ALGUNOS EJEMPLOS DE RIGIDEZ EN EL TRATADO ELEMENTAL DE MATEMÁTICAS DE D. JOSÉ MARIANO VALLEJO

Luis Puig
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España

Puig, L. (2006). Algunos ejemplos de rigidez en el Tratado Elemental de Matemáticas de D. José Mariano Vallejo. En Gómez, B.; González, Mª. J.; Moreno, M.; Bolea, P.; Flores, P., y Camacho, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas de los Grupos de Trabajo del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander: Universidad de Cantabria. [ISBN: 84-8102-413-9].

ALGUNOS EJEMPLOS DE RIGIDEZ EN EL TRATADO ELEMENTAL DE MATEMÁTICAS DE D. JOSÉ MARIANO VALLEJO

Luis Puig
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València

Resumen

En esta comunicación muestro, en primer lugar, cómo Vallejo confiesa no entender la representación geométrica de las cantidades imaginarias tal como la expone Warren, y apunto que esto puede deberse a que las definiciones de Warren tropiezan con lo que él sabe (y su método), y se muestra incapaz de modificar lo que sabe y extenderlo a lo nuevo con que se encuentra.
En segundo lugar, examino la manera en que Vallejo enseña a poner un problema en ecuaciones, de la que muestro dos rigideces. La primera, la regla que él llama de "rigurosa traducción", que enseña a traducir palabra a palabra. La segunda, la secuencia de problemas que usa para la enseñanza que comienza con tres problemas de ábaco de traducción directa, para pasar sin solución de continuidad a problemas con formato de enigma o pasatiempo.

VALLEJO PERPLEJO EN UNA NOTA A PIE DE PAGINA

En una nota a pie de página que Vallejo incluye en la cuarta edición del *Tratado*[1], confiesa no entender la representación geométrica de las cantidades imaginarias tal como la expone el reverendo John Warren en *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities* (Warren, 1828). Veamos qué es lo que Vallejo dice que no entiende[2]:

> […] en el artículo 3 pone por definición, "la *suma* de dos cantidades es la diagonal del paralelogramo, cuyos lados son las dos cantidades"[3]. Esto no se yo el modo de comprenderlo, pues como los dos lados de un paralelogramo, y la diagonal forman un triángulo y la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero, según demostramos (§ 371), resulta, por los principios que tenemos allí demostrados, y que todos reconocen por verdaderos, que la suma de los dos lados de un paralelogramo es mayor que su diagonal; por lo que el tomar ahora por definición, que la diagonal de un paralelogramo es igual á la suma de los lados, es una cosa que no se concibe; por lo que lo ménos hay mucha obscuridad (Vallejo, 1841, p. 244).

Vallejo también dice no entender por qué Warren introduce la necesidad de que dos cantidades, para ser proporcionales, tengan que tener ángulos correspondientes iguales entre ellas: "Esta idea de ángulo hasta ahora no se ha necesitado considerar en las cantidades proporcionales" (Vallejo, 1841, p. 245). Pero lo que le lleva a elevar sus incomprensiones a la categoría de "sublimidad misteriosa" es otra cosa. Veamos, en las propias palabras de Vallejo; de qué se trata. Vallejo traduce el artículo 105, que aparece en el capítulo 2º del libro de Warren, "Los valores de la raíz cuadrada de –1 están inclinados con la unidad en ángulos =90º y 270º"[4], y añade:

> La demostración que pone, como se funda en cosas que no se presentan con claridad, no es capaz por sí de convencer: pero se advierte una cierta misteriosa analogía entre esto y lo que hemos citado al principio, relativo á la elípse é hipérbola. En efecto, si uno de los dos semiejes primeros de un hipérbola se toma por unidad, uno de los dos segundos semiejes forma con el primero un ángulo de 90º, y el otro semisegundo eje forma con el mismo semiprimer eje un ángulo de 270º (Vallejo, 1841, p. 245-246).

Además, Vallejo, a pesar de lo que no entiende, piensa que tiene que haber algo interesante en lo que hace Warren porque éste demuestra teoremas conocidos (la expresión de senos, cosenos, etc. en función de las potencias de la unidad, la suma de los ángulos de un triángulo y el teorema de los senos). Vallejo cuenta cómo esto le inquietó y le indujo a estudiar, mostrando así una imagen bien alejada de la del profesor omnisciente que despliega el conocimiento ante los alumnos.

