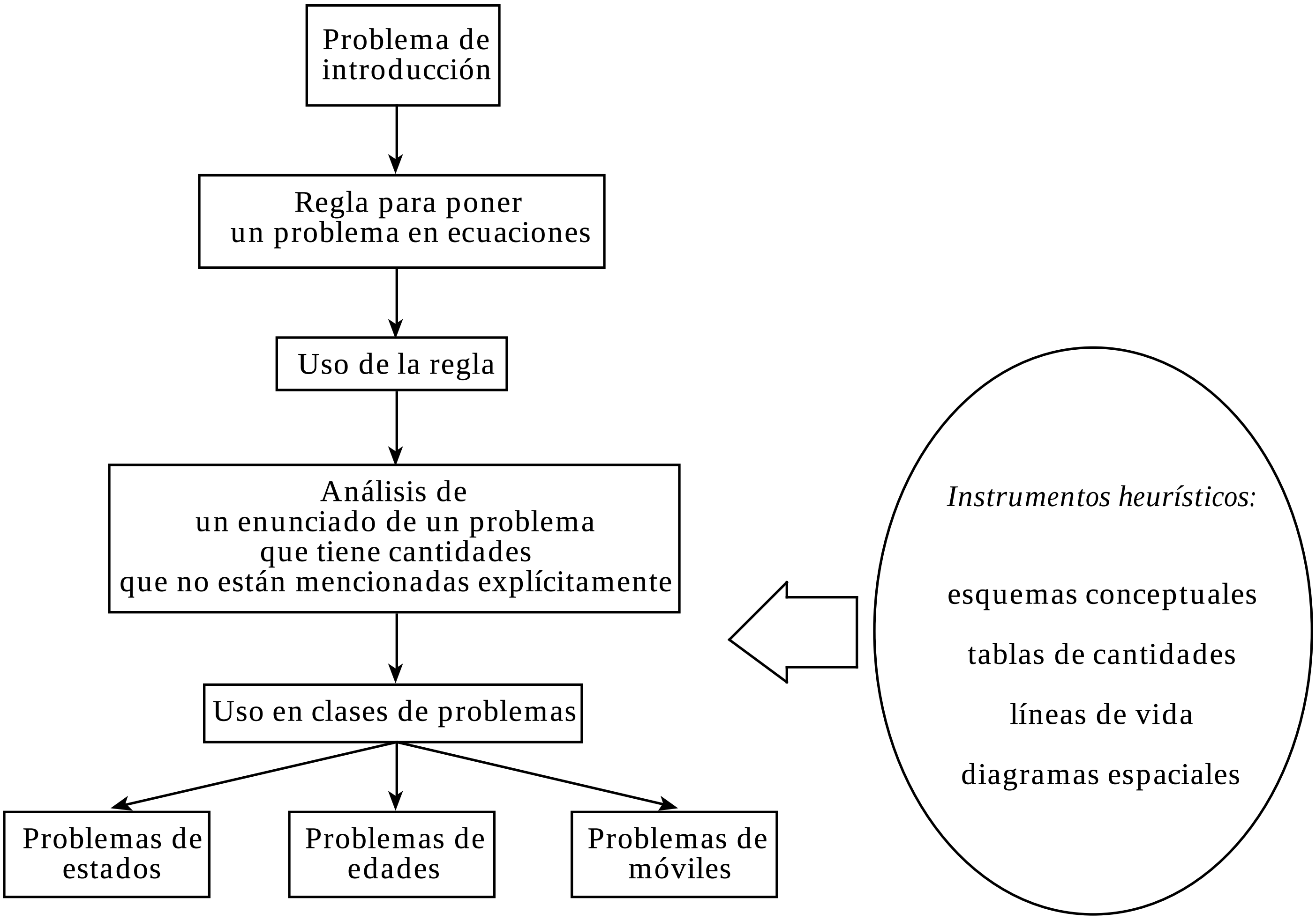
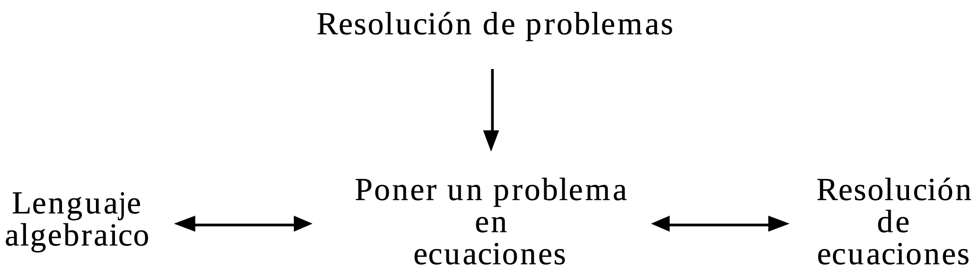
PONER UN PROBLEMA EN ECUACIONES

ESQUEMA DEL TEMA.



INTRODUCCIÓN. RELACIONES CON OTROS TEMAS.



La *resolución de problemas* de matemáticas recorre cuatro fases: comprender el problema, elaborar un plan para resolverlo, ejecutar el plan y, finalmente, revisar y extender el trabajo realizado.

Cuando se conoce el *lenguaje algebraico*, una parte importante del proceso de resolución de un buen número de problemas consiste en traducir el enunciado del problema a ese lenguaje, es decir, consiste en *poner el problema en ecuaciones*.

El problema que hay que resolver se transforma entonces en el problema de *resolver la ecuación*. Una vez resuelta la ecuación falta volver al problema planteado para comprobar el resultado obtenido, y revisar y extender el trabajo realizado.

Veremos a continuación qué hay que hacer para poner un problema en ecuaciones, formularemos una regla y estudiaremos algunas clases de problemas que usualmente se resuelven poniéndolos en ecuaciones.

UN PROBLEMA

1. Un grupo de jóvenes quiere ir a un concierto de rock. Para ello alquilan un autobús que los lleve desde el instituto. El autobús tiene capacidad para 55 personas y hay cuatro veces más plazas para ir sentado que plazas para ir de pie. ¿Cuál es el número de plazas para ir de pie?

En el problema se pregunta por el número de plazas que hay para ir de pie. Ésa es la incógnita del problema.

En el problema se dice además que la capacidad del autobús, es decir, el número total de plazas es 55. Esta cantidad es conocida, es un dato del problema.

También se habla del número de plazas sentado. Esta cantidad es desconocida, pero no es la incógnita del problema.

Las cantidades mencionadas en el problema son, por tanto, tres:

— el número de plazas de pie,

— el número de plazas sentado,

— el número total de plazas.

Estas cantidades están relacionadas entre sí:

> el número total de plazas es el número de plazas de pie más el número de plazas sentado.

