pesetas de tres secciones a lo largo de una semana, podremos hacernos una idea de cómo los números han sido utilizados a lo largo de la historia con finalidades y funciones diferentes.

Gómez (1988, pgs. 18 y ss.) presenta una lista bastante exhaustiva de usos de los números en la sociedad occidental actual. En ella aparecen cosas tan diferentes como el uso de los números para identificar, diferenciar, localizar, codificar, nombrar, clasificar, valorar, evaluar, puntuar..., o para responder a las preguntas ¿cuántos? o ¿cuál? Gómez clasifica la lista completa de usos en función del significado pragmático de los números en cada uno de ellos, de forma que en cada clase aparecen los usos que conllevan significados análogos para los números, aunque la finalidad sea distinta. Estas clases –contar, numerar, medir, operar– tienen el mismo nombre que las formas de acceso al número[3], pero el énfasis no está puesto en el progresivo avance desde los fenómenos a las estructuras matemáticas como en éstos, sino en el contenido cultural del concepto –más allá del contenido estrictamente matemático– con el fin de que este contenido cultural pueda ser incorporado como punto de partida para su presentación en la escuela, llenando así lagunas existentes en la práctica escolar habitual, que suele ir de las matemáticas a sus aplicaciones.

Contextos

En el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española la palabra “contexto” aparece con tres acepciones: “Orden de composición o tejido de ciertas obras. 2. Por ext., enredo, maraña o unión de cosas que se enlazan y entretejen. 3. fig. Serie del discurso, tejido de la narración, hilo de la historia.”

[2]Véase la descripción de esta costumbre en el libro de C. R. Hallpike *Fundamentos del pensamiento primitivo,* citado en la bibliografía.

[3]En algún caso, aunque tengan el mismo nombre, no se está hablando exactamente de los mismo. Así, *numerar* es, para Gómez, “asignar números a los objetos”.

Aquí, esto es, en el contexto de este libro, los contextos son los responsables principales de la restricción semántica, esto es, de la fijación del campo semántico a partir del cual el sujeto produce sentido para el número y para las operaciones con ellos. Este campo semántico puede ser el conjunto de significados matemáticos y no matemáticos asociados al texto, enunciado del problema, p. e., o el conjunto de significados pragmáticos que conllevan los objetos y las acciones que son propias de un contexto determinado (y que existen en la historia del sujeto). El conjunto de significados pragmáticos puede venir determinado por el lugar –o sitio– en el que se realiza la tarea. Así, en el contexto escolar, al que hemos hecho referencia en repetidas ocasiones, algunas prácticas usuales, o la forma como éstas son vistas por los alumnos, pueden ampliar el campo semántico que parece natural que determine el contexto de la tarea, incluyendo significados para los números de carácter mágico. No es únicamente en la escuela donde significados de este carácter aparecen asociados a los números y las operaciones con ellos: cualquier persona puede encontrarse una mañana de domingo entretenida en hacer manipulaciones cabalísticas –mediante operaciones aritméticas– con la fecha de su nacimiento para tratar de hacerse una idea de lo que le deparará la semana que se avecina. La importancia que tiene tener presente la existencia de estos significados que hemos calificado como de carácter mágico para comprender lo que en algunas ocasiones hacen los alumnos la hemos discutido brevemente en el párrafo *La edad del capitán* del capítulo 1.

Contextos y desarrollo del currículo.

La utilización de un contexto para la producción de un sentido determinado para los números, operaciones y relaciones entre ellos se utiliza de forma consciente y sistemática en algunos desarrollos curriculares, aunque también tenga otras finalidades que no es pertinente señalar en este momento. Un buen ejemplo es *WISKOBAS,* el currículo desarrollado por el IOWO, descrito en Treffers (1987).

En otros desarrollos curriculares más habituales para la presentación o construcción de conceptos se utilizan distintos contextos que funcionan como modelos. Así, termómetros, o debe y haber, para los números enteros; tartas, pasteles o división del todo en partes iguales para las fracciones.

Una distinción entre estas dos formas de considerar los contextos es que en la segunda se está tratando de construir un concepto, el de número entero, p. e., y los contextos tienen la función de proporcionar el modelo sobre el cual se construye el concepto de forma que el modelo representa el significado matemático del concepto. En la primera, sin embargo, se es consciente de la restricción del campo semántico que trae consigo el contexto utilizado y no se pretende construir el concepto. Una y otra aproximación requieren, por tanto, del trabajo en otros contextos o de su uso.

En la primera esto se hace para ampliar el campo semántico con la finalidad de que los números se puedan utilizar para dotarse de poder sobre otros fenómenos. Pero se pone el énfasis en la aprehensión de significados del contexto que se está utilizando, conscientes de que los números en abstracto no serán nada si no son utilizados en el sentido apropiado en ese contexto. La organización del material de trabajo para los alumnos –y de los temas o unidades– no se hace desde las matemáticas, sino desde contextos propuestos para la exploración fenomenológica en los que se plantean problemas que están al servicio de un esquema de matematización progresiva[4]. Los contextos se eligen con un criterio de completitud, esto es, de reflejar la variedad de situaciones de la realidad en que están presentes los fenómenos.

En la otra aproximación mencionada, hablar de contexto en cualquier sentido no parece apropiado. Cuando se utiliza un modelo para un concepto matemático, los seguidores de Dienes, por ejemplo, no parecen pensar en la restricción semántica. De hecho, no hablan de contexto, sino de *embodiment* –término que usualmente se ha traducido por el barbarismo *concretización*, perdiendo además el cuerpo o la carne que contiene la palabra inglesa y que podría conservarse con las castellanas 'corporeización' o 'encarnación'– y su problema es de enseñanza: de cómo hacer para mostrar el significado del concepto, de cómo puede ser construido éste. El principio es harto conocido: basta con presentar al aprendiz múltiples "concretizaciones", tratando de que éstas reflejen la esencia del concepto. Aplicado a rajatabla, este principio tiene una consecuencia: no importa la artificialidad o inverosimilitud de la susodicha concretización, incluso se prefieren construir "contextos" artificiales. Y, lógicamente, no hay problemas, sino juegos, o, en todo caso, problemas en el mundo artificial creado –aunque, ¡cómo no!, ponen en juego la esencia profunda del concepto–, de modo que los problemas de aplicación que puedan aparecer después han de ser aprendidos de nuevo.

Hay una tercera forma de usar los contextos, cuya diferencia fundamental con las anteriores es que no responde a teoría alguna del aprendizaje de las matemáticas, sino, en todo caso, a una concepción de la enseñanza como arte. Nos referimos a la organización del material para los alumnos y de la programación de las actividades alrededor de centros de interés como otoño, mercado, bicicletas, Navidad, etc. El carácter oficialmente globalizado de los primeros ciclos de la enseñanza en España hace que esto sea razonable desde un punto de vista práctico. Pero, como la selección de los contextos –aquí centros de interés– no está hecha basándose en una fenomenología previa de los conceptos, ni en ningún otro principio que no sea el de motivar el interés de los alumnos, se está a merced del buen hacer del profesor, y de su experiencia práctica, y se podrá conseguir despertar el entusiasmo de los alumnos o "activar sus capacidades", sin que se pueda saber muy bien hacia qué matemáticas se va a dirigir su actividad o sus capacidades.

Contextos numéricos y operaciones

Creemos que es en la dirección de restricción del campo semántico en la que Castro, Rico y Castro (1988) hablan de los contextos en los que el número aparece. *Secuencia, recuento, cardinal, medida, ordinal, código y tecla*, son los nombres con que precisan en qué sentido se usan los números en situaciones cotidianas –o no tan cotidianas– y los que les sirven para clasificarlas desde ese punto de vista. Hecho esto, las cuatro operaciones se asocian con las acciones de *agregar, separar, reiterar y repartir*. El significado de las operaciones viene dado, entonces, por la interpretación que cada una de estas acciones tiene en cada uno de los contextos que proporcionan significado a los números. De alguna manera se postula que la fase de traducción en el

[4]Una descripción detallada puede verse en el capítulo 7 de Treffers (1987)

proceso de resolución de un PAEV depende de la posibilidad de atisbar coherencia entre el significado que el contexto de la historia del problema da a los números que aparecen en él y el significado de la operación que viene dado por la interpretación de la acción correspondiente en ese contexto. Un modo de atisbar esta coherencia consiste simplemente en sopesar si el número que se obtenga como resultado al aplicar la operación en cuestión puede ser dotado de sentido en ese contexto. Ahora bien, las palabras *agregar, separar, reiterar y repartir,* que se han tomado para designar las acciones, tienen que ver forzado su campo semántico si se quiere que puedan ser interpretadas en todos los contextos como correlatos de las operaciones aritméticas; o, dicho de otra manera, estas palabras no agotan, al menos si nos atenemos a su significado pragmático habitual, la totalidad de los significados de las operaciones que son precisos para abordar los PAEV. Más adelante trataremos de mostrar cómo el significado de las operaciones puede ser construido progresivamente por el trabajo en los PAEV (y no únicamente en éstos, sino también en otro tipo de tareas).

