VALLEJO PERPLEJO

Luis Puig
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En Maz, A.; Torralbo, M. y Rico, L. (Eds.) *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

VALLEJO PERPLEJO

Luis Puig
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València

Resumen

En una nota a pie de página de la cuarta edición del *Tratado Elemental de Matemáticas*, Vallejo afirma que no entiende la representación geométrica de las cantidades imaginarias tal como la expone el reverendo John Warren en *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities*. En este texto, exponemos lo que Vallejo dice no entender, acompañado de algunos extractos de obras contemporáneas de Peacock, Cauchy, Wessel y Argand, relacionadas con lo que dice no entender, que Vallejo en unos casos pudo conocer y, en otros, no, pero que sitúan sus afirmaciones en contexto. Finalmente, exponemos la parte del Tratado de Warren directamente relacionada con lo que Vallejo dice no entender.

INTRODUCCIÓN

Una de las maneras de examinar los textos de matemáticas de épocas pasadas, que considero que es propia de la didáctica de las matemáticas, es la que busca en ellos lo que podríamos llamar "cogniciones petrificadas". "Petrificadas" porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más que lo que ya está en ellos. "Cogniciones" porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara como su autor.
En este texto presento los materiales para realizar un examen de ese estilo de la confesión de Vallejo de no entender la representación geométrica de las cantidades imaginarias tal como la expone el reverendo John Warren en *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities* (Warren, 1828), con algunos apuntes de explicación del porqué de tal incomprensión.

VALLEJO PERPLEJO EN UNA NOTA A PIE DE PAGINA

La confesión de incomprensión a que he hecho referencia aparece en la cuarta edición del *Tratado* en una nota a pie de página[1]. Se trata de una nota bastante singular desde varios puntos de vista. En primer lugar, por su contenido. No es habitual encontrar en un texto de enseñanza el reconocimiento por parte de su autor de que hay algo que él no entiende. Sobre todo si la afirmación de esa incomprensión no se acompaña del rechazo de lo que no se comprende como algo que ha de ser erróneo, sino que se reconoce que tiene que haber una manera de entenderlo que a él se le escapa. Pero además es singular por su tamaño y por la referencia explícita que a ella se hace en el índice del Tomo I del Tratado.
En efecto, en ese índice, además de la relación de capítulos y apartados, también se incluyen los cambios de la cuarta edición con respecto a la tercera en forma de una lista de 28 adiciones, y la duodécima adición que figura en esa "Lista de las principales adiciones que contiene esta cuarta impresion[2]", dice lo siguiente:

12ª En el § 211 se pone una estensa nota acerca de un principio general que debe existir respecto de las cantidades o espresiones imaginárias, que aun no es conocido; y se inserta lo mas esencial que existe en los libros ingleses sobre que *el signo de imaginárias indica perpendicularidad*; y para aclarar todo esto en que hay efectivamente cierta *sublimidad misteriosa*, hago uso de 3 figuras grabadas en madera: y todo esto con el fin de estimular á algun jóven á aclarar y desenvolver todo lo relativo á tan importante materia. (Vallejo, 1841, p. 551)

Vallejo ya indica aquí con la expresión “hay efectivamente cierta *sublimidad misteriosa*”, que hay algo que no entiende, pero que algo de razón ha de haber en ello. Pero además, dando muestra de su condición de buen maestro, pretende “estimular á algun jóven” a que vaya más allá de lo que él ha sido capaz de comprender.
La nota efectivamente es extensa, recorriendo las páginas 244 a 261 –que se convierten en páginas iceberg al tener más espacio dedicado a la nota que al texto principal– y comienza precisamente indicando que lo que incluye en ella lo hace “Para estimular á algun jóven que desée aclarar y desenvolver todo lo relativo á las expresiones imaginarias” y, por ello, “indicaremos aquí otras singularidades suyas, que manifiestan existe algun principio general que aun no esté conocido” (Vallejo, 1841, p. 244). La primera “sublimidad misteriosa” que cita es el hecho de que “si en las fórmulas que corresponden á la *elipse* ponemos $b\sqrt{-1}$ en vez de b, dichas fórmulas espresan entónces propiedades de la *hipérbola*”[3]. La “sublimidad misteriosa” de la que nos vamos a ocupar no es ésa, sino la que dice Vallejo que se halla en “una obra inglesa, que voy á dar á conocer; pues aunque no me atrevo á calificarla, reune la circunstancia de ser una idéa nueva”. La “obra inglesa” es el ya citado *Tratado sobre la representación geométrica de las raíces cuadradas de las cantidades negativas* del reverendo John Warren, publicada en Cambridge en 1828[4], y la “sublimidad misteriosa” consiste en que Warren, partiendo de afirmaciones que Vallejo confiesa que no entiende, llega a demostrar proposiciones que Vallejo sabe que son verdaderas.
Veamos qué es lo que Vallejo dice que no entiende:

> […] en el artículo 3 pone por definición, “la *suma* de dos cantidades es la diagonal del paralelogramo, cuyos lados son las dos cantidades”[5]. Esto no se yo el modo de comprenderlo, pues como los dos lados de un paralelogramo, y la diagonal forman un triángulo y la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero, según demostramos (§ 371), resulta, por los principios que tenemos allí demostrados, y que todos reconocen por verdaderos, que la suma de los dos lados de un paralelogramo es mayor que su diagonal; por lo que el tomar ahora por definición, que la diagonal de un paralelogramo es igual á la suma de los lados, es una cosa que no se concibe; por lo que lo ménos hay mucha obscuridad (Vallejo, 1841, p. 244).

Vallejo también dice no entender por qué Warren introduce la necesidad de que dos cantidades, para ser proporcionales, tengan que tener ángulos correspondientes iguales entre ellas: “Esta idea de ángulo hasta ahora no se ha necesitado considerar en las cantidades proporcionales” (Vallejo, 1841, p. 245). Pero lo que le lleva a elevar sus incomprensiones a la categoría de “sublimidad misteriosa” es otra cosa. Veamos, en las propias palabras de Vallejo, de qué se trata. Vallejo traduce el artículo 105, que aparece en el capítulo 2º del libro de Warren, “Los valores de la raíz cuadrada de –1 están inclinados con la unidad en ángulos =90º y 270º”[6], y añade:

> La demostración que pone, como se funda en cosas que no se presentan con claridad, no es capaz por sí de convencer: pero se advierte una cierta misteriosa analogía entre esto y lo que hemos citado al principio, relativo á la elípse é hipérbola. En efecto, si uno de los dos semiejes primeros de un hipérbola se toma por unidad, uno de los dos segundos semiejes forma con el primero un ángulo de 90º, y el otro semisegundo eje forma con el mismo semiprimer eje un ángulo de 270º (Vallejo, 1841, p. 245-246).

Además, Vallejo, a pesar de lo que no entiende, piensa que tiene que haber algo interesante en lo que hace Warren porque éste demuestra teoremas conocidos (la expresión de senos, cosenos, etc. en función de las potencias de la unidad, la suma de los ángulos de un triángulo y el teorema de los senos). Vallejo cuenta cómo esto le inquietó y le indujo a estudiar[7].

