VISUALIZACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Ana Isabel Busto Caballero
Departamento Economía Financiera y Contabilidad I
Universidad Complutense Madrid

RESUMEN

Los alumnos de la licenciatura en Administración y Dirección de Empresas tienen dentro de los contenidos del programa de la asignatura "Matemáticas Empresariales I", el estudio de las funciones de varias variables: continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad y optimización. Este tema es complicado de visualizar con tiza y pizarra, a diferencia del mismo estudio realizado para funciones reales de variable real.

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología para llevar el ordenador a clase y visualizar las gráficas de las funciones de dos variables y sus características específicas, que faciliten la comprensión del tema por parte del alumno, y conseguir que los resultados obtenidos analíticamente tengan un aspecto gráfico e intuitivo.

Palabras clave: Funciones de dos variables, Gráficos, Metodología con ordenador

1. INTRODUCCIÓN

La mayor dificultad que presentan las Matemáticas reside en la gran capacidad de abstracción que se requiere para acercarse a ellas. Constantemente nos encontramos con conceptos abstractos que necesitan un gran esfuerzo por parte de nuestro cerebro para ser asimilados y ser considerados como algo propio, es decir, entendible.

Para muchas personas es realmente difícil llegar a este grado de abstracción, incluso son complicados para ellas algunos temas elementales, de ahí que las Matemáticas no sea una de las asignaturas predilectas de muchos estudiantes ya desde la Educación primaria.

A veces, en nuestro trabajo diario como docentes, cuando abordamos los diferentes temas en clase nos olvidamos de este punto vital: la abstracción es el mayor desafío al que se enfrentan nuestros alumnos.

¿Y cuál es el nuestro?, es decir, ¿cuál es nuestro mayor desafío como profesores de Matemáticas?: Facilitar el camino hacia la abstracción.

A veces no recordamos que nosotros mismos, cuando éramos estudiantes, nos hemos tenido que aprender muchas definiciones y demostraciones de teoremas sin entenderlas plenamente, sólo porque entraban en el examen. Para el profesor que las explicaba eran cosas fáciles y sencillas que manejaba con toda naturalidad, pero a nosotros nos parecían extremadamente complicadas, tanto que nos sentíamos pequeños y estúpidos por no ser capaces de entender algo que el profesor calificaba como trivial. El tiempo, el esfuerzo y más tarde el tener que enseñar esas mismas cosas, hicieron que se fueran aclarando en nuestra mente, y que al fin nuestra comprensión de ciertos conceptos fuese completa.

Como antes señalábamos, nuestro trabajo como buenos profesionales de la enseñanza matemática consiste en facilitar a nuestros alumnos el camino hacia la abstracción y la comprensión de conceptos, la mayoría difíciles para ellos, y así acercarles la asignatura a niveles que puedan ir asimilando gradualmente, logrando que incluso les guste lo que están aprendiendo.

¿Cómo podemos hacerlo? Señalaremos algunos aspectos:

Podemos plantear problemas prácticos e interesantes que el alumno no pueda resolver por falta de las herramientas matemáticas necesarias para ello, pero que adquirirá con las explicaciones del próximo tema.

Nunca debemos usar terminología o palabras técnicas que no hayamos explicado antes de una manera clara o que no hayamos dado tiempo suficiente para que los alumnos asimilen e introduzcan en su vocabulario, de tal manera que las usen como cualquier otro término conocido, es decir, que no tengan que pensar su significado cuando las utilicemos, ya que de otra manera, al tener que detenerse a pensar en lo que significan, pierden el hilo del razonamiento de la explicación.

Tenemos que ejercitar un concepto nuevo, reiteradamente antes de introducir otro de mayor dificultad, para facilitar su comprensión.

Debemos graduar la dificultad de los ejercicios prácticos que proponemos para motivar al alumno a su resolución, haciéndole ver que él también puede tener éxito con un poco de esfuerzo y atención.

Tenemos que relacionar conceptos aparentemente dispares para dar una visión global de los contenidos matemáticos.

