Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato

Marcelino J. Ibañes Jalón

Resumen. Este artículo resume una investigación, aún no finalizada, que se encuadra en la que, sobre la demostración matemática, realizan, en la Universidad de Valladolid, T. Ortega y M. Ibañes. Consta de dos partes. En la primera se definen y comentan varias dimensiones de la demostración matemática. En la segunda, se toman como base estas dimensiones para formular algunos analizadores específicos para el tratamiento de la demostración, y se aplican a los libros de texto de Matemáticas I, de primer curso de Bachillerato, en el tema de Trigonometría.

El Ministerio de Educación y las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas, en sus propuestas curriculares, utilizan un esquema con cuatro componentes. *objetivos*, *contenidos*, *metodología* y *evaluación*. Sin embargo, Rico (1997) considera que el empleo de esta caracterización, *en tareas de diseño y planificación del trabajo para el aula*, resulta inadecuado. Por este motivo, este autor busca otros elementos que permitan la elaboración de las unidades didácticas en matemáticas, y llama *organizadores* "a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas". Define estos cinco organizadores del curriculo:

- Los *errores* y *dificultades* usualmente detectados en el aprendizaje de cada tema.
- La diversidad de *representaciones* utilizadas para cada sistema conceptual.
- La *fenomenología* de los conocimientos implicados y las *aplicaciones* de cada bloque de contenidos.
- La diversidad de *materiales* y los *recursos* que pueden emplearse.
- La *evolución histórica* de cada campo o de cada concepto.

Además, entendemos, que estos organizadores deben concretarse en cada tema y completarse con otros, más específicos del tema en cuestión. En el trabajo de investigación que aquí se resume, se definen y estudian diversas dimensiones de la demostración matemática (primer apartado), a partir de las cuales se formulan algunos analizadores específicos para el tratamiento de la demostración, que se aplican en el análisis de textos de primer curso de Bachillerato, en el tema de Trigonometría (segundo apartado).

1. Dimensiones de la demostración

En este apartado se presentan brevemente cuatro dimensiones de la demostración matemática: *histórica*, *epistemológica*, *instrumental* y *cognitiva*.

Dimensión histórica

Hemos realizado un estudio muy detenido de la evolución histórica de los razonamientos de validación, siguiendo las investigaciones de distintos especialistas prestigiosos: Boyer (1987), Kleiner (1991), Kline (1992), de Lorenzo (1977), Wilder (1967), etcétera, y, en ocasiones, también hemos acudido a las primeras fuentes. No obstante, nuestra intención no ha sido realizar una investigación en historia de las matemáticas, tema en el que no somos especialistas, hacer algunas reflexiones que pueden ser útiles para su enseñanza:

- No existe un modelo de demostración independiente de la época ni de las personas que han construido el conocimiento matemático.
- Las exigencias de rigor en la argumentación matemática han ido variando a lo largo de la historia.
- El rigor absoluto es inalcanzable: nunca se ha podido conseguir una certeza total en los resultados obtenidos.
- No debemos pensar que la idea actual de demostración es la última palabra.
- No ha habido siempre un total acuerdo entre los matemáticos en cuanto a la conveniencia de los conceptos y procedimientos utilizados.
- Resulta enriquecedora la búsqueda de distintas fundamentaciones para una teoría, diferentes explicaciones para un resultado, y distintas técnicas para una demostración.
- Esta diversidad se manifiesta también en las finalidades de la demostración.

Dimensión epistemológica

La *demostración* es una clase de *argumentación* típica de las Matemáticas, ya que los procedimientos de verificación que se utilizan en otras áreas del saber son de distinta naturaleza. Así, los de las ciencias experimentales se basan en la evidencia empírica de los hechos, los de la economía en la evidencia estadística de los resultados, y los de la historia en la evidencia de los datos y de los documentos.

En la literatura especializada -por ejemplo, Bourbaki (1970), página E I.22- aparecen definiciones *esenciales* de lo que se entiende por demostración de un teorema matemático: una sucesión de deducciones lógicas rigurosas desde alguna proposición ya aceptada hasta la que se pretende probar. Sin embargo, en la enseñanza secundaria interesa considerar la demostración en un sentido *no formal*. Por este motivo, los investigadores en didáctica señalan distintos *niveles* de demostración: Van Dormolen (1977), Bell (1979), Semadeni (1984), Balacheff (1987), Blum y Kirsch (1991), Van Ash (1993), Movshovitz-Hadar (1996), Miyazaki (2000), son ejemplos de ello.