> Como estas proposiciones son verdaderas, y las deduce ó demuestra por su método, debe sacarse la consecuencia de que esto es digno de exámen; por lo que he tratado de proporcionarme el mayor número posible de libros de Álgebra ingleses, posteriores á dicha obra, para ver si encontraba en ellos alguna cosa que

me ilustrase: y voy a poner aquí un estracto de lo que tiene relacion con la materia que nos ocupa (Vallejo, 1841, p. 246).

A partir de aquí Vallejo se dedica a citar extractos de los libros de Álgebra ingleses que ha conseguido, sin mayores comentarios. Nos limitaremos a mencionar alguno de los fragmentos que Vallejo cita del *Tratado de Álgebra* de Peacock[8]. Vallejo comienza su extracto de Peacock con el comentario siguiente:

En el *Tratado de Álgebra* por Mr. *George Peacock*, impreso tambien en Cambridge en el mismo año de 1830[9], se hallan algunas cosas que aclaran algo mas, aunque no tanto como conviene, el punto que nos ocupa (Vallejo, 1841, p. 246).

Vallejo cita, en primer lugar, las referencias que Peacock hace en el prólogo del *Tratado* a las obras de Buée y Warren. De Buée, Peacock no tiene muy buena opinión, aunque le reconoce el mérito de su intento de interpretar el significado de las cantidades imaginarias.

En la página XXVII del prólogo dice que "La primera tentativa que yo he podido hallar de una interpretación del significado de tales cantidades (las imaginarias ó imposibles) fue dada por Mr. Buée en las *Transacciones Filosóficas* de 1806, en una Memoria[10] que contiene algunas cosas originales sobre el uso y significado de los signos del Álgebra, aunque presentadas en una muy vaga y anticientífica forma: se limitó sin embargo á la interpretacion del signo $\sqrt{-1}$, como indicando *perpendicularidad* en Geometría [...]" (Vallejo, 1841, p. 247).

Vallejo cuenta que, por el contrario, Peacock alaba la obra de Warren que él no ha entendido, de la que Peacock dice que "está distinguida por grande originalidad, y por estrema intrepidez en el uso de las definiciones" (Vallejo, 1841, p. 247). Vallejo continúa citando a Peacock:

"Estando de este modo asegurado que tales signos de afeccion hallan su mas apropiada interpretacion designando la posicion de líneas, nuestra atencion es naturalmente dirigida á la invencion ó determinacion de un signo que espresa posicion en general, ó en otras palabras, la posición de una línea inclinada en un ángulo cualquiera con la direccion de una línea primitiva [...] este signo es $\cos.\theta + \sqrt{-1}.sen\theta$; donde θ es el ángulo hecho por la línea, cuya posicion se debe designar con una línea primitiva" (Vallejo, 1841, p. 247).

También cita Vallejo cómo Peacock explica que se ha visto "obligado á incorporar la ciencia de la Trigonometría con el Álgebra" por "El uso del signo $\cos.\theta + \sqrt{-1}.sen\theta$ y la consideracion de posicion como designada por él", de modo que tras la definición geométrica del seno y el coseno y la determinación de sus propiedades fundamentales por medios geométricos, "las transferimos, á la definicion algebráica de cantidades á que damos los mismos nombres; de aquí obtenemos las expresiones esponenciales $\frac{\varepsilon^{\theta} + \varepsilon^{-\theta}}{2}$, y $\frac{\varepsilon^{\theta} + \varepsilon^{-\theta}}{2}$ (donde $\varepsilon = e\sqrt{-1}$) por el coseno y seno de θ, y determinamos por medio de ellas todas las fórmulas que se puede decir constituyen la ciencia de la Geometría" (Vallejo, 1841, p. 248).

Además, en los fragmentos de Peacock que cita Vallejo, Peacock subraya que $\sqrt{-1}$ es un "signo de afeccion" y no un signo de cantidad, de la misma manera que + y – son signos de afección, y, en particular, dice Peacock que "nosotros hemos dicho que la *afectacion* de *a*, cuando denota una línea, con el signo $\sqrt{-1}$, era equivalente á ser transportada á través de un ángulo de 90º" (Vallejo, 1841, p. 252).

Vallejo termina su largo extracto de Peacock precisamente con un fragmento en que Peacock concluye con lo que en Warren era la definición de suma de cantidades que Vallejo dice no entender.

Página 420 dice:
"Estamos ahora en disposicion de concluir generalmente, que la suma algebráica de dos líneas que hacen cualquier ángulo una con otra ó con una línea primitiva ó eje, es igual á la diagonal del paralelogramo construido sobre ellas, y que ellas comprenden; y que su algebráica diferencia es igual á la otra diagonal del paralelogramo." (Vallejo, 1841, p. 254)

No sé cómo llega Peacock a esta conclusión en la edición de su *Tratado de Álgebra* que leyó Vallejo. Examinaré cómo lo hace en el Tratado de 1845. En él, Peacock establece esta conclusión en el párrafo 830, que se titula "La suma de dos lados adyacentes de un paralelogramo, consideradas en posición así como en magnitud, es la diagonal que incluyen; su diferencia es la otra diagonal[11]" (Peacock, 1845, p. 214). Para demostrar que esa afirmación tiene sentido lo que hace Peacock es representar los dos lados del paralelogramo "en magnitud y en posición por $\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\theta)$ y $\rho'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\theta')$", hallar su "*suma simbólica* $\rho\cos\theta + \rho'\cos\theta' + (\rho\mathrm{sen}\theta + \rho'\mathrm{sen}\theta')\sqrt{-1}$" y demostrar que esa *suma simbólica* representa la hipotenusa del paralelogramo. La suma de dos líneas dadas en magnitud y posición no está pues en Peacock simplemente definida como la diagonal del paralelogramo que forman, sino que está demostrado que ese hecho se deriva de otros establecidos previamente. Además, Peacock tiene el buen cuidado de llamar a esta suma "suma simbólica". De hecho, Peacock ya habla 72 páginas antes de "que la *suma simbólica* de los dos lados AE y EB_1 del triángulo rectángulo AEB_1 es la hipotenusa AB_1, cuando los tres lados se consideran en magnitud y también en posición con respecto a la línea primitiva AB" (Peacock, 1845, p. 142). En esa página es la primera vez que Peacock suma líneas "cuando se las considera con referencia a posición así como a magnitud", y lo que hace es demostrar que la representación simbólica en magnitud y posición de AB_1 coincide con la suma de las representaciones de AE y EB_1. El triángulo AEB_1 del que Peacock habla es el de la figura 1, en la que los segmentos AB, AB_1 y AB_2 dividen el círculo en tres partes iguales, de modo que la representación simbólica en magnitud y posición de AB, AB_1 y AB_2 utiliza las tres raíces cúbicas de la unidad.

