

ENFOQUE DIDACTICO PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON MAPLE V

López Ares, Susana¹

Sánchez Alvarez, Isidro

1. INTRODUCCION

MAPLE V forma parte del conjunto de programas informáticos, caracterizados como de cálculo simbólico, que están revolucionando el área de las matemáticas y como consecuencia todas las disciplinas que la utilizan como herramienta. La incorporación de los paquetes de cálculo simbólico en el aula pone, en cierta medida, en crisis los métodos de cálculo tradicional. Muchas tareas mecánicas que el alumno desarrollaba a mano, pueden ser llevadas a cabo con estos paquetes de tal forma que el alumno puede centrarse más en metodologías de trabajo o algoritmos que en operaciones y herramientas matemáticas elementales. Por otra parte, la utilización de estos programas permite llegar a resultados finales de procesos bastante complejos en muy poco tiempo.

El objetivo de este trabajo consiste en el análisis de las posibilidades que ofrece el cálculo simbólico como herramienta para el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos en el campo de la Economía, constatando las ventajas e inconvenientes que ello supone. Debe destacarse, tal y como se analizará con posterioridad, que si bien permite rápidamente la resolución de problemas matemáticos ello no significa que el alumno deba prescindir del conocimiento del proceso llevado a cabo. Este aspecto tiene una mayor importancia cuando esos problemas matemáticos recogen la modelización de un fenómeno donde las variables tienen un significado económico determinado.

2. MODELO DE CRECIMIENTO BISECTORIAL DE SHINKAI

2.1 PLANTEAMIENTO

Con el fin de ilustrar la utilidad de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas dentro de la Economía se planteará y resolverá un modelo de crecimiento desarrollado por Shinkai.

La elección de este modelo se ha debido a que: permite mostrar al alumno la utilidad del análisis dinámico en la modelización de un sistema económico y muestra

como el cálculo simbólico permite llevar a cabo su estudio, permitiendo no sólo la resolución del sistema de ecuaciones sino también el análisis de la estabilidad de la solución obtenida.

El proceso se llevará a cabo mediante el planteamiento del modelo y la resolución del mismo siguiendo dos caminos: en primer lugar, construyendo los diferentes pasos necesarios para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas de primer orden, tal y como se haría si el programa informático no incluyese la resolución de este tipo de problemas. Y, en segundo lugar, utilizando el comando «dsolve». El objetivo es la comparación de ambos procedimientos con el fin de mostrar la necesidad de que el alumno posea conocimientos matemáticos y económicos, ya que sin ellos la interpretación de los resultados obtenidos, especialmente en el segundo caso, sería difícil.

El modelo considerado se caracteriza porque se consideran dos sectores productivos: uno de bienes de capital y otro de bienes de consumo. Los bienes de consumo se producen y consumen en proporciones fijas, y del mismo modo, los bienes de capital se producen y utilizan en proporciones fijas. Es decir, se considera un bien de consumo homogéneo y un bien de capital homogéneo. Se utilizan dos factores productivos: trabajo y capital.

Los supuestos tecnológicos de partida son: 1.- Sólo existe una técnica en cada sector, con coeficientes técnicos fijos constantes. 2.- Los factores productivos son libremente transferibles de un sector productivo a otro. 3.- El trabajo es homogéneo y todos los trabajadores reciben un salario real idéntico que consumirán completamente. La mano de obra crece a una tasa proporcional constante. 4.- La renta percibida por los capitalistas es ahorrada e invertida totalmente. 5.- Se define la producción del sector de bienes de capital en términos netos de la depreciación de todo el stock de capital de la Economía, de forma que esta producción coincide con la inversión neta.

Con el modelo construido se persiguen dos objetivos: por un lado, el análisis de la existencia y estabilidad de una senda de crecimiento equilibrado (senda en la que todas las magnitudes crezcan a la misma tasa proporcional) en la cual se mantenga el pleno empleo de los factores productivos capital y trabajo, y por el otro la demostración del «Teorema de la intensidad de capital».

La notación considerada es: $X_i \rightarrow$ Producción del sector i . $W \rightarrow$ Salario real.

$N_i \rightarrow$ Trabajo empleado en el sector i . $a_i \rightarrow$ Relación Capital / Trabajo en el sector i .

¹ Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad de Oviedo.