En el problema también se habla de otra relación entre cantidades en la frase “hay cuatro veces más plazas para ir sentados que plazas para ir de pie”. Esta frase quiere decir que

> el número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas de pie.

Para resolver el problema traducimos esas cantidades y esas relaciones entre cantidades al lenguaje algebraico.

> En primer lugar, llamamos x al número de plazas de pie.

Como

> el número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas de pie,

escribimos $4x$ para designar el número de plazas sentado.

Como

> el número total de plazas es el número de plazas de pie más el número de plazas sentado,

escribimos $x+4x$ para designar el número total de plazas.

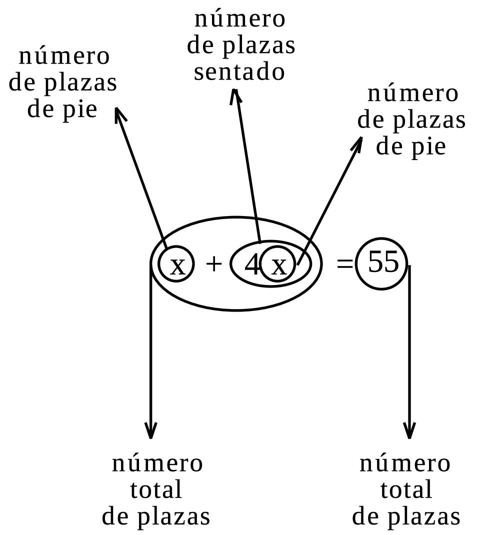
Pero el problema dice que

> el número total de plazas es 55.

Así que podemos igualar $x+4x$ a 55, con lo que escribimos la ecuación:

> $x+4x = 55$.

Podemos comprobar que la ecuación está bien escrita examinando lo que significa cada una de sus partes:



Resolvemos entonces la ecuación

$x{+}4x = 55$

$5x = 55$

$x = \frac{55}{5} = 11.$

El número de plazas de pie es, por tanto, 11.

Como

el número de plazas sentado es cuatro veces el número de plazas de pie,

el número de plazas sentado será $4{\times}11{=}44$.

Como

el número total de plazas es el número de plazas de pie más el número de plazas sentado,

y

$55{=}11{+}44$

el resultado obtenido al resolver la ecuación verifica las condiciones del problema.

PONER UN PROBLEMA EN ECUACIONES

Para poner un problema en ecuaciones hay que traducir el enunciado del problema, que está escrito en lenguaje natural, al lenguaje algebraico. Cuando tenemos que traducir un texto del inglés al castellano, pocas veces podemos traducirlo palabra por palabra; habitualmente necesitamos comprender el significado global de cada frase del texto inglés para buscar expresiones castellanas que las traduzcan. Lo mismo sucede al traducir del castellano al lenguaje algebraico. Pero al traducir al lenguaje algebraico tenemos que tener en cuenta además que en ese lenguaje sólo se puede hablar de cantidades, operaciones con cantidades y relaciones entre ellas. Así que tenemos que buscar cuáles son las cantidades de las que se habla en el enunciado del problema y qué se dice de ellas.

Lo que hemos hecho para poner en ecuaciones el problema 1 ha sido pues lo siguiente:

En primer lugar, hemos analizado el enunciado del problema para averiguar cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas que aparecen en él. También hemos analizado las relaciones que hay entre esas cantidades. Al hacerlo hemos reescrito algunas frases para mostrar con claridad la relación entre cantidades. Así, el enunciado del problema ha quedado preparado para traducirlo al lenguaje algebraico, que sólo habla de cantidades.

La traducción la hemos hecho entonces en tres partes:

1) Hemos decidido qué cantidad desconocida íbamos a designar con una letra:

número de plazas de pie $\rightarrow x$

2) Otras cantidades las hemos expresado a partir de ésta, usando las relaciones que hemos encontrado entre las cantidades.

número de plazas sentado *es* cuatro veces número de plazas de pie:

número de plazas sentado $\rightarrow 4x$;

número total de plazas *es* número de plazas de pie más número de plazas sentado:

número total de plazas $\rightarrow x+4x$.

3) Hemos escrito una ecuación cuando hemos encontrado una cantidad representada de dos maneras.

número total de plazas → $x+4x$,

número total de plazas → 55,

$x+4x = 55$.

La tabla siguiente es una ayuda para ver cómo hemos hecho la traducción:

lenguaje natural	lenguaje algebraico
número de plazas de pie	x
número de plazas sentado *es* cuatro veces número de plazas de pie	$4x$
número total de plazas *es* número de plazas de pie más número de plazas sentado	$x+4x$
número total de plazas *es* 55	$x+4x = 55$

En la primera columna de la tabla está reescrito el enunciado del problema, preparado para la traducción. Esa preparación es el resultado del análisis del enunciado. En la segunda columna están escritas las expresiones algebraicas correspondientes y la ecuación obtenida al traducir el problema.

Al poner un problema en ecuaciones, podemos encontrarnos por tanto con dificultades de tres tipos:

1) Dificultades para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas. En este problema, apenas se presentan dificultades de este tipo porque todas las cantidades que hacen falta están mencionadas en el enunciado.

2) Dificultades en la traducción. En este problema, es fácil cometer el error de traducir la frase “hay cuatro veces más plazas para ir sentado que plazas para ir de pie” por 4×‘plazas para ir sentado’=‘plazas para ir de pie’, manteniendo el orden en que aparecen las cantidades. La reescritura que hemos hecho de esa frase evita tropezar con esa dificultad: “el número de plazas sentado *es* cuatro veces el número de plazas de pie” menciona las

cantidades y las operaciones en el mismo orden en que hay que escribirlas en lenguaje algebraico.

3) Dificultades al escribir la ecuación. El error que puede cometerse es igualar dos expresiones que no representen la misma cantidad. Para no cometer este error hemos hecho dos cosas: en primer lugar, hemos igualado $x+4x$ con 55 después de haber visto que las dos expresiones corresponden al número total de plazas; pero además, hemos comprobado de nuevo que los dos miembros de la ecuación $x+4x = 55$ representan la misma cantidad.

REGLA PARA PONER UN PROBLEMA EN ECUACIONES

Lo que hemos hecho para resolver el problema y hemos examinado en el apartado anterior podemos esquematizarlo en la siguiente *regla para poner un problema en ecuaciones*:

> 1) Comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas.
>
> 2) Dar nombre a una de las cantidades desconocidas, asignándole una letra.
>
> 3) Representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos designado con una letra.
>
> 4) Escribir una igualdad entre expresiones algebraicas (una ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.
>
> 5) Comprobar que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad.