OPERACIONES: CONCEPTOS, ALGORITMOS Y ÁLGEBRA

En el estudio de las operaciones que se hace en la escuela conviene distinguir al menos tres aspectos: conceptual, algorítmico y algebraico.

Desde el punto de vista algebraico, la suma y la multiplicación se conciben como leyes de composición, esto es, reglas que asocian a toda pareja de objetos de un conjunto determinado otro objeto. Esta visión se despreocupa de todos los aspectos conceptuales cuyas connotaciones tengan que ver tanto con el modo peculiar en el que cada regla prescribe que se realice tal asociación, como con la naturaleza concreta de los objetos con que ésta se realiza.

El álgebra fija su atención en las reglas operativas –propiedades algebraicas– de las que depende la posibilidad de resolver tal o cual ecuación, principal asunto del que se ocupa. El énfasis que pone en los aspectos formales y sintácticos precisa, para hacer posible su estudio, una visión uniformista de las operaciones como tales. Así, desde el punto de vista algebraico suma y multiplicación sólo son distinguibles por sus propiedades algebraicas, y, en puridad, se debería disponer de un nombre distinto para cada operación con propiedades algebraicas distintas; en este sentido, hablar de "suma" para referirse a la "suma de naturales" y también de "suma", para la "suma de enteros" no deja de ser un abuso de lenguaje. (No obstante, está claro que, en el paso a un nivel superior de estudio, la introducción de la idea de estructura permite, al dar nombre a la estructura, restituir la pureza necesaria.)

Este punto de vista algebraico para el estudio de las operaciones no es pertinente para el examen del proceso de resolución de los problemas aritméticos elementales. Unicamente en el caso de los problemas de varias etapas es posible encontrarlo en el trasfondo. Así, la posibilidad de que un problema tenga distintas vías de solución tiene su reflejo en las propiedades algebraicas de la expresión aritmética que traduce el enunciado del problema.[5]

---

[5]Ver en el apartado *El diagrama como traductor* del capítulo 5 el problema con doble análisis y doble representación

Al aprendizaje y automatización de los algoritmos de las operaciones aritméticas se dedica una parte no desdeñable de la actividad escolar. Aunque la destreza algorítmica es necesaria a veces para poder obtener la respuesta de algunos problemas, ésta sólo interviene en la fase de cálculo y no en la de traducción, por lo que no vamos a entrar en ella. Además, pueden encontrarse en ocasiones problemas aritméticos que están construidos de manera que su enunciado refleje la estructura del algoritmo, con el fin de utilizarlos como tarea de ejercicio y práctica de éste. O, como hace Gómez (1988), pgs. 143 y ss., resolver problemas de dividir con estrategias de reparto distributivo o substractivo –repartir un botín o empaquetar caramelos– que den cuenta de la estructura profunda del algoritmo y que, a la vez que ayudan a la progresiva esquematización de éste, preparan para dividir como procedimiento más económico en situaciones en que los escolares mayoritariamente[6] usan las estrategias anteriores.

También pueden encontrarse en la escuela o en los libros de texto otros problemas que tienen por finalidad la adquisición de destrezas y hechos numéricos, o relaciones entre números, pautas o patrones numéricos, etc. Una serpiente de números, una tabla puzzle, un cuadrado mágico, una serie para continuar o completar, o una tabla del 1 al 100 para colorear en ella múltiplos, diagonales o cualquier otra cosa, son ejemplos de este tipo de problemas.

También aparecen algunos problemas con aspecto de pasatiempo, cuya presencia está justificada igualmente desde el punto de vista de la comprensión de la estructura del algoritmo. Un ejemplo famoso de un problema de este último estilo es el problema 3.

Problema 3 Encuentra los dígitos que corresponden a cada una de las letras siguientes, sabiendo que D=5.

```
  DONALD
+ GERALD
  ------
  ROBERT
```

El proceso de resolución de estos dos últimos tipos de problemas no puede reducirse al esquema expuesto en el capítulo anterior; en efecto, suelen ser problemas de búsqueda y requieren, por tanto, la utilización de técnicas heurísticas, o la elaboración de planes de resolución más sofisticados que los requeridos por los PAEV. Estos problemas, por tanto, tampoco serán estudiados aquí.

APROXIMACIONES ESCOLARES A N.

Para lo que vamos a tratar aquí es importante mirar el “concepto de número” desde las dos aproximaciones escolares a **N**, además de los usos de los números y de los contextos en los que aparecen; ya que aproximaciones, usos y contextos dotan a los números y a las operaciones entre ellos de significados diferentes, ligados a cada uno de ellos, que son los que en definitiva constituyen el objeto mental “número”.

---

[6]Ver en el último apartado de este capítulo los datos del estudio dirigido por Hart.

CONTANDO

A **N**, en el aspecto ordinal del número según lo concibió axiomatizado Peano, se accede en la escuela por medio de la actividad de contar. Actividad que el niño realiza en la escuela sistemáticamente, bajo la tutela del maestro, pero que también realiza en otros lugares de manera no tan sistemática, sino, según su propio gusto y necesidad, atendiendo a otras finalidades o deseos.

Así, el número –usando por una vez el singular incorrecto[7]– se engendra por la actividad rítmica, temporal y sucesiva de contar, actividad cargada de sensaciones fisiológicas, profundamente ligada al impulso vital, que va espaciando los números a intervalos regulares, y que, incluso, permite gracias a la posibilidad de seguir contando atisbar la infinitud potencial de la serie numérica 1, 2, 3, 4...

La creación de los números viene dada por la operación *siguiente de* y las operaciones con los números heredan de la propia generación de éstos su carácter recursivo y dinámico.

La definición de Peano de la suma es una definición inductiva:

1) x+1=sig(x)

2) conocido $x+y$, x+sig(y)=sig($x+y$).

Esta definición puede traducirse de forma ejemplificada del siguiente modo:

Para sumar 3+2 se debe empezar por reconocer 2 como sig(1), y continuar argumentando que conocido 3+1, sig(3+1) –que se conoce por la propia construcción de la serie numérica– coincide con 3+sig(1), esto es, 3+2.

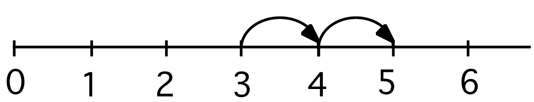
Finalmente, en una definición desencapsulada la suma de cualquier pareja de números quedaría así:

$x+z=x+1+\ldots^{(z}\ldots+1$

O, lo que es lo mismo, en la práctica

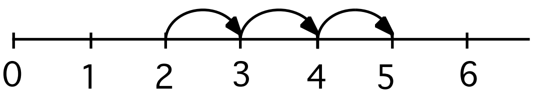
SUMAR ES SEGUIR CONTANDO.

En un modelo apropiado a esta construcción de N, como es la recta numérica, 3+2, o "contar dos veces a partir de tres", se representa así:



[7]Lo que se aprehende al contar son *los números*, en plural, pero este plural se refiere a la pérdida de individualidad de 2, 3, 4 o 27, y no a la pluralidad de aspectos.

(Vale la pena observar de paso, teniendo en mente las propiedades algebraicas, que 2+3, que consiste en "contar tres veces a partir de dos", se representa así:



De manera que 2+3 no es equivalente a 3+2, al menos desde el punto de vista de las acciones que suponen una y otra suma)

Aquí, la suma se realiza con números, con los objetos de contar –una obviedad que es necesario remarcar– y toda ella está cargada del sentido dinámico y de la impresión del cambio progresivo que experimenta el primero de los sumandos.

Un análisis similar de la resta se resume en cinco palabras:

RESTAR ES CONTAR HACIA ATRAS.

O, más brevemente, en tres: restar es descontarse.

