

ESTRATEGIAS ELECTORALES EN UN SISTEMA DEMOCRÁTICO. MODELO GEOMÉTRICO.

Abellanas, M.

Departamento de Matemática Aplicada de la Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lillo, I.

Departamento de Economía de la Facultad de C.C.S.S. y Jurídicas
Universidad Carlos III de Madrid

López, M^a D.

Departamento de Matemática Aplicada de la E.S.I. Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid

Rodrigo, J.

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Pontificia Comillas

RESUMEN

Este trabajo analiza un problema de Economía Política utilizando técnicas de Geometría Computacional. Dados dos partidos políticos se busca que uno de ellos, admitiendo que flexibilice su postura en diversas partes de su programa, consiga un mayor número de votantes.

Matemáticamente, los partidos se representarán en el plano, que llamaremos plano de políticas, por las coordenadas de los puntos p y q . Cada coordenada es un parámetro que indica la postura de cada partido en dos temas concretos de su programa político, la distancia entre puntos dará idea de la afinidad de las posturas relativas a dichos temas. La movilidad del partido p con la intención de convencer a los votantes es un entorno circular de radio determinado. Por último, los votantes son una nube de n puntos del plano de políticas. Se busca encontrar las situaciones óptimas para el partido p dentro del entorno, es decir, aquéllas para las que tenga más cerca un mayor número de puntos de la nube.

Palabras clave: Economía Política, Competición Política, Geometría Computacional.

1. INTRODUCCIÓN

La Economía Política o Economía Pública, hace un balance entre los intereses de los diferentes votantes en conflicto y los partidos políticos [5,6]. Estudia las preferencias políticas de la distribución de los votantes de una población atendiendo a factores socioeconómicos que se incorporan a la política pública. Estos se derivan de las diferencias de renta, edad, situación laboral, etc. Los modelos unidimensionales del espacio sobre el que se distribuyen las preferencias de los votantes son excesivamente simplistas, ya que representar todas las áreas políticas de un partido por un solo parámetro no ilustra la realidad. Por ejemplo, si analizamos conjuntamente la Política Fiscal y la Política Exterior, un partido que tiene ideas intervencionistas en Política Exterior no tiene por qué apoyar también una Política Fiscal recaudadora, es decir, un solo valor no caracteriza las dos políticas a la vez.

Además, la resolución de estos problemas en los que se utiliza la Teoría de Juegos para estudiar posibles estrategias, consiste, básicamente, en la búsqueda del llamado votante "mediano", es decir, aquél que corresponde con la posición de la mediana o elemento central [8].

Este trabajo aborda la resolución de un problema de Economía Política por medio de herramientas de Geometría Computacional [4,7]. Si se asume que las diferentes opciones políticas acerca de dos temas distintos, a concretar en cada caso, se representan por las coordenadas de los puntos del plano, que llamaremos plano de políticas, la distancia entre ellos dará idea de la afinidad de las posturas relativas a dichos temas. Con estas consideraciones, el problema es el siguiente:

"Consideramos dentro del plano de políticas dos partidos políticos dados por las coordenadas de p y q y la localización de los n votantes representada por los puntos v_i . Trazamos la mediatriz de pq y así podemos calcular cuál es el número de votantes que elige a cada partido por proximidad a cada idea. Con el objetivo de conseguir el mayor número posible, aceptamos que un partido cambia sus políticas dentro de un entorno circular de un cierto radio. Buscamos encontrar las situaciones óptimas para éste dentro del entorno, es decir, aquéllas para las que el semiplano correspondiente contiene mayor número de votantes."

Este problema se puede ver como una versión discreta del Juego de Voronoi. En aquél, dos jugadores sitúan varios puntos en el plano con la finalidad de ganar el mayor área posible [2,3]. En el presente problema se sitúan dos puntos con la finalidad de ganar el mayor número posible de puntos en vez de mayor área.

Modelos parecidos de localización de puntos han sido estudiados en diferentes campos entre los que se encuentra la Organización Industrial, Tratamiento de Imágenes, Movimiento de Robots, etc. La mayoría de ellos consideran la población como un continuo [1]. En este artículo la novedad consiste en trabajar con una población discreta y la aplicación de técnicas y resultados de la Geometría Computacional adaptados al problema.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Si asumimos que cada partido muestra su programa político eligiendo, por ejemplo, su Política Fiscal y su Política Exterior por medio de dos parámetros (coordenadas de un punto del plano), tendremos determinado nuestro plano de políticas.

Sean los partidos políticos p y q situados en los puntos (p_1, p_2) y (q_1, q_2) y (v_{i1}, v_{i2}) con $i=1, \dots, n$, las coordenadas de la nube de n puntos que representan los n votantes de una cierta población.