Si los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad, hemos hecho una traducción adecuada del lenguaje natural al lenguaje algebraico, es decir, hemos puesto el problema en ecuaciones.

Una vez puesto el problema en ecuaciones, su resolución continúa con otros dos pasos:

> — resolver la ecuación,
>
> — comprobar que el resultado obtenido satisface la condición del problema.

Esta regla organiza el plan de resolución del problema, pero no dice lo que hay que hacer exactamente en cada uno de sus pasos, no es un algoritmo. En lo que sigue estudiaremos el uso de la regla para resolver otros problemas más complejos que el problema 1 y algunas clases de problemas.

UN PROBLEMA EN CUYO ENUNCIADO NO ESTÁN MENCIONADAS TODAS LAS CANTIDADES QUE HAY QUE CONSIDERAR

2. Un bolígrafo cuesta 30 ptas más que un lápiz. Un muchacho ha comprado 8 bolígrafos y 15 lápices. En total le han costado 700 ptas. ¿Cuánto valía cada lápiz y cada bolígrafo?

1) Siguiendo la regla, empezamos por analizar el enunciado para determinar las cantidades que aparecen y las relaciones entre ellas.

El enunciado habla de las cantidades:

— precio de un bolígrafo (desconocido),

— precio de un lápiz (desconocido),

— número de bolígrafos (dato, 8),

— número de lápices (dato, 15),

— coste total de la compra (dato, 700).

El enunciado habla de una relación entre esas cantidades:

—el precio de un bolígrafo es 30 ptas más que el precio de un lápiz.

Éstas son las cantidades y las relaciones mencionadas en el problema. Ahora bien, hay otras dos cantidades que no están mencionadas explícitamente en el enunciado, pero que son necesarias:

— coste de los bolígrafos,

— coste de los lápices.

Estas dos cantidades están relacionadas con las que están mencionadas en el enunciado a través del esquema conceptual

total = parte + parte,

que en este caso es

coste total de la compra = coste de los bolígrafos + coste de los lápices;

o del esquema conceptual

cantidad × precio = coste,

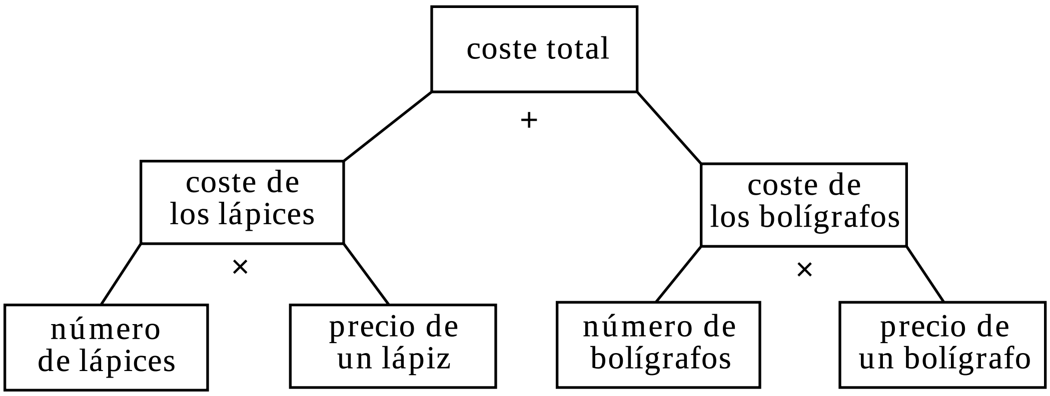
que en este caso es

número de bolígrafos × precio de un bolígrafo = coste de los bolígrafos

y

número de lápices × precio de un lapiz = coste de los lápices.

Relaciones que podemos representar en el diagrama:



2, 3 y 4) Decidimos representar con una letra la cantidad ‘precio de un lápiz’. La tabla siguiente nos ayuda a escribir las expresiones algebraicas que traducen el enunciado del problema y a construir la ecuación:

lenguaje natural	lenguaje algebraico
precio de un lápiz	x
el precio de un bolígrafo es 30 ptas más que el precio de un lápiz	$30 + x$
coste de los lápices es número de lápices por precio de un lápiz	$15x$
coste de los bolígrafos es número de bolígrafos por precio de un bolígrafo	$8(x+30)$

coste total es coste de los lápices más coste de los bolígrafos	$15x + 8(x+30)$
coste total es 700	$15x + 8(x+30)=700$

Comprobamos que la ecuación está bien construida porque sus dos miembros representan la misma cantidad, el coste total.

5) Resolvemos la ecuación:

$$15x + 8(x+30) = 700$$

$$15x + 8x+240 = 700$$

$$23x = 700-240=460$$

$$x = \frac{460}{23} = 20 \text{ ptas.}$$

6) El precio de un lápiz es, por tanto, 20 ptas.

El precio de un bolígrafo es

20+30=50 ptas.

El coste de los lápices es

15×20=300 ptas.

El coste de los bolígrafos es

8×50=400 ptas.

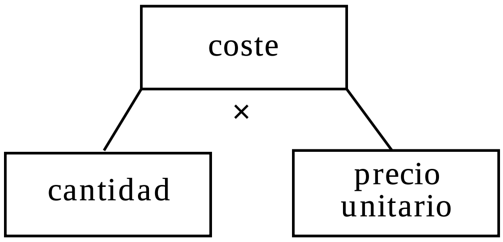
Así que el coste total es

300+400=700 ptas,

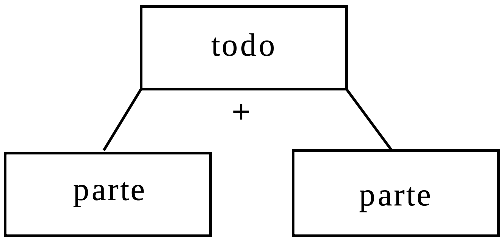
con lo que hemos comprobado que el resultado obtenido verifica las condiciones del problema.

La resolución de este problema nos enseña que, cuando no encontremos mencionadas en el enunciado de un problema todas las cantidades y las relaciones que necesitemos para poner el problema en ecuaciones, podemos buscar más cantidades a través de esquemas conceptuales en los que sepamos que están las cantidades mencionadas en el enunciado.

Por ejemplo, esquemas como



y



PROBLEMAS DE ESTADOS

En algunos problemas se cuenta una historia en la que unas cantidades van cambiando de valor a lo largo de una serie de estados sucesivos. Para traducir esos problema al lenguaje algebraico es útil hacer una tabla con todas las cantidades y los distintos estados por los que pasan. Veámoslo con un ejemplo.