Otra posibilidad es contentarse con una definición *descriptiva*, para lo que basta observar detenidamente las demostraciones que figuran en los textos. En este sentido, Ibañes y Ortega (1997) revisan las demostraciones más usuales en bachillerato y proponen una clasificación de las *técnicas* de demostración, que tiene en cuenta distintos criterios. Así, si se atiende a la *estructura lógica del enunciado* se obtienen diferentes *tipos*: de *condición necesaria o suficiente* y de *condición necesaria y suficiente*; si, además, se refieren a la existencia de algún objeto matemático, pueden ser de *existencia simple*, de *existencia y unicidad*, o de *imposibilidad*. Si se atiende a los *procedimientos lógicos*, hay que considerar distintos *métodos*: *silogismo*, *demostración por casos*, *reducción al absurdo, inducción completa*, el *método constructivo*, y demostraciones por *analogía* y *dualidad*. Atendiendo a los *procedimientos matemáticos*, se encuentran los *estilos*: *geométrico,* el *algebraico,* el de *coordenadas,* el del *análisis matemático*, etcétera. Por último, considerando el *procedimiento de exposición*, se obtienen los *modos*: el *sintético* o *directo* y el *analítico* o *indirecto*.

Dimensión instrumental

Tradicionalmente se ha considerado que el fin primordial de la demostración consiste en verificar la proposición objeto de estudio. Sin embargo, de Villiers (1993) presenta un modelo en el que distingue las siguientes funciones:

- *Verificación,* concerniente a la *verdad* de una afirmación.
- *Explicación, profundizando en* por qué es verdad.
- *Sistematización,* la *organización* de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- *Descubrimiento,* es decir, el descubrimiento o invención de nuevos resultados.
- *Comunicación*, la *transmisión* del conocimiento matemático.

La reciente creación de programas de ordenador de geometría dinámica, que permiten investigar fácil y rápidamente si una determinada conjetura es cierta o no, traslada aún más el interés de utilizar demostraciones en la enseñanza hacia otras funciones distintas de la simple verificación. En Ibañes y Ortega (1998) se estudia la incidencia que tienen, en este sentido, visualizaciones con CABRI II de un teorema de Geometría. Por otro lado, de Villiers (1995) expone algunos ejemplos en los que utiliza la demostración para el *descubrimiento* de nuevas proposiciones. En este mismo sentido, Ibañes (2001b) analiza la demostración de un teorema de Geometría y, aplicando diversas *estrategias* de descubrimiento –Polya (1966)-, obtiene otros siete teoremas.

Otras investigaciones que abordan las funciones de la demostración son: Renz (1981), Hanna (1989), Hersh (1993), van Asch (1993), Thurston (1995), Hanna (1995), Hanna y Janke (1996), Ibañes (1997), etcétera.

Dimensión cognitiva

Desde nuestra experiencia docente e investigadora, enriquecida con las valiosas aportaciones de numerosos investigadores –Arsac, Balacheff, Bell, Chazan, Duval, Fischbein, Hanna, Harel, Sowder, y de Villiers, entre otros-, en Ibañes (2001a) nos permitimos señalar algunas *fases* en la comprensión de las demostraciones:

1. Fase de interpretación:

- Entender el problema y la clase de solución que requiere (*esquema de prueba*).
- Comprender los términos matemáticos empleados.

- Interpretar las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, las palabras de enlace y la notación utilizada.
- Reconocer el proceso como una demostración.

2. Fase de análisis:

- Identificar el *tipo* de enunciado.
- Identificar la *hipótesis* y la *tesis* del teorema.
- Recordar los resultados anteriores que se aplican en la demostración.
- Revisar los pasos y comprobar la corrección del razonamiento.

3. Fase de síntesis:

- Identificar las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración.
- Comprender globalmente el proceso.

4. Fase de profundización:

- Reconocer el *significado* del teorema.
- Identificar las técnicas empleadas: *métodos*, *estilos* y *modos*.
- Valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada.
- Buscar otras formas de demostrar el resultado.
- Estudiar sus posibles generalizaciones.
- Relacionar el teorema con otros resultados conocidos.

