APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS ESTOCÁSTICOS AL ANÁLISIS ECONÓMICO Y A LAS FINANZAS

Martínez Barbeito, Josefina[1]
Rodríguez Pontones, María Jesús

1. INTRODUCCIÓN

Es interesante que se pueda ofrecer al cálculo estocástico la posibilidad de aplicaciones a la Economía y a las Finanzas, sin ser demasiado exigentes con respecto a la intersección de dichas aplicaciones, ni demasiado exhaustivo, por falta de tiempo y espacio, para cubrir el abanico total.

La literatura existente está siendo muy prolífica, de modo que esperamos que se difundan estos conocimientos, con el objeto de obtener una más amplia ejemplificación.

Por el momento, y para el caso de utilización del cálculo estocástico en tiempo continuo en el crecimiento macroeconómico, con ambiente de incertidumbre, podemos citar como publicistas importantes a Bourguignon (1974), Merton (1976) y Bismut (1975). Estos trabajos tuvieron sus precedentes en otros de Brock y Mirman (1972), Levhari y Srinivasin (1969), Mirman (1973), Stigun (1972), Leland (1974) y Mirman y Zilcha (1975), entre otros. Existen algunos temas sobre crecimiento económico en tiempo continuo, cuya resolución es todavía un reto. Nos referimos, por ejemplo, a la estabilidad estocástica de la distribución estacionaria.

Brock y Majundar (1978) presentan varios modelos de crecimiento en tiempo discreto (en ambiente de incertidumbre).

Los ciclos empresariales y los métodos de estabilización macroeconómica en un entorno en que prevalece la incertidumbre, son áreas de investigación donde son válidas las técnicas del cálculo estocástico.

El número de obras de investigación que usan técnicas de investigación en finanzas ha crecido enormemente en las dos últimas décadas y son dignas de citar las publicaciones de Szegö y Shell (1972), Ziemba y Vickson (1975), Levy y Sarnat (1977) y Bicksler(1979), entre otros.

La teoría de valoración de opciones de Black-Scholes, y las modificaciones subsiguientes de esta teoría por varios autores ha generado gran interés.

En su planteamiento original (1973), Black-Scholes, parten de varias hipótesis:

a) No se penalizan las ventas en descubierto.
b) Se trata de mercados sin impuestos ni costes de transacción (mercados frictionless).
c) El mercado opera en continuo y el precio de la acción sigue un proceso de Itô.
d) La acción no paga dividendos y solamente se puede ejercitar la opción en la fecha terminal del contrato.
e) El interés sin riesgo es conocido y constante.

Con estas hipótesis Black y Scholes probaron que se puede formular una cobertura sin riesgo usando proporciones adecuadas de opciones de compra y acciones del activo subyacente. Tal cobertura instantánea, sin riesgo, conduce a una tasa de rendimiento constante y conocida, sin riesgo también.

Desde 1973 diversos autores han modificado estas hipótesis y la teoría de valoración de opciones de Black-Scholes ha encontrado muchas aplicaciones en varias áreas de las finanzas.

Ilustramos aquí algunos ejemplos presentados por A.G. Malliaris en su obra "*Stohastic Methods in Economics and Finance.*" (North Holland, Seventh impression, 1995).

Caso 1.- Crecimiento económico neoclásico en un contexto incierto.

En la teoría neoclásica del crecimiento, éste está determinado por un progreso técnico exógeno y por los cambios en la fuerza de trabajo, dados los parámetros de la función de producción. En este modelo, la inversión es pasiva en el sentido

[1] Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de la Coruña.

de que siempre absorbe los ahorros disponibles. Dejando de lado por el momento el crecimiento de la población y el progreso técnico, la función de producción fija el capital necesario para cada nivel de producto. La producción de equilibrio se da cuando los ahorros procedentes de la producción son, precisamente, compatibles con la inversión necesaria para obtener esa producción a la tasa de interés que permite tal equilibrio.

