SELECCIÓN DE UNA CARTERA DE VALORES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE MÉTODOS MULTIOBJETIVO INTERACTIVOS A DATOS REALES DE LA BOLSA ESPAÑOLA

Rafael Caballero Fernández, Mercedes González Lozano, Mariano Luque Gallego, Rafael Rodríguez Avilés.

Universidad de Málaga

RESUMEN

En este trabajo aplicamos diversos métodos multiobjetivo interactivos a datos reales de la bolsa española, en concreto datos semanales del periodo 1995-2002. En nuestro modelo consideramos 5 funciones objetivo relacionadas con el deseo del decisor de maximizar la rentabilidad obtenida soportando el menor riesgo posible. Así, tratamos de maximizar la rentabilidad, minimizar la beta de la cartera como representante del riesgo sistemático, minimizar la desviación estándar y la covarianza las cuales recogen el riesgo global soportado y, por último, minimizar la varianza de los residuos como representante del riesgo específico. Tras obtener una solución mediante el método interactivo G-D-F, y tras solicitar información sobre sus preferencias al decisor, vamos cambiando de método para aprovechar las ventajas de cada uno hasta obtener una solución aceptada por el decisor.

1. INTRODUCCIÓN

Es de todos conocido que la selección de carteras es una de la piezas angulares de la moderna gestión de activos financieros. En los últimos tiempos se ha producido un aumento de las inversiones en artículos bursátiles existiendo varias razones que justifican la formación de una cartera, tanto para un particular como para una empresa o institución, pudiéndose destacar la obtención de una rentabilidad y liquidez aceptables de recursos ociosos eventualmente, conseguir a largo plazo que los excedentes permanentes nos proporcionen una renta complementaria al término de nuestra vida laboral, como es el caso de los fondos de pensiones, o adquirir las participaciones necesarias en una compañía para poder ejercer un control efectivo sobre su gestión.

En este trabajo vamos a formular un modelo que intente dar respuesta a nuestro decisor, un agente privado que desea invertir en bolsa. En concreto desea conseguir una cartera de valores que coticen en el mercado continuo español formado, aproximadamente, por 130 títulos, dependiendo, la elección de los títulos y cantidad que se va a invertir en ellos, de cuáles sean las preferencias de nuestro decisor. Como es lógico deseará aquellos que proporcionen una mayor rentabilidad pero, normalmente, son los que presentan más riesgo, o son los menos líquidos,... Luego, debemos evaluar diversas alternativas según el valor que alcanzan en ellas diversos criterios en conflicto. Por tanto, desde el punto de vista matemático debemos de utilizar técnicas que tengan en cuenta no sólo un criterio sino varios y, por consiguiente, el óptimo de uno no va a coincidir con el óptimo de otro.

Por todo ello, vemos que la formulación de nuestro modelo requiere la utilización de las técnicas de programación multiobjetivo. De hecho el modelo pionero de Markowitz (1952) de selección de carteras es un problema biobjetivo. Además existen múltiples ejemplos de la aplicación de técnicas multiobjetivo a la selección de carteras como son los trabajos de Lee y Lerro (1973), Lee y Chesser (1980), y Powell y Premachandra (1998).

En concreto, en este trabajo, vamos a aplicar las técnicas interactivas en las que, a través de una interacción continua e iterativa con el decisor, para que éste explicite preferencias sobre carteras que le son mostradas, se consigue que el decisor se acerque a una solución acorde con dichas preferencias siendo el esfuerzo por reflejar las preferencias del decisor fundamental, tanto en el método a emplear como en el proceso de resolución.

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Ya hemos indicado que nuestro propósito es seleccionar una cartera formada por títulos del mercado bursátil español. Para ello contamos con datos reales de la bolsa española, en concreto datos semanales que van desde enero de 1995 hasta septiembre de 2002, periodo largo en el que se pueden considerar tres tipos de escenario: estable, crecimiento y decrecimiento, según los valores alcanzados por el índice general de la bolsa de Madrid (IGBM).