La multiplicación de números naturales sigue, en esta vía de acceso, las mismas pautas:

La definición formal es, también, inductiva:

1) $x\cdot 1=x$,

2) conocido $x\cdot y$, $x\cdot \mathrm{sig}(y)=x\cdot y+x$.

La traducción ejemplificada es:

Para multiplicar 3·2 se debe empezar por reconocer 2 como sig(1), y como 3·1 ya se sabe, 3·2 es tres más que 3·1.

Y, finalmente, la definición desencapsulada es:

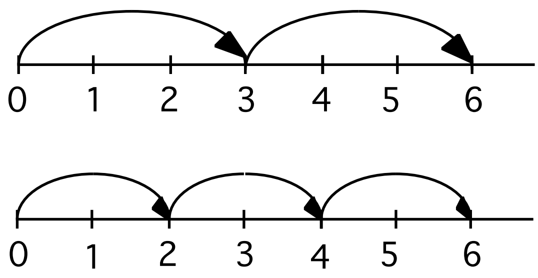
$x\cdot z=x+\ldots^{(z}\ldots+x$

lo que conduce a la noción de multiplicación como suma repetida de sumandos iguales.

O, lo que es lo mismo, en la práctica:

MULTIPLICAR ES CONTAR A SALTOS.

Las representaciones en la recta numérica de 3·2 y 2·3 serían:



Y puede verse que, de nuevo, las acciones correspondientes son distintas.

Un análisis similar de la división se resume así:

DIVIDIR ES CONTAR A SALTOS HACIA ATRAS.

COORDINANDO

A la visión cantoriana de **N**, en su aspecto cardinal, se accede en la escuela por la actividad de coordinar conjuntos. Esta actividad es la que predomina actualmente entre las utilizadas para introducir el "concepto de número" en la escuela. Las razones para ello están en el desembarco en el currículo de matemáticas escolares de las llamadas "matemáticas modernas", que se produjo en la década de los sesenta, y el soporte que le ofreció la epistemología genética piagetiana, gracias a su descripción de la génesis del concepto de número en el niño.

Lo que nos importa subrayar aquí de esta versión escolar de **N** es que los números se crean –uno cada vez– independientemente unos de otros por la operación de coordinar conjuntos y el establecimiento de "lo que tienen en común". Ésta es una operación de carácter lógico y de mayor nivel de abstracción que la forma como la actividad de contar produce los números. El mismo Cantor eligió, para representar el cardinal de un conjunto A, el símbolo $\overline{\overline{A}}$, con el fin de que, gracias a las dos rayas colocadas sobre A, quedara constancia en el propio símbolo de las dos abstracciones que es preciso realizar: una indica que haya que abstraer la naturaleza concreta de los objetos, y la otra, el orden con que se toman en consideración.

En esta forma de aproximación escolar a **N** aparece también la tendencia extensional en la presentación de conceptos, esto es, la que los define, o los construye, como la clase de objetos que abarca –o que caen bajo tal concepto–, o de los que se puede predicar[8]. Metodología que suele seguirse también después en la presentación de los sistemas numéricos **Z** y **Q**.

Para un niño –y para cualquier persona– la actividad de coordinar es fundamentalmente una actividad mental y no una actividad corporal. En las actividades concretas de coordinar que se suelen proponer al niño en la escuela el único tipo de

[8]Es muy sabio sin duda el comentario de Bertrand Russell a propósito del número 2, la pareja de faisanes y la pareja de hombres, pero es difícil comunicar a alguien –sobre todo a los alumnos para quienes *dos* son tantas cosas– la idea de que *dos* no es más que lo único que puede decirse de todos y cada uno de los miembros de la clase llamada 2.

sensaciones puestas en juego son las visuales que permiten establecer el apareamiento o juzgar la corrección de un apareamiento ya establecido. [Digamos de paso entre paréntesis que es, por tanto, un accidente que la emisión del juicio correcto dependa de la disposición espacial de los objetos, ya que esta disposición espacial influye en la percepción visual inmediata de la cantidad, pero deja de tener influencia desde el momento en que se realiza efectivamente la actividad de coordinar.]

El que cada número haya sido creado independientemente de los demás hace preciso un trabajo posterior que los ordene en la serie numérica, ya que en el procedimiento de creación no está implícita ninguna relación entre los números, ni, por tanto, ningún orden. En la práctica escolar, esta falta inicial de presencia del orden se suple de alguna manera por el hecho de que la construcción de cada número se realiza en el orden de la serie numérica, esto es, primero se presenta el 1, luego el 2, etc., dándose en realidad por supuesta la serie numérica antes de construirla.

El trabajo de ordenar formalmente la serie numérica se ocupa de matizar y cuantificar el "hay más que" y el "hay menos que", que junto a "hay igual que" o "hay tantos como" es lo único que se concluye de las actividades de coordinación.

Las operaciones heredan del concepto numérico, así construido, su doble abstracción: paso del número al concepto y olvido del orden.

Así, para sumar $x+y$ es preciso realizar lo siguiente:

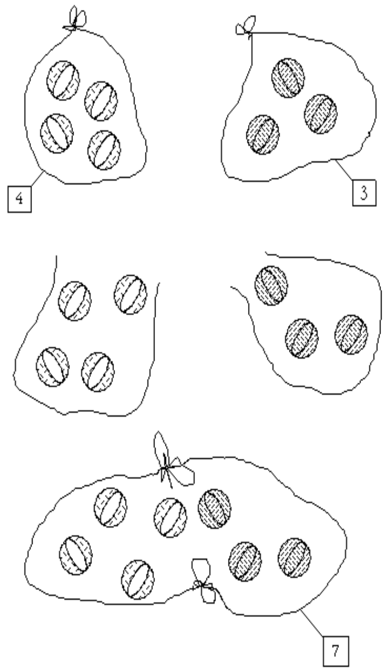
Buscar dos conjuntos **A** y **B**, tales que card(**A**)=$\boldsymbol{x}$ y card(**B**)=$\boldsymbol{y}$; cuidando además de que $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing$.

Realizar la unión de dichos conjuntos: $A\cup B$

Determinar por último el cardinal de $A\cup B$; éste es $x+y$.

Conviene hacer algunas observaciones para lo que aquí nos interesa: la operación no se realiza con números, sino con conjuntos; los números desaparecen sin dejar rastro, y la obtención del cardinal comienza de nuevo, o, si se quiere, no aprovechan para nada ni card(A) ni card(B).

Los textos escolares están llenos de diagramas de Venn, que ilustran esta concepción de la suma.



La multiplicación se introduce, en esta aproximación, a través de los conjuntos. Y, además, independientemente de la suma. Como se sabe, para definir $x \cdot y$ se utiliza

card(A)·card(A)=card(A×B), donde card(**A**)=***x*** y card(**B**)=***y***,

y se identifica ***x·y*** con card(A×B).

De nuevo los números desaparecen sin dejar rastro[9]. Pero hay más, en la práctica, card(A×B) no puede determinarse o se determina con gran dificultad. En primer lugar por lo difícil que es concebir en su totalidad el conjunto A×B, cuya formación requiere el uso de una gran habilidad combinatoria. Además, porque aún es más difícil, en la mayor parte de los casos, dotar de sentido a los elementos de ese producto cartesiano. Así, en el problema 2 la elección de A y B, conjuntos con unas pocas blusas y unas pocas faldas, permite que cualquier elemento del producto cartesiano, AxB, pueda verse como una de las maneras como puede vestirse la niña protagonista de la historia; sin embargo, eligiendo arbitrariamente el conjunto A –por ejemplo, un conjunto de valencianos– y el conjunto B –por ejemplo, marcianas–, cualquier elemento del producto cartesiano A×B no puede verse más que como el producto de un encuentro azaroso e improbable.

---

[9]Desde el punto de vista de las matemáticas, sin embargo, lo que se ha estado haciendo aquí está claro: no se ha hablado de la suma y multiplicación de números naturales sino de la suma y multiplicación de cardinales. Ahora bien, como aquellos constituyen una subclase de éstos, la de los cardinales finitos, estas operaciones han sido tratadas con mayor grado de generalidad, lo que siempre es deseable.

El cuadro siguiente resume, de forma esquemática, lo que hemos expuesto en este apartado. Hemos incluido, además, los modelos de problemas correspondientes y una descripción de sus características.

N	Actividad	Definición de suma	Aspecto
Peano	Contar	x+1=sig(x) x+sig(y)=sig(x+y) x+z=x+1+…$^{(z}$…+1	Dinámico

Modelo de problema:

"Tengo *a*, me dan *b*. ¿…?"