Para una función de producción dada, con rendimientos decrecientes de los factores y rendimientos de escala constantes, habrá un nivel de equilibrio de producción y stock de capital. El análisis se centra a menudo en el crecimiento estable, lo que exige que la producción y los inputs efectivos crezcan al mismo ritmo. Sin progreso técnico, el crecimiento exógeno de la población es la única influencia sobre ese crecimiento estable. Indudablemente la propensión al ahorro puede elevarse, pero se supone que ello conduciría únicamente a una mayor profundización del capital vía movimientos del tipo de interés, al ajustarse la economía al nuevo estado de equilibrio.

Analizar ese estado estable con pleno empleo es poco relevante. Pero incluso con abstracción de los supuestos del estado estable, la teoría neoclásica concede un papel muy modesto a la formación de capital, porque las presunciones son que conseguir que los empresarios inviertan no plantea problemas.

El modelo neoclásico desarrollado por Solow en 1956 ha sido revisado por Bourguignon (1974) y por Merton (1975), incorporando la incertidumbre en un modelo determinístico y basándose en el lema de Itô como instrumento.

Partimos de una función de producción $F(K, L)$ que es homogénea de grado 1, donde K denota el capital y L el factor trabajo. Por la homogeneidad de la función se cumple:

$$F(K/L, 1) = f(K/L) = f(k),$$

siendo $k = K/L$.

En el equilibrio, igualamos la inversión al ahorro. De aquí:

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K} = sF(K, L),\ 0 < s < 1$$

donde s denota la propensión marginal al ahorro.

La ecuación diferencial neoclásica de crecimiento de Solow se obtiene, en el caso cierto, como sigue:

$$\frac{dk}{dt} = \dot{k} = \frac{d}{dt}\left(K/L\right) = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\cdot\frac{K}{L} = sf(k) - nk,$$

donde $\frac{\dot{L}}{L} = n$.

Suponemos que $L(t) = L(0)e^{nt}$, $L(0) > 0$, $0 < n < 1$.

Si, en lugar de $\frac{\dot{L}}{L} = n$, describimos el crecimiento del trabajo por la ecuación diferencial estocástica

$$dL = n\,L\,dt + s\,L\,dz,$$

siendo la parte estocástica dz, $z = z(w, t) = z(t)$ un proceso de Wiener definido en un espacio de probabilidad (Ω, F, P). La tendencia del proceso n es la tasa esperada de crecimiento del trabajo por unidad de tiempo, siendo la varianza del proceso por unidad de tiempo s^2. Se ha de notar que:

$$\frac{dL}{L} = n\,dt + s\,dz$$

expresa que en un período corto de tiempo la tasa proporcionada de cambio de la fuerza de trabajo se distingue normalmente con media $n\,dt$ y varianza $s^2\,dt$.

Con el fin de calcular la ecuación diferencial neoclásica estocástica del crecimiento se recurre al lema de Itô.

Tenemos:

$$dK = sF(K, L)\,dt$$

$$dL = nL\,dt + sL\,dz.$$

Haciendo $k = K/L$, el lema de Itô obtiene:

$$dk = \frac{dk}{dt}dt + \frac{dk}{dL}\,dL + \frac{dk}{dK}\,dK +$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2k}{dK^2}(dK)^2 + 2\cdot\frac{d^2k}{dKdL}(dK)(dL) + \frac{d^2k}{dL^2}(dL)^2\right] =$$

$$= \ -\frac{K}{L^2}(nL\ dt + \ sL\ dz) + sF(K,L)\ dt + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{L^3}Ks^{\ 2}L^2 dt\right) =$$

$$= \left[sf(k) - (n - s^{\ 2})k\right] dt + ks\ \ dz.$$

En el caso de que $s\ \ = 0\ \ \forall k \in\ [0, \infty)$, la ecuación anterior conduce a un caso especial de la ecuación diferencial cierta del crecimiento neoclásico.