Como estas proposiciones son verdaderas, y las deduce ó demuestra por su método, debe sacarse la consecuencia de que esto es digno de exámen; por lo que he tratado de proporcionarme el mayor número posible de libros de Álgebra ingleses, posteriores á dicha obra, para ver si encontraba en ellos alguna cosa que me ilustrase: y voy a poner aquí un estracto de lo que tiene relacion con la materia que nos ocupa (Vallejo, 1841, p. 246).

En Puig (2006), texto que complementa éste y al que remito, he expuesto con un cierto grado de detalle qué es lo que Vallejo extrae de esos textos ingleses (en particular del de Warren y de la edición de 1830 del *Tratado de Álgebra* de Peacock) y he examinado aspectos de algunas obras anteriores o contemporáneas al momento en que Vallejo redacta la cuarta edición de su Tratado, que Vallejo pudo conocer, como el *Análisis algebraico* de Cauchy. También he expuesto con algo más de detalle aspectos de dos obras fundamentales que Vallejo no pudo conocer: *Sobre la representación analítica de la dirección* de Caspar Wessel, y *Ensayo sobre una manera de representar las cantidades imaginarias en las construcciones geométricas* de Jean-Robert Argand. Asímismo he examinado el texto de Warren que Vallejo dice no entender, y he apuntado que, aunque Warren escribe el libro escondiendo las razones que le han conducido a establecer las definiciones que plantea, ya que su libro está escrito siguiendo lo que Lakatos llamaba el "ritual eucídeo", no resulta difícil desentrañar el texto de Warren, a condición de que se esté predispuesto a aceptar definiciones nuevas, por lo que parece que a Vallejo le falta esta disposición.

En este texto voy a señalar algunos aspectos del *Tratado* de Vallejo que pueden tener que ver con esa rigidez de Vallejo ante lo nuevo.

EL MÉTODO, LAS DEFINICIONES Y EL ANÁLISIS Y SÍNTESIS

El prólogo a la cuarta edición es una larga cita del prólogo de la tercera[5], con un añadido final en el que narra peripecias de su exilio y cita alabanzas a sus obras.
En ese prólogo está mencionado lo que Vallejo llama "el método mío" (Vallejo, 1841, p. III), que tiene como un rasgo fundamental la precisión de las definiciones. En palabras del propio Vallejo, con un cierto autobombo:

Por fortuna he visto con particular gusto mio, que va desapareciendo ya este desórden y confusion en las obras elementales publicadas en Europa despues de compuesta la mia: en ellas se sigue ya el sistema que yo adopté de fijar el sentido de las palabras por definiciones mas ó menos exactas, segun el plan que cada uno se ha propuesto: y en algunas se halla una identidad tan absoluta, que parece imposible que sus autores no hayan visto antes mi obra (Vallejo, 1841, pp. IV-V).

Ese énfasis en la necesidad de comenzar por fijar claramente mediante definiciones aquello de lo que se está hablando, se acompaña de la defensa de un método que Vallejo llama de "la generación de las ideas", siguiendo a un tal Suzanne, frente a lo que llama el "método de los inventores". Vallejo dice explícitamente que "la obra en que se ve una coincidencia mayor de ideas en cuanto á su método y el mio, es la de Mr. Suzanne, impresa en Paris año de 1810 sobre el método de estudiar las Matemáticas[6]" (Vallejo, 1841, p. V-VI), y cita extensamente este libro. Así está descrito ese método de la generación de las ideas, tal y como Vallejo traduce a Suzanne:

En el método en que se sigue simplemente la generacion de las idéas, basta disponer todos los materiales de nuestros conocimientos en el órden que les conviene; darles el lugar que deben ocupar en el edificio de la ciencia, y en dos palabras, unir todas las verdades entre si por un vínculo natural y sensible, no del modo con que se han presentado realmente á los inventores, sinó como las dispondría un espíritu vasto y profundo que teniéndolas todas á la vista, quisiese reformar la ciencia, despojarla de todo lo que la embaraza, y presentarla

bajo el aspecto mas claro, mas sencillo y mas satisfactorio.
Este último método puede pues reunir todas las ventajas del método de invencion sin tener la lentitud y los embarazos de este último; por lo que, en mi concepto, merece la preferencia sobre la mayor parte de los otros métodos.[…]
Limitarse á demostrar con la mayor concisión posible los principios de las Matemáticas, sacrificar á este objeto la dependencia de las ideas, no hacer conocer el motivo de cada cosa, obligar á la memoria á cargarse de casi todos los detalles de las demostraciones, ocultar el hilo, que conduciendo el razonamiento, hubiera suplido á la mas inconstante de nuestras facultades, es privarse de una gran parte de las ventajas que se podrían sacar de este estudio, es fortificar en los jóvenes la tendencia á la irreflexion, ó al menos es no procurar combatirla (Vallejo, 1841, p. VII).