3. Tres personas recogen una cierta cantidad de manzanas. Cansados, se van a dormir. Uno de ellos se despierta durante la noche y decide comerse su parte. Coge la tercera parte de las manzanas, se las come y se vuelve a dormir. Un rato después se despierta otro y decide también comerse su parte. Va al montón de manzanas que quedan, coge la tercera parte, se las come y se vuelve a dormir. La tercera persona hace lo mismo un poco después. Cuando se despertaron por la mañana había 8 manzanas. ¿Cuántas habían recogido?

Las cantidades que interesa considerar en cada momento de la historia son las siguientes:

— manzanas que hay,

— manzanas que come el que se despierta,

— manzanas que quedan.

Esas cantidades varían según se van levantando y comiendo las tres personas. Las relaciones que hay entre las cantidades son las siguientes:

— manzanas que come = un tercio de las manzanas que hay (en cada estado),

— manzanas que quedan = manzanas que hay menos manzanas que come (en cada estado),

— manzanas que hay cuando se despierta el segundo = manzanas que quedan después de comer el primero,

— lo mismo del tercero al segundo.

La escritura de las expresiones algebraicas correspondientes a cada una de las cantidades se organiza con la tabla siguiente en la que están representadas las cantidades y los estados.

Designamos las manzanas que hay al comienzo con una *x*, y escribimos las expresiones algebraicas que corresponden al primer estado de la historia:

	1º	2º	3º
manzanas que hay	x	$\frac{2}{3}x$	
manzanas que come	$\frac{x}{3}$		
manzanas que quedan	$x - \frac{x}{3} = \frac{2}{3}x$		

Escribimos las expresiones correspondientes al segundo estado de la historia. Como usamos las mismas relaciones que en el primer estado, las expresiones que hemos de escribir siguen la misma pauta.

	1º	2º	3º
manzanas que hay	x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{4}{9}x$
manzanas que come	$\frac{x}{3}$	$\frac{2}{9}x$	
manzanas que quedan	$x-\frac{x}{3}=\frac{2}{3}x$	$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)x=\frac{4}{9}x$	

Escribimos finalmente las expresiones correspondientes al tercer estado. La última casilla de la tabla es la de las manzanas que quedan después de que haya comido la tercera persona. El enunciado del problema dice que esa cantidad es 8 manzanas, así que podemos escribir una ecuación porque tenemos dos expresiones para esa casilla.

	1º	2º	3º
manzanas que hay	x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{4}{9}x$
manzanas que come	$\frac{x}{3}$	$\frac{2}{9}x$	$\frac{4}{27}x$
manzanas que quedan	$x-\frac{x}{3}=\frac{2}{3}x$	$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)x=\frac{4}{9}x$	$\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{27}\right)x=8$

Resolvemos la ecuación:

$$\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{27}\right)x=8$$

$$\frac{8}{27}x=8$$

$$x=27$$

La comprobación de que el resultado obtenido de la ecuación satisface las condiciones del problema podemos hacerla también usando la tabla. Colocamos 27 en la primera casilla y vamos rellenando las demás, columna por columna:

	1º	2º	3º
manzanas que hay	27	18	12
manzanas que come	9	6	4
manzanas que quedan	18	12	8

Veamos otro problema de esta clase, que nos va a permitir examinar una situación nueva. El problema lo tomamos de un libro escrito por Newton, titulado *Aritmética Universal*, y cuenta, por tanto, una historia de una época pasada.

4. Un mercader invierte en su negocio una cierta cantidad de dinero. Cada año gasta 100 escudos y gana un tercio de lo que le queda. Al cabo de tres años ha doblado su fortuna. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente?

Las cantidades que interesa considerar en cada uno de los estados, es decir, cada uno de los tres años son:

— lo que tiene al principio del año,

— lo que gasta ese año (dato, 100),

— lo que le queda

— lo que gana ese año

— lo que tiene al final del año.

La tabla siguiente nos permite escribir todas las expresiones algebraicas correspondientes a esas cantidades, designando con una letra, x, el dinero que tiene al principio del primer año, y usando las relaciones que establece el enunciado:

1º	2º	3º

tiene al principio	x	$\frac{4}{3}(x-100)$	…
gasta	100	100	100
le queda	x-100	$\frac{4}{3}(x-100)-100$	…
gana	$\frac{x-100}{3}$	…	…
tiene al final	$\frac{4}{3}(x-100)$	…	$\frac{64}{27}x-\frac{14800}{27}$

A diferencia de lo que ocurría en el problema anterior, el enunciado no nos dice lo que tiene al final del tercer año, así que la expresión algebraica correspondiente a esa cantidad no podemos igualarla a un número.

Ahora bien, el enunciado sí que nos dice que lo que tiene al final del tercer año es el doble de lo que tenía al principio del primer año. Esta relación nos permite escribir otra expresión algebraica, que también representa esa cantidad:

lo que tiene al final del tercer año → $2x$.

Tenemos ahora dos expresiones algebraicas para la misma cantidad: la que hemos obtenido en la última casilla de la tabla y la que acabamos de obtener. Así que como

lo que tiene al final del tercer año → $\frac{64}{27}x-\frac{14800}{27}$

y también

lo que tiene al final del tercer año → $2x$,

podemos escribir la ecuación:

$$\frac{64}{27}x-\frac{14800}{27} = 2x.$$

Resolvemos la ecuación:

$64x - 14800 = 54x$,

$10x = 14800$,

$x = 1480$.

Comprobamos el resultado usando la tabla:

	1º	2º	3º
tiene al principio	1480	1840	2320
gasta	100	100	100
le queda	1380	1740	2220
gana	460	580	740
tiene al final	1840	2320	2960

Y efectivamente

$2960 = 1480 \times 2$.

PROBLEMAS DE EDADES

5. Ana tiene ahora 3 veces la edad de su hermano David, y dentro de 2 años ya sólo tendrá el doble de la edad de su hermano. ¿Qué edades tienen ahora David y Ana?

Las cantidades de las que habla el enunciado son:

— la edad de Ana,

— la edad de David.

Pero esas dos cantidades, igual que sucede en los problemas de estados que acabamos de resolver, hay que considerarlas en momentos distintos. En este problema

— la edad de Ana *ahora* y

— la edad de Ana *dentro de dos años*;

— la edad de David *ahora* y

— la edad de David *dentro de dos años*.

Las relaciones entre esas cantidades que menciona el enunciado son:

— la edad de Ana *ahora* es 3 veces la edad de David *ahora*,

— la edad de Ana *dentro de dos años* es 2 veces la edad de David *dentro de dos años*.

Además hay otra relación que no está mencionada directamente en el enunciado, pero que es característica de la cantidad propia de los problemas de edades, es decir, de la edad: la edad varía con el paso del tiempo, así que:

— la edad de Ana *dentro de dos años* es la edad de Ana *ahora* más 2 años;

— la edad de David *dentro de dos años* es la edad de David *ahora* más 2 años.