Es necesario que introduzcamos cada punto utilizando los conceptos más concretos posibles y que vayamos siguiendo una línea de pensamiento creciente en abstracción.

Hemos de utilizar todos los medios a nuestro alcance para que el alumno visualice el problema que tenemos que resolver usando representaciones gráficas adecuadas, bien dibujando en la pizarra, bien empleando transparencias o valiéndonos del ordenador.

2. LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES DE DOS VARIABLES

El estudio de las funciones es una de las partes más importantes de las Matemáticas y la más utilizada en sus aplicaciones a otras ciencias, por eso ocupa una gran parte del programa del primer curso de todas las asignaturas de Matemáticas Empresariales en la licenciatura de Administración y Dirección de Empresas.

Los problemas reales que se pueden resolver utilizando funciones son muchos y muy variados, por lo que es un buen tema para utilizar una metodología basada en los puntos anteriormente citados.

Cuando tratamos problemas en una variable, es relativamente fácil hacer una buena representación gráfica de ellos utilizando la tiza y la pizarra ya que se trata de dibujar en dos dimensiones. Además los alumnos están acostumbrados a representar e interpretar funciones reales de variable real desde los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. El estudio de la continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad y los problemas de optimización cobran vida y se entienden bien con la representación de la gráfica de la función que se estudia.

El problema se presenta cuando empezamos a estudiar funciones de dos variables, el dibujo en el espacio es posible, pero demasiado complicado para hacerlo en la pizarra. Algunas veces hemos intentado hacer la gráfica de alguna función sencilla para reforzar nuestras explicaciones, pero casi siempre son las mismas: planos, esferas, elipsoides, el famoso paraboloide hiperbólico o silla de caballo y poco más, siempre sin problemas de continuidad, asíntotas o diferenciabilidad, y en donde los puntos críticos eran fáciles de distinguir.

Otras veces buscábamos en los libros alguna gráfica que nos ayudara en las explicaciones y dábamos fotocopias a los alumnos o hacíamos alguna transparencia con ellas. Pero las posibilidades de encontrar gráficas interesantes eran muy limitadas.

Los alumnos querían visualizar la función que estaban estudiando en ese momento, tal y como estaban acostumbrados en funciones de una variable, querían ver con sus propios ojos cómo los rasgos de la gráfica de esa función coincidían con el resultado del estudio analítico que estaban realizando, en una palabra, su proceso de abstracción necesitaba algo tangible y concreto para seguir avanzando, pero... la mayoría de las veces no se lo podíamos mostrar.

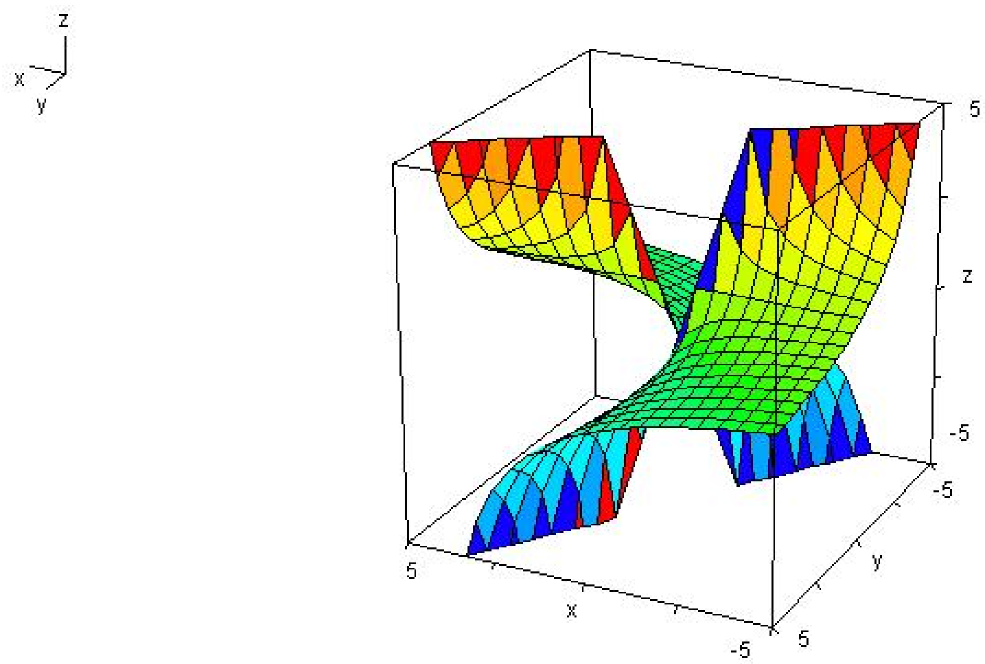
Ahora la situación a cambiado por completo. El ordenador ha hecho desaparecer los antiguos obstáculos y por fin podemos observar la gráfica de cualquier función de dos variables reales.