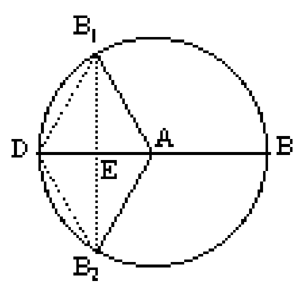


Fig. 1

Peacock ya ha demostrado previamente que las n raíces n-ésimas de la unidad es pertinente usarlas para representar las posiciones de n radios que dividen un círculo en n partes iguales, ya que la sucesión de esos radios tienen entre sí la misma relación de posición que la relación que tienen entre sí las sucesivas potencias de las n raíces n-ésimas de la unidad, de manera que, si se toma uno de los radios como base, pongamos AB, y se representa AB_1 por $\alpha \times AB$, siendo α una raíz n-ésima de la unidad, entonces AB_2 quedará convenientemente representado por $\alpha^2 \times AB$ ($=\alpha \times AB_1$), y así sucesivamente (Peacock, 1845, pp. 136-138). El signo $\sqrt{-1}$, una de las raíces cuartas de 1, representará entonces la posición perpendicular respecto a la línea que se tome como base, formando un ángulo recto con ella: "Resulta así que, si una línea, en una posición dada, se denota por r, líneas iguales que formen uno o tres ángulos rectos con ella, se representarán simbólicamente por $r\sqrt{-1}$ y $-r\sqrt{-1}$, respectivamente" (Peacock, 1845, p. 141).

Peacock afirma consecuentemente que el signo $\sqrt{-1}$ no es un signo de una cantidad sino que es un "signo de afección". En general, dice Peacock, "en expresiones tales como $(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\theta)\rho$, debemos considerar $(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\theta)$ como un signo de afección de ρ", que no afecta de ninguna manera a su magnitud, sino sólo a su posición (Peacock, 1845, p. 204).

EL CONTEXTO DE LA NOTA A PIE DE PÁGINA. VALLEJO EXILADO EN PARÍS.

Vallejo vive entre 1779 y 1846 y su trabajo de matemático está imbricado con su actividad política, que le llevó a participar en las Cortes Constituyentes de 1813 y a ocupar cargos políticos durante el trienio liberal. Los avatares de su vida influencian sin duda su obra matemática, en particular, hay cambios entre la tercera y la cuarta edición del *Tratado* que pueden atribuirse a la circunstancia del exilio de Vallejo desde 1825[12] a 1829, durante el cual asiste en París a cursos de Lacroix, Laplace, Gay-Lussac y, en especial, de Cauchy, quien ejerció la mayor influencia sobre él, en opinión de Hernanz y Medrano (1990).

El *Tratado* lo había comenzado a redactar Vallejo en 1804 y había publicado la primera edición del Tomo primero en 1812, llegando a la publicación del Tomo tercero, que incluye la Mecánica, en 1817. La tercera edición del Tomo primero, que ya se anuncia como "considerablemente aumentada" es de 1821, y la cuarta edición del Tomo primero, en la que aparece la nota a pie de página que nos ocupa, es de 1841.

Es de suponer que, en los cursos de Cauchy a los que asiste Vallejo en París, Cauchy se resistiría a tratar los imaginarios a través de su representación geométrica, pese a que le es conocida, de la misma manera que se resistió a hacerlo en su libro de 1821 en que publica su Curso de Análisis de la *École Royale Polytechnique*, cuya primera parte lleva el título de "Análisis algebraico" (Cauchy, 1821). En efecto, en este libro Cauchy diferencia entre las expresiones simbólicas y las que tienen sentido y, como no puede darle sentido a los imaginarios, los trata como expresiones simbólicas. Es preciso subrayar que para Cauchy "expresión simbólica" significa que no significa nada. En efecto, el capítulo VII del *Análisis algebraico*, que se titula "Sobre las Expresiones imaginarias y sobre sus Módulos", comienza con un párrafo que dice lo siguiente:

> En análisis, se llama *expresión simbólica* o *símbolo* toda combinación de signos algebraicos que no significa nada por sí misma (Cauchy, 1821, p. 173).

Cauchy justifica el uso de esas expresiones porque "a menudo es un medio de simplificar los cálculos, y de escribir en forma abreviada resultados bastante complicados en apariencia" (Cauchy, 1821, p. 173), de manera que sólo llega a aceptarlas de pleno derecho cuando es capaz de darles sentido; pero esto sucede ya en 1847, después de la publicación del tratado de Vallejo, en una memoria que presenta ante la Academia de Ciencias, la "Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences" (Cauchy, 1847).

En los preliminares de esa memoria, Cauchy, después de decir que en su *Análisis algebraico* se había preocupado en especial del tratamiento de la "teoría de los imaginarios" porque "tal y como se enseñaba habitualmente en los Tratados de álgebra" a sus principios les "falta claridad", explica cuál había sido su posición en su *Análisis algebraico* de la siguiente manera:

> Para poner remedio al inconveniente señalado, había considerado las ecuaciones imaginarias como fórmulas simbólicas, es decir, como fórmulas que, tomadas al pie de la letra e interpretadas según las convenciones establecidas generalmente, son inexactas y no tienen sentido, pero de las que se puede deducir resultados exactos modificando y alterando, según reglas fijas, esas fórmulas o los símbolos que encierran. Planteado esto, ya no había necesidad alguna de someter el espíritu a tortura para buscar cómo descubrir lo que pudiera representar el signo simbólico $\sqrt{-1}$, que los geómetras alemanes substituyen por la letra *i*. Este signo o esta letra eran, si puedo expresarme así, una herramienta, un instrumento de cálculo, cuya introducción en las

fórmulas permitía llegar más rápidamente a la solución muy real de cuestiones que se habían planteado (Cauchy, 1847, p. 1121).

Cauchy continúa diciendo que, si bien esta consideración de las expresiones en que aparecen los imaginarios como simbólicas permite no crearse problemas, todo estaría más claro si “se llegara a reducir las expresiones imaginarias y la misma letra i a no ser otra cosa que cantidades reales”. Y precisamente eso es lo que va a hacer en esta memoria. Ahora bien, para ello, Cauchy introduce la congruencia de polinomios módulo un polinomio, y muestra cómo entonces “Una teoría nueva y rigurosa de las fórmulas y de las ecuaciones imaginarias se deduce inmediatamente”, basta con que se tomen las congruencias módulo x^2+1: “la letra *simbólica* i, substituyendo a la letra x en una función entera $f(x)$, indicará el valor que recibe no esta función $f(x)$, sino el resto de la división algebraica de $f(x)$ por x^2+1, cuando se atribuye a x el valor particular i” (Cauchy, 1847, p. 1124). Cauchy, por tanto, sólo llega a aceptar que las expresiones imaginarias tengan sentido cuando ha sido capaz de creárselo mediante un proceso de abstracción.

EL CONTEXTO DE LA NOTA A PIE DE PÁGINA. ALGUNOS DATOS HISTÓRICOS SOBRE $\sqrt{-1}$, IMAGINARIOS Y COMPLEJOS

No es posible siquiera resumir aquí la complejidad de la historia de los números complejos, de la que da buena cuenta Flament (2003), texto al que remito para tener medida de la compleja situación de la cuestión en el momento en que Vallejo escribe su *Tratado*. Señalaré únicamente dos hechos que de alguna manera están relacionados con lo que dice Vallejo perplejo, y apuntaré algunos aspectos de dos textos cruciales en la historia de la representación geométrica de los números complejos, pero que Vallejo no conoció, lo que no es extraño, porque ambos textos se difundieron con dificultad.

Signo y no cantidad

El primer hecho tiene que ver con la consideración de $\sqrt{-1}$ como signo y no como cantidad, y puede estar presente ya en el siglo XVII. En efecto, las expresiones con que Bombelli, en su *Álgebra* publicada en 1572, se refiere a $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$, “più di meno” y “meno di meno”[13], funcionan, según Flament (2003) como signos, igual que + y –, y no como números. Flament cita a Jean Itard[14] como antecedente de esta interpretación.