Es evidente que la conducta racional de un inversor en bolsa consiste en buscar aquella composición de la cartera que haga máximo su rendimiento soportando el menor riesgo posible. Por ello, a la hora de formular nuestro modelo debemos tener en cuenta como función objetivo, en primer lugar la rentabilidad de la cartera, la cual viene dada por la media de la rentabilidad de cada título ponderada por su participación en la cartera, siendo la rentabilidad de cada título la rentabilidad media de las rentabilidades, en nuestro caso, semanales, calculadas como el logaritmo del cociente entre el precio del cierre de un momento y el mismo en el momento anterior. No consideramos los dividendos como medida de rentabilidad porque en el mercado español se dan muy esporádicamente y además con una periodicidad muy variable.

En segundo lugar, tenemos que tener en cuenta medidas de riesgo. Nosotros incluimos la covarianza de la cartera, que representa el riesgo global de esta, calculada como el producto del vector traspuesto de las proporciones por la matriz de covarianzas por dicho vector, con lo cual tenemos una función cuadrática desde el punto de vista matemático. Por otra parte, para aumentar la prudencia de la inversión, evaluamos la desviación estándar de la cartera, como la media de las desviaciones estándares de las rentabilidades de los títulos ponderadas por su proporciones. Además se suelen considerar otros dos tipos de riesgo, el sistemático y el específico. El primero, que recoge las influencia de la evolución de la bolsa sobre los títulos, se mide mediante la beta de la cartera, o producto escalar del vector de proporciones por el vector de betas siendo este último el vector de coeficientes de regresión entre las rentabilidades de cada título y la rentabilidad del índice general de la bolsa. El segundo, que recoge la volatilidad propia de cada título, independientemente de la evolución del mercado, se calcula mediante el producto escalar del vector de proporciones por el vector de varianzas residuales del anterior análisis de regresión. Por lo tanto, nos encontramos con 5 funciones objetivo, las cuales pasamos a formular:

Max Rentabilidad	$Max \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$
Min Beta	$Min \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i$
Min Desv.Estandar	$Min \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i$
Min Covarianzas	$Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$
Min Residuos	$Min \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{e_i}^2$

Respecto a las restricciones del modelo debemos señalar, en primer lugar, la presupuestaria, esto es, que la suma de las cantidades que se invierten en cada título, las variables del modelo, debe ser igual al presupuesto de inversión, que nosotros estableceremos en la unidad, ya que no sabemos, a priori, cuál será dicho presupuesto, con lo que nuestras variables reflejarán el tanto por uno que se debe invertir en cada título.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Por otra parte, se suelen incluir en los modelos de selección de carteras cotas superiores sobre las variables, bien por razones legales bien para asegurar una mínima diversificación. También es frecuente incluir cotas inferiores, o sea, invertir una cantidad mínima en determinados títulos, como será nuestro caso para las cinco empresas más importantes de nuestra bolsa, de forma que podamos “rastrear”, en cierta medida, a nuestra cartera de referencia, el IBEX35.

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

Por último, indicar la condición de no negatividad de las variables puesto que no vamos a tener en cuenta la venta a corto.

$$x_i \geq 0$$

3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Una vez planteado el problema, nos enfrentamos con un problema multioobjetivo el cual puede resolverse por diversas técnicas. Con el propósito de que el decisor se sienta más implicado en el proceso de selección de su cartera, decidimos la aplicación de técnicas interactivas utilizando para resolver los problemas correspondientes el programa Promoin (Caballero y otros (2002)).

Antes de empezar la resolución, siempre es conveniente mostrar al decisor los ideales y antiideales de las funciones objetivo, para saber por que valores se están moviendo las funciones objetivo. En concreto, para el escenario estable, y para nuestros datos semanales, son:

Rentabilidad: $f_1 \rightarrow z_1^* = 0.004824 \qquad m_1^* = 0.000699$

Beta: $f_2 \rightarrow z_2^* = 0.306834 \qquad m_2^* = 1.133147$

Desv. Estándar: $f_3 \rightarrow z_3^* = 0.003391 \qquad m_3^* = 0.007281$

Covarianzas: $f_4 \rightarrow z_4^* = 0.000002 \qquad m_4^* = 0.000018$

Residuos: $f_5 \rightarrow z_5^* = 0.000018 \qquad m_5^* = 0.000146$

representando z_i^* el valor ideal del objetivo i-ésimo y m_i^* el valor antiideal de dicho objetivo.