$n \rightarrow$ Tasa de crecimiento de N . $b_i \rightarrow$ Coeficiente de factor trabajo del sector i .
 $i = 2 \rightarrow$ Sector de bienes de consumo. $N \rightarrow$ Mano de obra total.
 $i = 1 \rightarrow$ Sector de bienes de capital. $K \rightarrow$ Stock de capital total.

Las ecuaciones de equilibrio del modelo son, respectivamente: condición de plena utilización del stock de capital, condición de que no exista exceso de demanda de bienes de consumo y condición de pleno empleo del factor trabajo.

>K:=a1*N1(t)+a2*N2(t);

$$K := a1 N1(t) + a2 N2(t)$$

>X2:=W*(N1(t)+N2(t));

$$X2 := W (N1(t) + N2(t))$$

>N:=N1(t)+N2(t);

$$N := N1(t) + N2(t)$$

Por lo que para analizar la dinámica del modelo sólo habrá que tener en cuenta que la producción del sector de bienes de capital es equivalente a la inversión neta (donde $\hat{d}=(0,-1,0)$),

>X1:=diff(K,t)=m*N1(t);

$$X1 := a1 \left(\frac{\partial}{\partial t} N1(t) \right) + a2 \left(\frac{\partial}{\partial t} N2(t) \right) = m N1(t)$$

y que la mano de obra crece a una tasa proporcional constante.

>DN:=diff(N,t)=n*(N1(t)+N2(t));

$$DN := \left(\frac{\partial}{\partial t} N1(t) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} N2(t) \right) = n (N1(t) + N2(t))$$

El sistema de ecuaciones diferenciales tiene como variables dependientes $N_1(t)$ y $N_2(t)$ pudiendo el resto de variables del modelo $\bar{x}=\bar{x}+\bar{a}l=(0,0,0)$ y $\bar{a}l=(9,0,0)$ ser obtenidas a partir de ellas.

>Sistema:={X1,DN};

$$\text{Sistema} := \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} N1(t) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} N2(t) \right) = n (N1(t) + N2(t)), \\ &a1 \left(\frac{\partial}{\partial t} N1(t) \right) + a2 \left(\frac{\partial}{\partial t} N2(t) \right) = m N1(t) \end{aligned} \right\}$$

Para resolver el sistema planteado, tal y como se ha comentado, se seguirán dos procedimientos: por una parte construyendo los pasos necesarios para obtener una

solución tal y como se haría si el programa no dispusiese de un comando para la resolución de este tipo de problemas y, por otro lado, utilizando el comando «dsolve».

2.2 RESOLUCION CON MAPLE V

En el primer caso, se propondría como solución del sistema $N_1(t) = \alpha_1 e^{rt}$ y $N_2(t) = \alpha_2 e^{rt}$. Sustituyendo las funciones propuestas en el sistema y simplificando se tendrá:

>Sistemac:=simplify(subs({N1(t)=alpha1*exp(r*t),N2(t)=alpha2*exp(r*t)},Sistema));

$$\text{Sistemac} := \left\{ \begin{aligned} a_1 \alpha_1 r e^{(rt)} + a_2 \alpha_2 r e^{(rt)} &= m \alpha_1 e^{(rt)}, \\ \alpha_1 r e^{(rt)} + \alpha_2 r e^{(rt)} &= n e^{(rt)} (\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right\}$$

A partir del sistema obtenido se buscan los valores de r para los cuales el sistema planteado es compatible indeterminado:

>with(linalg):A:=matrix(2,2);

$$A := \text{array}(1..2, 1..2, [\])$$

>entermatrix(A);

$$\begin{bmatrix} m - a_1 r & -a_2 r \\ n - r & n - r \end{bmatrix}$$

>Determinante(A):=det(A);

$$\text{Determinante}(A) := mn - mr - a_1 rn + a_1 r^2 + a_2 rn - a_2 r^2$$

>R:={solve(Determinante(A)=0,r)};

$$R := \left\{ n, \frac{m}{a_1 - a_2} \right\}$$

Sustituyendo cada uno de los valores de r en Sistemac se obtienen dos sistemas, Sistemad y Sistemae, a partir de los cuales se pueden determinar los valores de α_1 y α_2 necesarios para construir dos soluciones particulares del sistema de ecuaciones diferenciales.