Una tabla similar a la que hemos usado en el caso de los problemas de estados nos ayuda a representar las cantidades.

La escritura de las expresiones algebraicas también se facilita gracias a que las casillas de la tabla nos sirven de guía. Así, si decidimos designar con una x la “edad de David ahora”, escribimos una x en la casilla correspondiente y rellenamos las demás casillas traduciendo relaciones entre las cantidades:

como

la edad de Ana ahora es 3 veces la edad de David ahora,

escribimos

edad de Ana ahora $\rightarrow 3x$;

como

la edad de Ana dentro de dos años es la edad de Ana ahora más 2, escribimos

edad de Ana dentro de dos años → $3x+2$;

como

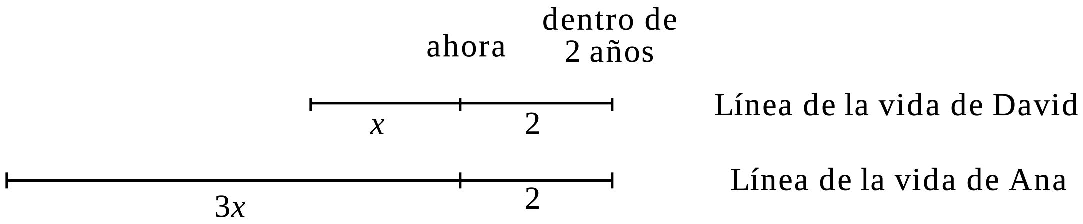
la edad de David dentro de dos años es la edad de David ahora más 2,

escribimos

edad de David dentro de dos años → $x+2$.

	ahora	dentro de 2 años
edad de Ana	$3x$	$3x+2$
edad de David	x	$x+2$

Otra forma de representar la situación descrita en el enunciado del problema, que ayuda a escribir las expresiones algebraicas, consiste en dibujar las líneas de la vida de David y de Ana y marcar en ellas los momentos de los que habla el problema:



Para escribir una ecuación traducimos la relación

la edad de Ana dentro de dos años es 2 veces la edad de David dentro de dos años

usando las expresiones algebraicas que acabamos de escribir:

$3x+2=2(x+2)$.

Comprobamos que la ecuación está bien escrita porque

$3x+2$ representa “la edad de Ana dentro de dos años”

y

$2(x+2)$ también representa “la edad de Ana dentro de dos años”.

Resolvemos la ecuación:

$3x+2=2x+4$

$x=2$.

Así que la edad de David ahora es 2 años y la edad de Ana ahora es $3\times 2 = 6$ años.

La tabla nos sirve de guía para comprobar que el resultado satisface las condiciones del problema: en ella podemos ver que efectivamente dentro de dos años la edad de Ana es el doble de la edad de David

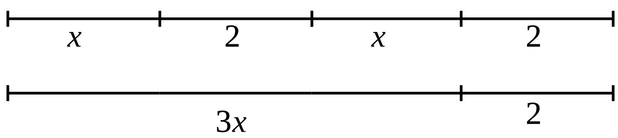
	ahora	dentro de 2 años
edad de Ana	6	8
edad de David	2	4

El diagrama de las líneas de la vida también puede usarse para resolver el problema, operando con los segmentos:

como

la edad de Ana dentro de dos años es 2 veces la edad de David dentro de dos años

dibujamos dos veces el segmento que representa la edad de David dentro de dos años y lo comparamos con el que representa la edad de Ana dentro de dos años, así:



y obtenemos que el segmento cuya longitud es x ha de medir 2.

Veamos ahora otro problema de edades en el que la incógnita no son las edades, sino el tiempo transcurrido entre los momentos de los que habla el enunciado.

6. Luis tiene 12 años y su madre 30. ¿Dentro de cuántos años tendrá la madre el doble de la edad de Luis?

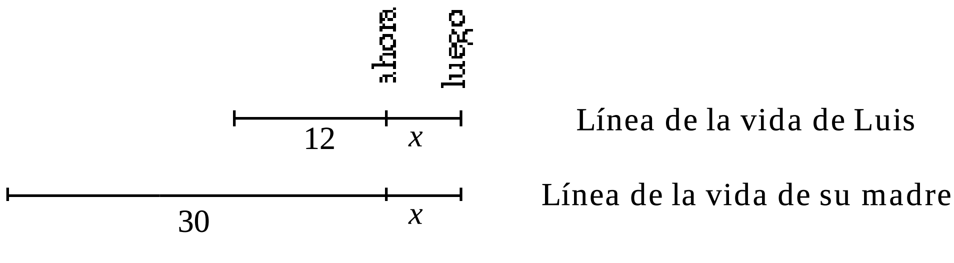
Las cantidades que hay que considerar en este problema son las edades de Luis y de su madre, en dos momentos. Podemos llamar a esos dos momentos “ahora” y “luego” y representar las cantidades en una tabla.

Designamos con una x el tiempo transcurrido entre esos dos momentos y escribimos las expresiones algebraicas correspondientes a cada casilla de la tabla usando los datos del problema y la relación característica de los problemas de edades

edad en un momento + tiempo transcurrido = edad en un momento posterior

	ahora	luego
edad de Luis	12	$12+x$
edad de su madre	30	$30+x$

La situación descrita en el enunciado también podemos representarla con las líneas de la vida de Luis y su madre



En el enunciado hay otra relación entre las cantidades que es la que nos permite escribir una ecuación. Reescribimos la frase en la que aparece para mostrar con claridad las cantidades:

la “edad de la madre luego” es el doble de la “edad de Luis luego”.

y la traducimos al lenguaje del álgebra:

$30+x=2(12+x)$.

Comprobamos que la ecuación está bien escrita porque tanto $30+x$ como $2(12+x)$ representan la misma cantidad: la “edad de la madre luego”.

Resolvemos la ecuación

$30+x=24+2x$,

$x=6$.

Comprobamos que se verifican las condiciones del problema, usando la tabla o sin ella:

la edad de Luis luego es 12+6 = 18

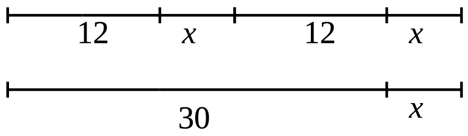
y

la edad de la madre luego es 30+6 = 36,

que efectivamente es el doble de 18.

También podemos obtener la solución usando el diagrama de las líneas de vida, de forma similar a lo que hemos hecho en el problema anterior.

El dibujo



muestra que x ha de valer $30-12-12=6$.