Utilizando un programa sencillo como es el Derive, con sólo escribir la función que es objeto de nuestro estudio aparece su gráfica. Además, podemos girarla y así observarla desde cualquier punto de vista, podemos ver su comportamiento en la dirección de cualquier vector, observar sus direcciones asintóticas, su continuidad,. sus máximos y mínimos relativos y cualquier otra característica.

Ya no estamos hablando de cosas abstractas que ni siquiera podemos imaginar, la visualización de los problemas hace que lleguemos a su comprensión. Estamos abriendo el camino para el estudio de otras funciones que no tienen representación gráfica en nuestra dimensión, es decir, las funciones de más de dos variables. Estamos cumpliendo con nuestro objetivo como docentes: facilitar el proceso de abstracción de nuestros alumnos.

3. CASOS PRÁCTICOS

Por ejemplo, la representación gráfica de la función $z = \frac{x+y}{x-y}$ es la que vemos a continuación.



Al calcular analíticamente el límite en el punto (0,0) según la dirección de un vector cualquiera, llegamos a la expresión:

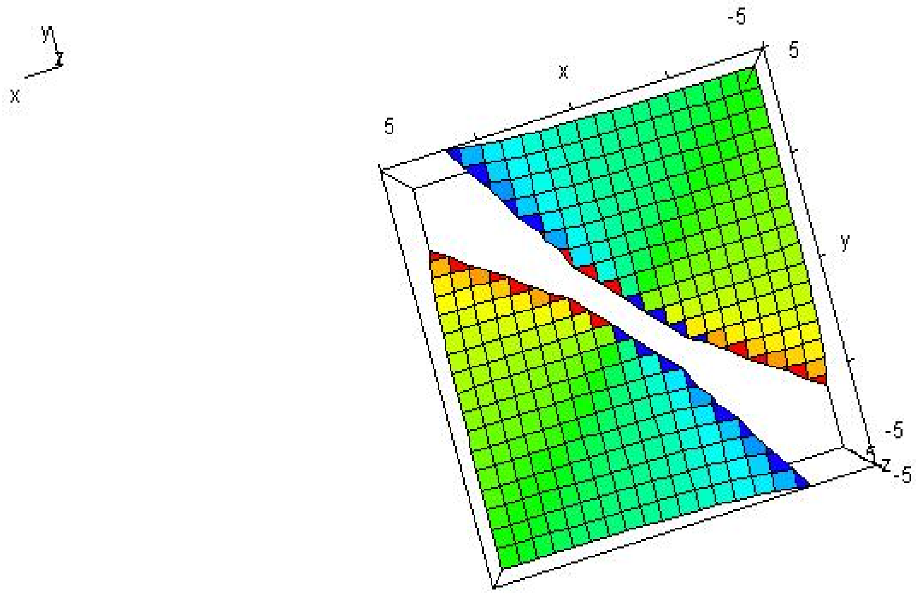
$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f_v(x) = \frac{v_1+v_2}{v_1-v_2}$$

Expresión que toma un valor distinto para cada dirección, por lo que la función no tiene límite en el punto (0,0).