Mediante los conocimientos de las ecuaciones en caso cierto e incierto, se deduce que, con la introducción de la nueva especificación del crecimiento del trabajo en el lema de Itô, hemos podido obtener fluctuaciones aleatorias en los cambios del output por el ratio unitario de trabajo *dk*. Estas fluctuaciones aleatorias se deben a las fluctuaciones aleatorias del crecimiento del trabajo. Así pues, la incertidumbre con respecto al crecimiento del trabajo a través del lema de Itô se traduce en incertidumbre con respecto al output por unidad de trabajo, lo cual es consistente con la idea de que las fluctuaciones en un input causan fluctuaciones en el output.

Caso 2.- Crecimiento en una economía abierta en ambiente de incertidumbre.

Partimos de una función de producción homogénea, de grado 1 en la que se supone que el ahorro en la economía es:

$$\text{ahorro} \equiv s\ F(K, L)\ dt + \ rK\ dz,$$

siendo s la propensión marginal al ahorro y $rK\ dz$ respuesta a un influjo aleatorio de capital desde el exterior. Sólo nos importa aquí ilustrar el lema de Itô y el hecho de que la incertidumbre en el exterior de una economía causa incertidumbre en la economía doméstica. Se supone aquí que existen influjos aleatorios ad-hoc aclarando que una causa posible de $rKdz$ puede ser la fluctuación en el diferencial entre los tipos de interés doméstico y los tipos medios de interés en el exterior de esta economía.

Se supone luego que el comportamiento del crecimiento del trabajo está dado por:

$$dL = nL\ dt + \ sL\ dz.$$

El modelo se compone de la ecuación de crecimiento del trabajo y de la ecuación de condición de equilibrio

$$dK = s\,F(K, L)\;dt + \;rK\;dz.$$

Se ha de observar que la ecuación anterior dice que en un período corto de tiempo, la tasa proporcionada de cambio del stock de capital se distribuye normalmente con media $s\ F(K,\ L)\ dt$ y varianza $r^2\ dt$. Por tanto, en esta aplicación, tenemos dos fuentes de incertidumbre: una de ellas debida a las fluctuaciones en la fuerza de trabajo y otra que proviene de las fluctuaciones en el influjo de capital externo. Se espera que ambas fluctuaciones produzcan cambios en el output doméstico por unidad de trabajo, obteniéndose la formulación necesaria con el cálculo de dk. Para obtener dk, $k = K/L$ usamos el lema de Itô, que nos aporta:

$$dk = -\frac{K}{L^2}\,(nL\;dt + \,sL\;dz) + \,\frac{1}{L}\big[sF(K, L)\;dt + rK\;dz\big] \;+$$

$$+\;\frac{1}{2}\left[-2\left(\frac{1}{L^2}\right)rKsL\,dt + \frac{2K}{L^3}\,s^{\,2}L^2dt\right] \;=$$

$$=\;-\frac{K}{L^2}\,nL\;dt\;-\frac{K}{L^2}\;sL\;dz + \;\frac{sF(K, L)}{L}dt\;\;+\;r\frac{K}{L}\;\;dz\;\;\text{-}\;\;\frac{1}{L^2}\;rKsL\,dt\;\;+$$

$$\frac{K}{L^3}s^{\,2}L^2dt$$

$$=\;\big[sf(k) - (n - s^{\,2} + rs\,)k\big]\;dt\;\;\text{-}\;(s\;\text{-}\;r)k\;\;dz.$$

Si r = 0 y no existe entrada de un influjo de capital externo, la ecuación última coincide con la obtenida en una ambiente cierto.

Caso 3.- Empresa competitiva con precio incierto.

Sea una empresa competitiva a corto plazo, que pretende maximizar la utilidad esperada de los beneficios. El precio de ventas p, es una variable aleatoria no negativa cuya distribución está determinada subjetivamente pos las convicciones de la empresa. La función de densidad del precio de venta es $f(p)$ y denotamos el valor esperado del precio de venta por m, es decir $E(p) = m$.

Suponemos que la empresa es precio-aceptante, en el sentido de que es incapaz de influir en la distribución del precio de venta.