Imaginario, imaginar

El segundo, tiene que ver con el sentido en que se usa el término “imaginario” para calificar las raíces, cantidades o números. Descartes es el primero que usa el calificativo de “imaginarias” para referirse a las raíces de números negativos, y ese calificativo, en él, está ligado a las facultades de la imaginación. Esto lo hace en la parte de la *Geometría* (publicada como apéndice al *Discurso del Método* en 1637) en que está desarrollando lo que él mismo, en una carta a Mersenne escrita en abril del mismo año 1637, ha llamado “su álgebra”:

Por lo demás, tanto las raíces verdaderas como las falsas no son siempre reales, sino a veces sólo imaginarias, es decir, que siempre se puede imaginar tantas de ellas en cada ecuación como yo he dicho, pero que a veces no hay ninguna cantidad que corresponda a las que se imaginan[15] (Descartes, 1925, p. 380 del facsímil del original, p. 174 de la edición de Smith).

Representar la magnitud y la dirección

El primer texto es la memoria que Caspar Wessel presenta en 1797 a la Academia de Ciencias de

Dinamarca con el título “Sobre la representación analítica de la dirección. Con aplicaciones en particular a la determinación de los polígonos planos y de los polígonos esféricos”. No es extraño que este texto fuera poco conocido en su época y sólo encontrara una difusión muy tardía: es el único texto matemático de Wessel, lo escribe ya con 52 años y se publica en danés[16].

El texto de Wessel comienza haciendo explícito su propósito:

El presente ensayo tiene por objeto la cuestión de saber cómo debe ser representada analíticamente la dirección, es decir, cómo se deberían expresar los segmentos de rectas, si se quisiera, mediante una ecuación única entre un solo segmento desconocido y otros segmentos dados, encontrar una expresión que represente a la vez la longitud y la dirección del segmento desconocido (Wessel, 1897, p. 3).

Y su gesto revolucionario está también expresado de entrada y sin ambajes: para poder conseguir el propósito que se plantea va a ser necesario extender operaciones aritmético-algebraicas elementales dándoles nuevas definiciones. Esto es así porque “sólo se puede someter la dirección al álgebra si se hace depender sus variaciones de operaciones algebraicas”. Pero, dice Wessel, que lo único que permiten las operaciones algebraicas tal y como están definidas es cambiar de una dirección[17] a su opuesta, pasando de positivo a negativo. De modo que sin cambiar las definiciones no se podrá representar más que una dirección y su opuesta. Ahora bien, Wessel pretende que con las nuevas definiciones extendidas a otros casos, otras direcciones, “al mismo tiempo que se toma esta libertad con respecto a las reglas ordinarias de las operaciones, no se caiga en contradicción con la antigua teoría de números” (Wessel, 1897, p. 4).
Examinemos someramente cómo define Wessel la adición y la multiplicación de segmentos, cuando se considera no sólo su magnitud sino también su dirección.

La adición de dos segmentos se hace de la manera siguiente: se los combina haciendo que uno parta del punto en el que el otro termina; después se une mediante un nuevo segmento los dos extremos de la línea quebrada así obtenida: ese nuevo segmento se llama entonces la suma de los segmentos dados (Wessel, 1897, p. 7).

Una vez expuesta esta definición Wessel estudia las propiedades asociativa, commutativa, etc. de esa nueva adición y señala no sólo que, si los segmentos están en la misma dirección, esta definición coincide con la definición usual, sino que, cuando no lo están, la nueva definición establece algo que es análogo a una suma.

Si los segmentos añadidos son directos, esta definición esta en completo acuerdo con la definición usual. Si no son directos, no se rompe la analogía al decir que un segmento es la suma de otros dos, si tiene el mismo efecto que éstos (Wessel, 1897, p. 8).

La definición de Wessel de la multiplicación la emparenta con una proporción: el producto es a uno de los factores como el otro es al segmento unidad. La novedad estriba en la consideración de la dirección, que viene fijada por el ángulo entre los segmentos. Tanto en la definición de proporción entre segmentos con dirección como en la de multiplicación que se deriva de ella, se introduce entonces la igualdad de los ángulos: los cuatro segmentos son proporcionales cuando las razones entre sus magnitudes y los ángulos entre sus direcciones son iguales. La multiplicación de los segmentos OA y OB es una operación entre sus magnitudes y, además, entre ángulos: el ángulo entre OA y el segmento unidad ha de ser igual que el ángulo entre el segmento producto y OB, de manera que la multiplicación de segmentos conlleva la suma de sus ángulos respecto al segmento unidad, dado en magnitud y posición. En palabras de Wessel, “el producto de dos segmentos […]

2º En cuanto a la longitud, el producto debe ser a uno de los factores como el otro es a la unidad;
3º Por lo que concierne a la dirección del producto […] debe desviarse de uno de los factores tantos grados como el otro factor se desvía de la unidad y en el mismo sentido que él, de manera que el ángulo de dirección

del producto o su desviación respecto a la unidad positiva sea igual a la suma de los ángulos de dirección de los factores (Wessel, 1897, p. 9).

Con esta definición de multiplicación Wessel puede entonces introducir una segunda unidad perpendicular a la unidad positiva, a la que designará con +ε, y comprobar que, "según la regla por la que el ángulo de dirección del producto es igual a la suma de los de sus factores", +ε se comporta igual que $+\sqrt{-1}$:

Resulta que ε es igual a $\sqrt{-1}$ y que la desviación del producto se determina de manera que no se cae en contradicción con ninguna de las reglas de operación ordinaria (Wessel, 1897, p. 9).

Establecido esto, Wessel puede expresar segmentos unitarios en cualquier dirección mediante la fórmula cos ν + ε sen ν, a partir de lo cual desarrolla un cálculo con segmentos cualesquiera, incluyendo las operaciones inversas de división de segmentos (con dirección) y de extracción de raíces de segmentos (con dirección).

Representar las cantidades imaginarias

El segundo texto es el *Ensayo sobre una manera de representar las cantidades imaginarias en las construcciones geométricas* de Jean-Robert Argand, y comparte con el de Wessel una historia de tardanza azarosa en llegar a ser conocido. Argand publica el texto en 1806, en una edición de muy pocos ejemplares, para uso privado, sin nombre de autor, y con la indicación de que el libro puede encontrarse *Chez Madame Veuve Blanc*. Argand le había enviado previamente el manuscrito a Legendre, quien no parece que le acusara siquiera recibo, pero que le cuenta su contenido por carta a un hermano de J.-F. Français. Al morir su hermano, J.-F. Français encuentra la carta de Legendre entre sus papeles, la lee y escribe un trabajo que se publica en los *Annales de Mathématiques de Gergonne* en 1813, en el que desarrolla las ideas de Argand que ha transmitido Legendre en la carta. Français tiene la honestidad no sólo de no atribuírselas sino de invitar a su autor a salir del anonimato.

Deseo que la publicidad que he dado a los resultados a los que he llegado pueda hacer que el primer autor de estas ideas tome la determinación de darse a conocer y de actualizar el trabajo que él mismo ha hecho sobre este asunto (Français, 1813, p. 71)

Argand responde a la llamada de Français enviando a Gergonne una nota en la que se identifica como el autor del trabajo citado en la carta de Legendre, e incluye un resumen de su trabajo. Esa nota se publica en los *Annales*, en 1814; pero el trabajo original completo no será reeditado hasta 1874[18].