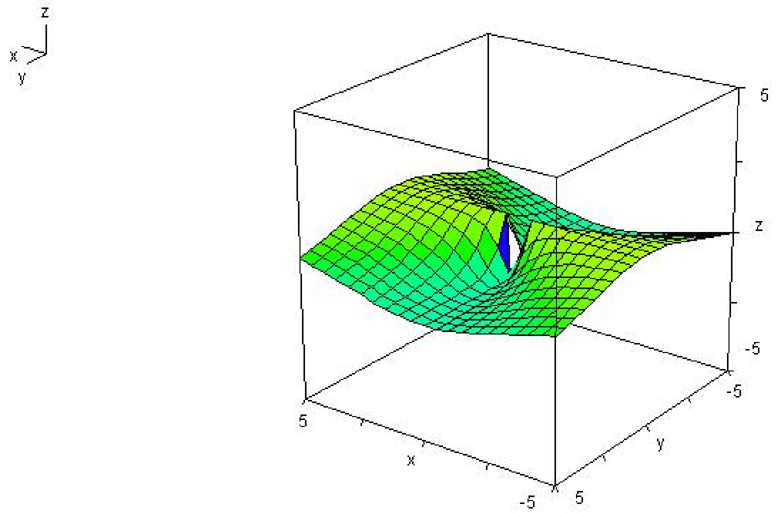
Sin embargo, podemos observar que si $v_1=v_2$ el denominador se anula y el numerador no, por lo que en la dirección (λ,λ) la función presenta una dirección asintótica.

También notamos que si $v_1=-v_2$ el numerador se anula mientras que el denominador no, es decir, el límite en la dirección $(\lambda,-\lambda)$ es cero. Tenemos un ejemplo de discontinuidad evitable. Por lo tanto bastaría definir la función en (0,0) como f(0,0)=0 para que fuese continua en dicha dirección.

Lo obtenido analíticamente lo podemos visualizar rotando la gráfica con el ordenador y obteniendo una proyección sobre el plano XY.

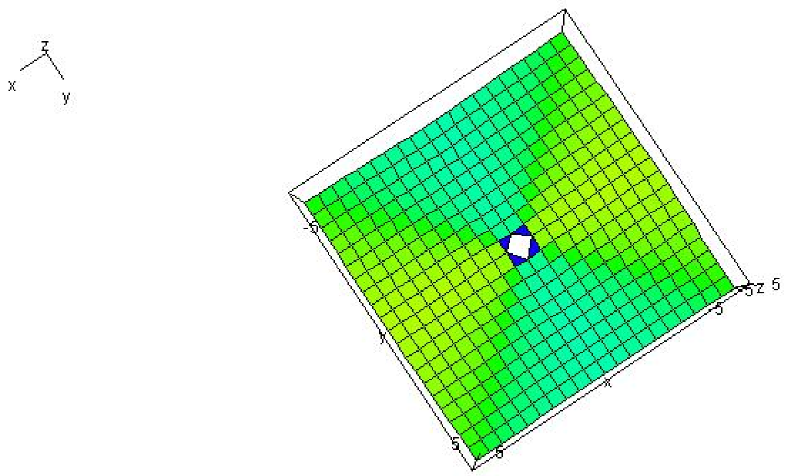


Otra función que podemos utilizar para explicar la continuidad en unas direcciones y la discontinuidad en otras, en el mismo punto, es $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