El método de la generación de las ideas se combina además, de forma no demasiado clara, con la manera en que Vallejo interpreta el método de análisis y síntesis, tal y como lo expone en la Introducción al *Tratado*[7].

La circunstancia indispensable, que se ha de verificar en todo método, es que se proceda siempre de lo conocido á lo desconocido. Pero en ocasiones se nos presenta el todo, y tratamos de averiguar la naturaleza y relación de sus partes: y en otras se nos presentan las partes, y por medio de ellas tratamos de averiguar las propiedades del todo que componen; por esta causa se dice que en la adquisicion de nuestros conocimientos se pueden seguir dos métodos: uno de descomposición, que se llama *analítico*, y otro de composición, que se llama *sintético*.
[…] el que en general tiene mas aplicacion es el analítico, por proceder desde los objetos, ó desde las sensaciones que nos causan, hasta la deduccion de los principios generales; pero la análisis queda incompleta si despues no retrocedemos de los principios generales hasta las mismas sensaciones […] (Vallejo, 1841, p. LI).

Vallejo dice que si, una vez descubiertos los principios por análisis, se omite la síntesis, uno no queda del todo convencido porque no se ve cómo se deriva concretamente lo que se está tratando de los principios descubiertos. Por otro lado, también dice que, si se omite el análisis, uno se convence, “pero no hemos averiguado nosotros por qué debemos usar de estos principios y no de otros”, y concluye de estas dos observaciones que “el método analítico es el propio para inventar” y “ el sintético para enseñar” (Vallejo, 1841, p. LII), aunque, unas páginas más tarde, acaba afirmando:

No obstante, combinando convenientemente estos dos métodos, se puede usar en la enseñanza de un método alternado, que sin ser largo concilie la claridad y exactitud con el método de invención (Vallejo, 1841, p. LV).

LAS DOS PARTES DEL ÁLGEBRA

Para Vallejo, “el Álgebra[8] tiene dos partes”:

1) el cálculo literal (“la 1ª trata del modo de ejecutar las operaciones de sumar, restar, multiplicar, etc. con las cantidades expresadas por letras”)
2) la resolución de problemas mediante el lenguaje algebraico (“y la 2ª del modo de servirse de este cálculo para la resolucion de los problemas” (Vallejo, 1841, p. 181).
Vallejo dice que la segunda parte se inventó antes que la primera, y lo ilustra con la resolución del problema 1 del libro I de las *Aritméticas* de Diofanto[9] de tres maneras:
1) La primera la califica de “enunciada en general y solo resuelta en particular; esto es lo que hace Diofanto en todas sus cuestiones”,
2) La segunda la llama “en general usando solo del raciocinio”.
Lo que Vallejo hace para ilustrar qué quiere decir con esto es dar nombre a todas las cantidades que aparecen en el problema o bien directamente (“número menor”, “número mayor”, “intervalo ó diferencia”…) o bien con nombres compuestos formados algorítmicamente a partir de los primeros, expresa así la ecuación (“dos veces el número menor mas el intervalo igual al número propuesto”) y

calcula con estos nombres.
3) Finalmente, Vallejo dice que aunque con la segunda manera "tenemos ya resuelta la cuestion con toda generalidad" si usamos letras como nombres de algunas de las cantidades, "conseguiremos dos cosas: 1ª resolver la cuestion con toda generalidad; y 2ª aliviar nuestra memoria, disminuyendo los esfuerzos que tiene que hacer para retener las diferentes cosas que son necesarias para el descubrimiento de la verdad que indagamos" (Vallejo, 1841, p. 182).
Tras esta puesta en valor del lenguaje del álgebra como "alivio para la memoria", Vallejo resume las razones para enseñar el álgebra para resolver problemas de la siguiente manera:

Usando del método de Diofanto, vemos que la cuestion no se resuelve con generalidad; usando del raciocinio es necesario tener una gran tensión de espíritu para conservar todo lo que se ha dicho, á pesar de ser esta la cuestion mas sencilla que nos podemos proponer. Usando de las letras y de los signos que ya conocemos, vemos que desaparecen esos inconvenientes (Vallejo, 1841, p. 183).

A partir de ahí Vallejo desarrollará primero el cálculo literal, la primera parte del Álgebra, cuya justificación es su uso en la segunda parte del Álgebra, y en esa primera parte es donde Vallejo trata lo negativo y lo imaginario.