El conjunto de votantes del partido p estará más cerca de la posición de p que de la de q . Se tendrán dos semiplanos en los que queda dividido el plano de políticas cuando se traza la mediatriz del segmento pq .

En política es habitual que se admita una ligera variación en los programas de los partidos con el fin de conseguir un mayor número de votos. Admitimos que sólo el partido p flexibiliza sus opciones, es decir, se mueve en un cierto entorno. El entorno en el que p se puede mover es el disco de radio r . Buscamos la mejor situación para p dentro de este entorno, aquella desde la que consigue acercarse a un mayor número de votantes.

PROPOSICIÓN 1: Una situación óptima para p , \hat{p} siempre se encuentra sobre la frontera de dicho entorno, y es el arco más próximo a q situado entre las dos tangentes trazadas desde q a la circunferencia (parte visible del entorno de p desde q).

Demostración:

Consideramos un punto del interior p' y trazamos la mediatriz correspondiente a p' y q . Cualquier punto situado en la línea que une p' y q tendría su mediatriz correspondiente paralela a la anterior, es decir, cuanto más nos acerquemos a la frontera su región, es decir, el semiplano correspondiente será mayor y contendrá a los anteriores. Como consecuencia hay más posibilidad de captar más puntos.

Consideramos un punto p' de la frontera situado fuera del arco más próximo a q y trazamos la mediatriz correspondiente a p' y q . El punto p'' intersección de la recta que une p' y q con el arco dicho tiene una mediatriz de $p''q$ paralela a la calculada. Comprobamos así que su región contendrá a la anterior. [Fig. 1]

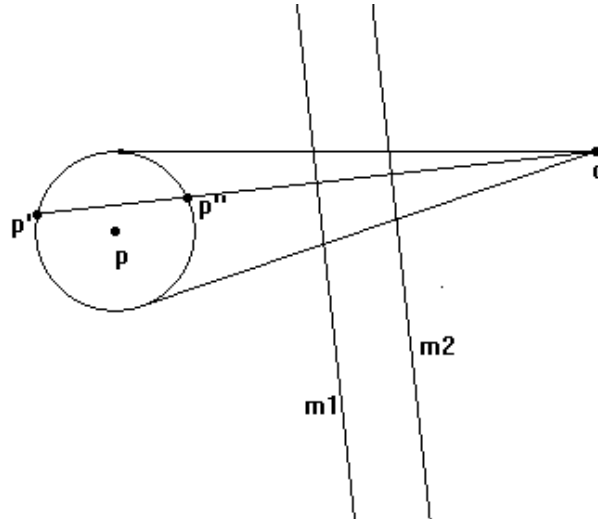


Figura 1

3. ALGORITMO DE RESOLUCIÓN

Desarrollamos ahora el algoritmo que nos permite obtener para el partido p la región de la parte visible desde q que consigue el máximo número de votantes.

3.1. Clasificación de los puntos de la nube.

Los puntos de la nube se clasifican en tres conjuntos según puedan o no ser capturados por la región de Voronoi de las posibles localizaciones de p , p^* , al moverlo en la circunferencia centrada en p y de radio r :

1.- Puntos que nunca se pueden atrapar:

Los puntos (v_{i1}, v_{i2}) que pertenecen al siguiente conjunto:

$$\{(x,y)/d[(x,y),\text{circunferencia}] > d[(x,y),q]\}, \text{ es decir,}$$

$$\{(x,y)/d[(x,y),p]-r > d[(x,y),q]\} = \{(x,y)/d[(x,y),p]-d[(x,y),q] > r\}$$

La frontera del conjunto es $\{(x,y)/d[(x,y),p]-d[(x,y),q] = r\}$: la rama de la hipérbola de focos p y q y distancia $2a=r$, más próxima a q . (Zona 1 en figura 2).

2.- Puntos que siempre se atrapan:

Los puntos que pertenecen al conjunto:

$\{(x,y) / \text{máximo}\{d[(x,y),(c_1,c_2)] \text{ con } (c_1,c_2) \in \text{circunferencia}\} < d[(x,y),q]\}$ es decir,
 $\{(x,y) / d[(x,y),p] + r < d[(x,y),q]\}$

Así:

$\{(x,y) / d[(x,y),q] - d[(x,y),p] > r \}$

La frontera del conjunto es $\{(x,y) / d[(x,y),q] - d[(x,y),p] = r \}$, la rama de la hipérbola de focos p y q y distancia $2a=r$, más próxima a p . Esta zona se puede ampliar ya que la posición de \hat{p} se restringe al arco visible y, en realidad, se amplía a la limitada por las mediatrices. (Zonas 2 y 4 en figura 2).