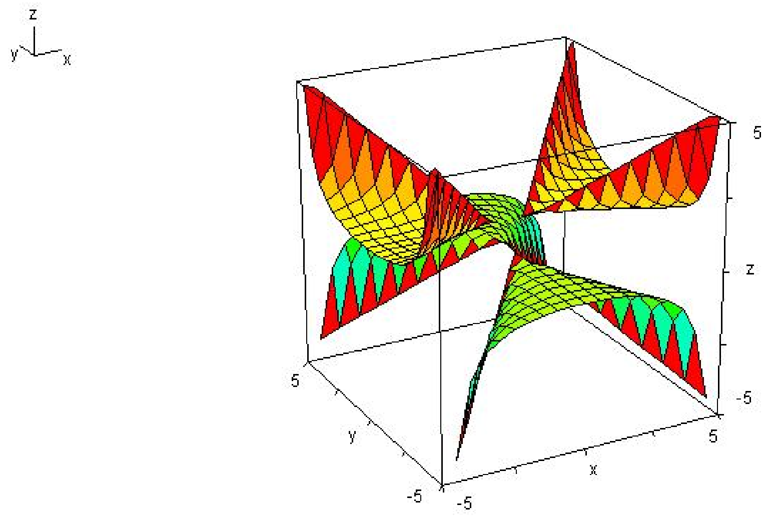


El $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f_v(x_1,x_2) = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$, como dicho límite depende de la dirección, la función no tiene límite en (0,0).

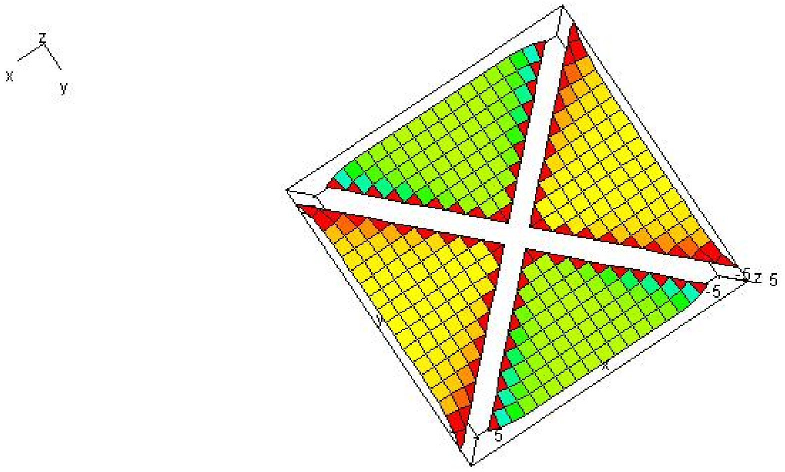
Presenta discontinuidades evitables en las direcciones (λ,λ) y (λ,-λ) y No tiene direcciones asintóticas por no anularse el denominador en ningún punto del dominio.



También es interesante la función es $z = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$, pues analíticamente podemos observar que en las direcciones (λ,λ) y (λ,-λ) presenta comportamientos asintóticos y en cada una de las direcciones (0,λ) y (λ,0) tiene una discontinuidad evitable.

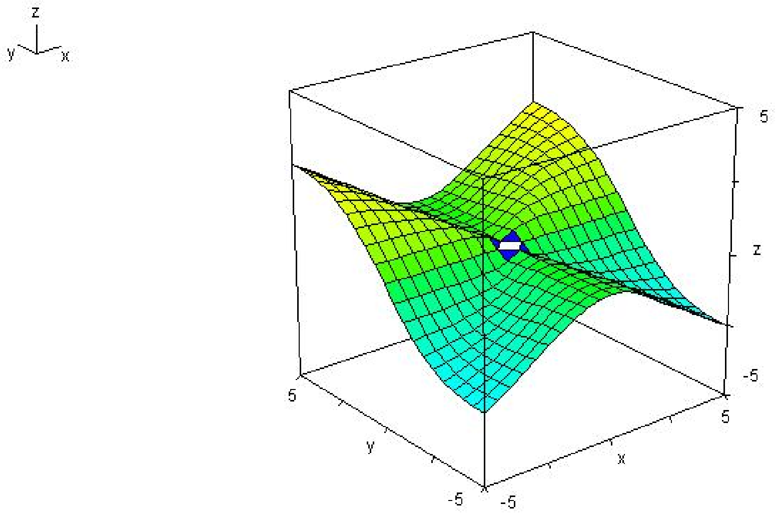


La comprobación mediante el giro de la gráfica proyectándola en el plano XY es sencilla.