VALLEJO Y LO NEGATIVO

Un estudio profundo de los números negativos en la obra de Vallejo se encuentra en Maz (2005). Aquí me limitaré a traer a colación algunas citas en las que puede verse que lo negativo, para Vallejo, no es un número, sino una afección de la cantidad. Esta manera de entender lo negativo es de la misma naturaleza que el carácter de signo de afección de $\sqrt{-1}$, que Vallejo encuentra en los textos ingleses que dice no comprender.
Empezaré por la cita siguiente:

En el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sinó al modo con que influyen en la cuestion que el calculador se propone resolver […] al resolver una cuestion solo se pueden encontrar dos clases de cantidades que influyan en ella: cantidades que conspiren al fin que se propone el calculador, y cantidades que conspiren á un fin opuesto […]
A las cantidades, que conspiran al fin que se propone el calculador, se le da el nombre de cantidades *positivas*, y á las que conspiran á un fin opuesto el de *negativas* (Vallejo, 1841, p. 184).

Vallejo se resiste a considerar las cantidades negativas como menores que cero:

[…] se ha dicho que *las cantidades negativas eran menores que cero*, en lo cual no se ha procedido con el mayor acierto […] despues de haber prescindido de todo lo que hay, no se puede prescindir de mas, y por lo mismo no se puede formar una idéa de una cosa que sea aun ménos que nada (Vallejo, 1841, p. 188).

Lo que Vallejo dice es que son cantidades *de especie distinta* y que la expresión "es menor que cero" es una forma abreviada de decir que si se une (es decir se suma) una cantidad de esta especie (negativa) con una de la otra especie (positiva), "la disminuye […] luego esto equivale á ménos que á haberle añadido nada ó cero" (Vallejo, 1841, p. 188).

Más explícito se muestra Vallejo al tratar en la multiplicación con lo negativo, ya que dice que "en el Álgebra no solo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sinó tambien á su modo de existir. El multiplicador con sus unidades nos dice las veces que debemos tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que le debemos tomar" (Vallejo, 1841, p. 198). Por eso, Vallejo define la "multiplicación algebráica" añadiendo a la definición de multiplicación que había dado en la parte de Aritmética, "multiplicar es *tomar un número tantas veces como unidades tiene otro*" (Vallejo, 1841, p. 32) una condición más: "*Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como* *diga otra; y tomarla del mismo modo que se debe tomar*" (Vallejo, 1841, p. 198). Ese "tomarla del mismo modo que se debe tomar" se refiere al "modo de existir" de las cantidades, que puede ser "positivo" o "negativo". La regla de los signos se deriva entonces de que el modo de existir del multiplicador nos dice si el multiplicando debemos tomarlo "como él sea" o "al contrario de como él sea". En la regla de los signos, el modo de existir es pues una propiedad de la cantidad en el multiplicando y una propiedad de la acción en el multiplicador.

Vallejo no es capaz de ver que las definiciones de Warren (y de Peacock) extienden las definiciones usuales, cuando él está haciendo aquí algo similar para los negativos: considerar que tienen magnitud y modo de existir, y extender la definición de multiplicación de modo que incluya no sólo la magnitud sino también el modo de existir, y que coincida con la definición habitual de multiplicación si no se toma en consideración el modo de existir (o si este es el modo de existir "positivo"). En el caso de las definiciones de Warren, los modos de existir no son sólo dos, sino todas las direcciones[10], pero el mecanismo de extensión de las definiciones es similar. Vallejo, sin embargo, parece estar más preocupado por las dificultades de los cálculos con las cantidades imaginarias. En el apartado siguiente apunto alguna de sus observaciones al respecto.

VALLEJO Y LO IMAGINARIO

La primera vez que Vallejo trata las "cantidades ó espresiones imaginarias" parece adherir al significado de imaginario por el que Descartes las bautizó de esa manera[11]. En efecto, tras decir que "si nos pidiesen estraer una raiz de grado par de una cantidad negativa, se nos pedía una cosa que no podía ser ó un imposible", afirma que nos lo piden "con mucha frecuencia" y que a esas cantidades se les ha dado el nombre de "imaginarias" porque "solo la imaginacion es la que tiene facultad para comparar cosas contradictorias" (Vallejo, 1841, pp. 240-241).

En lo que sigue, Vallejo se dedica fundamentalmente a poner ejemplos del cuidado que hay que tener para no transformar las cantidades imaginarias erróneamente al calcular con ellas como si $\sqrt{-1}$ pudiera tratarse con las mismas reglas que los radicales no imaginarios.