Características:

— Cantidades homogéneas en datos e incógnita
— El cambio viene expresado por el verbo

N	Actividad	Definición de suma	Aspecto
Cantor	Coordinar	A∩B=∅ Card(A)+Card(B)=Card(A∪B)	Estático

Modelo de problema:

"Hay *a* niños y *b* niñas. ¿Cuántos alumnos?

Características:

— Cantidades heterogéneas en los datos. La incógnita es una cantidad que incluye a las de los datos.
— El "cambio" viene expresado por sustantivos, adjetivos, etc.

N	Actividad	Definición de multiplicación	Aspecto
Peano	Contar a saltos	$x\cdot 1=x$ $x\cdot \mathrm{sig}(y)=x\cdot y+x$ $x\cdot z=x+\ldots{}^{(z}\ldots+x$	(Dinámico) Repetición

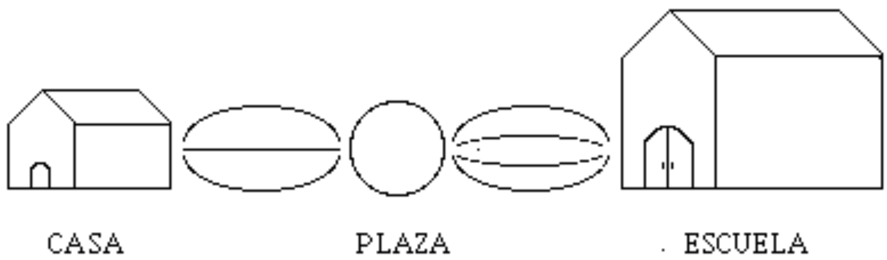
Modelos de problemas:

> "Una bolsa tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen 7 bolsas iguales?"
>
> "Un libro cuesta 125 ptas. ¿Cuánto cuestan tres libros iguales?"

N	Actividad	Definición de multiplicación	Aspecto
Cantor	Construcción del conjunto de todos los pares ordenados	card(A)·card(b)=card(A×B)	(Estático) Combinatorio

Modelos de problemas:

> "Una niña tiene cuatro blusas y tres faldas.
> Blusas={azul, rosa, blanca, verde}
> Faldas={azul, roja, marrón}
> ¿De cuántas formas distintas puede vestirse esa niña?"



> "¿De cuántas maneras puede irse de la casa a la escuela?"[10]

[10]Este problema puede ser utilizado como modelo de la operación a condición de que sólo haya dos conjuntos de caminos parciales y de que se reinterprete previamente el enunciado de forma que corresponda al diagrama cartesiano.

LOS PROBLEMAS

Al comienzo de este capítulo hemos indicado cómo la aproximación a la multiplicación como suma de sumandos iguales, que, como hemos visto, puede hacerse corresponder con la aproximación escolar por la vía de contar, estaba acompañada naturalmente de problemas como el 1. Sin embargo, este mismo problema difícilmente puede tratarse si la aproximación escolar elegida ha sido la cantoriana. En efecto, con el texto del problema delante y la concepción de la multiplicación inherente a la aproximación cantoriana, el modelo de producto cartesiano de conjuntos no permite reconocer la situación presente en el problema como una situación multiplicativa, ya que es difícil imaginar de qué manera podrían hacerse pares con bolsas *iguales* y caramelos, y, en cualquier caso, si se consiguiera imaginar tales pares, carecerían totalmente de sentido.

Inversamente, el problema 2 puede modelarse con facilidad dentro de la aproximación cantoriana, y es más difícil hacerlo desde la concepción de la multiplicación producida por la aproximación basada en la actividad de contar.

De estas consideraciones se deduce que para hacer frente a la solución de los problemas aritméticos conviene plantearse una aproximación a **N**, distinta de las dos –matemáticamente ortodoxas– que hemos expuesto, y que dote a las operaciones de un conjunto de significados que contenga al menos tanto los significados asociados con la aproximación cantoriana, como los asociados con la otra aproximación.[11]

Afortunadamente, en la práctica escolar, aunque se opte metodológicamente por una u otra de las aproximaciones a **N** –lo que se refleja en la primera presentación de los números y las operaciones– no se suele ser esclavo de la elección hecha, y, en el desarrollo posterior de las tareas que se proponen a los alumnos, suelen aparecer modelos correspondientes a una aproximación distinta de aquélla por la que se ha optado, o modelos que median entre una y otra, sin que, en la mayor parte de los casos, estos modelos se presenten por razones conceptuales, sino como artefactos ad hoc para resolver las situaciones que la práctica ha mostrado que son difícilmente abordables en su ausencia.

Utilizando un ejemplo manido, pero paradigmático, el modelo rectangular de la multiplicación puede servir de mediador entre la interpretación de esta operación como suma de sumandos iguales y como producto cartesiano. En efecto, en la práctica, la construcción de productos cartesianos de conjuntos se realiza en arreglos rectangulares, con el objetivo, en principio, de facilitar las destrezas combinatorias que hacen posible llegar a construir todos los pares sin error. Lo que lleva a asociar el modelo rectangular con la operación de multiplicar. Por otro lado, situándose en el caso más favorable para que esta mediación exista, uno puede haber llegado a la multiplicación vía suma de sumandos iguales, y haber utilizado el modelo rectangular como un artefacto ad hoc para la propiedad conmutativa de la multiplicación.

---

[11]Ya hemos apuntado algunas de las soluciones posibles a este problema: acercarse a **N** vía usos, contextos, etc. En la práctica, como ya hemos señalado, la dificultad consiste en encontrar coherencia entre estas aproximaciones y las tareas que se presentan como problemas, así como en cubrir con estas aproximaciones el campo de significados presentes en los problemas.

El punto de vista de la resolución de problemas, por lo que hemos visto, sigue la idea de Freudenthal (1983, pg. 69) de que "el problema de la didáctica de las operaciones –dejando aparte los algoritmos– es un problema de aplicación." Por ello sería conveniente que algo de lo que ocurre en la práctica escolar por razones pragmáticas se convirtiera en un criterio explícito a la hora del tratamiento de las operaciones aritméticas en el diseño y desarrollo del currículo.

La lista de problemas que presentamos a continuación –aunque no está construida de forma sistemática– sí que lo ha sido teniendo en la cabeza las dificultades o deficiencias comentadas. Esta lista y las soluciones de Julia (7;9) a ellos puede servir para reflexionar cómo aproximaciones escolares a **N**, contextos de la tarea o de los números, su uso, la interpretación de las operaciones como acciones u otras cosas que subyacen en los problemas, o las dificultades inherentes a la propia tarea de resolver un problema pueden ayudar en el estudio del aspecto conceptual de las operaciones aritméticas, y en la selección de los problemas aritméticos que se proponen durante ese mismo período escolar. Dejamos para el lector, como ejercicio, el detalle del análisis de los problemas de la lista y de las soluciones de Julia. El lector puede contrastar su análisis con lo que hemos expuesto en este capítulo, lo que se expone en los capítulos 3 y 4, y las sugerencias para la instrucción que aparecen en el capítulo 6.

Problema 4	Un chico y una chica entran en un ascensor. El chico dice que va al 4º piso. La chica dice que va 2 pisos más arriba. ¿A qué piso va la chica?
Problema 5	Felipe da 2 pasos hacia adelante y 3 pasos hacia atrás. ¿Cuántos pasos ha dado en total?
Problema 6	Juan vive en el número 55 de la calle Erudito Orellana. Felipe vive 6 casas más allá. ¿En qué número vive Felipe?
Problema 7	La familia Ulises ha salido de viaje hacia Valencia, que está a 350 km de su ciudad. Después de recorrer 87 km, paran para almorzar. ¿Cuántos km han de recorrer todavía?
Problema 8	Helena ha dado 7 vueltas en un tiovivo por la mañana y 16 vueltas por la tarde. ¿Cuántas vueltas en el tiovivo ha dado en ese día?
Problema 9	Pedro tiene 14 años. Su abuelo es 5 veces más viejo que él. ¿Qué edad tiene su abuelo?
Problema 10	Papy ha pensado en tres conjuntos y Piaget en cuatro conjuntos más que Papy. ¿En cuántos conjuntos ha pensado Piaget?

