SOLUCIONES DE COMPROMISO EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN

María José Canós Darós, maria.j.canos@uv.es, *Universidad de Valencia*

Marisa Martínez Romero, marisam@florida-uni.es, *Florida Universitaria*

Manuel Mocholí Arce, manuel.mocholi@uv.es, *Universidad de Valencia*

RESUMEN

Tradicionalmente, los problemas de localización han tratado de averiguar la ubicación de las instalaciones de una empresa de modo que dicha ubicación sea la más eficiente para el sistema. Se considera que una distribución de actividades es eficiente cuando los beneficios obtenidos son máximos (o los costes mínimos) y cualquier cambio en una localización tiene como consecuencia una reducción de los beneficios del sistema (o un aumento de los costes). Sin embargo, una solución óptima (eficiente) de un problema real puede ser rechazada por los usuarios del sistema si la consideran socialmente inaceptable, esto es, si la sociedad en su conjunto no la percibe como una solución justa (equitativa). En la práctica, muchas veces no se trata de buscar una solución totalmente eficiente o totalmente equitativa, sino una solución de compromiso que satisfaga de un modo razonable tanto las expectativas de los gerentes de la empresa como las de los usuarios de la misma. En este trabajo, analizamos cómo se puede medir la eficiencia y la equidad de una solución dada y proponemos técnicas de programación matemática que nos permitirán encontrar soluciones de compromiso cuando nos enfrentamos a un problema de localización sobre redes. Presentamos un ejemplo sencillo para mostrar la aplicación de nuestros modelos y cómo éstos pueden ayudar en la toma final de decisiones.

1. EFICIENCIA Y EQUIDAD EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN

Tradicionalmente, los problemas de localización han tratado de averiguar la ubicación de las instalaciones de una empresa de modo que dicha ubicación sea la más eficiente para el sistema. Se considera que una distribución de actividades es eficiente cuando los beneficios obtenidos son máximos (o los costes mínimos) y cualquier cambio en una localización tiene como consecuencia una reducción de los beneficios del sistema (o un aumento de los costes) (Morrill y Symons, 1977). Sin embargo, una solución óptima de un problema real puede ser rechazada por los usuarios del sistema si la consideran socialmente inaceptable. Consideremos, por ejemplo, un estudio clásico de localización de centros sanitarios (Morrill y Earickson, 1969) en el que los autores admiten sentirse asombrados por la divergencia en la actitud y valores entre los administradores y economistas incluidos en el proyecto y los trabajadores y usuarios del servicio. Los primeros tienden a recalcar la eficiencia de una distribución consistente en pocos hospitales grandes, agrupados en centros médicos, mientras los segundos prefieren la creación de unidades más pequeñas y dispersas, más cercanas a los potenciales usuarios. Podemos encontrar multitud de ejemplos más en la instalación de centros escolares, de parques de bomberos y, en general, de cualquier servicio respecto al cual la sociedad en su conjunto sienta que el beneficio de una mayoría no puede establecerse a costa del perjuicio de una minoría. Este conflicto es inexistente en la literatura clásica y no es sino a partir de los años 70 (McAllister, 1976; Savas, 1978) cuando los investigadores empiezan a preguntarse cuál debe ser el grado de intercambio en una solución entre eficiencia y equidad, esto es, cuánto debe cambiar una localización óptima para considerarse socialmente aceptable.

El problema de la equidad en los modelos de localización no es tan sencillo como en principio podría parecer. Mientras que el concepto de eficiencia tiene una definición clara y precisa en la literatura, parece haber una discusión sin fin sobre las reglas que deben tenerse en cuenta cuando se analiza la equidad de una solución. La equidad es, en esencia, un concepto abstracto sociopolítico que implica imparcialidad y justicia y es precisamente esta abstracción la que hace tan difícil tener una definición cuantificable. No obstante, uno de los puntos en el que la mayoría de autores parecen estar de acuerdo es en que es una característica fundamental a tener en cuenta en la localización de centros de servicio públicos. Las decisiones de localización públicas se hacen como respuesta a una demanda social y el objetivo aquí es maximizar un beneficio o minimizar un coste no cuantificable en términos monetarios. Las funciones objetivo tratan entonces de combinar las consideraciones crematísticas de la empresa con una solución socialmente aceptable. La literatura recoge dos formas de enfocar este objetivo. Una de ellas es considerar medidas de utilidad donde se trata de identificar y cuantificar factores que afectan al coste social (Marsh y Schilling, 1994; Ogryczak, 2000). La otra es analizar el comportamiento de las funciones objetivo de los modelos básicos tradicionales de localización respecto a la eficiencia y la equidad. Un objetivo clásico consiste en minimizar el coste total del sistema, muchas veces representado como la minimización de la distancia total que necesitan recorrer los usuarios del sistema puesto que cuanto menor es esta cantidad, más accesible es el sistema a los usuarios (objetivo mediana). Es evidente que la solución va a depender de la distribución de la densidad de población y, en consecuencia, la variabilidad de las distancias que individualmente se deben recorrer es muy alta, esto es, la minimización de la distancia en este modelo se consigue haciendo énfasis en las distancias cortas que debe viajar la mayoría de usuarios, pero a cambio unos pocos pueden tener que recorrer un largo camino. Por ello, se considera que el objetivo mediana es eficiente pero no equitativo. El segundo objetivo clásico es la minimización de la distancia máxima (ponderada o no) entre cualquier centro de servicio y el conjunto de población que trata de servir (objetivo centro). Este es un problema considerado equitativo pero no eficiente, puesto que la solución se obtiene a expensas de un aumento del coste, muchas veces considerable.