>Sistemad:=subs(r=R[1],Sistemac);

$$\text{Sistemad} := \left\{ \begin{aligned} a_1 \alpha_1 n e^{(nt)} + a_2 \alpha_2 n e^{(nt)} &= m \alpha_1 e^{(nt)}, \\ \alpha_1 n e^{(nt)} + \alpha_2 n e^{(nt)} &= n e^{(nt)} (\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right\}$$

>Solucion1b:=subs(alpha2=1,solve(Sistemad,alpha1));

$$\text{Solucion1b} := \left\{ \alpha_1 = -\frac{a_2 n}{a_1 n - m} \right\}$$

>Sistemae:=subs(r=R[2],Sistematic);

$$\text{Sistemae} := \left\{ \begin{aligned} &\frac{a_1 \alpha_1 m e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}}{a_1 - a_2} + \frac{a_2 \alpha_2 m e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}}{a_1 - a_2} = m \alpha_1 e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}, \\ &\frac{\alpha_1 m e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}}{a_1 - a_2} + \frac{\alpha_2 m e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}}{a_1 - a_2} = n e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)} (\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \right\}$$

>Solucion2b:=subs(alpha2=1,solve(Sistemae,alpha1));

$$\text{Solucion2b} := \{ \alpha_1 = -1 \}$$

Las combinaciones lineales de las soluciones particulares obtenidas para $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son la solución general del sistema planteado, de tal forma que la evolución del número de unidades de factor trabajo utilizado en el sector de bienes de capital y en el sector de bienes de consumo viene recogido en Soluciongeneral1 y Soluciongeneral2, respectivamente.

>Soluciongeneral1:=_D1*rhs(Solucion1b)*exp(R[1]*t)+_D2*rhs(Solucion2b)*exp(R[2]*t);

$$\text{Soluciongeneral1} := -\frac{D_1 a_2 n e^{(n t)}}{a_1 n - m} - D_2 e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}$$

>Soluciongeneral2:=_D1*exp(R[1]*t)+_D2*exp(R[2]*t);

$$\text{Soluciongeneral2} := D_1 e^{(n t)} + D_2 e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}$$

Para construir una solución particular se parte de un nivel inicial de factores productivos K_0 y N_0 . A partir de las ecuaciones de plena utilización del stock de capital y pleno empleo se obtienen las condiciones que, sustituidas en Soluciongeneral1 y Soluciongeneral2, permiten obtener la solución particular buscada: Particulara y Particularb.

>Condiciones:={(K0-a2*N0)/(a1-a2)=simplify(subs(t=0,Soluciongeneral1)),(a1*N0-K0)/(a1-a2)=simplify(subs(t=0,Soluciongeneral2))};

Condiciones :=

$$\left\{ \frac{a_1 N_0 - K_0}{a_1 - a_2} = -D_1 + -D_2, \frac{K_0 - a_2 N_0}{a_1 - a_2} = -\frac{-D_1 a_2 n + -D_2 a_1 n - -D_2 m}{a_1 n - m} \right\}$$

>Parametros:=solve(Condiciones,{_D1,_D2});

$$Parametros := \left\{ -D_2 = \frac{-K_0 a_1 n + K_0 m - a_2 N_0 m + a_2 n K_0}{a_1^2 n - 2 a_2 n a_1 - m a_1 + m a_2 + a_2^2 n}, -D_1 = -\frac{N_0 (a_1 n - m)}{a_2 n - a_1 n + m} \right\}$$

>Particulara:=subs({_D1=rhs(Parametros[2]),_D2=rhs(Parametros[1])},

Soluciongeneral1);

$$Particulara := -\frac{N_0 a_2 n e^{(n t)}}{a_1 n - a_2 n - m} + \frac{(K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0) e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}}{a_1^2 n - 2 a_2 n a_1 - m a_1 + m a_2 + a_2^2 n}$$

>Particularb:=subs({_D1=rhs(Parametros[2]),_D2=rhs(Parametros[1])},

Soluciongeneral2);

$$Particularb := \frac{N_0 (a_1 n - m) e^{(n t)}}{a_1 n - a_2 n - m} - \frac{(K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0) e^{\left(\frac{m t}{a_1 - a_2}\right)}}{a_1^2 n - 2 a_2 n a_1 - m a_1 + m a_2 + a_2^2 n}$$

Una vez que ha sido resuelto el sistema de ecuaciones diferenciales, se plantea el análisis de la estabilidad de las soluciones obtenidas. Para ello habrá que analizar el signo tanto de los valores de r como de los parámetros que van multiplicando en cada una de las soluciones a las funciones exponenciales propuestas como solución, teniendo en cuenta que $n, a_1, a_2, N_0, m = 1/b_1$ y K_0 son positivos.