Problema 11	Para ir de mi casa a la escuela hay 3 caminos distintos, y para ir de la escuela a los futbolines hay 4 caminos distintos. ¿De cuántas maneras puedo ir desde mi casa a los futbolines, pasando por la escuela?
Problema 12	Una pastilla de chocolate tiene 12 porciones. Hay 3 porciones en cada fila. ¿Cuántas filas tiene?
Problema 13	En un cine hay 27 filas de butacas. En cada fila hay 30 butacas. ¿Cuántas butacas tiene el cine?
Problema 14	Juan tiene 8 canicas. Jugando al guá gana 4 canicas. ¿Cuántas tiene ahora?
Problema 15	Juan tiene 7 cromos. Pedro tiene 8 cromos. ¿Cuántos tienen entre los dos?
Problema 16.	Margarita tiene 6 nardos y Rosa tiene 7 azucenas. ¿Cuántas flores tienen entre las dos?
Problema 17	Pedro tiene 18 pesetas. Juan tiene 6 pesetas. ¿Cuántas pesetas le deberá dar a Juan su papá para que tenga tantas como Pedro?
Problema 18	Carolina da una fiesta de cumpleaños a la que van 8 niñas. Su mamá ha comprado una bolsa con 72 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tocan a cada niña?
Problema 19	En una fiesta de cumpleaños se repartieron 72 caramelos. A cada niña le tocaron 8 caramelos. ¿Cuántas niñas había en la fiesta?

****insertar aquí las hojas de soluciones de Julia****

LA CONSTITUCIÓN DE LAS OPERACIONES COMO OBJETOS MENTALES

Hemos señalado que números, operaciones y problemas están trufados de dificultades cuando se trata de diseñar el currículo. El análisis didáctico que hemos realizado sirve para pensar en ello. En lo que sigue vamos a situarnos en el punto de vista desde el cual números, operaciones y problemas, mediando situaciones de enseñanza-aprendizaje, contribuyen a la constitución de las operaciones como objetos mentales. En este análisis hemos de tener en cuenta lo que constituye el objeto mental en cada momento, las dificultades que se tienen al utilizar ese objeto mental para resolver algunos problemas y cómo éste evoluciona y se amplía para que pueda servir como medio de organización de los fenómenos que conllevan los problemas aritméticos y para que dote de poder sobre ellos.

SUMA

Anteriormente hemos tratado de hacer ver cómo, partiendo del substrato matemático y pensando en la versión cantoriana, para sumar m y n es preciso proveerse de conjuntos disjuntos, A y B, tales que card(A)=*m* y card(B)=*n*; y cómo el cardinal de la unión de dichos conjuntos proporciona *m*+*n*.

Al nivel más bajo –esto es, cuando el niño comienza a sumar– si se le pide sumar m y n, el niño crea los conjuntos correspondientes, por medio de sus dedos, fichas, palitos..., y suma. En la escuela en particular lo que se suele hacer es proporcionar a los alumnos los "conjuntos" que se desea que sean sumados. Un buen ejemplo, tomado de Dado 1º de la editorial Barcanova, es la lámina de enanitos que sigue en la que el vecino es el resolutor, que traduce el dibujo mediante una cadena de acciones, iconos y símbolos.

****insertar aquí la lámina de enanitos****

En este caso el niño no tiene que sumar los números m y n, sino el número de objetos que se le presentan. La forma de presentar los objetos puede variar: los objetos pueden ser reales, estar representados en un dibujo, sugeridos por una historia o imaginados –o imaginados y representados por el vecino molesto, como en la figura anterior. Pero, en todos los casos, hay dos cosas que permanecen invariantes:

a) los números que se tienen que sumar se pueden reconocer como cardinales de conjuntos, y

b) la suma refleja la operación de unión, incluso aunque los conjuntos sean inaccesibles y su unión no pueda realizarse materialmente.

De este diagnóstico se desprende que los problemas con la suma comenzarán cuando a) o b) –o ambos– no se verifican. Esto es, cuando los términos que se añaden *no* se pueden reconocer *sin más* como cardinales, o cuando la suma *no* se reconoce *sin más* como un reflejo de la operación unión.

Por ejemplo, en el problema "Juan tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 más que Juan. ¿Cuántas tiene Pedro?", el conjunto que corresponde al número 5 aparece sin más –las canicas de Juan–, pero el 3 no puede reconocerse *sin más* como el cardinal de conjunto alguno; y, aún más, el otro conjunto que puede reconocerse de inmediato –las canicas de Pedro– no es un dato del problema, sino la incógnita que hay que determinar.

Es difícil imaginar aquí la operación suma como la unión de dos conjuntos, cuando los dos que aparecen no son los que hay que unir, y el que habría que unir al de las canicas de Juan tiene que ser previamente construido imaginando que se parte un conjunto –el de las canicas de Pedro– que no puede tener una representación física porque no se sabe cuántos objetos tiene. En el capítulo 3 veremos que la estructura semántica de este problema contiene otras relaciones lógicas y aritméticas además de la unión y la suma.

En otros ejemplos puede verse que no sólo los conjuntos no son distinguibles, sino que la construcción de conjuntos correspondientes a los números que aparecen no es deseable. Freudenthal cita "5 escalones y 3 escalones, 5 días y 3 días, 5 km y 3 km, 5 florines y 3 florines, 5 veces y 3 veces". Aquí, la suma está sugerida sin conjuntos y, por tanto, sin unión y cualquier representación conjuntista que se intente –por ejemplo mediante diagramas de Venn– es un verbalismo carente de significado.

Lo que es pertinente preguntarse ahora es cómo los alumnos son capaces *a pesar de todo* de resolver estos problemas, dando el salto de la resolución de problemas en los que los números se pueden ver como cardinales de conjuntos y la suma como el cardinal de su unión, a otros en los que se ha perdido todo rastro del número como cardinal y de la suma como unión. Freudenthal opina que la transferencia se realiza gracias a la diversidad de las prácticas escolares relativas a la suma. Los niños reciben la idea de que *tienen que hacer* una suma cuando hay números que pueden verse como cardinales de conjuntos, pero *realizan* las sumas concretas *contando* con la ayuda de objetos, dedos, o la propia secuencia numérica. La ejecución reiterada de sumas –correspondientes a problemas verbales o como ejercicios de rutina y práctica– les hace desprenderse de los objetos concretos y trabajar *algorítmicamente* con números, que ahora se combinan gracias a los hechos numéricos que han memorizado o al recorrido de la secuencia numérica. La imagen mental de la suma se está constituyendo por acumulación de tres de las vías de acceso al número. Ahora bien, como sólo se ha dotado de significado a la suma de 5 canicas y 3 canicas y no a la de 5 días y 3 días, la transición no puede hacerse más que algorítmicamente.

En el primer nivel la suma viene acompañada de una serie de restricciones: los conjuntos, la operación unión, el mundo de lo discreto y los números naturales. Para tener una perspectiva más amplia de la suma –lo que parece necesario a la vista de los ejemplos anteriores– hace falta encontrar la vía que permita superar esas restricciones.

Una idea sirve de guía para ello: la definición cardinal de la suma frente a su realización ordinal.

Los ejemplos a propósito de 5 + 3 difieren de los ejemplos de canicas por su materialización y su estructura, aquí hay objetos que se siguen en el espacio o en el tiempo, lo que sugiere el proceso de contar. Los números naturales se usan en el mundo de las magnitudes antes de que sean constituidos en el mundo de lo discreto: un niño puede decir tres o cuatro, o levantar tres o cuatro dedos, cuando se le pregunta por su edad, aunque sabe perfectamente que no tiene ni tres ni cuatro años y que levantará un dedo más el día de su próximo cumpleaños[12].

Inversamente, el contar debe transferirse de las cantidades discretas representadas por conjuntos a las magnitudes: la línea numérica es el artefacto inmejorable para ello.

Además, en ella la adición de magnitudes y números naturales lleva a una idea más amplia de la adición que la que proporciona la unión de conjuntos; su

[12] «Helena (3;7) dice que casi llega al botón del ascensor. Le digo que qué va, que le falta bastante. Ella protesta: "Cuando cumpla cuatro años, llegaré". Le pregunto que cuánto falta y contesta que cuatro. Le digo: "¡Qué va! Tú tienes tres y cuatro es uno más". Helena precisa: "No, tengo tres y medio. Mira, así: tres dedos levantados y éste así. Cuando se vaya levantando poco a poco, al final tendré cuatro años."»

materialización en ocasiones como yuxtaposición de segmentos tiene en perspectiva incluso la adición geométrica.