Así, Vallejo dice que no se puede hacer $\sqrt{-1}=\sqrt[4]{(-1)^2}=\sqrt[4]{1}$ si $\sqrt{-1}$ se va a multiplicar por $\sqrt[4]{a}$, y afirma que lo que explica esto es que la raíz cuarta de a no es sólo $\sqrt[4]{a}$ sino que tiene otros tres valores. Ahora bien, después añade "se necesita mucha circunspeccion acerca de este particular: pues de otro modo, se podrían llegar a resultados contradictorios y aun absurdos" (Vallejo, 1841, p. 243).

Como ejemplo de esos resultados "contradictorios y aun absurdos" fácilmente obtenibles, escribe lo siguiente: "al factor $\sqrt[2n]{-1}$ le podrémos dar las transformaciones siguientes sin que resulte inexactitud $\sqrt[2n]{-1}=(-1)^{\frac{1}{2n}}=(-1)^{\frac{2}{4n}}=\sqrt[4n]{(-1)^2}$; pero si ahora continuáramos efectuando el cuadrado, resultaría $\sqrt[4n]{1}$".

Esa transformación la usa para hacer

$$\sqrt[2n]{-a^m}=\sqrt[2n]{a^m}\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[2n]{a^m}\sqrt[4n]{1}=\sqrt[4n]{a^{2m}}\sqrt[4n]{1}=\sqrt[4n]{a^{2m}}=\sqrt[2n]{a^m}$$

"resultado absurdo, pues que el primer miembro es imaginario y el segundo real; y si eleváramos ambas expresiones á la potencia $2n$, resultaría $-a^m = a^m$; que tambien es absurdo: por todo lo cual, repetimos que el Matematico que se propusiese desarrollar completamente todo lo relativo á las imaginarias haría un servicio muy importante á la ciencia" (Vallejo, 1841, pp. 243-244). De este párrafo es precisamente del que cuelga la nota a pie de página en que Vallejo confiesa su incomprensión del texto de Warren y cita extensamente todo lo que ha estudiado en "los libros ingleses".

Citaré para acabar estas pocas observaciones que esta "Primera parte del Álgebra" acaba, en la página 261, con las igualdades

$\sqrt[4n+1]{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$; $\sqrt[4n+2]{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$; $\sqrt[4n+3]{-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$

en las que Vallejo no tiene en cuenta lo que él mismo ha dicho de la multiplicidad de las raíces de la unidad.

LA SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA: LA VERSIÓN DE VALLEJO DEL MÉTODO CARTESIANO

Vallejo titula la segunda parte del Álgebra "De la Análisis algebráica y resolucion de las ecuaciones de primer grado" y comienza definiendo lo que es una ecuación para ser fiel a su método, que tiene que comenzar por las definiciones.
Curioso es, de entrada, que la identificación de lo que es una "ecuación" se refiera a la expresión y no al contenido:

> Cuando las cantidades se hallan separadas entre sí por medio del signo =, reciben estas espresiones el nombre de ecuaciones; de manera que ecuación es la igualdad de dos cantidades, como por ejemplo, $c = a + b$ (Vallejo, 1841, p. 262)

En esta segunda parte del Álgebra, vamos a encontrar el segundo ejemplo de rigidez en el Tratado de Vallejo: definido lo que es una ecuación, ya puede Vallejo referirse al Análisis como "la parte del Álgebra que trata de resolver los problemas despues de puestos en ecuacion", definición poco precisa, ya que el arte del Análisis consiste precisamente en "poner el problema en ecuaciones", como va a aparecer en la descripción que hace el propio Vallejo:

> Todo el espíritu analítico consiste en suponer conocido lo mismo que se trata de indagar para despues llegar á conocerlo. Por esta causa los mejores analistas Fermat, Vieta y aun Arquímedes, al intentar resolver una cuestion, sea de la especie que sea, empiezan con estas espresiones: Factun sit, suppono rem tanquam jam factam, esto es, *supóngase hecho todo lo que se pide hacer*, ó *supongo la cosa como ya hecha*. Después de considerar la cosa como ya hecha, se espresan las cantidades por letras, y las condiciones á que han de satisfacer dichas cantidades por ecuaciones (Vallejo, 1841, p. 262).

