

# UNA REVISIÓN HISTÓRICA DE LOS MÉTODOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FERMAT-WEBER

*Roberto J. Cañavate Bernal*

*M<sup>a</sup> Belén Cobacho Tornel*

Universidad Politécnica de Cartagena

## Resumen

El problema de Weber consiste en calcular la localización óptima de un punto de modo que sea mínima la suma ponderada de las distancias desde dicho punto a un conjunto de puntos dados. Este problema, que tiene su aplicación económica en el ámbito de la localización y que ha sido ampliamente tratado en la literatura científica, tiene como origen una cuestión matemática formulada en el siglo XVII por Fermat. Los primeros algoritmos de resolución, propuestos por Torricelli y Simpson, estaban basados en razonamientos puramente geométricos, aunque también es destacable la existencia la denominada máquina de Varignon, un ingenio mecánico que permite determinar el óptimo del problema de Weber. A pesar de que estos métodos son citados en numerosas fuentes bibliográficas, las demostraciones de los teoremas en los que se sustentan no son tan accesibles para investigadores y docentes por tratarse de textos clásicos con varios siglos de antigüedad. En este trabajo, además de realizar una revisión de diversos métodos empleados a lo largo de la historia para resolver el problema de Weber, se presentan demostraciones basadas en argumentos geométricos y físicos que demuestran la veracidad de estos algoritmos, así como algunas conclusiones y deducciones sobre el problema de Weber que se extraen de los razonamientos presentados.

## 1. Introducción

A comienzos del siglo XX, en un influyente libro sobre localización de industrias (véase [2]), el economista Alfred Weber planteó un problema que consistía en hallar la localización óptima de una fábrica que se abastece de  $a_1$  toneladas de materia prima

y de  $a_2$  toneladas de combustible de sendos depósitos situados en los lugares  $A_1$  y  $A_2$ , y que vende una cantidad de producto  $a_3$  en un mercado ubicado en  $A_3$ , de forma que se minimicen los costes de transporte, que se suponen proporcionales a la distancia y a las toneladas de material transportadas. En términos puramente matemáticos, el problema consiste en obtener el punto que minimiza la suma ponderada de las distancias a tres puntos iniciales.

Aunque Weber fue pionero en la formulación económica del problema, su tratamiento y estudio por la comunidad científica se inicia varios siglos antes: el ingenio mecánico diseñado por P. Varignon (1654-1722) determina la solución óptima al problema; en el ámbito matemático las primeras noticias se refieren a la versión sin ponderaciones en las distancias, es decir, cuando  $a_1 = a_2 = a_3$ , donde es conocido el reto lanzado por Pierre de Fermat (1601 - 1665) (véase [3]):

*“Que todo aquél que no apruebe mi método intente solucionar el siguiente problema: dados tres puntos en el plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de las distancias a los tres puntos dados sea un mínimo.”*

La primera respuesta satisfactoria al llamamiento realizado por Fermat se produjo a lo largo del mismo siglo XVII de manos de E. Torricelli (1608 - 1647). Años más tarde T. Simpson (1710-1761) propuso un nuevo método de resolución que, al igual que el ideado por Torricelli, estaba basado completamente en argumentos geométricos.

El estudio y aplicación del problema de Weber a otros ámbitos nos ha conducido a realizar una revisión de estos métodos empleados para resolver el problema de Fermat-Weber en sus distintas versiones. Al hacerlo encontramos que, a pesar de estar todos estos procedimientos recogidos en la bibliografía especializada sobre el tema, no ocurre lo mismo con los razonamientos que los sustentan. Por este motivo, junto a la revisión histórica de los métodos citados, en este trabajo se presentan demostraciones de los resultados que prueban la validez de los algoritmos de resolución realizados por los autores citados. Estas demostraciones nos han permitido, además, extraer algunas conclusiones acerca del problema de Weber (Corolario 2.3, Corolario 3.2 y Proposición 3.3), especialmente útiles en la tarea de elaborar ejemplos y contraejemplos en este campo.