RESTA

Todo lo apuntado para la suma es pertinente para la resta pues no hay separación didáctica ni sucesión en el proceso didáctico y genético entre una y otra. En todos los contextos –y problemas– donde aparece la adición, la resta está implícitamente presente y sólo a la espera de ser sacada a la luz, ya que la situación puede ser invertida o la pregunta del problema modificada. La insuficiencia de la aproximación conjuntista y la necesidad de superar las restricciones analizadas en el caso de la suma se repite en el caso de la resta. Haremos únicamente dos matizaciones que tienen su origen en la asimetría de la resta frente a la simetría de la suma.

1) En el dominio de los objetos la resta significa *quitar,* como la suma significa *añadir*. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con la suma, en los primeros problemas que aparecen en los libros de texto, sobre todo cuando su presentación está hecha mediante dibujos que representan acciones u objetos en situaciones diferentes (pájaros que se van, o libros de pie y caídos en un estante), hay una cierta ambigüedad en cuál es el conjunto de objetos que se quita, cuál el que queda, cuál el total y cuál la pregunta del problema.

2) En la realización efectiva de sustracciones mediante materiales manipulativos o mentalmente uno puede encontrarse con dos estrategias diferentes que Freudenthal llama *quitar desde el principio* y *quitar desde el final.* En ambos casos la diferencia se determina contando lo que queda. En el capítulo 3 encontraremos esas estrategias en el mundo de los problemas.

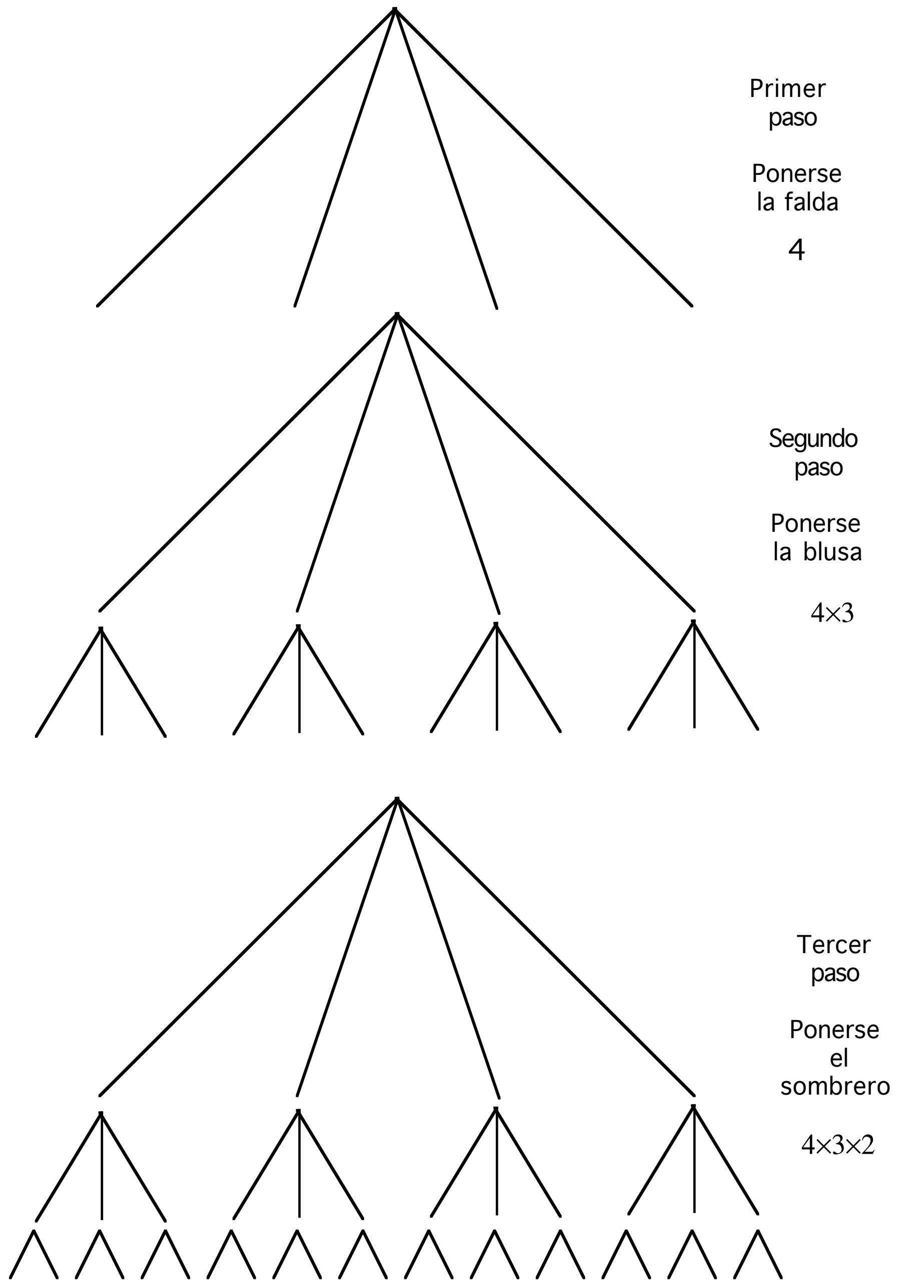
MULTIPLICACIÓN

Freudenthal indica que la multiplicación es la operación que aparece de manera más natural ya que posee un soporte lingüístico en el lenguaje vernáculo gracias a los términos *doble, triple,* etc., y a las expresiones con *veces.* Esta experiencia lingüística y la realización material de las acciones que expresan ("tres veces cuatro canicas") se traduce de forma natural en la multiplicación como suma de sumandos iguales. De ahí que éste sea pues el modo más natural de construir las tablas de multiplicar y el primer modo de aproximarse a la operación de multiplicar en la escuela.

Ya hemos descrito cómo las aproximaciones a N por la vía de los conjuntos y por la vía del contar dan origen a dos interpretaciones diferentes de la multiplicación: el producto cartesiano y la suma de sumandos iguales. También hemos indicado, al hablar de los problemas, cómo en la práctica escolar el modelo rectangular puede servir de mediador entre ellas. Este modelo rectangular puede mediar también entre estas aproximaciones y la visión geométrica de la multiplicación como área, y puede ser extendido vía el volumen para dar significado geométrico al producto de tres factores

Hay otros problemas, situaciones o fenómenos que también se organizan mediante la operación de multiplicar, pero que el proceso de esquematización que conduce de ellos a la operación no utiliza las vías ni los modelos mencionados anteriormente. Nos referimos a los que se representan mediante árboles o circuitos. En ellos la operación de multiplicar no aparece hasta que no se ha hecho la representación geométrica de la estructura del problema. No hay acciones que se correspondan explícitamente con la operación de multiplicar.

Para hablar de los árboles, podemos empezar por una generalización del problema de las faldas y las blusas (problema 2) dándole también a la niña protagonista sombreros –por ejemplo, 2 sombreros, S={blanco, rojo}– y preguntándole de nuevo de cuántas maneras distintas puede vestirse. Ahora la visualización de las combinaciones puede realizarse todavía en el espacio. Para ello se necesitan dos cosas simples –la generalización del producto cartesiano y la identificación de tripletas y vestidos– y otra más compleja: la extensión del producto de cardinales que proporciona el cardinal del producto cartesiano de tres conjuntos. Esto no parece difícil si olvidamos las diferencias que existen entre la visualización posible y la visualización comprensiva, o si queremos visualizar tras comprender. Sin embargo, una visualización del problema que simule el hecho de vestirse permite, al desdoblar planos y representar en niveles distintos –y no en dimensiones distintas– las acciones progresivas, una mejor visualización del problema y una comprensión más profunda ya que señala perfectamente qué se repite y cuántas veces.



No parece que haga falta comentar el poder del modelo: la niña sabe que también dispone de algunos pares de zapatos, calcetines, camisetas, enaguas, bragas…, y que ella se vestirá moviéndose por el árbol siguiendo, por ejemplo, la combinación de colores que sea más de su gusto. En otro plano, el modelo puede, bajo los mismos principios, organizar y resolver problemas que se presentan en el currículo más adelante (combinatoria y probabilidad).