En el texto de Argand encontramos, como en el de Wessel, que la representación de la dirección es la idea motriz. Ahora bien, así como en el texto de Wessel lo que se pretende es representar la dirección y $\sqrt{-1}$ resulta ser una herramienta adecuada para ello, en el texto de Argand lo que se pretende es representar las cantidades imaginarias y la representación de la dirección resulta ser una herramienta adecuada.

Así, Argand se pregunta si ya que "la cantidad negativa […] se tornaba real cuando se combinaba de cierta manera la idea de magnitud absoluta con la idea de dirección, no sería posible obtener el mismo éxito con […] la cantidad x que satisface a la proporción $+1 : +x :: +x : -1$" (Argand, 1874, p. 6).

La solución de Argand se justifica a través de la consideración de la propia proporción, pero aplicada no a las magnitudes, sino a las direcciones. De ahí cómo enuncia Argand lo que se trata de buscar usando una expresión propia de las proporciones, pero aplicada a direcciones en vez de a magnitudes.

Reflexionando sobre ello, ha parecido que se conseguiría ese objetivo si se pudiera encontrar un tipo de magnitudes a las que se pudiera ligar la idea de dirección, de manera que, una vez adoptadas dos direcciones opuestas, una para los valores positivos y otra para los valores negativos, existiera una tercera tal que la dirección positiva fuera a la dirección en cuestión como ésta es a la dirección negativa (Argand, 1874, p. 6).

Argand muestra que la dirección que verifica la condición que se pide es la perpendicular a las precedentes, tanto si se toma en un sentido o en el opuesto, y acaba diciendo "son pues lo que se expresa ordinariamente por $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$" (Argand, 1874, p. 7). Para ello, ha considerado que "se ha adoptado como unidad positiva una línea KA, considerada como teniendo su dirección de K a A, lo que se podría designar $\overline{\mathrm{KA}}$, para distinguir esta cantidad de la línea KA, en la que no se considera aquí más que su magnitud absoluta" (Argand, 1874, p. 6) y ha comparado con ella las "líneas en dirección[19]" $\overline{\mathrm{KI}}$, $\overline{\mathrm{KE}}$ y $\overline{\mathrm{KN}}$ de la figura 2.

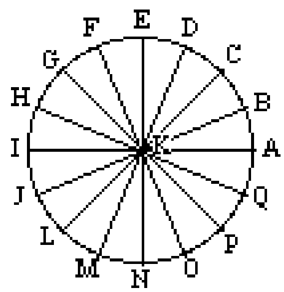


Fig. 2

El examen de las otras direcciones de la figura, introducidas como medias proporcionales entre las cuatro primeras direcciones, y, posteriormente, de direcciones que forman un ángulo cualquiera con éstas, le permite acabar afirmando lo siguiente:

Relacionando con las denominaciones usuales las diferentes especies de líneas en dirección que se engendran a partir de una unidad primitiva $\overline{\mathrm{KA}}$, se ve que toda línea paralela a la dirección primitiva se expresa mediante un número real, que las que le son perpendiculares se expresan por números imaginarios o de la forma $\pm a\sqrt{-1}$, y, finalmente, que las que se trazan en una dirección distinta de las dos precedentes pertenecen a la forma $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, que se compone de una parte real y una parte imaginaria (Argand, 1874, p. 12).

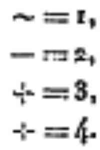
Aunque Argand está continuamente hablando de "cantidades imaginarias" e, incluso, "números imaginarios", no por ello deja de tratar también $\sqrt{-1}$ como un signo, y esto lo hace además de una manera bastante peculiar: substituye $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ por dos signos nuevos para poder desprenderse de su significado (o, mejor, de su ausencia de significado) y ver en ellos sólo las propiedades dadas por definición. Veamos, en las propias palabras de Argand, cómo lo hace.

Se podría también […] modificar la expresión de las cantidades dichas *imaginarias*, de manera que se dé más simplicidad a esta parte de la notación.
Cuando se escribe $+a\sqrt{-1}$ o $-a\sqrt{-1}$, se indica explícitamente la generación de la cantidad $\sqrt{-1}$, lo que puede ser bueno en ciertos casos; pero, corrientemente, se hace abstracción de esta generación, y $\sqrt{-1}$ no es otra cosa que la especie particular de unidad a la que se aplica el número *a*. Por tanto, no es esencialmente necesario recordar a los ojos esa generación. Por otra parte, la expresión $a\sqrt{-1}$ presenta $\sqrt{-1}$ como un factor que multiplica *a*; pero, en el fondo, $\sqrt{-1}$, en $a\sqrt{-1}$, no es un más un factor que +1 lo es en +*a* o –1 en –*a*.

Ahora bien, no se escribe $+1.a$, $-1.a$, sino simplemente $+a$, $-a$, y el signo que precede a a indica él mismo qué especie de unidad expresa ese número. Se puede pues emplear un medio semejante con respecto a las cantidades imaginarias, escribiendo, por ejemplo, $\sim a$, y $+a$, en vez de $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, siendo los signos ~ y + positivos y negativos recíprocos (Argand, 1874, p. 15).

Además, Argand atribuye unos valores numéricos a características de los signos que le permiten expresar las reglas de multiplicación de esos signos como operaciones con los valores numéricos correspondientes (se suman los valores, módulo 4), y calcular así en el nivel de la expresión sin tener que tener en cuenta para nada el significado (o la ausencia de significado) de las operaciones con $\sqrt{-1}$.

Que se afecte el valor 2 a cada una de las rayas rectas, ya sean perpendiculares u horizontales, que entran en los signos que hay que multiplicar, y el valor 1 a cada una de las rayas curvas: se tendrá, para los cuatro signos, los valores siguientes:



Establecido esto, se tomará la suma del valor de todos los factores, y se le restará tantas veces 4 como sea necesario para que el resto sea uno de los números 1, 2, 3, 4; ese resto será el valor del signo del producto (Argand, 1874, pp. 15-16).

EL TEXTO QUE VALLEJO NO ENTIENDE

El Tratado del reverendo John Warren, a diferencia de lo que sucede con los textos que Vallejo no pudo leer que acabamos de citar, o con los de Peacock, no está escrito como un discurso en el que se explica las razones y el propósito de lo que se está haciendo, sino que está escrito según lo que Lakatos llamó en una ocasión el "ritual euclídeo", criticándolo de forma contundente:

La metodología euclídea ha desarrollado un cierto estilo necesario de presentación. Me referiré a él como al "estilo deductivista". Este estilo comienza con la enunciación de una penosa lista de axiomas, lemas y/o definiciones. Los axiomas y definiciones parecen con frecuencia artificiales y mistificadoramente complicados. Nunca se nos dice cómo surgieron esas complicaciones. La lista de axiomas y definiciones va seguida por teoremas cuidadosamente expresados. Éstos están cargados de pesadas condiciones; parece imposible que alguien los haya barruntado alguna vez. El teorema va seguido por la prueba. De acuerdo con el ritual euclídeo, el estudiante se ve obligado a asistir a esta conjura sin hacer preguntas ni sobre el trasfondo ni sobre cómo se realiza el juego de manos. (Lakatos, 1978, p. 165)

Siguiendo escrupulosamente el ritual, el reverendo John Warren comienza afirmando:

(Art. 1) Todas las líneas rectas dibujadas en un plano dado desde un punto dado están representadas en *longitud* y *dirección* por cantidades algebraicas, y en el Tratado que sigue, siempre que se use la palabra *cantidad*, ha de entenderse que significa una línea (Warren, 1828, p. 1).