La sección 2 de este trabajo está dedicada a la revisión de los algoritmos de Torricelli y Simpson para la obtención de la solución al problema de Fermat, esto es, el problema de Weber con tres puntos iniciales y sin ponderaciones. Junto a la

descripción de los algoritmos se presentan demostraciones geométricas que justifican la veracidad de estos métodos (Teoremas 2.4 y 2.5) a partir de la caracterización del óptimo del problema presentada en el Teorema 2.2. La sección 3 sigue un esquema similar para el problema de Weber general: comienza describiendo la *máquina de Varignon* para, a continuación, realizar una demostración matemática de su validez (Teorema 3.1).

## 2. El problema de Fermat

A lo largo del trabajo serán presentados numerosos teoremas y demostraciones de tipo geométrico, de modo que para simplificar su escritura se utilizarán las siguientes notaciones: los puntos del plano se denotarán con letras mayúsculas  $A$ ,  $P$ ,  $M$ , etc.; el triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  se denotará como  $\triangle ABC$ ; el segmento de extremos  $A$  y  $B$  como  $\overline{AB}$ ; el vector de origen  $A$  y extremo  $B$  con  $\overrightarrow{AB}$ ; la norma euclídea de un vector como  $\|\vec{v}\|$ ; la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  como  $d(A, B)$ ; y por último, el ángulo de vértice  $B$  y lados los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  se denotará con  $\widehat{ABC}$ .

Supondremos a lo largo de toda la sección que los tres puntos iniciales no están alineados, por ser trivial la resolución en este caso ya que es inmediato observar que el punto que se encuentra en el interior del segmento de recta que une los otros dos es el óptimo del problema.

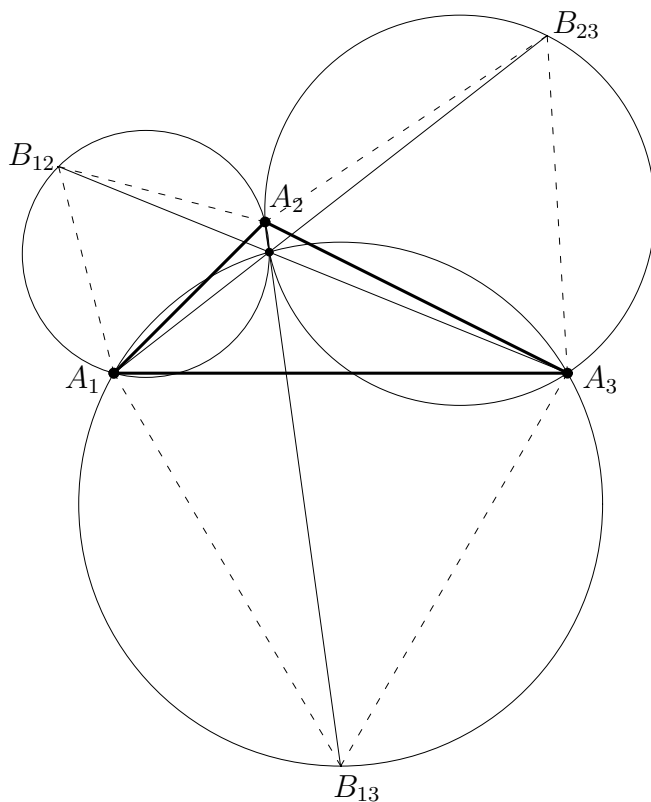
Por otra parte, es evidente que si existe un punto que minimiza la suma de las distancias  $\{A_1, A_2, A_3\}$ , ha de pertenecer al triángulo formado por éstos, ya que si se toma un punto  $P$  exterior al triángulo, la aproximación de éste hacia el lado del triángulo más cercano a  $P$  supone una disminución de las distancias  $d(P, A_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ . Esta conclusión nos permite restringir la búsqueda del punto óptimo del problema al triángulo  $\triangle A_1A_2A_3$ .

El algoritmo de Torricelli, a quien se atribuye generalmente la autoría de la primera solución del problema, consta tres etapas:

**Paso 1.** Se trazan los segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$  y  $\overline{A_3A_1}$  hasta conformar un triángulo.

**Paso 2.** Utilizando como base cada uno de los segmentos anteriores, se construye un triángulo equilátero con el nuevo vértice apuntando “hacia afuera”.