Denotemos por u la función de utilidad de von Neumann-Morgenstern de la empresa y por $\pi(x)$ a la función de beneficios, donde x es el input. Suponemos que u es una función continua y diferenciable, cóncava y acotada tal que:

$$u'(\pi) > 0 \quad \text{y} \quad u''(\pi) < 0.$$

Suponemos que la empresa tienen aversión al riesgo. La función de coste total de la empresa $F(x)$ se compone del coste variable total $C(x)$ y el coste fijo B. Escribimos:

$$F(x) = C(x) + B,$$

donde:

$$C(0) = 0, \quad \text{y} \quad C'(x) > 0.$$

Definimos la función de beneficios de la empresa del modo usual:

$$\pi(x)= px - C(x) - B.$$

El objetivo de la empresa es maximizar la utilidad esperada de beneficios; es decir:

$$E(u(px - C(x) - B)).$$

Las condiciones necesarias y suficientes de máximo se obtienen derivando con respecto a x.

$$E(u'(p - C'(x))) = 0, \quad \text{y}$$

$$E(u''(\pi)(p - C(x))^2 - u'(\pi)\mathrm{C}''(x)) < 0.$$

Suponemos que las ecuaciones anteriores nos proporcionan una solución única, positiva y finita, para la maximización del problema. Para nuestro análisis la cuestión básica es: ¿cómo compara la solución óptima bajo incertidumbre con la solución competitiva bajo incertidumbre, donde se iguale el precio al coste marginal?. Para obtener una respuesta partimos de la condición necesaria de óptimo:

$$E(u'(p)) = E(u'(\pi)C'(x))$$

y restamos $E(u'(\pi)m)$ a los dos miembros de la ecuación, obteniendo:

$$E(u'(\pi)(p - m)) = E(u'(\pi)[C'(x) - m]).$$

Si hallamos la esperanza de π:

$$E(\pi) = E(p)x - C(x) - B = mx - C(x) - B.$$

Por ello:

$$\pi(x) - E(\pi) = px - mx = (p - m)(x), \text{ ó}$$

$$\pi(x) = E(\pi) + (p - m)(x).$$

Si $p \geq m$, entonces obtenemos: $\pi(x) \geq E(\pi)$, y por tanto:

$$u'(\pi) \leq u'E(\pi).$$

En general, para todo p tenemos que:

$$u'(\pi)(p - m) \leq u'(E(\pi))(p - m).$$

Tomando esperanzas a ambos lados de la expresión :

$$E(u'(\pi)(p - m)) \leq u'(E(\pi))E(p - m) = 0.$$

Se ha de observar que el cero del segundo miembro viene del hecho de que $u'(E(\pi))$ es una constante y $E(p) = m$. Combinando el resultado de que

$$E(u'(\pi)(p - m)) \leq 0 \text{ con}$$

$$E(u'(\pi)(p - m)) = E(u'(\pi)[C'(x) - m]).$$

Se concluye que:

$$E(u'(\pi)[C'(x) - m]) \leq 0.$$

lo que implica finalmente:

$$C'(x) \leq m, \text{ porque } u'(\pi) > 0.$$

Nuestro resultado dice que el output óptimo para una empresa competitiva bajo precio de incertidumbre se caracteriza por un coste marginal menor que el precio esperado si caracterizamos el output cierto como la cantidad donde $C'(x) = m$, podemos concluir que con precio incierto, el output es menor que el output cierto.

Supongamos ahora que x^* denota un output óptimo, único, positivo y finito, entonces x^* proporcionará una utilidad global máxima, con tal que:

$$E(u(px^* - C(x^*) - B)) \geq u(-B).$$

Donde $(-B)$ es el nivel de beneficio cuando $x = 0$. Si consideramos el segundo miembro de la expresión anterior y lo aproximamos por una serie de Taylor, en torno, al punto $p = m$, tenemos:

$$E(u(mx^* - C(x) - B)) + u'(mx^* - C(x^*) - B)\, x^* (p - m) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} u''(mx^* - C(x^*) - B)\, x^{*2} (p - m)^2 \geq u(-B).$$