Las cantidades por tanto en el *Tratado* de Warren tienen dirección además de magnitud. La definición de las operaciones con las cantidades que da Warren de inmediato, sin explicación alguna de por qué ha elegido tales definiciones, lo que hacen pues es tomar en cuenta que las cantidades tienen también dirección. Como ya vimos en un apartado anterior, la adición la define Warren como la diagonal del paralelogramo que forman las líneas, y, tras la definición, escribe

"Así, si *a* representa a *AB* en longitud y dirección, y *b* representa *AC* […] y se completa el paralelogramo *ABDC* […], *a*+*b* representa *AD* en longitud y dirección" (Warren, 1828, p. 1), es decir, que el signo *a*, que representa una cantidad algebraica, no está en el lugar sólo de un número que mide una longitud, sino también de una dirección. La definición de adición, que Vallejo no entiende, no suma longitudes, que es lo único que considera Vallejo en su objeción de que la longitud de la diagonal es menor que la suma de las longitudes de los lados que ya hemos citado (Vallejo, 1841, p. 244), sino cantidades algebraicas que tienen longitud y dirección.
Cabe preguntarse cómo es posible que, al leer que aquí se trata de sumar algo que tiene longitud y dirección y que la suma es la diagonal de un paralelogramo, Vallejo no pensara en la suma de fuerzas, que no sólo conocía, sino que también trata en su Tratado. Ahora bien Vallejo, en la parte del Tratado dedicado a la Mecánica (tomo III, parte primera), obtiene efectivamente la resultante de dos fuerzas como la diagonal del paralelogramo que forman, pero en ningún momento habla de que la resultante sea la *suma* de las fuerzas, sino de la *composición* de las fuerzas. Más aún, nunca escribe el signo + entre dos letras que representan a dos fuerzas que se componen, excepto en el caso en que las fuerzas están en la misma dirección (Cf. Vallejo, 1843, pp. 18 y ss). Parece pues que Vallejo no ve la relación porque no concibe la composición de fuerzas como una adición.
Otro de los asuntos que Vallejo dice no comprender es la aparición de los ángulos en la definición de proporción. Warren, siguiendo el ritual, apenas explica nada en la definición, aunque sí que dice explícitamente que está extendiendo la definición de Euclides, para tomar en cuenta que en su tratado las cantidades, además de longitud, también tienen dirección.

(12.) DEF. La primera de cuatro cantidades se dice que tiene con la segunda la misma razón que la tercera con la cuarta, cuando la primera tiene *en longitud* con la segunda la misma razón que la tercera tiene *en longitud* con la cuarta, según la definición de Euclides; y también el ángulo con que la cuarta está inclinada respecto a la tercera es igual al ángulo con que la segunda está inclinada respecto a la primera, y está medido en la misma dirección (Warren, 1828, pp. 6-7).

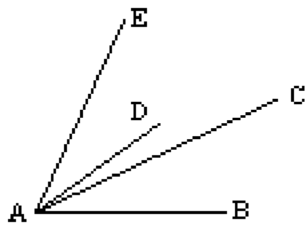
La definición de multiplicación de Warren utiliza, de la misma forma que lo hace Descartes en su *Geometría*, el cálculo de la cuarta proporcional entre la unidad y los dos factores, extendiendo la definición cartesiana al nuevo hecho de que las cantidades también tienen dirección. Ahora bien, eso no está explícito en la definición que enuncia Warren, que se limita a referirse a la proporcionalidad (ya definida anteriormente teniendo en cuenta la dirección).

(18.) DEF. Si hay tres cantidades tales que la unidad es a la primera como la segunda es a la tercera, la tercera se llama el *producto* que resulta de la *multiplicación* de la segunda por la primera (Warren, 1828, pp. 6-7).

La consideración de que la multiplicación de cantidades implica la adición de ángulos no aparece hasta el artículo 51, que lo enuncia como un teorema y lo demuestra, y en el que, por primera vez, Warren menciona la inclinación de una cantidad con respecto a la unidad. La demostración utiliza la definición de proporcionalidad tal y como Warren la ha extendido cuando se considera que las cantidades tienen dirección: como los ángulos entre los elementos correspondientes de una proporción han de ser iguales, el ángulo entre el segundo factor y el producto ha de ser igual al ángulo entre la unidad y el primer factor, de modo que el ángulo entre el producto y la unidad ha de ser la suma de los ángulos. Éste es el enunciado y la demostración de la proposición del artículo 51, en la que Warren efectivamente hace referencia al artículo 12, que es la definición de proporcionalidad, antes citada.

(51.) *Si* ab = c, *y* a *está inclinado con respecto a la unidad en un ángulo* = A *y* b *en un ángulo* = B, c *estará inclinado con respecto a la unidad en un ángulo* = A + B.

En efecto, sea AB = unidad, $AC = a$, $AD = b$, $AE = c$,
entonces ángulo $BAC = A$, ángulo $BAD = B$;



y como $c = ab$,
$1 : a :: b : c$;
$\therefore$ (por Art. 12.) ángulo DAE = ángulo $BAC = A$;
y ángulo $BAD = B$;
por tanto, ángulo $BAE = A + E$;
por tanto, c está inclinado con respecto a la unidad en un ángulo $= A + B$ (Warren, 1828, pp. 21-22).

A partir de aquí ya puede Warren establecer con facilidad que la división conduce a la substracción de ángulos, y que la potencia n-ésima de una cantidad está inclinada n veces el ángulo.
El capítulo segundo del Tratado, Warren lo titula “Raíces de cantidades, índices fraccionarios y negativos”, y en él está contenida la proposición cuya demostración, como ya citamos al comienzo, dice Vallejo que “como se funda en cosas que no se presentan con claridad, no es capaz por sí de convencer” (Vallejo, 1841, p. 245), en la que establece Warren que $\sqrt{-1}$ es perpendicular a la dirección de la unidad. Examinemos el enunciado y la demostración de esa proposición.

(105.) Los valores de la raíz cuadrada de -1 están inclinados con respecto a la unidad en ángulos $=90^{\circ}$ y 270°.