**Paso 3.** Se dibujan las circunferencias circunscritas a cada uno de los triángulos equiláteros del paso anterior. La intersección de las tres circunferencias es un



**Figura 1:** Las circunferencias de Torricelli y los segmentos  $\overline{A_i B_{jk}}$  de Simpson.

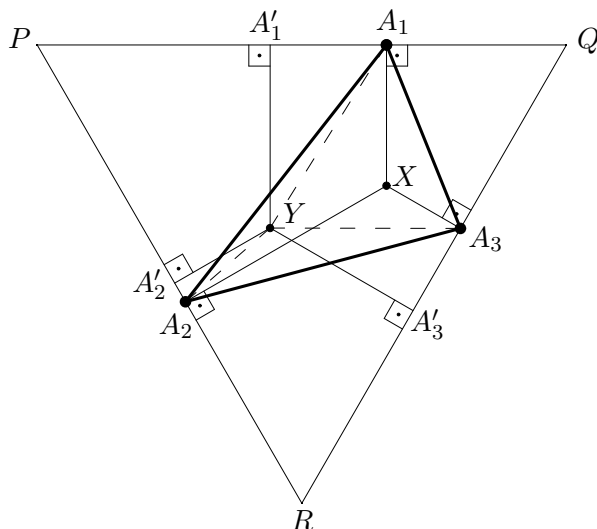
único punto, al que se denomina el *punto de Torricelli*, y que es el que produce el mínimo de la suma de las distancias a los tres puntos iniciales.

La única diferencia entre el algoritmo ideado por Torricelli y el descrito posteriormente por Simpson se halla en el último paso, que se modifica del modo siguiente:

**Paso 3 (Simpson).** Mediante un segmento se une cada uno de los vértices exteriores,  $B_{jk}$ , de los triángulos equiláteros anteriores con el punto inicial  $A_i$  que no pertenece al triángulo equilátero. La intersección de las tres rectas es el punto de Torricelli.

Sin embargo, una importante excepción a los resultados de Torricelli y Simpson fue descubierta por Heinen en 1834 (véase [1]): si uno de los ángulos del triángulo es mayor o igual a  $120^\circ$  ninguno de los dos métodos anteriores es válido, y el óptimo del problema es el vértice del triángulo que corresponde al ángulo mayor o igual de  $120^\circ$ . Por tanto, a partir de este momento se supondrá siempre que todos los ángulos interiores del triángulo  $\triangle A_1 A_2 A_3$  son estrictamente menores de  $120^\circ$ .

Por razones de brevedad no se incluye la demostración del siguiente resultado, la cual puede ser consultada en [1].



**Figura 2:** Construcción auxiliar para el Teorema 2.2.

**Proposición 2.1.** Si el triángulo  $\triangle A_1A_2A_3$  no posee ningún ángulo interior mayor o igual a  $120^\circ$ , entonces existe un punto  $X$  tal que

$$\widehat{A_1XA_2} = \widehat{A_2XA_3} = \widehat{A_3XA_1} = 120^\circ. \quad (1)$$

Las igualdades (1) anteriores juegan un papel clave en los resultados que se presentarán, ya que constituyen una caracterización del óptimo del problema de Fermat.

**Teorema 2.2.** Un punto  $X$  distinto de  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  es la única solución al problema de Fermat si, y sólo si,  $X$  verifica las igualdades de la ecuación (1).

*Demostración.* A través de la Proposición 2.1 se conoce la existencia de un punto  $X$  verificando (1), pero además se puede concluir para dicho punto que las rectas perpendiculares a los segmentos  $\overline{XA_1}$ ,  $\overline{XA_2}$  y  $\overline{XA_3}$  que pasan, respectivamente, por  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , forman un triángulo equilátero que contiene a  $\triangle A_1A_2A_3$ . En efecto, sea  $\triangle PQR$  el triángulo descrito anteriormente (Figura 2). Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman  $360^\circ$ , entonces:

$$\widehat{A_1PA_2} = 360^\circ - \widehat{PA_1X} - \widehat{PA_2X} - \widehat{A_1XA_2} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Repitiendo el razonamiento se obtiene que todos los ángulos de  $\triangle PQR$  miden  $60^\circ$ , esto es,  $\triangle PQR$  es un triángulo equilátero.