Dentro de la variedad de métodos interactivos que posee la implementación, y partiendo del modelo que queremos resolver, a la hora de aplicar los métodos interactivos, le consultamos al decisor qué preferencias quería manifestar de partida. Él nos comentó que le gustaría tener una solución de partida y que le resultaría cómodo proporcionar los pesos o importancia locales de las funciones objetivo, o lo que es igual, los tradeoffs locales entre objetivos (cantidad que está el decisor dispuesto a sacrificar, a cambio de empeorar otra cantidad en otro objetivo). En base a esto decidimos utilizar en la primera iteración, el método G-D-F (1972) que por sus características corresponde a este tipo de preferencias (está dentro del grupo de los métodos interactivos basados en tradeoffs o pesos locales).

El método G-D-F fue publicado por Geoffrion, Dyer, y Feinberg en 1972. De partida, se asume que las preferencias del decisor pueden ser descritas por una función de utilidad cóncava y diferenciable (evidentemente es decreciente en los objetivos para problemas de minimización) y es aplicable a problemas multiobjetivo no lineales.

Entre las principales ventajas que cuenta este método están que posee convergencia matemática probada (véase Geoffrion et al., 1972) en el sentido si existe la función de utilidad implícita del decisor, se llega a un punto que maximiza la utilidad, y está también, el hecho que, desde el punto de vista práctico, se tiene la posibilidad de 'volver hacia atrás' ante errores cometidos en las preferencias. Entre los inconvenientes están que la solución final no tiene por qué ser eficiente. Esto hace que no sea recomendable finalizar el proceso de resolución con este método.

Vemos cómo para la resolución necesitamos una solución inicial la cual la hemos obtenido considerando el problema de ponderación con todos los pesos iguales:

Rentabilidad	***Beta***	***Desv. Estándar***	***Covarianzas***	***Residuos***
0.000699	0.306834	0.005880	0.000003	0.000070

Estos valores forman el vector:

$$\mathbf{f}^0 = f(\mathbf{x}^0) = \left(0.000699,\ 0.306834\ \ 0.005880,\ 0.000003, 0.000070\right)$$

Como punto inicial podría haberse tomado cualquier otro punto, como, por ejemplo, uno de los ideales de las funciones objetivo.

En base a los valores en los objetivos, el decisor nos manifestó que quería darle bastante peso local a la rentabilidad con respecto al resto de objetivos. En concreto nos comunicó que quería darle una peso local de 7 a *Rentabilidad,* frente a un peso local de 0.2 a *Beta*, 0.2 a *Desv. Estándar*, 0.2 a *Covarianzas* y 0.2 a *Residuos*. Estos valores significan que está dispuesto a sacrificar 7 unidades de *Beta* a cambio de mejorar 0.2 unidades de *Rentabilidad*, que también está dispuesto a sacrificar 7 unidades de *Desviación Estándar* a cambio de mejorar 0.2 unidades de *Rentabilidad,* etc. Con estos valores formamos el siguiente vector de pesos locales:

$$\mathbf{w}^1 = \left(7,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2\right)$$

Con estos pesos, el método G-D-F maximiza en la dirección del gradiente de la función de utilidad, obteniendo una dirección de búsqueda que sirve para generar varias soluciones, de las cuales el decisor eligió la siguiente:

Rentabilidad	***Beta***	***Desv. Estándar***	***Covarianzas***	***Residuos***
0.000827	0.308504	0.005693	0.000002	0.000069

$$\mathbf{f}^1 = f(\mathbf{x}^1) = \left(0.000827,\ 0.308504,\ \ 0.005693,\ 0.000002,\ 0.000069\right)$$

Para estos valores logrados, el decisor nos comentó que no había conseguido un valor en la rentabilidad suficiente y que desearía cambiar sólo uno de los pesos locales y generar una nueva solución. Así, el nuevo vector de pesos fue:

$$\mathbf{w}^2 = (11,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$$

que colocado en el G-D-F nos genera varias soluciones, de las cuales el decisor eligió la siguiente:

Rentabilidad	***Beta***	***Desv. Estándar***	***Covarianzas***	***Residuos***
0.001280	0.331986	0.006202	0.000004	0.000086

$$\mathbf{f}^2 = f(\mathbf{x}^2) = \left(0.001280,\ 0.331986,\ \ 0.006202,\ 0.000004,\ 0.000086\right)$$

Viendo que el decisor no conseguía los valores perseguidos, le comentamos que existía un método, el método STEM (1971), el cual podría mejorar uno o varios objetivos, a cambio de relajar otros, pudiendo introducir topes máximos para las funciones a empeorar. Esta manera de manifestar las preferencias le agradó bastante al decisor, a partir de los valores en los objetivos que se habían conseguido.