En la práctica, no obstante, muchas veces no se trata de buscar una solución totalmente eficiente o totalmente equitativa, sino una solución de compromiso que satisfaga de un modo razonable tanto las expectativas de los gerentes de la empresa como las de los usuarios de la misma. Hasta el momento, diversos autores han planteado diferentes aproximaciones para este problema (Gerrard y Church, 1995; Shier y Dearing, 1983; Church y ReVelle, 1974). Pero el método más estudiado consiste en relacionar los objetivos mediana y centro, considerando que éste último impide una excesiva distancia desde un centro de servicio hasta el usuario más alejado. De este modo se logra un intercambio más justo entre la mediana (eficiencia) y el centro (equidad). Este nuevo objetivo se conoce comúnmente como el problema de la *p*-centdiana.

2. EL PROBLEMA DE LA *P*-CENTDIANA

Fue Halpern (Halpern, 1976, 1978, 1980) quien, a finales de los 70, propuso el problema de la centdiana cuya función objetivo es una combinación convexa de las funciones objetivo de los problemas de la mediana y el centro. La elección de las ponderaciones, que en último término corresponde al decisor, marcará la importancia relativa que se le concede a la eficiencia y a la equidad. Otros autores han estudiado desde entonces diversos aspectos del modelo demostrando que los métodos de solución dependen del número de centros que se quiera localizar, de la estructura de la demanda (equiponderada o no) y de la estructura de la red subyacente al problema (Handler, 1985; Hansen, Labbé y Thisse, 1991; Pérez, Moreno y Rodríguez, 1997; Ogryczac, 1997; Tamir, Pérez y Moreno, 1998; Pérez y Moreno, 2000). Estas características determinan el conjunto de localizaciones potenciales, denominado habitualmente conjunto dominante finito, y marcan un salto cualitativo en la dificultad de resolución respecto a los modelos básicos sobre los que se construye la *p*-centdiana. Ya desde los primeros trabajos sobre la mediana y el centro (Hakimi, 1964; Hakimi, 1965) se conoce que las localizaciones potenciales son los vértices de la red, en el caso de la mediana, y el conjunto formado por los vértices y los centros locales, en el caso del centro. Podemos definir un centro local del siguiente modo: Consideremos una red no dirigida y conexa $N = (V, E)$, donde $V = \{v_1,...,v_n\}$ es el conjunto de vértices y $E = \{e_1, ..., e_m\}$ el de aristas. Cada arista tiene asociada una longitud positiva conocida. Un punto interior de una arista la divide en dos subaristas cuyas longitudes son respectivamente la distancia de dicho punto a los vértices. Sea $P(N)$ el conjunto continuo de puntos de la red N. La longitud de las aristas induce una función de distancia $d(., .)$ en $P(N)$. Un camino entre dos vértices v_i y v_j es una secuencia de aristas de longitud mínima de N que une v_i y v_j. La longitud de un camino es la suma de las longitudes de sus aristas y subaristas. Para cualquier par de puntos x, y de $P(N)$, sea $d(x,y)$ la longitud mínima de los caminos entre ellos. Además, para cualquier subconjunto $X \subset P(N)$ su distancia al vértice v_i viene dada por:

$$d(X,v_i) = \min_{x \in X} d(x,v_i)$$

Diremos que un punto $x_{ij}^{kl} \in P(N)$ es un centro local con rango r_{ij}^{kl} asociado a v_k, $v_l \in V$ si es un punto interior de una arista (i , j) tal que *:*

$$1.\ r_{ij}^{kl} = d(x_{ij}^{kl}, v_k) = x_{ij}^{kl} + d_{ik} \text{ y } 2.\ r_{ij}^{kl} = d(x_{ij}^{kl}, v_l) = l_{ij} - x_{ij}^{kl} + d_{jl}.$$

Al conjunto de todos los centros locales lo denotamos *CL*.