Sea ahora un punto  $Y \neq X$  cualquiera de  $\triangle A_1A_2A_3$ , y sean  $A'_1$ ,  $A'_2$  y  $A'_3$  las proyecciones perpendiculares de  $Y$  sobre los segmentos  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{RP}$  y  $\overline{QR}$  respectivamente (véase Figura 2). Es evidente que  $\triangle YA_iA'_i$  es, para  $i = 1, 2, 3$ , o bien una

recta (si  $A_i = A'_i$ ) o bien un triángulo rectángulo (si  $A_i \neq A'_i$ ). En el caso de que  $\triangle YA_iA'_i$  sea una recta se tiene que  $d(Y, A_i) = d(Y, A'_i)$ , y en el caso de que sea un triángulo, la longitud de la hipotenusa es mayor que la de los catetos, de modo que  $d(Y, A_i) > d(Y, A'_i)$ . En resumen,  $d(Y, A_i) \geq d(Y, A'_i)$  para  $i = 1, 2, 3$ , y ya que  $Y \neq X$ , para al menos un índice se tiene la desigualdad estricta.

Finalmente, como el triángulo es equilátero, se tiene

$$\sum_{i=1}^3 d(Y, A_i) > \sum_{i=1}^3 d(Y, A'_i) = \sum_{i=1}^3 d(X, A_i), \quad (2)$$

para todo  $Y \neq X$  del triángulo, donde la última igualdad se sigue del Teorema de Viviani (véase [1]). De la desigualdad estricta obtenida en (2) y del hecho de que siempre existe tal punto  $X$  (véase Proposición 2.1), se deduce que las igualdades (1) son una caracterización de la solución óptima del problema de Fermat y que además ésta es única.  $\square$

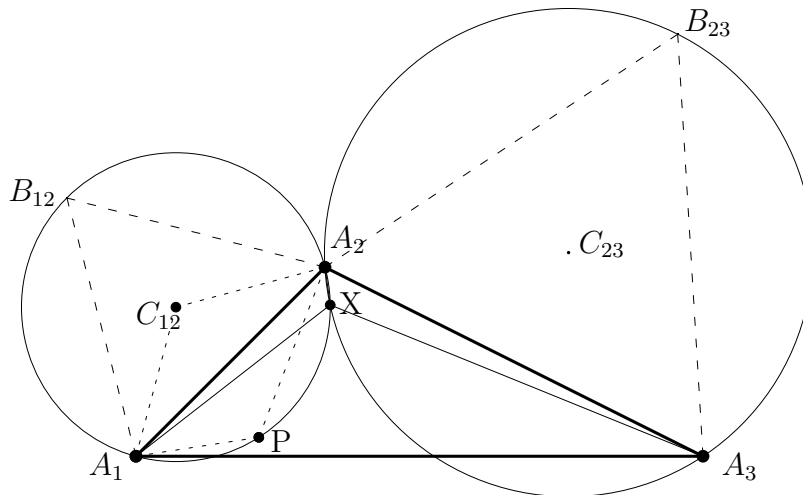
Un hecho curioso que se desprende del teorema anterior es que, dado un punto cualquiera del plano, existen infinitas ternas de puntos para las cuales el punto de Torricelli coincide con el punto elegido inicialmente.

**Corolario 2.3.** *Sea  $X$  un punto del plano. Se construyen tres semirrectas que partan de  $X$ , de modo que los ángulos que formen éstas, dos a dos, sean de  $120^\circ$ . Si se toma un punto distinto de  $X$  de cada una de las semirrectas, digamos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , entonces  $X$  es el punto que minimiza la suma de las distancias a  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ .*

**Teorema 2.4 (Torricelli).** *Sean  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  tres puntos del plano no alineados y distintos, de modo que el triángulo que se obtiene a partir de éstos tenga todos los ángulos interiores menores de  $120^\circ$ . Entonces el punto obtenido mediante el algoritmo de Torricelli es la única solución al problema de Fermat.*

*Demostración.* Considérese el triángulo equilátero construido sobre el lado  $\overline{A_1A_2}$ . Sea  $B_{12}$  el vértice distinto de  $A_1$  y  $A_2$ , y  $C_{12}$  el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo (Figura 3).