A través de diversas simplificaciones, llegamos a:

$$\frac{u(mx^*-C(x^*)-B)-u(-B)}{u'(mx^*-C(x^*)-B)} \geq -\frac{1}{2}\frac{u''(mx^*-C(x^*)-B)}{u'(mx^*-C(x^*)-B)}x^{*2}E(r-m)^2.$$

El término u''/u' es la función de aversión al riesgo valorado al nivel esperado de beneficio del output óptimo x^*. El factor $x^{*2}E(p - m)^2$ denota la varianza de las ventas. Cada uno de estos dos factores es positivo y concluimos que:

$$mx^* - C(x^*) - B > -B$$

dado que la función de utilidad es estrictamente creciente. Obtenemos, finalmente que:

$$\frac{C(x^*)}{x^*} < m,$$

que nos dice que en una empresa competitiva en ambiente de incertidumbre, al nivel de output óptimo, el precio esperado es mayor que el coste medio.

Caso 4.- Tasa estocástica de Inflación

Se parte aquí del lema de Itô para obtener la solución del comportamiento de los precios y del rendimiento real de los precios y del rendimiento real de un activo cuando se describe la inflación por un proceso de Itô.

En el caso de que la tasa de inflación sea estocástica, el nivel de precios se puede describir por el proceso

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + s\, dz \tag{1}$$

La parte estocástica es dz, siendo z un proceso de Wiener. El drift del proceso es la tasa esperada de inflación por unidad de tiempo, que está definida por:

$$\Pi = \lim_{h\to 0} E_t \frac{1}{h}\left\{\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)}\right\} \tag{2}$$

donde E_t es el operador esperanza, condicionado por el valor $P(t)$. La varianza del proceso por unidad de tiempo está definida por:

$$s^2 = \lim_{h\to 0} E_t \frac{1}{h}\left\{\left[\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} - \Pi h\right]\right\}^2 \tag{3}$$

Una ecuación en diferencias, en tiempo discreto, que satisface (2) y (3) es:

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} = \Pi h + s\, y(t)(h)^{1/2} \tag{4}$$

donde $y(t)$ es una variable aleatoria normal de media cero y varianza unitaria, que no está correlacionada temporalmente. El límite de (4) cuando $h \to 0$ describe entonces un proceso de Wiener para la variable $s{\cdot}y(t){\cdot}(h)^{½}$ y podemos escribir la ecuación (1)

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + s\, y(t)(h)^{½} = \Pi\, dt + s\, dz$$

donde $dZ = y(t){\cdot}(h)^{½}$.

La expresión (1) dice que en un intervalo de tiempo corto el cambio proporcionado al nivel del precio es normal con media Πdt y varianza $s^2\, dz$.

Si escribimos:

$$dP = P\Pi\, dt + Ps\, dz \qquad (5)$$

$$y(t) = P(o)\, e^{(\Pi - \frac{S^2}{2})t + s\int_0^t dz} \qquad (6)$$

usando el lema de Itô se muestra que $y(t)$ satisface (5).

Sea:

$$F(t, z) = P(o)\ e^{(\Pi - \frac{S^2}{2})t + s\int_0^t dz}$$

Calculamos $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dF}{dz}$, $\frac{d^2F}{dz^2}$:

$$\frac{dF}{dt} = P(o)\ e^{(\Pi - \frac{S^2}{2})t + s\int_0^t dz} \left(\Pi - \frac{s^2}{2}\right) = y(t)\left(\Pi - \frac{s^2}{2}\right),$$

$$\frac{dF}{dz} = P(o)\ e^{(\Pi - \frac{S^2}{2})t + s\int_0^t dz}\ s = s\, y(t),$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} = P(o)\ e^{(\Pi - \frac{S^2}{2})t + s\int_0^t dz}\ s^2 = s^2\, y(t).$$