Tras esta descripción global del método cartesiano, Vallejo, a pesar de las precauciones con que comienza

> El espresar las condiciones en ecuaciones se llama *plantear el problema*; y para conseguirlo no se pueden dar reglas que sean del todo independientes del talento del calculador;

no puede evitar enunciar una regla, que el califica de "rigurosa" y que es harto conocido que sólo funciona de forma adecuada en muy contados casos:

> mas no obstante las mas generales son las de observar las de una rigurosa traduccion. Así, observarémos, que las palabras del lenguaje comun *sumado*, *mas*, *con*, *junto*, *y*, *agregado*, *unido* y todas sus semejantes conducen a escribir el signo +; las *restado de*, *quitado de*, *disminuido en*, *menos* y sus semejantes, conducen al signo –, las *multiplicado*, *tantas veces mayor* y sus semejantes al signo ×; y las *dividido*, *partido*, *tantas veces menor* y sus semejantes al signo de dividir; las *elevado á tal potencia* como cuadrado, cubo, etc, al de elevar á potencias; de *estraer tal ó tal raiz* al signo radical; y finalmente las palabras *dé*, *componga*, *resulte* y todos sus equivalentes conducen á escribir el signo = (Vallejo, 1841, p. 263).

Podría uno suponer que Vallejo sólo enuncia esta regla de forma provisional para usarla en los pocos casos en que es aplicable esta traducción término a término, para después corregirla en ejemplos subsiguientes. Sin embargo, la secuencia de problemas que Vallejo usa para ilustrar su versión del método cartesiano se reduce a ocho cuestiones, tres que son enunciados de tipo ábaco, cuyo enunciado además da ya el análisis en cantidades y relaciones hecho, y cinco que, sin solución de continuidad, son enrevesados problemas con enunciado en forma de acertijo o enigma. Veamos algunos de ellos, que aparecen tras varias páginas sobre resolución de ecuaciones y sistemas. Los tres problemas de ábaco son los siguientes:

Cuestion 1.ª *Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.*
Res y Dem. Como el espíritu analítico consiste en tomar por conocido lo mismo que buscamos, supondrémos halladas ya esas cantidades, y que sean por ejemplo *x*, *z*, de las cuales sea *x* la mayor y *z* la menor. Si á la suma dada la llamamos *a* ó *s* por ser inicial de suma, y *d* á la diferencia, tendrémos planteado el problema cifrando las dos condiciones en las siguientes ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x+z=s \\ x-z=d \end{array}\right\}$; que determinando z por el método de sustitucion en la primera […] (Vallejo, 1841, pp. 279-280)

Cuestion 2.ª *Se pide un número tal, que si al quíntuplo de dicho número se le añade siete veces la duodécima parte del mismo número, y de todo esto se quitan 17 unidades, resulte dicho número mas 203 unidades* (Vallejo, 1841, p. 280)

Cuestion 3.ª *Hallar cuatro números tales que la suma de los tres primeros componga 50; que el primero junto con el séstuplo del cuarto sea igual al tercero; que la mitad del primero junto con el triplo del segundo sea igual al décuplo del cuarto; y que el tercio del primero sea igual á la mitad del segundo.*
Res y Dem. Aquí se nos piden cuatro números, y para esto se nos dice que han de satisfacer á cuatro condiciones; por lo que vemos que el problema es determinado. Si llamamos á estos números *u*, *x*, *y*, *z*, esto es, al primero *u*, al segundo *x* […]

Los problemas enigma los introduce Vallejo diciendo que “Las cuestiones suelen venir desfiguradas con muchos adornos, y por lo mismo pondrémos algunas que son muy curiosas, y que para el que no entiende de esto vienen á ser enigmas” (Vallejo, 1841, p. 283). El primero de ellos le obliga a Vallejo a retocar ligeramente su regla de “rigurosa traducción”, pero lejos de salirse de la traducción término a término, trae en su ayuda figuras de la retórica:

Cuestion 4.ª *Encontró un gavilan á una bandada de palomas, y las saludó diciendo: bien venida sea la bandada de las cien palomas, y una le respondió: aunque no vamos cien palomas, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la cuarta parte de estas y tu, gavilan, componemos ciento cabal: se pregunta cuántas palomas iban?*
Para esto señalaré con *x* el número de palomas, y veré que la palabra *estas* la debo escribir con *x*, la de *otras tantas como estas* tambien con *x*, pero poniendo en medio el signo +; porque aunque aquí no hay ninguna palabra que conduzca á dicho signo, se halla sin embargo una coma que hace los oficios de la conjuncion (y), que se halla omitida por la figura que llaman los retóricos *asíndeton* […] (Vallejo, 1841, p. 283).