>A:=rhs(Parametros[2])*rhs(Solucion1b);

$$A := -\frac{N_0 a_2 n}{a_1 n - a_2 n - m}$$

>B:=rhs(Parametros[1])*rhs(Solucion2b);

$$B := \frac{K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0}{a_1^2 n - 2 a_2 n a_1 - m a_1 + m a_2 + a_2^2 n}$$

>C:=rhs(Parametros[2]);

$$C := \frac{N_0 (a_1 n - m)}{a_1 n - a_2 n - m}$$

>F:=rhs(Parametros[1]);

$$F := -\frac{K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0}{a_1^2 n - 2 a_2 n a_1 - m a_1 + m a_2 + a_2^2 n}$$

>assume(a1>0,a2>0,N0>0,n>0,m>0,K0>0);

>solve({C>0},{m});

$$\{m < a_1 n - a_2 n\}, \{a_1 n < m\}$$

>solve({A>0},{m});

$$\{a_1 n - a_2 n < m\}$$

Por lo que respecta a los parámetros, A , B , C y F , se puede observar que B y F son opuestos, mientras que para que A y C sean positivos tiene que verificarse que $m > a_1 n$. Esto significa que para que la senda de crecimiento sea estable la segunda exponencial de la solución general debe tender a cero, lo cual tendrá lugar cuando $a_1 < a_2$. Este resultado permite enunciar el «Teorema de la intensidad de capital»: la senda de crecimiento será estable si la intensidad de capital es mayor en sector que produce bienes de consumo que en el de bienes de capital. En este caso la senda de crecimiento equilibrado vendrá determinada por los primeros sumandos de la solución.

Una vez que han sido obtenidas la solución general y una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales y ha sido también analizada su estabilidad, se procede a la repetición del proceso utilizando el comando «dsolve» con el fin de comparar los resultados obtenidos con los del caso anterior.

En el modelo analizado, la solución general viene recogida en Soluciongeneral. La comparación de la solución obtenida con este comando con la determinada con anterioridad permite establecer la relación existente entre los parámetros $_D_1$ y $_D_2$ con $_C_1$ y $_C_2$

>Soluciongeneral:=dsolve({X1,DN},{N1(t),N2(t)});

$$\begin{aligned} \text{Soluciongeneral} := \left\{ \begin{aligned} N_2(t) = & \left(-_C_1 a_1 n e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)} + _C_1 a_1 n e^{(nt)} \right. \\ & + _C_1 m e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)} - _C_1 m e^{(nt)} - _C_2 m e^{(nt)} + _C_2 a_1 n e^{(nt)} \\ & \left. - a_2 n _C_2 e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)} \right) / (a_1 n - a_2 n - m), N_1(t) = \left(-_C_1 e^{(nt)} a_2 n \right. \\ & - _C_1 m e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)} + _C_1 a_1 n e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)} + a_2 n _C_2 e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)} \\ & \left. - a_2 n _C_2 e^{(nt)} \right) / (a_1 n - a_2 n - m) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

>relacion:=solve({rhs(Soluciongeneral[2])=_D1*(-a2*n/(n*a1-m)*exp(n*t))-

$_D2*\exp(m*t/(a1-a2)),rhs(Soluciongeneral[1])=_D1*\exp(n*t)+_D2*\exp(m*t/(a1-a2))\},\{_D1,_D2\});$

$$relacion := \left\{ _D2 = -\frac{-C1 m + C1 a1 n + a2 n C2}{a1 n - a2 n - m}, _D1 = \frac{(a1 n - m) (-C1 + C2)}{a1 n - a2 n - m} \right\}$$

Para la obtención de la solución particular buscada, basta con introducir las condiciones iniciales junto con las ecuaciones del sistema.