El ángulo  $\widehat{A_1B_{12}A_2}$  mide  $60^\circ$  y está inscrito en la circunferencia, así que se puede asegurar que el ángulo central de la circunferencia,  $\widehat{A_1C_{12}A_2}$ , mide el doble que  $\widehat{A_1B_{12}A_2}$ , es decir,  $120^\circ$ . Pero los segmentos  $\overline{A_1C_{12}}$  y  $\overline{C_{12}A_2}$  generan en realidad dos ángulos: el menor, ya mencionado, es de  $120^\circ$ , y el mayor, corresponde al resto de la circunferencia y, por tanto, mide  $240^\circ$ . Ahora, tomando un punto  $P$  cualquiera de la menor cuerda que determinan  $A_1$  y  $A_2$ , el ángulo  $\widehat{A_1PA_2}$  es inscrito a la



**Figura 3:** Construcción auxiliar para el Teorema de Torricelli.

circunferencia y el ángulo central que determina el mismo arco es el ángulo “grande”  $\widehat{A_1C_{12}A_2}$ , de  $240^\circ$ . En consecuencia,  $\widehat{A_1PA_2} = 120^\circ$ , y más aún, el lugar geométrico de los puntos  $Q$  para los que  $\widehat{A_1QA_2} = 120^\circ$  es, de los dos arcos de circunferencia que determinan los puntos  $A_1$  y  $A_2$  en la circunferencia circunscrita de centro  $C_{12}$ , aquél que contiene al punto  $P$ .

Los mismos argumentos se pueden aplicar a los otros triángulos equiláteros para obtener conclusiones semejantes. Ahora, de la Proposición 2.1 (pág. 5), se sabe que existe un punto  $X$  verificando las igualdades (1), y en particular,  $X$  pertenece a la intersección de los tres arcos de circunferencia. Más aún,  $X$  es el óptimo del problema de Fermat (Teorema 2.2) y es el único verificando las ecuaciones (1), de modo que la intersección de estos arcos es única y coincide con la solución al problema.  $\square$

**Teorema 2.5 (Simpson).** *En las condiciones del teorema anterior, el punto obtenido por el algoritmo de Simpson es la solución al problema de Fermat.*

*Demostración.* Sea  $X$  el punto de Torricelli. La recta que une  $B_{12}$  y  $A_3$  corta a la circunferencia circunscrita a  $\triangle A_1A_2B_{12}$  en un punto  $P$  (Figura 1). Si se comprueba que  $P = X$ , el teorema queda probado, ya que se obtendría la misma conclusión para los otros dos segmentos  $\overline{B_{ij}A_k}$ .

El ángulo  $\widehat{A_1A_2B_{12}}$  mide  $60^\circ$  ya que es uno de los ángulos interiores del triángulo equilátero. Por otra parte, tanto  $\widehat{A_1A_2B_{12}}$  como  $\widehat{A_1PB_{12}}$  son ángulos inscritos de la misma circunferencia y determinan el mismo arco, por lo que se puede afirmar que son iguales,  $\widehat{A_1PB_{12}} = \widehat{A_1A_2B_{12}} = 60^\circ$ . Por estar los tres puntos en la misma recta,

se tiene que  $\widehat{B_{12}PA_3} = 180^\circ$ , con lo cual,

$$\widehat{A_1PA_3} = \widehat{B_{12}PA_3} - \widehat{A_1PB_{12}} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Con un razonamiento similar se deduce que  $\widehat{A_2PA_3} = 120^\circ$ . Pero,

$$\widehat{A_1PA_3} + \widehat{A_2PA_3} + \widehat{A_1PA_2} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A_1PA_2} = 120^\circ,$$

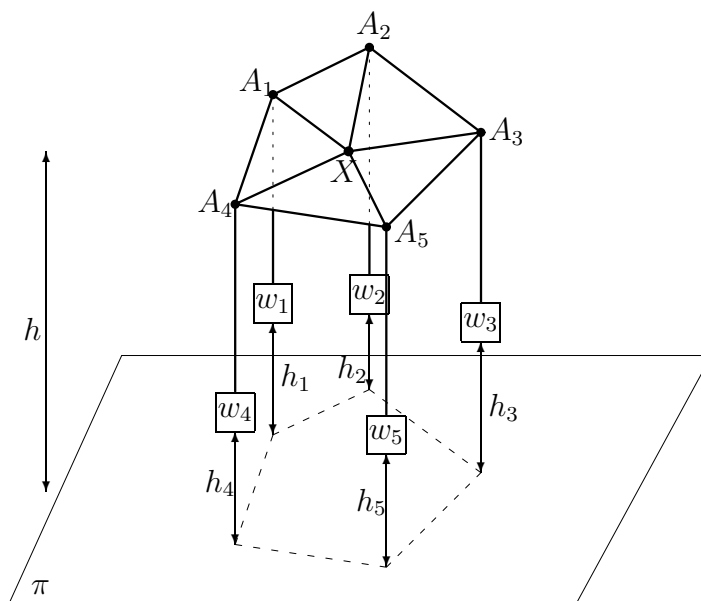
y teniendo en cuenta el Teorema 2.2, resulta que  $P = X$ , el punto de Torricelli.  $\square$