El método STEM (STEp Method) es el método interactivo pionero y fue publicado en 1971 por los autores R. Benayoun, J. De Montgolfier, J. Tergny y O. Laritchev. Está basado en la minimización de la distancia respecto del punto ideal, con modificaciones en los parámetros de la distancia y en la región factible, originadas por las preferencias del decisor, a partir de cada solución que se va obteniendo. La distancia utilizada desde el subconjunto del espacio objetivo al punto ideal es la métrica de Tchebychev.

En cada iteración, las preferencias son reflejadas en la relajación de algún objetivo satisfactorio de forma que se permita mejorar algún otro objetivo aún no satisfactorio. Además, el decisor debe especificar la cantidad máxima que está dispuesto a sacrificar (empeorar) del objetivo considerado satisfactorio, aunque sin necesidad de proporcionar la tasa de intercambio o tradeoff entre objetivos.

En la misma línea, se tiene la posibilidad de, en cada iteración, considerar funciones objetivo en las cuales el decisor desea mantener los valores alcanzados, pero no desea empeorarlos. Estas funciones estarían dentro de las funciones objetivo a relajar donde el tope máximo a relajar valdría cero.

El principal inconveniente de este método es la información solicitada del decisor, en concreto, las cantidades máximas a relajar de los objetivos satisfactorios (objetivos que permitimos que empeoren para mejorar los no satisfactorios). Esta dificultad en el suministro de estas cantidades puede originar en el procedimiento de resolución distintas oscilaciones, ocasionando un aumento considerable del número iteraciones.

A pesar todo esto y de ser el primer método interactivo, el STEM ha tenido una gran aceptación, sobre todo práctica, debido a que el método proporciona al decisor una información bastante útil, en el objetivo de dilucidar sus preferencias. Además, se caracteriza porque el decisor puede 'volver hacia atrás' ante errores cometidos en sus preferencias. Estos hechos han originado que, aunque no posee convergencia matemática, se revele como una gran técnica interactiva.

Volviendo a nuestro caso, el decisor nos manifiesta que quiere mejorar más la rentabilidad. A cambio esta dispuesto a sacrificar el resto de las funciones. En concreto, las preferencias que manifestó el decisor fueron las siguientes:

Rentabilidad → Función a mejorar.

Beta → Función a relajar con un valor máximo permitido de 0.831986

Desv. Estándar → Función a relajar con un valor máximo permitido de 0.006702

Covarianzas → Función a relajar con un valor máximo permitido de 0.000014.

Residuos → Función a relajar con un valor máximo permitido de 0.000116.

A partir de estas preferencias, se obtuvo la siguiente solución:

Rentabilidad	***Beta***	***Desv. Estándar***	***Covarianzas***	***Residuos***
0.004435	0.831986	0.006184	0.000009	0.000101

El decisor estaba bastante satisfecho con esta solución. Nos dijo que los niveles para *Desv. Estándar, Covarianzas* y *Residuos* estaban bien y que tan solo nos comentó de qué tenía unos niveles algo diferentes en su mente para *Rentabilidad* y *Beta*. Esto nos hizo pensar a nosotros como analistas, que en este caso sería mejor utilizar un método en el que se pudieran introducir los niveles exactos a conseguir para las funciones objetivo, los cuales podrían ser alcanzables o no alcanzables, pero que el método en cuestión debería conseguir una solución cuyos valores en los objetivos "se parecieran lo máximo" a los niveles proporcionados por el decisor. Es por ello que decidimos utilizar un método de punto de referencia, que recoge muy bien este tipo de preferencias y los cuales pueden reflejar muy bien este tipo de preferencias.

Vamos a comentar este tipo de métodos y más concretamente el método usado, el de Wierzbicki (1980), que es el del creador de esta metodología, basada en una función también creada por él conocida con el nombre de función escalarizada de logro.