3.- Puntos que se pueden ganar, los dudosos:

El punto óptimo se encuentra en el arco más cercano a q comprendido entre p' y p'' , (puntos de tangencia de las rectas tangentes desde q a la circunferencia).

Sólo se podrán coger como puntos dudosos de la nube los situados en la región limitada por las dos mediatrices de qp' y qp'' y el arco de hipérbola más cercano a q . (Zona 3 en figura 2).

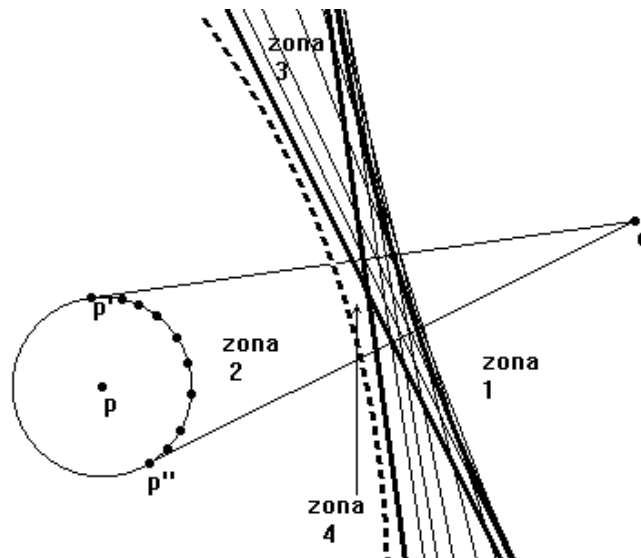


Figura 2

Se demuestra fácilmente que:

- Las mediatrices correspondientes recorren una zona central delimitada por la rama de hipérbola más cercana a q cuyas asíntotas son las mediatrices entre q y los puntos de tangencia, y por dichas asíntotas por el lado cercano a p .
- Los puntos de la nube de esta zona central, según dónde estén situados, entrarán y saldrán de la región según movemos el punto p una o dos veces.

3.2. Desarrollo del algoritmo

El algoritmo que se describe a continuación se basa en la localización de intersecciones de circunferencias. Por un lado, tenemos la circunferencia centrada en p que nos indica el entorno de flexibilidad para el partido político correspondiente, por otro, para cada votante v_i trazaremos la circunferencia centrada en dicho punto y que pasa por q , ya que si la distancia a p es menor que a q , el primer partido podrá contabilizar a v_i como votante propio.

Sea C la circunferencia frontera del círculo centrado en el punto p en el que éste puede moverse. Supondremos que el punto q es exterior a C . Sean p' y p'' los puntos de tangencia entre C y las rectas tangentes a C trazadas desde q . p' el punto de tangencia derecho y p'' el izquierdo vistos desde q .

Supondremos que los puntos v_i son exteriores a C . Para cada punto v_i sean x'_i y x''_i los puntos de intersección entre C y la circunferencia centrada en v_i que pasa por q . x'_i el punto de intersección derecho y x''_i el izquierdo vistos desde v_i . [Fig. 3].

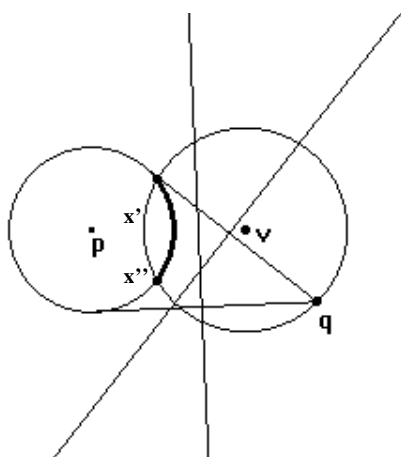


Figura 3

El algoritmo es como sigue:

Paso 1: Hallar los puntos p' y p'' e iniciar un contador c' con el valor inicial cero.

Paso 2. Iniciar una lista L vacía y un contador m con el valor cero. Para cada punto v_i hallar la intersección de C con la circunferencia centrada en v_i que pasa por q .