### 3. El problema de Weber

EL primer método conocido que permite resolver el problema de Weber es la denominada *máquina de Varignon*, que consiste en una tabla de madera (plano) en la que se hacen taladros en las posiciones correspondientes a los puntos iniciales. Después se pasa una cuerda por cada uno de estos agujeros, uniendo el extremo que queda encima de la tabla de cada una de las cuerdas en un nudo común y atando a cada uno de los extremos restantes una pesa de masa proporcional a la ponderación del punto correspondiente (en un problema sin pesos como el descrito por Fermat, es suficiente con que todas las pesas sean de la misma masa). Si se toma alguna medida que impida que el nudo caiga a través de alguno de los agujeros de la tabla (por ejemplo que los orificios practicados en la tabla sean más estrechos que el nudo) y se suponen condiciones ideales (ausencia de rozamiento, agujeros en la tabla infinitamente pequeños, etc.), el lugar sobre el que el nudo permanecerá en reposo cuando el sistema quede en equilibrio es precisamente el punto que minimiza la suma de las distancias ponderadas a los puntos iniciales.

**Teorema 3.1 (Varignon).** Sean  $A_1, \dots, A_m$  los puntos iniciales del problema de Fermat con ponderaciones  $w_1, \dots, w_m$ . La posición final del nudo de la máquina de Varignon cuando ésta queda en reposo coincide con el punto que minimiza la suma de las distancias ponderadas a  $A_1, \dots, A_m$ .

*Demostración.* Sea  $\pi$  el plano del suelo y supóngase que la máquina de Varignon está situada en un plano por encima de  $\pi$  y paralelo a éste. Sea  $h$  la distancia que separa estos dos planos y sea  $l_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , la longitud, desde el nudo hasta la pesa, de la cuerda que pasa por  $A_i$ . Es evidente que las pesas correspondientes a los puntos iniciales gravitan sobre  $\pi$  y que el sistema formado por todas ellas tiene una energía potencial total con respecto al plano  $\pi$  dependiente de la masa de las



**Figura 4:** Algunas longitudes en la máquina de Varignon.

pesas y de la distancia que separa cada pesa de  $\pi$ . Llamando  $h_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , a la distancia que separa la pesa  $i$ -ésima del plano  $\pi$  (Figura 4), la energía potencial de todo el sistema viene dada por  $E_p = \sum_{i=1}^m w_i \cdot h_i$ .

Cuando el sistema se deja libre, éste tiende a situarse en la posición de mínima energía, así que la posición de equilibrio de la máquina de Varignon es aquella en la que la energía potencial total es mínima. Sea  $P$  el punto de la tabla sobre el que se encuentra el nudo en un instante determinado. La longitud de la cuerda desde el nudo hasta el orificio correspondiente al punto  $A_i$  es precisamente  $d(P, A_i)$ , de modo que

$$l_i = d(P, A_i) + (h - h_i) \Leftrightarrow h_i = d(P, A_i) + (h - l_i) \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Sustituyendo en la expresión de la energía potencial, se tiene:

$$\begin{aligned} E_p &= \sum_{i=1}^m w_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^m w_i [d(P, A_i) + (h - l_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m w_i [d(P, A_i) + \alpha_i] = \sum_{i=1}^m w_i d(P, A_i) + \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i, \end{aligned}$$

y puesto que  $\sum_{i=1}^m w_i \alpha_i$  es una constante, el punto  $X$  sobre el que se sitúa el nudo cuando el sistema tiene mínima energía potencial es también el punto que minimiza la función  $\sum_{i=1}^m w_i d(P, A_i)$ , es decir,  $X$  es el óptimo del problema de Fermat.  $\square$