$>Solucionparticular:=dsolve(\{X1,DN,N1(0)=(K0-a2*N0)/(a1-a2),N2(0)=(a1*N0-K0)/(a1-a2)\},\{N1(t),N2(t)\});$

$$Solucionparticular := \left\{ N1(t) = \left(e^{(nt)} a2^2 n NO - m e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} KO + m e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} a2 NO + a1 n e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} KO - a2 n e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} KO - a2 n e^{(nt)} a1 NO \right) / ((a1 - a2) (a1 n - a2 n - m)), N2(t) = \left(-a1 n e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} KO - a2 n e^{(nt)} a1 NO + m e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} KO - m e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} a2 NO + a2 e^{(nt)} NO m - m e^{(nt)} a1 NO + a1^2 n e^{(nt)} NO + a2 n e^{\left(\frac{mt}{a1-a2}\right)} KO \right) / ((a1 - a2) (a1 n - a2 n - m)) \right\}$$

Si se comparan las soluciones obtenidas con anterioridad con las determinadas utilizando el comando dsolve se puede observar que si bien el proceso es más rápido y sencillo en este último caso, las soluciones, en apariencia, son más complejas lo cual puede dificultar su posterior interpretación. Este problema se acentúa cuando el objetivo del estudio es no sólo la resolución sino el análisis de la estabilidad de las soluciones obtenidas. Tal y como están expresadas las soluciones en este último caso sería prácticamente imposible llevar a cabo su estudio. Por ello se procede a reagrupar los términos de tal forma que facilite su análisis, buscando una expresión igual a la obtenida por el procedimiento anterior.

$>Simplificacion:=collect(Solucionparticular,\{\exp(n*t),\exp(m*t/(a1-a2))\});$

$$\text{Simplificacion} := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N1}(t) = \\ \frac{(a_2^2 n N_0 - a_2 N_0 a_1 n) e^{(nt)}}{(a_1 - a_2)(a_1 n - a_2 n - m)} + \frac{(K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0) e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)}}{(a_1 - a_2)(a_1 n - a_2 n - m)} \\ , \mathbf{N2}(t) = \frac{(-a_2 N_0 a_1 n + a_2 N_0 m - m a_1 N_0 + a_1^2 n N_0) e^{(nt)}}{(a_1 - a_2)(a_1 n - a_2 n - m)} \\ + \frac{(-K_0 a_1 n + K_0 m - a_2 N_0 m + a_2 n K_0) e^{\left(\frac{mt}{a_1 - a_2}\right)}}{(a_1 - a_2)(a_1 n - a_2 n - m)} \end{array} \right\}$$

>A2:=simplify(op(1,rhs(Simplificacion[1]))/exp(n*t));

$$A2 := - \frac{N_0 a_2 n}{a_1 n - a_2 n - m}$$

>B2:=simplify(op(2,rhs(Simplificacion[1]))/exp(m*t/(a1-a2)));

$$B2 := \frac{K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0}{(a_1 - a_2)(a_1 n - a_2 n - m)}$$

>C2:=simplify(op(1,rhs(Simplificacion[2]))/exp(n*t));

$$C2 := \frac{N_0 (a_1 n - m)}{a_1 n - a_2 n - m}$$

>E2:=simplify(op(2,rhs(Simplificacion[2]))/exp(m*t/(a1-a2)));

$$D2 := - \frac{K_0 a_1 n - K_0 m + a_2 N_0 m - a_2 n K_0}{(a_1 - a_2)(a_1 n - a_2 n - m)}$$

Una vez que han sido simplificadas las ecuaciones y separados los parámetros de la mismas ya nos encontraríamos en disposición de realizar el análisis de la estabilidad de la solución. El proceso se llevaría a cabo igual que en el caso anterior.

Con el fin de facilitar al alumno la comprensión de los resultados obtenidos se procederá a la aplicación del modelo a un caso concreto ($n = 1/100, a_1 = 5, a_2 = 7, N_0 = 100, m = 1/b_1 = 1/2, y K_0 = 600$), sustituyendo los valores dados en la solución particular obtenida, tenemos:

>Ejem1a:=subs({n=1/100,a1=5,a2=7,m=1/2,N0=100,K0=600},Particulara);

$$Ejem1a := \frac{175}{13} e^{\left(\frac{1}{100}t\right)} + \frac{475}{13} e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)}$$

>Ejem1b:=subs({n=1/100,a1=5,a2=7,m=1/2,N0=100,K0=600},Particularb);

$$Ejem1b := \frac{1125}{13} e^{\left(\frac{1}{100}t\right)} - \frac{475}{13} e^{\left(-\frac{1}{4}t\right)}$$

donde Ejem1a representa la evolución del número de unidades utilizadas de factor trabajo en el sector de bienes de capital, mientras que Ejem1b recoge esa misma evolución en el sector de bienes de consumo.