Utilizando la notación anterior, podemos afirmar que el conjunto dominante finito del problema de la *p*-mediana es *V* y el del problema del *p*-centro es *V*U*CL*. Sin embargo, esto no es tan sencillo para la *p*-centdiana donde dicho conjunto cambia según el número de centros de servicio que se desee ubicar, la estructura de la demanda y la clase de red subyacente, llegando en algunos casos a tener un tamaño tan grande que deja de ser útil a efectos de resolución del problema. Es en estos casos donde el campo de investigación permanece abierto. En los siguientes epígrafes vamos a estudiar como abordar, con la ayuda de métodos de programación matemática, uno de estos casos.

3. UN MODELO DIFERENCIABLE DE PROGRAMACIÓN BINARIA MIXTA

Consideremos el problema de la *p*-centdiana para el cual queremos ubicar un número cualquiera de centros de servicio sobre una red general y donde la demanda de los vértices es equiponderada. Bajo estas hipótesis se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la demanda de todos los vértices de la red es igual a uno. Un conjunto dominante finito para este problema es la unión de los vértices y el conjunto de puntos extremos canónicos, esto es, $F = V \cup PE$ (Pérez, Moreno y Rodríguez, 1997).

Un punto $x \in P(N)$ es un punto extremo con rango r asociado a $v_k \in V$ si es un punto interior de una arista (i, j) tal que :

$$1.\ r = d(x, v_k) = x + d_{ik} \text{ o } 2.\ r = d(x, v_k) = l_{ij} - x + d_{jk}\,.$$

Si denominamos conjunto de distancias canónicas a

$$R = \{r \,/\, r \text{ está asociado a un centro local o } r = d(v_i, v_j) \text{ para } v_i, v_j \in V\}$$

diremos que un punto extremo es canónico si su rango es una distancia canónica.

Considerando que las localizaciones potenciales pertenecen al conjunto F, el cual tiene un número finito de elementos, y las demandas están ubicadas en los vértices de la red, proponemos el siguiente modelo de programación binaria mixta, cuya solución para un λ dado entre cero y uno, será el óptimo que estamos buscando:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \lambda \max_{i,j} d_{ij}x_{ij} + (1-\lambda)\sum_{i,j} d_{ij}x_{ij} \\
&s.a. \\
&\qquad \sum_{i\in F} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \qquad (1) \\
&\qquad x_{ij} \le y_i \qquad i \in F,\, j \in V \qquad (2) \\
&\qquad \sum_{i\in F} y_i = p \qquad (3) \\
&\qquad x_{ij} \ge 0 \quad y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

En este modelo, las variables de localización y_i son variables binarias que valen 1 si existe un centro de servicio en la localización potencial i y 0 en caso contrario. Las variables de asignación x_{ij} representan la cantidad de demanda del vértice v_j que es atendida por la localización potencial i. El valor de d_{ij} viene dado por la distancia, calculada como la longitud del camino más corto, que existe entre la localización potencial $i \in F$ y el vértice $v_j \in V$. Por último, las restricciones (1) aseguran que se atiende toda la demanda de cada vértice v_j , las restricciones (2) aseguran que sólo las localizaciones potenciales con un centro de servicio atenderán demanda y la restricción (3) establece que se localizarán exactamente p centros de servicio.

Sin embargo, éste es un modelo de programación no diferenciable. Podemos, en su lugar, utilizar la siguiente relajación diferenciable equivalente:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \lambda c + (1-\lambda)\sum_{i,j} d_{ij}x_{ij} \\
&s.a. \\
&\qquad \sum_{i\in F} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \qquad (1) \\
&\qquad x_{ij} \le y_i \qquad i \in F,\, j \in V \qquad (2) \\
&\qquad \sum_{i\in F} y_i = p \qquad (3) \\
&\qquad \sum_{i\in F} d_{ij}x_{ij} \le c \qquad j \in V \qquad (4) \\
&\qquad c, x_{ij} \ge 0 \quad y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

En éste modelo la notación es la misma que en el anterior y hemos añadido las restricciones (4) que aseguran que la máxima distancia desde cualquier centro de servicio hasta sus usuarios será minimizada.

Resolver el problema como un modelo de programación nos permite calcular la p-centdiana para instancias pequeñas y algunas medias poco densas. No es, sin embargo, efectivo en el caso de instancias medias densas o instancias grandes debido al elevado número de localizaciones potenciales que aparecen. Sin embargo, en el siguiente epígrafe vamos a ver como podemos utilizar la estructura especial de F para mejorar la eficacia del modelo.