Las cuatro cuestiones finales ya entran de lleno en el terreno de los enigmas de tradición oral. Tres de ellos están en verso y los atribuye a Caramuel, el otro describe en trece líneas un viaje de Homero. A título de ejemplo, citaré la primera.

Cuestion 5.ª *Preguntado Artemidoro, filósofo, que edad tenía Alejandro Magno, dió, segun el obispo Caramuel, la respuesta siguiente:*
Preguntaba Diodoro
Embajador del príncipe de Egipto,
Qué edad tenía el Macedon invicto:
Y luego Artemidoro
Le responde ingenioso:
Dos años tiene mas el belicoso
Rey que su camarada
Efestion, cuyo padre
Cuatro mas que los dos enumeraba,
Y el padre de Alejandro

Cuando noventa y seis giros de Apolo
Los años de estos tres contaba solo (Vallejo, 1841, p. 283).

Este salto abrupto de problemas cuyas dificultades para efectuar la traducción están reducidas al mínimo, porque el enunciado ya da el conjunto de cantidades y relaciones analizado, y, por tanto, preparado para la traducción al lenguaje del álgebra, sin que sea necesario realizar apenas trabajo alguno de análisis y elaboración de un texto intermedio, a problemas enrevesados no es ajeno de la preocupación de Vallejo por las complicaciones de los cálculos enrevesados, en la primera parte del álgebra. Su apoteosis aparece en lo que Vallejo presenta como su orgullo, su resultado más preciado: su método para resolver ecuaciones, método cuya bondad se mide en que es capaz de resolver no problemas difíciles, sino problemas enrevesados, que presenta en un apartado, cuyo título tiene en el texto original de Vallejo nada menos que cinco líneas:

Nuevo método seguro y general, que hasta el presente no se le conoce ningún vacío, limite, ni escepcion, para encontrar las raices reales de las ecuaciones numéricas de todos los grados, aun las que se resisten á cuantos medios y recursos ofrecen los tratados mas sublimes de las Matemáticas, incluso los que suministra el Cálculo Infinitesimal (Vallejo, 1841, p. 368).

Vallejo lo describe con gran número de adjetivos:

Este método reune un tal grado de sencillez, que solo es posible conciban los que han resuelto por él ecuaciones inaccesibles á todos los demas métodos […] por lo cual publiqué en 1836 una obrita en que con el titulo de *Complemento de la Aritmética para Niños*, ponía al alcance de toda clase de personas el espresado método, sin suponer otros conocimientos que los mas elementales de dicha Aritmética: y resolví en dicha obrita (que cuesta una peseta) ecuaciones hasta del grado cincuenta (Vallejo, 1841, p. 369).

La descripción de esa “Regla general para la resolucion de toda clase de ecuaciones numéricas” ocupa desde la página 371 a la 376, seis páginas de letra pequeña (y cursiva) en las que se desglosan los 13 pasos del método.
Entre las páginas 377 y 384, cuenta Vallejo la resolución “por los caballeros oficiales en los últimos días del mes de julio del presente año de 1841” de la ecuación:

$$x^{14}-102x^{13}+3498x^{12}-41228x^{11}-161655x^{10}+7443066x^{9}-46341364x^{8}$$
$$-138454152x^{7}+2576589504x^{6}-9253416064x^{5}+7688610816x^{4}$$
$$+9384468480x^{3}-10218700800x^{2}=0$$

Y concluye:

Ante todas cosas debo advertir que se eligió el grado 14 para la ecuación por ser catorce el número de Caballeros Oficiales que asistían entónces á la Escuela; y por raices se eligieron los números que espresaban los soldados que asistían á la Escuela, del cuerpo de cada Caballero Oficial, espresando por cero la raiz que convenía al que no tenía ningún soldado en la Escuela; y por números negativos el de soldados que ya no asistían, pero que habían concurrido ántes (Vallejo, 1841, 377).

Qué mejor que concluir estas notas sobre la rigidez de Vallejo con este ejemplo de su didáctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Descartes, R. (1925). *The Geometry* of René Descartes with a facsimile of the first edition, translated from French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. Chicago, Ill: Open Court Publishing Co. [Reprinted New York, NY: Dover, 1954.]

Maz, Alexander. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
Peacock, George. (1845). *Treatise on Algebra. Vol. II. On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position*. Cambridge: J. & J. J. Deighton. [Reprinted Mineola, NY: Dover, 2005.]
Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En Maz, A. y Torralbo, M. (Eds.) *José Mariano Vallejo, un matemático ilustrado.* Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
Vallejo, José Mariano. (1821). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Tercera edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Barcelona: Imprenta del Gobierno político superior.
Vallejo, José Mariano. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imprenta Garrasayaza.
Warren, Rev. John. (1828). *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of Negative Quantities*. Cambridge: J. Smith, Printer to the University.