La utilización en los métodos interactivos de la función escalarizada de logro, es bastante considerable, posiblemente más que en cualquier otro campo de la programación multiobjetivo. Esto se debe, sobre todo, a que dicha función depende de dos parámetros los cuales pueden reflejar de forma directa las preferencias del decisor, que son, los pesos de la función y el punto de referencia, que está formado por los valores o niveles de referencia en los objetivos que se pretenden conseguir.

Es en estos niveles de referencia, donde la mayoría de estos métodos tienen la interacción con el decisor. El decisor tiene que proporcionar los valores que desea lograr en los objetivos y éstos forman el llamado punto de referencia de la función escalarizada de logro.

La idea de este método consiste, en cada iteración, obtener distintas soluciones eficientes, mediante la minimización de la función escalarizada de logro para el punto de referencia proporcionado por el decisor (niveles en los objetivos que desea conseguir el decisor), y otros puntos de referencia que difieren del proporcionado en una sola coordenada.

Entre los inconvenientes destacamos, que en ocasiones, por las características del problema, las soluciones que se obtienen no se acercan todo lo que se desea a los niveles de referencia que se pretendían conseguir. Entre las ventajas, tienen buena aceptación práctica, motivado sobre todo por el carácter intuitivo en la información requerida al decisor y la posibilidad de 'volver hacia atrás' ante errores cometidos en las preferencias del decisor. Además en el caso concreto del método de Wierzbicki, por la función escalarizada de logro considerada, las soluciones que se obtienen son eficientes.

Volviendo a nuestro problema, pasamos a señalar las preferencias manifestadas en este caso por el decisor, el cual, partiendo de los niveles que había conseguido en los objetivos, deseaba mantener los niveles de *Desv. Estándar, Covarianzas* y *Residuos* en los actuales, pero desearía tener una rentabilidad de 0.0046 y una beta de 0.9. Con estos valores formamos el punto de referencia y nos dispusimos a aplicar el método de Wierzbicki. El método generó varias soluciones, de las cuales el decisor eligió la siguiente:

Rentabilidad	***Beta***	***Desv. Estándar***	***Covarianzas***	***Residuos***
0.004540	0.900127	0.006236	0.000010	0.000082

Con dicha solución el decisor quedó totalmente satisfecho, habiéndose cumplido sus expectativas y quedando finalizado por tanto el proceso de resolución.

De la misma manera actuamos en el periodo de crecimiento y decrecimiento, obteniéndose otras soluciones aceptadas por el decisor.

Como conclusión vemos cómo las soluciones obtenidas en estos métodos dependen de las preferencias del decisor con lo cual este se puede sentir suficientemente implicado en el proceso de selección de su cartera de valores.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BENAYOUN, R., MONTGOLFIER, J., TERGNY, J. and LARITCHEV, O. (1971). “Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM)”. Mathematical Programming, 1, pp. 366-375.
- CABALLERO, R., LUQUE, M., MOLINA, J. and RUIZ, F. (2002). “PROMOIN:

an interactive system for multiobjective programming". International Journal of Information Technology and Decision Making, 1, pp. 635-656.

- GEOFFRION, A.M., DYER, J.S. and FEINBERG, A. (1972). "An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department". Management Science, 19, 4, Part I, pp. 357-368.
- LEE, S.M. and CHESSER, D.L. (1980). "Goal programming for portfolio selection". The Journal of Portfolio Management, primavera, pp. 22-26.
- LEE, S.M. and LERRO, A.J. (1973). "Optimizing the portfolio selection for mutual funds". The Journal of Finance, XXVIII, december, pp. 1087-1101.
- MARKOWITZ, H. (1952). "Portfolio selection". Journal of Finance, 7, 2, pp.77-91.
- POWELL, J.G. and PREMACHANDRA, I.M. (1998). "Accommodating diverse institutional investment objectives an constraints using non-linear goal programming". European Journal of Operational Research, 105, pp.447-456.
- WIERZBICKI, A.P. (1980). "The use of reference objectives in multiobjective optimization". Multiple Criteria Decision Making Theory and Application, Lecture Notes in Economics and Mathematicas Systems 177, Edited by Fandel, G. and Gal, T., Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 468-486.