El problema de los caminos ya ha sido expuesto antes y se ha indicado su relación con el producto cartesiano. El análisis superficial del problema y las claves lingüísticas (*y, distintos*) llevan a una solución aditiva, como ha hecho Julia. El trabajo previo que hay que realizar para aprehender su estructura multiplicativa requiere de nuevo la simulación de las acciones, que en este caso pueden simularse realmente recorriendo el dibujo con el dedo, y no ser meramente imaginadas. Sin embargo, el proceso de simbolización es más complejo si se quiere ir directamente al producto cartesiano: hace falta distinguir los caminos (individualizarlos simbólicamente) que van de la casa a la plaza y de la plaza a la escuela, y conceptualizar cada camino de la casa a la escuela como una posible combinación de caminos casa-plaza, plaza-escuela, esto es, como un par ordenado. Una forma de representar las acciones, que no requiere una simbolización tan compleja, es el paso de los caminos a un árbol[13]. El modelo puede extenderse naturalmente a caminos compuestos por más de dos trozos y a circuitos, de manera que se vea con claridad que el número total de caminos corresponde al producto del número de caminos distintos que parten de cada uno de los sitios por los que obligatoriamente hay que pasar.

DIVISIÓN

La asimetría que está presente en la resta frente a la simetría de la suma es mucho más fuerte cuando se comparan multiplicación y división. En la experiencia lingüística *mitad* o *tercio* no son la contrapartida de *doble, triple* y las expresiones con veces, y las acciones que expresan llevan naturalmente a las fracciones más que a la división con naturales. Además, queda la incertidumbre de si las acciones correspondientes a la operación de división acaban agotando los objetos sobre los que se efectúan o han de suspenderse por la imposibilidad de seguir adelante. Esto, que se da cuando el dominio de objetos es discreto, pero que no se da cuando es continuo, introduce más y más profundas asimetrías: la existencia del *resto* –que no se da en la resta–, la distinción entre la división entera y la división larga o continuada, y la imbricación en el sustrato fenomenológico de división y fracciones.

No es éste el lugar para esbozar una fenomenología de las fracciones; Freudenthal (1983) le dedica uno de los capítulos más brillantes –al que sólo habría que añadir, para uso de castellanoparlantes, el análisis del papel que representan los partitivos (doceavo, treceavo, etc), que no existen en inglés, junto a los ordinales (duodécimo, decimotercero, etc) y los conflictos que produce el uso combinado de unos y otros en el lenguaje cotidiano.

Para la división Freudenthal ve, desde el punto de vista fenomenológico, tres fuentes: restar sucesivamente, distribuir –o repartir– en partes iguales e invertir una multiplicación. La resta sucesiva y el reparto en partes iguales proporcionan dos imágenes distintas de la división, que se pueden llamar *división razón* y *división distributiva,* respectivamente. En la división como inversa de la multiplicación también se pueden ver esas dos imágenes si uno se fija en que los factores no son intercambiables cuando se les dota de significado: si $q \times d$ se lee como 'q veces d', preguntar por q lleva a la división como resta sucesiva –cuántas veces[14]– y preguntar

[13]En Cerdán y Granell (1980) puede verse cómo hacer esto en éste y otros tipos de problemas de caminos.

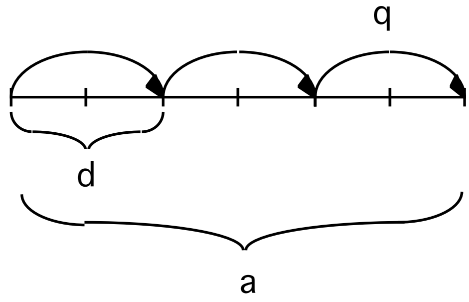
[14]En el cuadro que sigue llamamos 'cuotición' a este tipo de división; en él puede verse que la división cuotitiva pregunta por el multiplicador de la multiplicación correspondiente, o, lo que es lo mismo, por el cociente. Hemos forjado este neologismo en castellano a imagen del neologismo ya habitual en inglés 'quotition'. Vale la pena señalar que la palabra castellana 'cociente' viene del adverbio latino 'quotiens', que significa precisamente *cuántas veces*.

por *d* al reparto –cuánto cada vez. El cuadro siguiente compara ambas imágenes de la división.[15]

División distributiva	División razón
Repartir ("sharing") Partición	Agrupar ("grouping") Cuotición
Tengo 35 manzanas para repartir entre 5 personas. ¿Cuántas para cada uno? (Hart)	Tengo 35 manzanas y quiero dar 5 por persona. ¿Para cuántas personas tengo? (Hart)
¿Cuántos florines recibe cada una de q personas si se distribuyen a florines? (Freudenthal)	¿A cuántas personas se les puede dar d florines si se dispone de a florines? (Freudenthal)
Dar a q personas partes iguales de un número o magnitud a.	Restar reiteradas veces d de un número o magnitud a
Cada uno recibe una q–ésima parte o un q–avo	
¿Cuál es la q-ésima parte de a? ¿Cuánto es un q-avo de a?	¿Cuántas veces cabe d en a?
"a divided by q"	"d divided into a"
Preguntar por el tamaño de cada parte	Preguntar por el número de partes

Invertir una multiplicación

a = q veces d



Preguntar por d (el divisor)	Preguntar por q (el cociente)

[15]Hemos indicado en él también, adelantando acontecimientos, los nombres de los modelos de las operaciones que aparecen en el apartado siguiente. También hemos añadido algunos nombres y expresiones en inglés para facilitar la consulta de los trabajos originales a los que aquí estamos haciendo referencia

LA COMPRENSIÓN DE LAS OPERACIONES (UN MAPA CONCEPTUAL)

Hasta aquí no hemos tratado lo que los niños acaban sabiendo, en ninguno de los niveles educativos, con respecto a los números y las operaciones aritméticas. En Inglaterra se realizó un estudio a finales de los setenta que pretendía trazar un mapa conceptual de los niveles de comprensión de las matemáticas en los niños de 11 a 16 años, titulado *Children Understanding of Mathematics,* y más conocido por las siglas CSMS, correspondientes al programa de investigación *Concepts in Secondary Mathematics and Sciences* en que se englobaba. El estudio fue realizado por un equipo de investigadores del Chelsea College de Londres, bajo la dirección de K. M. Hart, y comprende varios subestudios sobre partes del currículo como "medida", "fracciones", "razón y proporción", "álgebra", etc. Un resumen de los resultados puede verse en el libro Hart, ed. (1981)

Salvando todas las distancias que establecen las diferencias entre los sistemas educativos y los estilos curriculares británico y español, ésta es la única fuente de información que conocemos en la que, después de la formación instrumental, se trata de dar cuenta del área de aplicación de las operaciones aritméticas a situaciones reales y de la capacidad de los niños para construir problemas verbales que se correspondan con un enunciado aritmético determinado.[16]

Vale la pena resaltar los tres motivos que alegan Hart y sus colaboradores para escoger en particular el estudio de las aplicaciones en los problemas para investigar la comprensión de los alumnos de las operaciones aritméticas: 1) la existencia en el mercado de múltiples instrumentos para medir las destrezas de cálculo; 2) la introducción de las calculadoras en la escuela, que tiende a desplazar el énfasis en el currículo de matemáticas de las tareas de lápiz y papel hacia la selección de la tecla que hay que pulsar para resolver un problema determinado, y 3) que los errores de cálculo no parecen una fuente adecuada para obtener información acerca del estado de la estructura general de comprensión de las operaciones por el niño.

Vamos a exponer los resultados obtenidos en este estudio sobre la dificultad relativa de reconocer las cuatro operaciones, y cuáles son los modelos de operación que con más frecuencia aparecen en los problemas verbales que escriben los alumnos.

El instrumento que se utilizó en este estudio fue un test de elección múltiple[17] en el que los problemas representaban distintos modelos de las operaciones y cuyos

---

[16]El subestudio sobre operaciones con números fue dirigido por M. Brown y está descrito en el capítulo 3 de Hart, ed. (1981).

[17]Para poder sacar conclusiones a partir de los resultados de este estudio que puedan compararse con lo que exponemos en otras partes de este libro, hay que tener en cuenta que, al ser un test de elección múltiple, a los niños se les pedía *elegir* la expresión aritmética que correspondiera mejor al enunciado del problema. El proceso de resolución de un PAEV, sin embargo, no consiste en *elegir* entre varias posibilidades presentadas, sino en *decidir* qué operación hay que efectuar. Además, hay ocasiones en que

enunciados, casi telegráficos, habían sido construidos evitando las palabras claves. La muestra fue de alrededor de 900 alumnos y se seleccionó de manera que representara al conjunto de la población escolar de esas edades, medida con varios test standards.

Los modelos de las operaciones utilizados fueron los siguientes.