La investigación y desarrollo de todos estos aspectos resulta una inmensa tarea imposible de abordar en un solo trabajo de investigación, por lo que en Ibañes (2001a) hemos partido de lo que nos parece más básico y constituye la raíz de toda la cuestión: los *esquema de prueba* de los alumnos. El estudio de este aspecto nos condujo, de forma natural, a la consideración de otros dos: el *reconocimiento de procesos* y las repercusiones de la presencia de algunas *expresiones* en el enunciado de un teorema, aspectos incluidos en la primera fase de las anteriormente descritas.

Harel y Sowder (1998) definen: *"A person's proof squeme consist of what constitutes ascertaining and persuading for that person"*, y clasifican estos *esquemas de prueba* en: esquemas de *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. Además, cada uno de ellos los subdividen varias clases. En Ibañes (2001a) se pone de manifiesto que el concepto de esquema de prueba no debe presentarse exclusivamente en términos de *verificación* –como hacen Harel y Sowder-, sino que deben tenerse en cuenta otras *funciones* de la demostración (de Villiers). Además, se obtiene, en primer lugar, que los alumnos de primer curso de bachillerato se encuentran en un *estado de transición* entre los esquemas *inductivos* y los *intuitivo-axiomáticos*, estado de transición que se pone de manifiesto por la *dependencia* del esquema respecto de la tarea propuesta, por la *coexistencia* de varios esquemas en una misma persona y por la *evolución* observada en los alumnos en este aspecto. En segundo lugar, la dependencia respecto de la tarea nos llevó a considerar y definir diversas *modalidades* de esquema de prueba: esquemas *utilizado*, *aceptado*, *adherido*, *declarado*, etcétera. Y, en tercer lugar, fue necesario introducir nuevas *categorías* de esquemas de prueba –véase también Ibañes y Ortega (2001)-.

2. La demostración en los libros de texto de Bachillerato

El análisis de textos se puede llevar a cabo desde diversas perspectivas. Ortega (1996) presenta un modelo de valoración. Más recientemente, varios autores basan sus propuestas en los organizadores de Rico (1997), por ejemplo, Haro y Torregrosa (2002). Martín (2002) utiliza también este sistema, que completa con unos analizadores específicos para los temas de Probabilidad y Estadística. Nosotros pretendemos formular analizadores específicos para la demostración.

Las dimensiones anteriormente consideradas proporcionan una base para definir una lista, muy numerosa, de categorías específicas para el análisis del tratamiento de la demostración matemática. Como no pretendemos ser exhaustivos, sino presentar las que consideramos más importantes, citaremos las siguientes:

1. Clase de justificación utilizada (*esquemas de prueba* y *niveles* de demostración).
2. Si es una demostración, se consideran las *técnicas empleadas –método, estilo y modo*-.
3. Valoración de las *funciones* que cumple la prueba empleada.
4. Reflexiones sobre el *reconocimiento de procesos* (*distinción* e *identificación*).
5. *Expresiones* usuales y específicas que utiliza: conectivas lógicas, palabras de enlace, etcétera.
6. Claridad y corrección del *enunciado*.
7. Explicación y corrección de los *pasos* de la prueba.
8. *Idea global* del proceso seguido.
9. *Significado* del teorema e *interpretaciones*.
10. *Reconocimiento* del proceso (*consecuencias*).
11. Otras vías de justificación.
12. Estrategias para el *descubrimiento* de nuevos resultados.

Estos analizadores específicos complementan, en el caso de la demostración, a los organizadores más generales propuestos por Rico (1997). En nuestra investigación hemos aplicado estos analizadores en el tema de Trigonometría de Matemáticas I (primer curso de Bachillerato). Para ello, se han revisado once libros de texto de esta asignatura, publicados en castellano, y elegidos por ser los de mayor difusión –según las librerías especializadas-. Se han estudiado las justificaciones que dan los textos para los siguientes resultados: relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas; razones trigonométricas de ángulos notables; fórmulas trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos, el ángulo doble y el ángulo mitad; el teorema de los senos; y, el teorema del coseno. Fruto de este análisis son las siguientes reflexiones:

- Casi siempre se trata de demostraciones más o menos completas y rigurosas. Sólo en alguna ocasión no se justifica un resultado. Parece que sería conveniente proponer también otras justificaciones alternativas para que los alumnos apreciaran las características de los distintos procesos.

- No se emplea otro *método* que el de *silogismo* (aunque, a veces, se consideran *casos*). Esto parece razonable dado que los alumnos de primer curso están iniciándose en las demostraciones. En segundo de Bachillerato se emplean los métodos de *reducción al absurdo* e *inducción completa*, que sería interesante analizar.