Los dos problemas de edades que acabamos de resolver son diferentes porque en el primero se pregunta por las edades y en el segundo se pregunta por el tiempo transcurrido entre dos momentos. En ambos casos, sin embargo, las relaciones entre las cantidades tienen en común que lo que se relaciona son las edades de dos personas en un momento dado. Veamos ahora otro problema en el que lo que se relaciona es la edad de una persona en dos momentos dados.

7. ¿Cuál es la edad de Consuelo si dentro de 30 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

Representamos en una tabla las cantidades, decidimos designar una de ellas con una x y escribimos las expresiones algebraicas correspondientes:

	ahora	dentro de 30 años
edad de Consuelo	x	$x+30$

Escribimos la ecuación traduciendo la relación

> la edad de Consuelo dentro de 30 años es 4 veces la edad de Consuelo ahora

al lenguaje algebraico

$x+30=4x$.

Resolvemos la ecuación

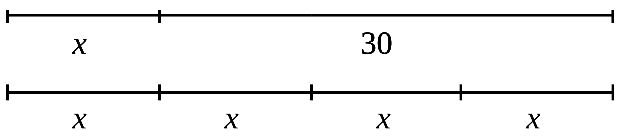
$3x=30$,

$x=10$.

Comprobamos que

> la edad de Consuelo dentro de 30 años es 10+30=40, que efectivamente es 4 veces la edad de Consuelo ahora.

Un diagrama de la línea de la vida de Consuelo resuelve también el problema, como mostramos a continuación:



Línea de la vida de Consuelo

En el problema siguiente hay también una relación entre edades en dos momentos, más compleja que la que acabamos de ver.

8. La edad de Eduardo es el doble de la edad de Ramón. Hace siete años la suma de las edades de los dos era igual a la edad actual de Eduardo. Hallar las edades de ambos.

Representamos en una tabla las cantidades, decidimos designar una de ellas con una x y escribimos las expresiones algebraicas correspondientes:

	hace siete años	ahora
edad de Ramón	$x-7$	x
edad de Eduardo	$2x-7$	$2x$

Escribimos la ecuación traduciendo la relación

la suma de la edad de Eduardo hace siete años y la edad de Ramón hace siete años es igual a la edad actual de Eduardo

al lenguaje algebraico

$x-7+2x-7=2x.$

Resolvemos la ecuación

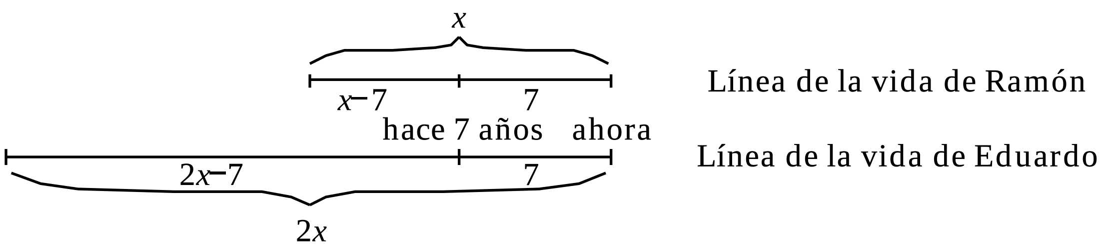
$3x-14=2x,$

$x=14.$

La tabla nos sirve de ayuda para comprobar que el resultado satisface las condiciones del problema, ya que rellenándola podemos ver que los números que aparecen en las casillas correspondientes a la relación que nos ha servido para escribir la ecuación la satisfacen: 7+21=28.

	hace siete años	ahora
edad de Eduardo	7	14
edad de Ramón	21	28

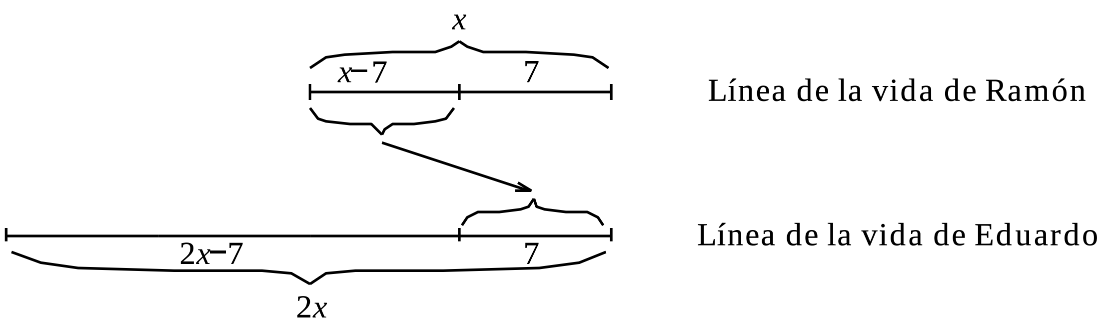
La representación de este problema mediante el diagrama de las líneas de la vida de Eduardo y Ramón es más compleja que las de los problemas anteriores, ya que como el problema habla del momento presente y un momento en el pasado hay que representar una substracción de segmentos:



En el diagrama puede verse que para que se cumpla la relación

> la suma de la edad de Eduardo hace siete años y la edad de Ramón hace siete años es igual a la edad actual de Eduardo

hace falta que los segmentos



sean iguales, es decir, que

$x-7=7;$

y, por tanto,

$x=14.$

En los enunciados de todos los problemas de edades que hemos resuelto se habla sólo de dos momentos, para terminar de examinar esta clase de problemas vamos a resolver un problema en el que se habla de tres momentos.

9. Soy ahora 3 veces más viejo que lo era cuando mi hermano tenía mi edad. Cuando tenga la edad que mi hermano tiene ahora, habremos vivido 96 años entre los dos. ¿Cuáles son nuestras edades?

Aunque el enunciado de este problema parezca un trabalenguas, la tabla permite ordenar todas las cantidades que aparecen en él y guía la escritura de las expresiones algebraicas.

Los tres momentos de la historia son:

— el presente o "ahora";

— cuando mi hermano tenía mi edad, es decir, un momento del pasado o "antes";

— cuando yo tenga la edad de mi hermano, es decir, un momento del futuro o "luego".

Designando con una x mi edad antes y usando la primera relación que aparece en el enunciado escribimos en la tabla:

	antes	ahora	luego
yo	x	$3x$	
mi hermano	$3x$		

Para seguir rellenando la tabla recurrimos a la relación característica de los problemas de edades:

> la edad ahora es la edad antes más el tiempo trascurrido entre esos dos momentos.

El tiempo transcurrido no es un dato del problema, pero a partir de las expresiones de mi edad ahora y mi edad antes, que ya hemos escrito en la tabla, podemos ver que vale

$3x-x=2x$.