- 2.1.** En caso de que no se corten, porque la circunferencia C está contenida en el círculo centrado en v_i que pasa por q , aumentar el contador m una unidad.
- 2.2.** Si no se cortan por ser disjuntos los correspondientes círculos, el contador m conserva su valor.
- 2.3.** Si se cortan en dos puntos y ninguno pertenece al arco visible, aumentar m una unidad.
- 2.4.** En otro caso, realizar las siguientes operaciones:
- 2.4.1.** Si ambos pertenecen al arco de C visible desde q , incluirlos en la lista L .
 - 2.4.2.** Si x'_i pertenece a dicho arco y x''_i no, incluir x'_i en L .
 - 2.4.3.** Si x''_i pertenece a dicho arco y x'_i no, incluir x''_i en L y aumentar una unidad el contador c' .
- Paso 3.** Ordenar los puntos de la lista L angularmente respecto de p en sentido horario.
- Paso 4.** Iniciar un contador c con el valor de $c'+m$ y asignar a una variable x el punto p' . Recorrer la lista L efectuando en cada elemento las siguientes operaciones:
- 4.1.** Si es un punto x'_i , aumentar el contador c una unidad y, en caso de que c sea mayor que m , asignar a m el valor c y a x el punto x'_i .
 - 4.2.** Si es un punto x''_i , disminuir el contador c una unidad.
- Observación: en caso de que los puntos x'_i y x''_i coincidan por ser las correspondientes circunferencias tangentes, se considerará x'_i anterior a x''_i en la lista L .

Al finalizar la ejecución del algoritmo, el contador m indica el número máximo de puntos v_i que el punto p puede conseguir más próximos a él que a q , situándose en un punto del arco de C cuyo extremo inicial es el punto almacenado en la variable x y el final el siguiente a dicho punto en la lista L .

La complejidad del algoritmo, en el peor caso, es $O(n \log n)$, ya que: el paso 1 se realiza en tiempo constante. El paso 2 realiza una cantidad constante de operaciones por cada punto v_i , por lo que se ejecuta en total en tiempo lineal. El paso 3 es el que requiere $O(n \log n)$ operaciones en el peor caso, pues se trata de una ordenación de una lista de n elementos. Y el paso 4 requiere una cantidad de operaciones proporcional al número de elementos de la lista L , que en el peor caso es lineal.

Observaciones: En referencia a la clasificación de los puntos según las zonas a las que corresponden (ver apartado 3.1. y figura 2), podemos afirmar que cada tipo de puntos de nuestro algoritmo pertenece a una de ellas. Así:

- Los puntos v_i del paso 2.1. son los que están en la zona 2.
- Los puntos v_i del paso 2.2. son los que están en la zona 1, puntos que nunca votarán al partido p .
- Los puntos del paso 2.3. están en la zona 4 que, junto los de la zona 2, siempre se ganan.
- Y por último, los del paso 2.4. son de la zona 3, puntos que hemos llamado dudosos, ya que pueden acabar votando a p . Los del paso 2.4.1 están situados entre las mediatrices, que son asíntotas de la hipérbola, y la rama de la hipérbola más cercana a q . Los del paso 2.4.1. estarán en la parte izquierda, mirando desde q , situada entre las dos mediatrices. Y los del paso 2.4.3. en la parte derecha desde q entre las mismas rectas.

4. CONCLUSIONES

Se ha dejado constancia de que conceptos de Geometría Computacional aplicados a la Economía permiten resolver problemas en el área de Economía Política. En dicha área se soluciona el problema de captar mayor número de votos situándose en la posición del votante mediano. En este artículo, las técnicas empleadas aportan una visión nueva. Se comprueba cómo, en el caso de escoger un modelo en el que la población es discreta, los modelos de la Geometría Computacional se adaptan de forma natural a este modelo, dando algoritmos que obtienen soluciones óptimas para la captación de votos con un coste menor que cuadrático.

El algoritmo desarrollado permite considerar variaciones del problema inicial que pueden ilustrar diferentes situaciones reales como son la flexibilidad en los programas políticos con la intención de conseguir ganar las elecciones y la

consideración de unos límites en la intención del votante para apoyar unas políticas concretas de un partido.

5. REFERENCIAS

- [1] Ahn, H., Cheng, S., Cheong, O., Golin, M. And Oostrum, R. (2001). *Competitive Facility Location along a Highway*. 7th Annual International Computing and Combinatorics Conference, Volume 2108 of LNCS.
- [2] Chong, O., Har-Peled, S. Linial, N., Matousek, J. (2002) *The One-Round Voronoi Game*.
- [3] Fekete, S. Meijer, H. (2003) *The One-Round Voronoi Game Replayed*.
- [4] O'Rourke, J. (1998) *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press.
- [5] Persson, T., Tabellini, G. (1999) *Political Economics and Public Finance*. NBER Working Papers Sries. Handbook of Public Economics, Vol III.
- [6] Roemer, J. (2001) *Political Competition*. Harvard University Press.
- [7] Preparata, F., Shamos, M. (1985) *Computational Geometry. An introduction*. Springer-Verlag. New York.
- [8] Watson, J. (2002) *Strategy. An introduction to Game Theory*. WWNorton & Company.