---

[1] Todas las citas textuales del *Tratado* de Vallejo que aparecen en este texto corresponden a esa cuarta edición, publicada en 1841. En la tercera edición, la nota en cuestión no aparece.

[2] En las citas textuales del texto de Vallejo hemos conservado su ortografía.

[3] "(3.) DEF. The *sum* of two quantities is the diagonal of the parallelogram whose sides are the two quantities" (Warren, 1826, p. 1).

[4] "(105.) *The values of the square root of* –1 *are inclined to unity at angles* =90º *and* 270º" (Warren, 1826, p. 59).

[5] El prólogo comienza con la frase "El que puse á la tercera edicion de este volumen, hecha en 1821, decía como sigue", y continúa abriendo comillas que sólo cierra 15 páginas después.

[6] Vallejo se refiere a la obra de Pierre-Henri Suzanne *De la manière d'étudier les Mathématiques. Première partie. Préceptes généraux et Arithmétique. Seconde partie. Algèbre*. Paris: Chez l'auteur, 1807-1810. Me ha sido imposible consultar este libro por el momento. De su autor sólo tengo una noticia biográfica según la cual nace en Fréjus en 1765, entra en la orden de los Oratorianos en 1782, después de haberse doctorado en Ciencias, y dirige varios establecimientos como el Colegio Real de Tournon. Cuando la orden es disuelta en 1792, tras la revolución de 1789, consigue entrar a enseñar hidrografía en las nuevas estructuras de formación de los marinos establecidas por la Revolución, para después ser profesor en el Liceo de Marsella y en el Liceo Charlemagne de París. Pero en 1811, se le aparta de la educación acusado de ser incapaz de interesar a sus alumnos y de impartir su enseñanza ante clases vacías. Ya no vuelve a dar clase nunca más pese a su batalla contra la Administración para volver a obtener el derecho a enseñar. (Esta noticia biográfica está en la nota a pie de página 1 del texto de Michel Depeyre, "Suzanne, un mathématicien au pays de la tactique navale", que forma parte del volumen VI de la serie *L'évolution de la pensée navale*, que puede consultarse en http://www.stratisc.org/PN_tdm.htm.)

[7] Tras definir lo que entiende por método: "al órden que se sigue en la adquisición de los conocimientos de una ciencia particular […] se llama *método*" (Vallejo, 1841, pp. L-LI).

[8] Vallejo define el Álgebra como "la ciencia que trata del cálculo de las cantidades consideradas en general, esto es, independientemente de toda magnitud numérica y de todo sistema de numeración", aunque también cita en nota a pie de página una definición de Peacock: "Mr. Peacock, en su Tratado de Álgebra, impreso en Cambridge, año de 1830, dice página 71. "El Álgebra se puede considerar, en su mas general forma, como la ciencia que trata de las combinaciones de signos, y de símbolos arbitrarios por medio de leyes determinadas aunque arbitrarias." " (Vallejo, 1841, p. 180); pero esta referencia a lo que en Peacock conduce al "principio de permanencia de las formas equivalentes" (cf. Peacock, 1845, p. 59) parece estar hecha en Vallejo sólo a beneficio de inventario.

[9] Vallejo enuncia este primer problema del texto de Diofanto así: "Cuestion. *Dividir un número propuesto en dos partes, cuyo intervalo ó diferencia sea dada*." (Vallejo, 1841, p. 182).

[10] De la misma manera que en Wessel y en Argand, aunque estos textos no pudo encontrárselos Vallejo (ver Puig, 2006).

[11] Descartes es el primero que usa el calificativo de "imaginarias" para referirse a las raíces de números negativos, y ese calificativo, en él, está ligado a las facultades de la imaginación. Esto lo hace en la parte de la *Geometría* (publicada como apéndice al *Discurso del Método* en 1637) en que está desarrollando lo que él mismo, en una carta a Mersenne escrita en abril del mismo año 1637, ha llamado "su álgebra": "Por lo demás, tanto las raíces verdaderas como las falsas no son siempre reales, sino a veces sólo imaginarias, es decir, que siempre se puede imaginar tantas de ellas en cada ecuación como yo he dicho, pero que a veces no hay ninguna cantidad que corresponda a las que se imaginan (Descartes, 1925, p. 380 del facsímil del original, p. 174 de la edición de Smith).