Entonces, como

> la edad de mi hermano ahora es la edad de mi hermano antes más el tiempo trascurrido entre esos dos momentos,

la edad de mi hermano ahora es

$3x+2x=5x$.

Reiterando el mismo razonamiento terminamos de rellenar la tabla:

	antes	ahora	luego
yo	x	$3x$	$5x$
mi hermano	$3x$	$5x$	$7x$

Reformulamos la frase del enunciado

> Cuando tenga la edad que mi hermano tiene ahora, habremos vivido 96 años entre los dos.

como

> la suma de mi edad luego y la edad de mi hermano luego es igual a 96

para traducirla al lenguaje algebraico

$5x+7x=96.$

Resolvemos la ecuación

$12x=96,$

$x=8.$

Usamos la tabla para encontrar, a partir del resultado de la ecuación, la respuesta a la pregunta del problema y para comprobar que se satisfacen las condiciones del enunciado:

	antes	ahora	luego
yo	8	24	40
mi hermano	24	40	56

Mi edad ahora es 24 años; la de mi hermano, 40, y, efectivamente, cuando yo tenga 40 años, la suma de nuestras edades será 40+56=96 años.

Esquema del estilo de los cinco problemas de edades resueltos

PROBLEMAS DE MÓVILES

Se conoce con el nombre de “problemas de móviles” una clase de problemas en los que dos objetos —normalmente dos vehículos— se mueven con movimientos uniformes por el mismo camino. En unas ocasiones, los móviles circulan en sentidos opuestos yendo al encuentro el uno de otro; en otras ocasiones, los móviles circulan en el mismo sentido y uno va al alcance del otro. Los problemas de móviles se pueden clasificar, por tanto, en dos clases: problemas de *encontrar* y problemas de *alcanzar*. Además, en los problemas de encontrar los móviles pueden salir a la vez o en momentos distintos, y en los problemas de alcanzar los móviles pueden salir desde el mismo lugar en momentos distintos o salir a la vez desde lugares distintos.

Vamos a examinar a continuación cómo se usa en cada caso la regla para poner un problema en ecuaciones.

Clase de problema: encontrar, salen a la vez.

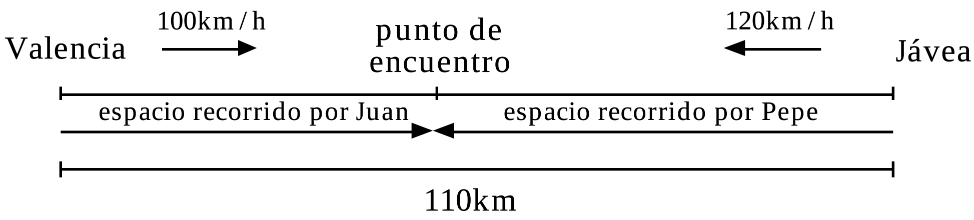
> 9. Pepe sale en coche desde Jávea hacia Valencia, a una velocidad de 120 km/h. A la misma hora Juan sale en coche desde Valencia hacia Jávea, a una velocidad de 100 km/h. La distancia de Valencia a Jávea es de 110 km. ¿Cuándo y dónde se encuentran?

Como se trata de un problema de móviles, en el enunciado del problema aparecen cantidades que están relacionadas por el esquema conceptual

tiempo empleado × velocidad = espacio recorrido

para cada uno de los móviles.

Si representamos la historia que narra el problema mediante el diagrama espacial siguiente:



encontramos además las relaciones

espacio recorrido por Juan + espacio recorrido por Pepe = distancia total

y

tiempo empleado por Juan = tiempo empleado por Pepe.

Designamos el tiempo con una x y escribimos las expresiones algebraicas correspondientes a las cantidades, con la ayuda de la tabla siguiente:

	tiempo	velocidad	espacio
Pepe	x	120	$120x$

Juan	x	100	$100x$

Para escribir una ecuación traducimos la relación

espacio recorrido por Juan + espacio recorrido por Pepe = distancia total

al lenguaje algebraico

$120x+100x=110.$

Resolvemos la ecuación:

$220x=110$

$x = \frac{110}{220} = \frac{1}{2}.$

A partir del resultado de la ecuación, rellenamos la tabla, con lo que obtenemos la respuesta a las preguntas del problema y podemos comprobar que se verifican las condiciones del enunciado.

	tiempo	velocidad	espacio
Pepe	$\frac{1}{2}$	120	60
Juan	$\frac{1}{2}$	100	50

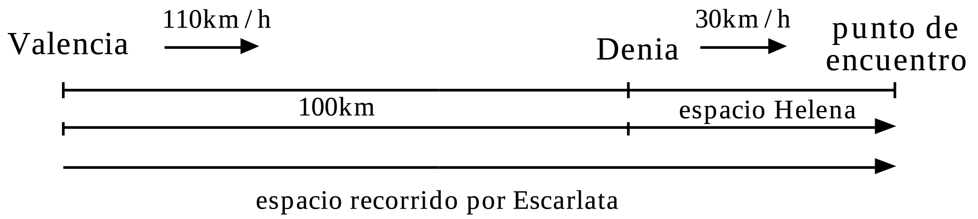
Pepe y Juan se encuentran al cabo de media hora, a 60 km de Jávea y 50 de Valencia.

Clase de problema: alcanzar, salen a la vez desde lugares distintos.

10. Escarlata sale en coche de Valencia hacia Murcia a 110 km/h. A la misma hora, Helena sale en bicicleta de Denia hacia Murcia a

30 km/h. La distancia entre Valencia y Denia es 100km. ¿Dónde y cuándo alcanza Escarlata a Helena?

El diagrama espacial:



muestra ahora la relación

espacio recorrido por Escarlata = distancia entre los lugares (100km) + espacio recorrido por Helena.

La tabla:

	tiempo	velocidad	espacio
Escarlata	x	110	$110x$
Helena	x	30	$30x$

Para escribir una ecuación traducimos la relación

espacio recorrido por Escarlata = distancia entre los lugares + espacio recorrido por Helena.

al lenguaje algebraico

$110x=100+30x$.

Resolvemos la ecuación:

$80x=100$

$$x = \frac{100}{80} = 1'25\text{h}.$$

A partir del resultado de la ecuación, rellenamos la tabla, con lo que obtenemos la respuesta a las preguntas del problema y podemos comprobar que se verifican las condiciones del enunciado.

	tiempo	velocidad	espacio
Escarlata	1'25	110	137'5
Helena	1'25	30	37'5

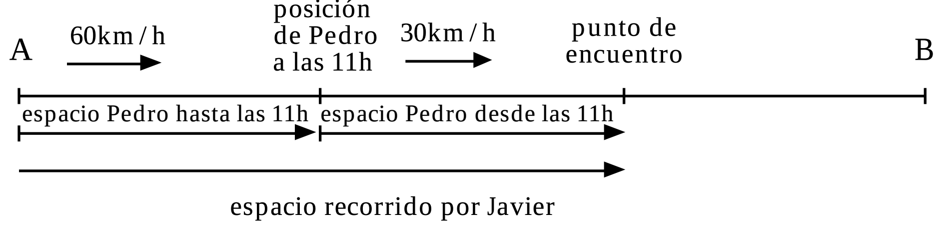
Clases de problemas: alcanzar, salen en momentos distintos desde el mismo lugar, y encontrar, salen en momentos distintos.