Para estudiar una función discontinua en un punto, pero con límite en él, podemos emplear

$$z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$



Esta función en el punto (0,0) presenta una discontinuidad evitable en cualquier dirección.

Al hablar de derivadas según un vector, derivadas direccionales y derivadas parciales, podemos utilizar gráficas en las que aparecen las intersecciones de superficies con planos.

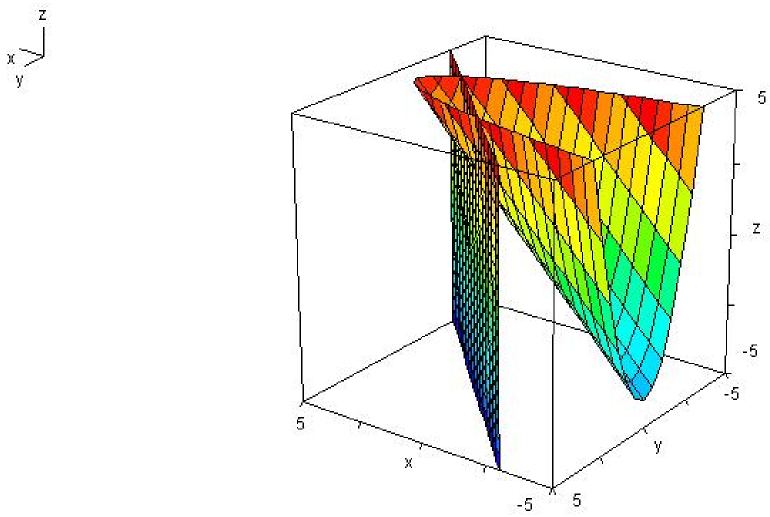
Por ejemplo, antes de calcular analíticamente la derivada de la función $z = 1+x+y^2$ en el punto (1,1) según la dirección del vector $\vec{v}$ (-1,1) intentaremos explicar su significado geométrico.

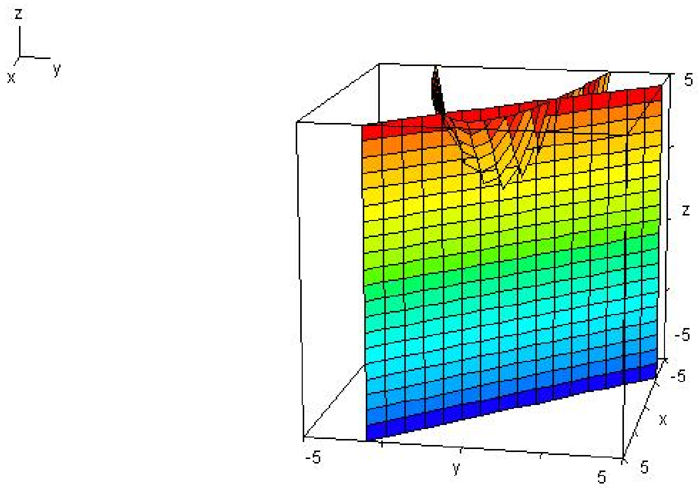
Para ello, primero calculamos la ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,3) y es paralelo a los vectores $\vec{v}$ (-1,1,0) y $\vec{u}_3$ (0,0,1), que en este caso es x+y-2=0.

A continuación, utilizando el Derive, dibujamos en la misma gráfica dicho plano y la superficie a estudiar, para fijarnos en la línea que resulta de su intersección.

Por último explicamos el significado de la derivada direccional, pendiente de la recta tangente a dicha línea en el punto indicado, y de la derivada según un vector, que es proporcional a la pendiente anterior.

Lo mismo haremos para las derivadas parciales, cuyo dibujo con tiza y pizarra todos sabemos hacer recurriendo a funciones sencillas.