Aplicando la fórmula de Itô y haciendo las sustituciones necesarias, obtenemos:

$$dy = \frac{dF}{dt}\ dt + \frac{dF}{dz}\ dz + \frac{1}{2}\ \frac{d^2F}{dz^2}\,(dz)^2 = y(t)\left(\Pi - \frac{s^2}{2}\right)dt + s\, y(t)dz + \frac{1}{2}s^2\, y(t)(dz)^2$$

$$= y(t)\Pi dt + y(t)\frac{s^2}{2}dt + sy(t)dz + \frac{1}{2}s^2 y(t)dt$$

$$= y(t)\Pi dt + y(t)s\, dz.$$

Así pues, (6) satisface (5) como queríamos demostrar. Para una aplicación posterior consideremos los dos procesos de Itô:

$$\frac{dP}{P} = \Pi\, dt + s\, dz \qquad \text{y} \qquad \frac{dQ}{Q} = r\, dt.$$

Usamos el lema de Itô para calcular el proceso estocástico que describe la variable $q = u(P, Q) = Q/P$. Recordemos que la fórmula de Itô para este caso es:

$$dq = \frac{dq}{dt}dt + \frac{dq}{dP}dP + \frac{dq}{dQ}dQ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2q}{dP^2}(dP)^2 + 2\frac{d^2q}{dPdQ}dPdQ + \frac{d^2q}{dQ^2}(dQ)^2\right)$$

Calculando los diversos términos, obtenemos:

$$dq =$$

$$-\frac{Q}{P^2}dP + \frac{1}{P}dQ + \frac{1}{2}\left(\frac{2Q}{P^3}\right)(Ps)^2 dt = -\frac{Q}{P^2}(\Pi P dt + Psdz) + \frac{1}{P}(rQdt) + \frac{Q}{P}s^2 dt\,.$$

Finalmente,

$$\frac{dq}{q} = (r - \Pi + s^2)\, dt - s\, dz$$

que describe la tasa proporcional de cambio del rendimiento real de un activo que tiene un rendimiento nominal como en:

$$\frac{dP}{P} = \Pi\, dt + s\, dz, \quad \frac{dQ}{Q} = r\, dt.$$

BIBLIOGRAFÍA

1. BACHELIER, L. (1900), “Théorie de la Spéculation”, *Annales de l’Ecole Normale Superieure,17*, 21-86. Translated in Cootner, P.H., Ed. (1964), *The Random Character of the Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge, Massachussets, 17-75.
2. BICKSLER, J.L. eds. (1979), *Handbook of Financial Economics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam.
3. BISMUT, J.M. (1975), “Growth and Optimal Intertemporal Allocation of

Risks", *Journal of Economic Theory 10*, 239-257.

4. BLACK, F. – SCHOLES, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy, 81*, 637-654.
5. BOURGUIGNON, F. (1974), "A Particular Class of Countinuous-Time Stochastic Growth Models", *Journal of Economic Theory, 9*, 141-158.
6. BROCK, W.A. (1978), "Asset Prices in a Production Economy", University of Chicago working paper.
7. BROCK, W.A. – MAJUMDAR, M. (1979), "Global Asymptotic Stability Results for Multisectors Models of Optimal Growth under Uncertainty when Future Utilities are Discounted", Journal of Economic Theory *18*, 225-243.
8. BROCK, W.A. – MIRMAN, L. (1972), "Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case", *Journal of Economic Theory, 4*, 479-513.
9. COX, D.R. – ROSS, S.A. (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
10. COX, D.R. – INGERSOLL, J.E. - ROSS, S.A. (1978), "A Theory of The Term Structure of Interest Rates", Stanford University, Graduate School of Business working paper.
11. DELLACHERIE, C. (1974), *Integrales Stochastiques Par Rapport Aux Processus de Wiener et de Poisson*, Lecture Notes in Mathematics, no. 381, Springer-Verlag, New York.
12. DRIVER, C. – MORETON, D. (1993), *Inversión, Expectativas e Incertidumbre*. Colegio de Economistas de Madrid - Celeste Ediciones, Madrid.
13. HARRISON, J.M. – KREPS, D.M. (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory, 20*, 381-408.
14. HARRISON, J.M. – PLISKA, S.R. (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Countinuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications, 11*.
15. ITÔ, K. (1944), "Stochastic Integral", *Proceedings of the Imperial Academy*, Tokyo, 20, 519-524.
16. ITÔ, K. (1950), "Stochastic Differential Equations In A Differentiable Manifold", *Nagoya Mathematics Journal*, 1, 35-47.
17. LELAND, H.E. (1974), "Production Theory and the Stock Market", *Bell*

Journal of Economics and Management Science 5, 125-144.