En efecto (por Art. 61.) $\sqrt[2]{-1}$ tiene dos valores,

$$\text{a saber, } \begin{pmatrix}-1\\ {\scriptstyle 0}\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \text{ y } \begin{pmatrix}-1\\ {\scriptstyle 1}\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Ahora bien -1 está inclinado con respecto a la unidad en un ángulo $= 180^{\circ}$,

$$\therefore \begin{pmatrix}-1\\ {\scriptstyle 0}\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}(180^{\circ}) = 90^{\circ}$$

$$\text{y } \begin{pmatrix}-1\\ {\scriptstyle 1}\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}(180^{\circ} + 360^{\circ})$$

$= 270^{\circ}$. (Warren, 1828, pp. 59-60)

La demostración es una mera aplicación a un caso particular de lo que está establecido en el artículo 61, por lo que para entenderla basta con remitirse a ese artículo, que dice

(61.) *Si* b = $\sqrt[n]{a}$, b *tiene* n *valores diferentes* (Warren, 1828, p. 26)

La demostración de Warren transcurre como sigue. Si una cantidad está inclinada un ángulo A (respecto a la unidad), también está inclinada ángulos $A + p360^{\circ}$, con p entero. Entonces, para que b sea una raíz n-ésima de a, hace falta que esté inclinada en un ángulo $B = \frac{A + p360^{\circ}}{n}$. El resto de la demostración establece que los valores de B para p = 0, 1, 2, …, n–1 son todos distintos, y que los demás se repiten cíclicamente, con lo que hay n valores, que son

$$B = \frac{A + p360^{\circ}}{n}, p = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Para acabar de hacer la luz sobre la demostración que Vallejo no entiende, hace falta aún observar que la notación que usa Warren en la proposición en cuestión es la que él introduce para designar esa multiplicidad de ángulos con que se puede considerar que está inclinada una misma cantidad con respecto a la unidad, cosa que hace en el artículo 62, que Warren llama una definición, aunque en realidad es la introducción de una notación. En ella, Warren establece que

si *a* está inclinada con respecto a la unidad en un ángulo =*A*, *A* positivo y menor que 360º;

$\underset{0}{a}$ expresa *a* considerada como inclinada respecto a la unidad en un ángulo = *A*

[…]

y, en general, $\underset{p}{a}$ [expresa *a* considerada como inclinada respecto a la unidad en un ángulo] = *A*+*p*360º.

(Warren, 1828, pp. 28-29).

Vallejo se ha visto enfrentado a un texto, el de Warren, que por la obediencia al ritual euclídeo esconde las razones que han conducido a las nuevas definiciones que se proponen y a las proposiciones que se plantean, así como los caminos que han llevado a encontrar las demostraciones que se presentan de esas proposiciones. Sin embargo, no resulta difícil desentrañar el texto de Warren, si se está dispuesto a aceptar definiciones nuevas. A Vallejo le falta precisamente lo que Peacock alaba en Warren y que el propio Vallejo recoge en su nota a pie de página: la "estrema intrepidez en el uso de las definiciones". "Extrema intrepidez", que, como en el caso de Wessel, está guiada por lo que Peacock llama el "principio de permanencia de las formas equivalentes"[20], que éste reitera una y otra vez a lo largo de su *Tratado de Álgebra*. No puedo saber, por el momento, si Peacock hacía un énfasis similar en ello en la primera edición de su Tratado, que fue la que Vallejo leyó, pero, si ése es el caso, "el sistema que yo adopté de fijar el sentido de las palabras por definiciones más o menos exactas" (Vallejo, 1841, p. V), que es uno de los aspectos centrales de lo que Vallejo llama el "método mío" (Vallejo, 1841, p. III), debió convertirse en un obstáculo para aceptar las nuevas definiciones, incluso las que cumplen el "principio de permanencia de las formas equivalentes".

REFERENCIAS

Argand, Jean-Robert. (1806). *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* Paris: Chez Madame Veuve Blanc.

Argand, Jean-Robert. (1814). Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. *Annales de Mathématiques de Gergonne*, tome IV, pp. 133-147. [Incluido en el apéndice de Argand (1874), pp. 76-96.]

Argand, Jean-Robert. (1874). *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*; 2^{e} édition précédée d'une préface par M. J. Hotel et suivie d'un appendice contenant des Extraits des *Annales de Gergonne*, relatifs à la question des imaginaires. Paris: Gauthier-Villars.

Bortolotti, E. (Ed.) (1966). *R. Bombelli. L'Algebra*. A cura di U. Forti e E. Bortolotti. Milano: Feltrinelli.

Buée, Adrien Quentin. (1806). Mémoire sur les quantités imaginaires. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 96, pp. 23-88.

Cauchy, Augustin-Louis. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. I^{re} partie. Analyse algébrique*. Paris: De l'Imprimerie Royale. [Reedición *Analyse algébrique*. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1989.]

Cauchy, Augustin-Louis. (1847). Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences. *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, t. xxiv, pp. 1120-1130.

Descartes, R. (1925). *The Geometry* of René Descartes with a facsimile of the first edition, translated from French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. Chicago, Ill: Open Court Publishing Co. [Reprinted New York, NY: Dover, 1954.]

Flament, D. (2003). *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. Paris: CNRS Éditions.

Français, J.-F. (1813). Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. *Annales de Mathématiques de Gergonne*, tome IV, pp. 61-71. [Incluido en el apéndice de Argand (1874), pp. 63-74.]

Garma, S. (1995). Adiciones a la Biografía de D. Josef Mariano Vallejo. *Arbor*, CLI, 594, pp. 9-22.

Hernanz, C. y Medrano, J. (1990). José Mariano Vallejo: Notas para una biografía científica. *Llull*, vol. 13, pp. 427-446.

Itard, J. (1969). *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*. Paris: APMEP.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Versión española de Carlos Solís. Madrid: Alianza. [Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Edited by Jon Worrall and Elie Zahar. Cambrigde: Cambridge University Press.]

Peacock, George. (1842). *Treatise on Algebra. Vol. I. Arithmetical Algebra*. Cambridge: J. & J. J. Deighton. [Reprinted Mineola, NY: Dover, 2004.]

Peacock, George. (1845). *Treatise on Algebra. Vol. II. On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position*. Cambridge: J. & J. J. Deighton. [Reprinted Mineola, NY: Dover, 2005.]

Vallejo, José Mariano. (1821). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Tercera edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Barcelona: Imprenta del Gobierno político superior.

Vallejo, José Mariano. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imprenta Garrasayaza.

Vallejo, José Mariano. (1843). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo III. Parte Primera, que contiene la Mecánica dividida en sus cuatro tratados de Estática, Dinámica, Hidrostática é Hidrodinámica. Madrid: Imprenta Garrasayaza.

Warren, Rev. John. (1828). *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities*. Cambridge: J. Smith, Printer to the University.

Wessel, Caspar. (1897). *Essai sur la représentation analytique de la direction*, publié par l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark, préface de MM. H. Valentiner et T.-N. Thiele, traduction de H.-G. Zeuthen de *Om Directionens analytiske Betegning*. Copenhague : B. Luno.

[1] Todas las citas textuales del *Tratado* de Vallejo que aparecen en este texto corresponden a la cuarta edición, publicada en 1841 (Vallejo, 1841). En la tercera edición (Vallejo, 1821), la nota en cuestión no aparece.

[2] En las citas textuales del texto de Vallejo hemos conservado su ortografía.

[3] Flament (2003) indica que durante el siglo XVIII se encuentran "frecuentemente comentarios sobre el hecho de que los arcos de circunferencia reales (respectivamente, imaginarios) son arcos de hipérbola imaginarios (respectivamente, reales)" (p. 106).

[4] No hay edición moderna que conozca de este libro. Localicé varios ejemplares de él en bibliotecas universitarias inglesas y norteamericanas, y lo tuve en mis manos y lo fotocopié, gracias al servicio de intercambio bibliográfico de la Universitat de València. El tratado tiene 154 páginas y comienza abruptamente por las definiciones a que Vallejo hace referencia, sin introducción alguna sobre su propósito.