Con el fin de analizar la estabilidad de la senda de crecimiento se construye la senda de crecimiento equilibrado, para lo cual el segundo término de las dos ecuaciones debe ser nulo, esto tiene lugar cuando $K_0 = 8750/13$.

>Y:=subs({n=1/100,a1=5,a2=7,m=1/2,N0=100},B);

$$Y := -\frac{1}{2}K0 + \frac{4375}{13}$$

>Z:=solve(Y=0,K0);

$$Z := \frac{8750}{13}$$

Construyendo la nueva solución particular se obtiene la senda de crecimiento equilibrado, hacia la cual tenderán $N_1(t)$ y $N_2(t)$. (Fig. 1a y 1b)

>Ejem2a:=subs({n=1/100,a1=5,a2=7,m=1/2,N0=100,K0=Z},Particulara);

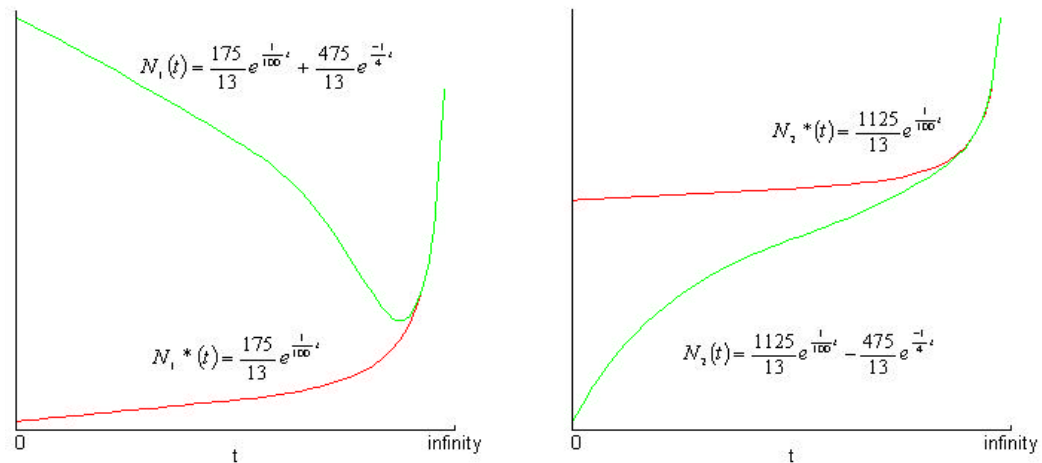
$$Ejem2a := \frac{175}{13} e^{\left(\frac{1}{100}t\right)}$$

>Ejem2b:=subs({n=1/100,a1=5,a2=7,m=1/2,N0=100,K0=Z},Particularb);

$$Ejem2b := \frac{1125}{13} e^{\left(\frac{1}{100}t\right)}$$

>plot({Ejem1a,Ejem2a},t=0..infinity);

>plot({Ejem1b,Ejem2b},t=0..infinity);



Figuras 1a y 1b: Evolución de $N_1(t)$ y $N_2(t)$ en relación a sus sendas de crecimiento equilibrado.

3. CONCLUSIONES

Los programas informáticos de cálculo simbólico son un instrumento que ofrecen grandes posibilidades en la enseñanza de las matemáticas para economistas. No sólo permiten resolver problemas cuya dificultad es importante para su nivel de conocimientos matemáticos sino que también permiten transformar el enfoque de la propia resolución de los problemas.

No obstante se requiere que el alumno conozca en muchos casos el método de resolución con el objeto de poder llegar al análisis final del problema. Las soluciones obtenidas no siempre son transparentes sino que requieren una adecuada transformación por parte del usuario.

Por otra parte, ofrecen no sólo la posibilidad de diseñar y resolver problemas matemáticos sino que también pueden servir como puro instrumento docente en cuanto que permite enseñar al alumno el propio proceso de resolución evitando los tediosos procedimientos manuales que en algunos casos poco aportan al economista.

4. BIBLIOGRAFÍA

1. ABELL, M. y BRASELTON, J. (1994a): *Differential Equations with Maple V*. AP Professional. Londres.
(1994b): *The Maple V Handbook*. AP Professional. Londres.
2. GANDOLFO, G. (1970): *Métodos y modelos matemáticos de dinámica económica*.

Editorial Tecnos. Madrid.

3. SIMMONS, G. (1993): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Segunda edición. Ediciones McGraw-Hill. Madrid.