11. La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 90 km. A las 10h Pedro sale de A hacia B en bicicleta a una velocidad de 30 km/h. Javier realiza el mismo trayecto en moto a una velocidad de 60 km/h, pero saliendo a las 11h. Por otra parte, Miguel sale en coche de B hacia A a las 10h 30m y hace el trayecto a una velocidad de 90 km/h. ¿Dónde y cuándo alcanzará Javier a Pedro? ¿Dónde y cuándo se encontrarán Pedro y Miguel?

El enunciado de este problema es más complejo que los anteriores que hemos resuelto. Hay tres móviles y las dos preguntas son dos problemas distintos, uno de alcanzar y uno de encontrar. Vamos a resolver cada uno de los problemas por su lado.

Comenzaremos por el problema de alcanzar.

Como los dos móviles salen del mismo lugar, pero en momentos distintos, el diagrama espacial que sirve para representar la situación descrita por el problema tiene que ser el que muestre las posiciones de los dos móviles en el momento en que se pone en marcha el segundo, en este caso a las 11h.



El problema podemos ahora resolverlo como el problema 10, es decir como un problema de alcanzar en el que los móviles salen a la vez desde lugares distintos: sólo nos hace falta calcular el espacio recorrido por Pedro hasta las 11h, que será

velocidad de Pedro × tiempo transcurrido hasta las 11h

es decir

$30\times(11-10)=30$km.

A partir de ahí el problema se pone en ecuaciones de la misma manera que el problema 10, es decir traduciendo la relación que muestra el diagrama espacial

espacio recorrido por Javier = espacio recorrido por Pedro hasta las 11h + espacio recorrido por Pedro desde las 11h

al lenguaje algebraico

$60x=30+30x$.

El problema también puede ponerse en ecuaciones directamente usando como guía la tabla

	tiempo	velocidad	espacio
Pedro	$x+1$	30	$30(x+1)$
Javier	x	60	$60x$

en la que hemos designado con una x el tiempo empleado por Javier y hemos usado la relación

— tiempo empleado por Pedro = tiempo empleado por Javier + tiempo transcurrido entre los dos momentos.

La ecuación la escribimos ahora traduciendo la relación

— espacio recorrido por Pedro = espacio recorrido por Javier al lenguaje algebraico

$30(x+1)=60x$.

Resolvemos la ecuación

$30x+30=60x$ (la misma ecuación que habíamos escrito siguiendo el otro procedimiento)

$30x=30$

$x=1$.

Luego Javier alcanza a Pedro 1h después de salir, es decir, a las 12h; a una distancia de 60×1=60km de la ciudad A.

Resolvamos ahora el problema de encontrar.

De la misma manera que hemos hecho con el problema anterior, podemos transformar este problema en otro problema en que los móviles salen a la vez. Basta con que averigüemos dónde se encuentra Pedro cuando sale Miguel, es decir, a las 10h30. Una vez hecho eso este problema se puede resolver como el problema 9.

Lo que vamos a hacer nosotros, sin embargo, va a ser resolverlo directamente, usando como guía la tabla

	tiempo	velocidad	espacio
Pedro	x+0’5	30	30(x+0’5)
Miguel	x	90	90x

en la que hemos designado con una x el tiemplo empleado por Miguel y hemos escrito las expresiones algebraicas usando la relación

— tiempo empleado por Pedro = tiempo empleado por Miguel + tiempo transcurrido entre los dos momentos

La ecuación la escribimos ahora traduciendo la relación

— espacio recorrido por Pedro + espacio recorrido por Miguel = distancia entre A y B

al lenguaje algebraico

$30(x+0'5)=90x.$

Resolvemos la ecuación

$30x+15+90x = 90$

$120x = 75$

$x = \frac{5}{8}$ h

es decir,

$\frac{5}{8}$ h×60 = 37’5m = 37m30s.

Luego Miguel y Pedro se encuentran 37m30s después de la hora de salida de Miguel, es decir, a las 11h7m30s; a una distancia de $90\times\frac{5}{8}$ = 56’25km de la ciudad B.

Esquema del estilo de los problemas de móviles resueltos

PARA ACABAR

UN PROBLEMA HISTÓRICO

Desde hace siglos, se han planteado problemas de matemáticas como pasatiempo, acertijo o desafío para mostrar o ejercitar el ingenio. Uno de los más famosos está redactado como si estuviera grabado en la lápida de la tumba de Diofanto, famoso matemático griego del siglo III, y dice lo siguiente:

12. En esta tumba reposa Diofanto. ¡Ah, qué gran maravilla, la tumba cuenta científicamente la medida de su vida! Dios le concedió ser un niño durante una sexta parte de su vida, y, al añadir una doceava parte a ésta, vistió sus mejillas con vello. Le encendió la llama del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le concedió un hijo. ¡Ay desdichado niño tardío!, tras alcanzar la medida de la mitad de la vida de su padre, la Parca helada se lo llevó. Tras consolar su herida con la ciencia de los números durante cuatro años, acabó su vida.

Este texto enigmático se puede poner en ecuaciones, traduciéndolo al lenguaje del álgebra como hemos visto en este tema, y averiguar así cuántos años vivió Diofanto. También se puede averiguar el momento o la duración de otros episodios de su vida, como cuándo se casó, qué edad tenía cuando nació su hijo, cuántos años vivió su hijo, etc.

RECAPITULACIÓN

El núcleo del tema es la introducción de una

regla para poner un problema en ecuaciones

y la introducción de

instrumentos heurísticos para facilitar el uso de la regla.

La *regla* consiste básicamente en

el *análisis del enunciado* del problema

para

determinar las *cantidades* que aparecen en él, y

determinar las *relaciones* entre ellas,

con el fin de

traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

Los *instrumentos heurísticos* son

esquemas conceptuales

tablas de cantidades

líneas de vida

diagramas espaciales

y sirven de ayuda para

el análisis del enunciado,

la traducción al lenguaje algebraico,

la revisión

de la traducción

del resultado.

Todo ello se usa en las clases de problemas

de estados

de edades

de móviles.