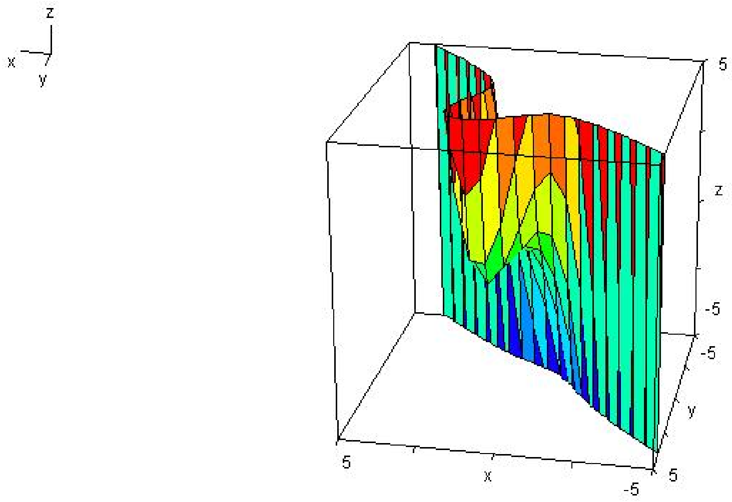




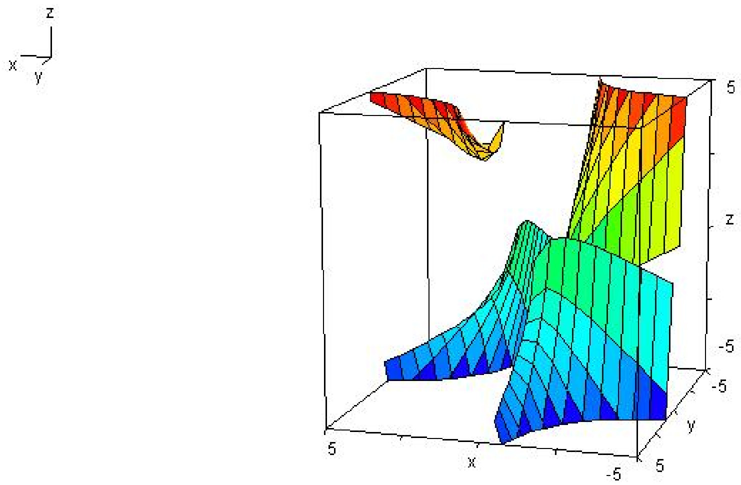
Para el estudio de los máximos y mínimos relativos son muchas las funciones que podemos visualizar.

Por ejemplo:

$Z = x^3+y^3-3xy$, que presenta un mínimo relativo estricto en el punto (1,1) y un punto de silla en el (0,0)



O también $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ con un mínimo relativo estricto en (1,1)



4. CONCLUSIONES

- Las Matemáticas son una disciplina abstracta y por tanto difícil de entender para la mayoría de los alumnos.
- Los profesores de Matemáticas debemos facilitar al alumnos el proceso de abstracción utilizando cualquier metodología a nuestro alcance.
- Los alumnos están acostumbrados a dibujar e interpretar las gráficas de las funciones de una variable.
- El estudio de las funciones de dos variables se puede efectuar utilizando algunos programas de ordenador como el Derive, ya que con su ayuda podemos visualizar sus gráficas y sus características.
- La continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad y optimización pueden ser mejor comprendidas por el alumno si nos apoyamos en sus gráficas obtenidas con el ordenador.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Gutiérrez , S. ; Franco, A. (1997): Matemáticas aplicadas a la Economía y la Empresa. AC, Madrid.
- Guzmán, M. De (2003): Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas. Anaya, Madrid.
- Guzmán, M. De (1991): Para pensar mejor. Labor, Barcelona.
- Puig Adam, P. (1960): La matemática y su enseñanza actual. Condor. Revista Enseñanza Media. Madrid
- Vilar, J.L. y varios (1993): Cálculo diferencial para la Economía. Un enfoque teórico-práctico. AC, Madrid.