- Los *estilos* son uniformes en cada teorema. Resultaría muy ilustrativo presentar dos o más demostraciones con distintos *estilos*. Por ejemplo, el teorema del coseno puede demostrarse de muchas maneras –algunas están recogidas en Esteban, Ibañes y Ortega (1998), páginas 192 a 195-. La del estilo *vectorial* es muy adecuada para que fuera expuesta, o propuesta, en el capítulo de vectores; sin embargo, ninguno de los libros consultados lo hace.

- Donde hay más variedad es en el *modo* de exposición, puesto que se han encontrado tanto el *sintético* como el *analítico*. Entendemos que el predominio del modo analítico constituye un acierto de los autores, puesto que este modo de exposición está más próximo de las claves del descubrimiento del resultado que el sintético.

- Los libros de texto consultados no hacen ningún comentario acerca de las *funciones* que cumplen las demostraciones expuestas. La intención que se observa es la de simple *verificación*. Sería conveniente que se resaltaran otras funciones, especialmente la de *explicación*.

- Los profesores y los autores de los libros de texto deberían esforzarse por exponer demostraciones que *expliquen* por qué el resultado es cierto.

- Sería conveniente fomentar la función de *descubrimiento* de la forma expuesta en el apartado de las dimensiones de la demostración.

- La utilización de otra clase de justificaciones -comprobaciones sistemáticas, pruebas visuales, etcétera- suministraría a los alumnos el *convencimiento* de que el resultado es cierto, y reservaría para la demostración el cumplimiento de otras funciones.

- No hay comentarios explícitos con el fin de llamar la atención sobre la clase de razonamiento que se hace, sus características, y sus efectos, o para distinguirlo de otras posibles justificaciones. La muestra más clara, en este sentido, que se encuentra en los textos, es la referencia al proceso, o su titulación, como una “demostración”. En muchos casos ni siquiera se califica el procedimiento empleado.

- En los enunciados de los teoremas considerados que se refieren a fórmulas –los tres primeros-, evidentemente no incluyen las expresiones específicas del lenguaje matemático que se estudian en este trabajo. Pero, conviene destacar que algunos textos incluyen el símbolo , sin explicar su significado.

- En los teoremas de los senos y del coseno, aparecen las expresiones “en un triángulo”, “en un triángulo cualquiera”, “en todo triángulo”, cuya incidencia se estudia en el capítulo II de Ibañes (2001a).

- En otros teoremas, sobre todo los referidos a funciones, los textos examinados contienen algunas de las expresiones que se estudian en el capítulo IV de Ibañes (2001a):

“condición necesaria”, “condición suficiente”, “si, y sólo si”, etcétera. La utilización de estas expresiones se hace general en los libros de texto de 2º de Bachillerato.

- En ningún caso se ha encontrado una explicación global del proceso, es decir, ninguna explicación de las líneas generales que se han seguido, lo que resulta fundamental para su comprensión.
- En muchos casos también falta un comentario acerca de lo que significa el teorema, de las relaciones que establece, y de su utilidad.
- También se ha podido observar que, muy frecuentemente, no se separa con claridad el enunciado del teorema de su demostración, lo que puede dificultar la distinción del papel que juega cada uno de ellos.
- Los autores se limitan a dar una demostración para cada teorema estudiado. Como ya se ha comentado, sería interesante –desde distintos puntos de vista- presentar también otro tipo de justificaciones y alguna demostración más.

De los anteriores puntos se deduce cierta preocupación por demostrar los teoremas como si se tratara de un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor, pero se emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en prevenir errores y dificultades, en acudir a las fuentes, en diseñar materiales de apoyo, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.

Referencias bibliográficas

van ASH, A.G. (1993): “To prove, why and how?”. *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, **2**, 301-313.

BALACHEFF, N. (1987): “Processus de preuve et situations de validation”. *Educational Studies in Mathematics*, **18**, 147-176.

BELL, A. W. (1976): “A study of pupils’ proof-explanations in mathematical situations”. *Educational Studies in Mathematics*, **7**, 23-40.

BELL, A. W. (1979): “The learning of process aspects of mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, **10**, 361-387.

BLUM, W. y KIRSCH, A. (1991): “Preformal proving: examples and reflections”. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 183-203.

BOURBAKI, N. (1970): *Éléments de Mathématique (Théorie des ensembles)”*. Hermann, París.