Para la suma:

1) *Añadir*. (P.e.: "Tenía 5 manzanas y compré 7 más. ¿Cuántas tengo ahora?")

2) *Unión*. (P.e.: "Tengo 5 manzanas y tú tienes 7 manzanas. ¿Cuántas tenemos entre los dos?")

3) *Comparación*. (P.e.: "Tengo 5 más que tú. Si tú tienes 7, ¿cuántos tengo?")

Para la resta:

1) *Quitar*. (P.e.: "Tenía 12 manzanas y tiré 5. ¿Cuántas quedaron?")

2) *Adición complementaria.* (P.e.: "¿Cuántas manzanas tengo que añadir a 5 manzanas para tener 12 manzanas?")

3) *Diferencia*. (P.e.: "Tengo 12 manzanas y tú tienes 5 manzanas. ¿Cuántas tengo yo más que tú?")

Para la multiplicación:

1) *Factor multiplicativo*. (P.e.: "Tengo 7 manzanas y tú tienes 5 veces las que yo tengo. ¿Cuántas tienes?")

2) *Adición repetida.* (P.e.: "Compré 7 manzanas cada día durante 5 días. ¿Cuántas tengo en total?"[18])

3) *Razón.* (P.e.: "Había 5 personas y cada una de ellas tenía 7 manzanas. ¿Cuántas manzanas tenían entre todos?")

4) *Producto cartesiano.* (P.e.: "Hay 7 variedades de manzanas, y de cada variedad, 5 calibres diferentes. ¿Cuántas clases diferentes de manzanas puedes pedir?")

Para la división:

1) *Reparto*. (o *partición*). (P.e.: "Tenía 35 manzanas para repartir entre 5 personas. ¿Cuántas para cada uno?")

---

la estrategia utilizada por los niños para resolver un problema no se corresponde con una expresión aritmética como las que aparecen como opciones en los ítems del test. Por ejemplo, un problema correspondiente a la expresión aritmética de una división puede ser resuelto viendo cuántas veces hay que sumar el divisor consigo mismo para obtener el dividendo. Un niño puede por tanto ser capaz de resolver el problema con esa estrategia aditiva y no reconocer la expresión aritmética con el signo ÷ como "lo que hay que hacer para resolver el problema", ya que, en realidad, no es eso lo que él hace. En casos como éste, no contestar correctamente al ítem del test puede interpretarse como falta de comprensión de la operación de división –lo que hace Brown–, o como refugio en el terreno seguro de la suma ante dificultades con la división, que pueden ser de comprensión o algorítmicas. En resumen, hay que tener en cuenta que no pueden considerarse equivalentes las tareas "contestar al ítem del test" y "resolver el problema que aparece en el ítem del test".

[18]Véase el comentario sobre la inexistencia de la elipsis en las historias de los PAEV que se hace en el párrafo del capítulo 1 *La naturaleza estereotipada de los PAEV.*

2) *Agrupar* (o *cuotición*).(P.e.: "Tengo 35 manzanas y quiero dar 5 por persona. ¿Cuántas personas pueden tener su parte?")

La dificultad de cada operación queda reflejada en la tabla 1, que da las medias y las desviaciones típicas de las facilidades de los cinco problemas ejemplo de cada operación, y la tabla 2, que da las facilidades de ítems de enunciar problemas:

Tabla1

	facilidad media	desviación típica
+	87'6	9'5
−	67'0	15'9
÷	62'6	12'7
×	53'4	19'4

Tabla2

	facilidad media
−(números grandes)	85
÷(números pequeños)	69
÷(números grandes)	56
×(números pequeños)	53
×(números grandes)	41

Respecto a la dificultad relativa vale la pena señalar que la división resulta ser más fácil que la multiplicación, tanto en la tabla que da los porcentajes de éxito, como en la que refleja la facilidad de realizar la tarea inversa de escribir un PAEV. La facilidad media que aparece en la tabla muestra que la multiplicación no sólo es la más difícil de las cuatro operaciones, sino que es muy difícil absolutamente considerada. Los valores, relativamente altos, de las desviaciones típicas ilustran, por su parte, que la facilidad oscila notablemente según el modelo de operación correspondiente a cada uno de los ítems del test.

La mayor fuente de dificultad observada en la construcción de enunciados por parte de los niños fue la elección de las unidades para los números que aparecían en la expresión aritmética. Así, Brown señala que cuando elegían 'perros' y 'personas' les era más difícil escribir el enunciado para una suma que cuando escogían 'caramelos' y 'caramelos', y que sucedía lo contrario para la multiplicación. Por otro lado, los niños que fueron capaces de inventar historias proporcionaron más de unos modelos que de otros. Así, para la suma, un tercio hizo problemas del modelo "unión", otro tercio, del modelo "añadir", y el tercio restante, una variante entre "añadir" y "comparación". Para la resta, la inmensa mayoría hizo problemas correspondientes al modelo "quitar", con algunos casos de "adición complementaria". Para la multiplicación, la mayoría se reparte entre "adición repetida", "razón" y un modelo entre ambos; muy pocos de "producto cartesiano" y algunos de "factor multiplicativo". Para la división, finalmente, casi todos los niños construyeron un modelo de "reparto".

Finalmente, en el estudio de Hart se elabora una jerarquía mediante procedimientos estadísticos, que establece tres niveles de facilidad para las operaciones aritméticas[19]:

Nivel 1.– Substracción: reconocimiento de la operación y construcción de enunciados.

Nivel 2.– Reconocimiento de la división y la multiplicación, excepto cuando corresponde al modelo del producto cartesiano.

Nivel 3.– Problemas de multiplicación del modelo producto cartesiano, y construcción de enunciados de multiplicación y división.

LOS MODELOS IMPLÍCITOS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

En este capítulo se asume la existencia de ciertos modelos de las operaciones, modelos que pueden reflejarse en algunos problemas verbales. Además, en el informe de Hart y sus colaboradores, se han podido ver resultados experimentales que, para ciertos modelos de operaciones, tienen que ver con el nivel de dificultad y las estrategias utilizadas por los alumnos.

Sin embargo, todos estos modelos o resultados experimentales se refieren o han sido obtenidos sobre la base de las operaciones aritméticas tal y como aparecen en los primeros años de la actividad escolar. Es fundamental señalar que, en ese contexto, las operaciones sólo se realizan con números enteros positivos e, incluso, pequeños. Se sabe, por otro lado, que más adelante, cuando se presentan a los alumnos problemas con el mismo contenido matemático y semántico, los alumnos pueden cambiar de opinión sobre la operación que es preciso realizar para resolver el problema, en función de los datos numéricos específicos que aparecen en él. Así, Bell et al (1981) describen cómo si se presenta un problema que pregunta por el precio de 0'22 galones de gasolina si un galón cuesta 1’20 libras, la respuesta más común es 1’20 dividido por 0’22, cuando la misma pregunta con números tales como 5 galones y 2 libras llevan a la respuesta correcta, 5×2. Y Hart, ed. (1981), en otro capítulo del informe, encuentra que alumnos de 12 a 15 años evitan sistemáticamente el multiplicar por fracciones al resolver problemas en los que éstas aparecen.

Estos datos obligan a que, al menos, se tenga cierta cautela cuando se trate de que los alumnos extiendan los modelos de las operaciones y las interpretaciones de ellos, que les permiten resolver problemas aritméticos con números fáciles, a problemas con el mismo contenido, pero en los que aparecen números de otros tipos.

Fischbein et al. (1985) aborda estos hechos ofreciendo una explicación de por qué hay que andar con cautela. Según él, los niños desarrollan modelos implícitos de las operaciones que integran conocimientos tácitos como que la multiplicación siempre

[19]Por razones de la técnica estadística utilizada, los problemas de adición quedan excluidos de la jerarquía de niveles.

hace más grande el número sobre el que actúa, que la división lo hace más pequeño, etc. Cuando, para resolver un problema, hay que realizar operaciones con resultados en contradicción con estos conocimientos tácitos y, por tanto, con el modelo implícito adquirido de la operación, los niños pueden cambiar de opinión ante las dificultades y elegir la operación contraria de la que hubieran elegido si los números fueran distintos.

Alguna indicación de lo que puede hacerse en el aula para superar las dificultades que pueden encontrarse en los problemas en el caso de que éstos contengan números de tipo distinto a los que contenían esos mismos problemas con anterioridad, puede verse, para el caso de los números negativos, en Bell (1986)