[5] "(3.) DEF. The *sum* of two quantities is the diagonal of the parallelogram whose sides are the two quantities" (Warren, 1826, p. 1).
[6] "(105.) *The values of the square root of* –1 *are inclined to unity at angles* =90º *and* 270º" (Warren, 1826, p. 59).
[7] Vallejo muestra de nuevo en esta nota una imagen bien alejada de la del profesor omnisciente que despliega el conocimiento ante los alumnos.
[8] El resto de libros de los que Vallejo selecciona extractos son los siguientes (cito los títulos tal como los traduce Vallejo): *Tratado de Álgebra* de James Wood, 1830; *Elementos de Álgebra* de Kendall, 1839; *Curso de Matemáticas principalmente designado para uso de los estudiantes del Seminario Militar de la Compañía de la India* de John Cape, 1839-1840; *Tratado de Geometría y de su aplicación a las artes* de Dionisio Lardner, 1840; *Elementos de Álgebra* de James Wood con adiciones de Thomas Lund, 1841; *Elementos de Álgebra para uso de la Escuela de San Pablo* de William Foster, 1840, y *Un suplemento al Álgebra Elemental* de R. H. Wright, 1840.
[9] No hay edición moderna que conozca de este libro, ni he podido consultar hasta la fecha la edición original. Peacock tuvo la intención de hacer una segunda edición, pero, como él mismo dice en el prefacio, "encontré necesario […] presentar el asunto de forma tan nueva que no podía considerarlo con propiedad bajo otra perspectiva que la de un tratado completamente nuevo". De este nuevo tratado, publicado en dos volúmenes en 1842 y 1845, con el título también de *Treatise on Algebra*, sí que hay edición moderna en Dover en 2004. Haré referencia pues a este segundo *Tratado de Álgebra* de Peacock, aunque no sea el que leyó Vallejo, a la espera de que pueda conseguir el de 1830.
[10] Peacock se refiere a la "Mémoire sur les quantités imaginaires", de Adrien Quentin Buée, presentada por William Morgan a la *Royal Society of London* el 20 de junio de 1805, que se publicó en sus *Philosophical Transactions* en 1806 (Buée, 1806). Efectivamente, este texto de Buée está escrito de forma poco clara. La interpretación de $\sqrt{-1}$ se encuentra en el párrafo 10 de la memoria, que se titula "Sobre el signo $\sqrt{-1}$" y que comienza con la advertencia de Buée de que $\sqrt{-1}$ no es una cantidad sino un signo: "pongo como título, Sobre el signo $\sqrt{-1}$, y no, Sobre la cantidad o Sobre la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$; porque $\sqrt{-1}$ es un signo particular unido a la unidad real 1, y no una cantidad particular" (Buée, 1806, p. 27).
[11] "The sum of two adjacent sides of a parallelogram, considered in position as well as magnitude, is the diagonal which they include; their difference is the other diagonal" (Peacock, 1845, p. 214). En el título Peacock no dice que esa suma es la suma simbólica, tal y como hará a continuación.
[12] O, si se quiere ser más preciso, desde 1824, según las "Adiciones a la Biografía de D. Josef Mariano Vallejo" de Santiago Garma (1995). Vallejo consigue el pasaporte que le permite salir de España el 30 de octubre de 1824 "en Azcoitia para pasar a Londres a través de Francia. Saldrá, entonces, inmediatamente para París donde llegaría en Noviembre para continuar después hasta Londres" (Garma, 1995, p. 15). En 1825, tras una corta estancia en París, intenta volver a España, pero es detenido en la frontera. Vuelve entonces a París "donde lo primero que hace es pasar por la Embajada Española y dejar constancia de su estancia de acuerdo con las leyes españolas. Esta vez acepta su situación de español fiel a su rey y rechazado por él" (Garma, 1995, p. 16).
[13] Bombelli introduce estas expresiones con las siguientes palabras "[…] lo eccesso loro non si può chiamare nè più nè meno, però lo chiamerò più di meno quando egli si doverà aggiongere, e quando si doverà cavare lo chiamerò meno di meno" ["su exceso no se puede llamar ni más ni menos, lo llamaré sin embargo 'más de menos' cuando se deba añadir, y cuando se deba quitar lo llamaré 'menos de menos' "] (Bortolotti, ed., 1966, p. 133). Efectivamente, lo que hace Bombelli a continuación es extender la "regla de los signos" de la multiplicación a todas las multiplicaciones de "più di meno", "meno di meno", con los signos más y menos: "più via più di meno fa più di meno" ["más por 'más de menos' da 'más de menos' "], etc.; es decir, que Bombelli trata "più di meno" como si fuera de la misma naturaleza que + o –.
[14] Efectivamente, Jean Itard afirma "più di meno no es exactamente nuestra *i*. Esta última es un número. Più di meno y su alter ego Meno di meno son, al igual que + y –, signos. Una raíz cuadrada de –1 es Più di meno 1, la otra Meno di meno 1" (Itard, 1969, p. 4).
[15] "Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires, c'est a dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine."

[16] La publicación en danés es de 1799. El texto no empieza a conocerse hasta que lo traduce H. G. Zeuthen al francés y se publica en 1897, un siglo después. Esa traducción francesa he podido conseguirla y es la que citaré como Wessel (1897).

[17] Ahora diríamos en castellano “sentido” en vez de “dirección”. Estoy usando en este texto “dirección” en el sentido del actual “sentido”, porque lo contrario obligaría a forzar demasiado los textos originales que traduzco.

[18] La reedición de 1874 aparece en Gauthier-Villars y, además del texto de 1806 en reproducción facsímil, incluye el texto de Français de 1813, la nota de Argand de 1814 y otros textos aparecidos en los Annales de Gergonne sobre el asunto en 1814. Mis citas de estos textos están tomadas todas de esta edición de 1874.

[19] La expresión es de Argand, que la explica en una nota a pie de página así: “La expresión *líneas en dirección* es simplemente una abreviatura de esta frase: *líneas consideradas como pertenecientes a una cierta dirección*” (Argand, 1874, p. 11). Las “líneas en dirección” de Argand están más cerca de los vectores que los segmentos orientados de Wessel.

[20] En el capítulo XV del Tratado, que se titula “Enunciado formal del Principio de Permanencia de las Formas Equivalentes”, Peacock expone que este principio ha sido la guía para la extensión de las definiciones de las operaciones elementales de la aritmética: “En la exposición de las operaciones fundamentales de adición, substracción, multiplicación y división en Álgebra Simbólica, hemos adoptado las reglas de operación correspondientes en Álgebra Aritmética, extendiéndolas a todos los valores de los símbolos implicados, así como a las formas derivadas adicionales que son resultados necesarios de esa extensión […] continuaremos siendo guiados por el mismo principio, haciendo los resultados de las operaciones definidas, o las reglas para formarlos, la base de las operaciones correspondientes y los resultados en Álgebra Simbólica, y también de la interpretación del significado que se les debe dar, siempre que tal interpretación sea practicable”. Y lo expone formalmente como sigue: “Cualesquiera formas algebraicas que sean equivalentes cuando los símbolos son generales en cuanto a la forma, pero específicos en cuanto al valor, serán equivalentes también cuando los símbolos son generales tanto en valor como en forma” (Peacock, 1845, p. 59).