BOYER, C.B. (1987): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.

van DORMOLEN, J. (1977): “Learning to understand what giving a proof really means”. *Educational Studies in Mathematics*, **8**, 27-34.

ESTEBAN, M.; IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998): “*Trigonometría*”. Síntesis (Colección: Educación Matemática en Secundaria, nº 20): Madrid.

HANNA, G. (1989): “More than Formal Proof”. *For the Learning of Mathematics*, **9**(1), 20-23.

HANNA, G. (1995): “Challenges to the Importance of Proof”. *For the Learning of Mathematics*, **15**(3), 42-49.

HANNA, G. (1996): “The ougoing value of proof”. En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 1-14. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

HANNA, G. Y JAHNKE, H.N. (1996): “Proof and proving”. En Bishop, A.J. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (páginas 887-908).

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998): “Students’ Proof Schemes: Results from exploratory studies”. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

HARO, M.J. y TORREGROSA, G. (2002): “El análisis de libros de texto como tarea del profesorado de matemáticas”. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (coords.): *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, 357-372. Universidad de Alicante.

HERSH, R. (1993): “Proving is convencing and explaining”. *Educational Studies in Mathematics*, **24**, 389-399.

IBAÑES, M. (1997): “Alumnos de Bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones”. *Uno*, **13**, 95-101. Barcelona.

IBAÑES, M. (2001a): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

IBAÑES, M. (2001b): “Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento”. *Suma*, **37**, 95-98. Zaragoza ISSN: 1130-488X.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1997): “La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria”. *Educación Matemática*, **9**, **2**, 65-104.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998): “Pruebas visuales en trigonometría”. *Aula, Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*. Universidad de Salamanca.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2001): “Un estudio sobre los *esquemas de prueba* en el alumnado de primer curso de bachillerato”. *Uno*, **28**, 39-59. Barcelona. ISSN: 1133-9853.

KLEINER, I. (1991): “Rigor and proof in Mathematics: a historical perspective”. *The Mathematics Magazine*, **64-5**, 291-314.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad. Madrid.

LAKATOS, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*. Alianza Editorial. Madrid. (El original es de 1963-1964):

LAKATOS, I. (1981): “¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?”. En *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Alianza Universidad. Madrid. (El artículo citado es original de 1959-1961).

de LORENZO (1977): *La matemática y el problema de su historia*. Tecnos. Madrid.

MARTÍN, C. (2002): “Criterios para el análisis de libros de texto desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. Aplicación a la estadística y probabilidad”. En C. Penalva, G.

Torregrosa y J. Valls (coords.): *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, 373-385. Universidad de Alicante.

MIYAZAKI, M. (2000): “Levels of proof in lower secondary school mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, **41**, 47-68.

MOVSHOVITZ-HADAR (1996): “On striking a balance between formal and informal proofs”. En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 43-52. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

ORTEGA, T. (1996): “Modelo de valoración de textos matemáticos”. *Números*, **28**, 4-12. La Laguna, Tenerife.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos, Madrid. (Original de 1954).

RENZ, P. (1981): “Mathematical proof: what it is and what it ought to be”. *TheTtwo- Year College Mathematics Yournal*, **12(2)**, 83-103.

RICO, L. (1997): “Los organizadores del curriculo de Matemáticas”. En L. Rico (coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, 39-59. ICE Universitat de Barcelona – Horsori, Barcelona.

SCHUMANN, H. y de VILLIERS, M. (1993): “Continuous variation of geometric figures: interactive theorem finding and problems in proving”. *Pythagoras*, **31**, 9-20.

SEMADENI, Z. (1984): “Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training”. *For the Learning of Mathematicas*, **4(1)**, 32-34.

THURSTON, W.P. (1995): “On proof and progress in matematics”. *For the Learning of Mathematics*, **15(1)**, 29-37.

de VILLIERS, M. (1993): “El papel y la función de la demostración en matemáticas”. *Épsilon*, **26**, 15-30. Original de 1990.

de VILLIERS, M. (1995): “An alternative introduction to proof in dynamic geometry”. *Micromath Spring*, **11(1)**, 14-19.

de VILLIERS, M. (1996): “Why proof in dynamic geometry”. En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 23-42. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

de VILLIERS, M. (1997): “The role of proof in investigative, computer-based geometry: some personal reflections”. En: King, J. y Schattschneider, D. (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research*. MAA notes **41**, 15-24.

WILDER, R.L. (1944): “The nature of mathematical proof”. *American Mathematical Monthly*, **51**, 309-323.