18. LEVHARI, D – SRINIVASIN, T.N. (1969), “Optimal Savings under Uncertainty”, *Review of Economic Studies 36*, 153-163.
19. LEVY, H. - SARNAT, M. (1977) *Financial Decision Making under Uncertainty*, Academic Press, New York.
20. MAJUMDAR, M. (1975), “Equilibrium in Stochastic Economic Models”, in: R. Day and T. Groves, eds., *Adaptative Economic Models*, Academic Press, New York, 479-498.
21. MALLIARIS, I.G. (1978), “The Neoclassical Economic Growth Model under Uncertainty”, paper presented at the Econometric Society Meetings in Chicago.
22. MALLIARIS, I.G. (1981), “Martingale Methods in Financial Decision Making”, *SIAM Review, 23*, 434-443.
23. MALLIARIS, I.G. (1995), *Stochastc Methods in Economics and Finance*, Seventh Impression, North Holland, Amsterdam.
24. MARKOWITZ, H.M. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investiments*, John Wiley & Sons, New York.
25. MCCALL, J.J. (1971), “Probablilistic Microeconomics”, *The Bell Journal of Economics and Mangement Science, 2*, 403-433.
26. MERTON, R.C. (1971), “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Countinuous-Time Model”, *Journal of Economic Theory, 3,* 373-413.
27. MERTON, R.C. (1973a), “Theory of Rational Option Pricing”, *The Bell Journal of Economics and Mangement Science, 4*, 141-183.
28. MERTON, R.C. (1975) “An Asymptotic Theory of Growwth under Uncertainty”, *Review of Economic Studies 42*, 375-393.
29. MERTON, R.C. (1976), “Option pricing when underlying stock returns are discontinuous”, *Journial of Financial Economics 3,* 125-144.
30. MERTON, R.C. (1978), “On the Mathematics and Economic Assumptionsof Continuous-Time Models”, M.I.T. working paper 981-78.
31. MERTON, R.C. (1981), “On the Microeconomic Theory of Investiment under Uncertainty”, in: K.J. Arrow and M.D. Intrilgator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2, North-Holland Publishing Company,

Amsterdam.

32. MIRMAN, L.J (1973), “Steady State Behavior of One Class of One Sector Growth Models under Uncertain Technology”, *Journal of Economic Theory 6*, 219-242.
33. MIRMAN, L.J – ZILCHA, I. (1975), “On Optimal Growth under Uncertainty”, *Journal of Economic Theory 11*, 329-339.
34. PONTRYAGIN, L.S. ET AL., (1962), *The Mathematical Thery of Optimal Processes*, Wiley-Interscience, New York.
35. RADNER, R. (1874), “Market Equilibrum and Uncertainty: Concepts and Problems”, in: M.D. Intriligator and D. Kendrick, eds., *Frontiers of Quantitavie Economics*, North-Holland Publishing, Amsterdam, pp. 43-90.
36. SANDMO, A. (1971), “On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty”, *The American Economic Review, 84,* 207-37.
37. SMITH, W.C. Jr. (1979) “Option Pricing: A Review”, *Journal of Financial Economics, 3,* 3-51.
38. SOLOW, R.M. (1956), “ A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *Quaterly Journal of Economics, 70,* 65-94.
39. STIGUM, B. (1972) “Balanced Growth under Uncertainty”, Journal of Economic Theory 5, 42-68.
40. SZEGÖ, G. – SHELL, K., eds. (1972), *Mathematical Methods in Investiment and Finance*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
41. ZIEMBA, W.T. – VICKSON, R.G., eds. (1975), *Stochastic Optimization Models in Finance*, Academic Press, New York.