Como conclusión del teorema anterior podemos afirmar que el óptimo del problema de Weber es el punto en el que la suma de las tensiones de las cuerdas de

la máquina de Varignon se anulan, es decir, se puede caracterizar como el punto  $X$  que verifica la ecuación

$$\sum_{i=1}^m w_i \frac{A_i - X}{\|A_i - X\|} = \vec{0}. \quad (3)$$

**Corolario 3.2.** Sean  $A_1, \dots, A_m$  puntos del plano con pesos asociados  $w_1, \dots, w_m$ . Sea  $X$  la solución al problema de Fermat correspondiente. Si  $X \neq A_i \forall i = 1, \dots, m$ , entonces la solución al problema no variará si se sustituye, para cualquier  $k$ , el punto  $A_k$  por otro punto  $A'_k$  en la semirrecta que parte de  $X$  y pasa por  $A_k$ .

*Demostración.* Inmediata observando la caracterización del óptimo dada en (3).  $\square$

Más aún, en el siguiente resultado se afirma que, una vez fijado el punto  $X$ , existen infinitas combinaciones de puntos y pesos asociados de modo que el problema correspondiente con esos datos tiene por solución a  $X$ . La prueba del resultado es constructiva, lo que permite un método sencillo para la determinación tanto del punto  $A_m$  como del peso  $w_m$ .

**Proposición 3.3.** Sean  $w_1, \dots, w_{m-1} > 0$  y sean  $X, A_1, \dots, A_{m-1}$  puntos distintos del plano. Si  $X$  no es la solución del problema de Fermat con puntos  $A_1, \dots, A_{m-1}$  y pesos  $w_1, \dots, w_{m-1}$ , entonces existe un valor real positivo,  $w_m > 0$ , y un punto  $A_m \neq X$ , de manera que  $X$  es solución del problema de Fermat con puntos iniciales  $A_1, \dots, A_m$  y pesos asociados  $w_1, \dots, w_m$ . Además, si se sustituye el punto  $A_m$  por cualquier otro de la semirrecta que parte de  $X$  y pasa por  $A_m$  (excepto  $X$ ) la solución al problema correspondiente sigue siendo  $X$ .

*Demostración.* Sea el vector  $\vec{v} = \sum_{i=1}^{m-1} w_i \frac{A_i - X}{\|A_i - X\|}$  y sea  $w_m = \|\vec{v}\|$ . Puesto que  $X$  no es el punto óptimo del problema con puntos  $A_1, \dots, A_{m-1}$  y pesos  $w_1, \dots, w_{m-1}$ , entonces  $w_m > 0$  y, definiendo  $\vec{u} = \left(-\frac{1}{w_m}\right) \cdot \vec{v}$ , se tiene que  $\vec{u}$  es un vector unitario que verifica

$$\sum_{i=1}^{m-1} w_i \frac{A_i - X}{\|A_i - X\|} + w_m \vec{u} = \vec{0}.$$

Tomando  $A_m = X + \vec{u}$ , se sigue que  $A_m \neq X$ ,  $\vec{u} = \frac{A_m - X}{\|A_m - X\|}$  y  $\sum_{i=1}^m w_i \frac{A_i - X}{\|A_i - X\|} = \vec{0}$ , lo que asegura que el punto  $X$  verifica (3), es decir, es el óptimo del problema resultante con puntos  $A_1, \dots, A_m$  y pesos  $w_1, \dots, w_m$ .

La última parte de esta proposición se obtiene a partir del Corolario 3.2.  $\square$

## Referencias bibliográficas

- [1] CAÑAVATE BERNAL, R.J. (2001). “El algoritmo de Weiszfeld para el problema de Weber”. Tesina de Licenciatura. Universidad de Murcia.
- [2] WEBER, A. (1909). “Über den Standort der Industrien”. Tübingen. (Traducción de C.J. Friederich (1929): “Theory of the location of industries”. Chicago. University of Chicago Press.)
- [3] WESOŁOWSKY, G.O. (1993). “The Weber problem: history and perspectives”. *Location Science*, 1, 1, pp. 5-23.