4. MODELOS SECUENCIALES

Las posibles soluciones para un problema de la p-centdiana han sido estudiadas por Pérez, Moreno y Rodríguez (1997), quienes llegan a la conclusión de que no cualquier combinación de p elementos de F es un candidato a óptimo sino sólo aquellas que tienen una estructura especial determinada por los valores de los rangos. En concreto, demuestran que si X^* es una solución óptima para la p-centdiana, entonces hay un punto $x^* \in X^*$ tal que x^* es un centro local con rango r^* o $x^* \in V$ con $d(x^*, v_k) = r^*$ para algún vértice $v_k \in V$ y los otros p-1 centros de servicios en X^* son vértices o puntos extremos con rango r^*; esto es, todas las ubicaciones pertenecientes a la solución óptima tendrán el mismo rango, determinado por un centro local o un vértice, y sólo una, como máximo, será un centro local. Apoyándonos en este resultado, podemos plantear una serie de modelos, de un tamaño considerablemente menor que el que resolvemos en el apartado anterior, la mejor de cuyas soluciones será el óptimo que estamos buscando. Para ello, consideramos un valor $r \in R$ y definimos $F(r)$ como el conjunto resultante de la unión de los vértices y todos los puntos extremos cuyo rango es r, es decir,

$$F(r) = V \cup PE(r).$$

Formulamos ahora el modelo parcial

$$Min \quad CD(r) = \lambda c + (1-\lambda)\sum_{i,j} d_{ij} x_{ij}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i \in F(r)} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \qquad (1)$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad i \in F(r), j \in V \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in F(r)} y_i = p \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in F(r)} d_{ij} x_{ij} \le c \quad j \in V \qquad (4)$$

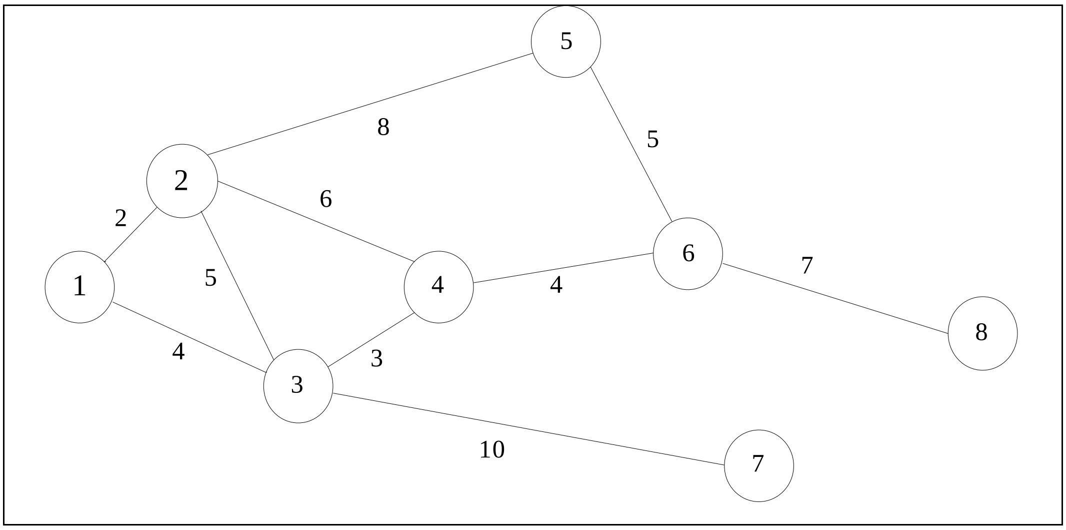
$$c, x_{ij} \ge 0 \quad y_i \in \{0,1\}$$

La solución óptima de este modelo, $x(r)$, es la mejor entre todas las combinaciones de p puntos de F establecidas para r fijo. Si resolvemos secuencialmente los modelos resultantes de considerar todas las distancias canónicas, es decir, todos los elementos de R, y teniendo en cuenta la estructura particular que sabemos que tiene el óptimo, es evidente que la p-centdiana será la mejor de todas las combinaciones calculadas. Para encontrarla es suficiente buscar la solución $x(r^*)$ que cumpla que $CD(r^*)=\min_{r\in R} CD(r)$.

5. EJEMPLO NUMÉRICO

Consideremos la siguiente red en la que queremos localizar 2 centros de servicio, esto es, p=2:

Figura 3: Red de 8 vértices.



En esta red existen 51 centros locales con un rango menor que 10 que es el rango de la mediana previamente resuelta.

El conjunto R de distancias canónicas menores que el radio de la mediana obtenidas a partir de los centros locales y los vértices es

R ={*1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4 ,4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10*}

Al calcular el conjunto de puntos extremos canónicos hemos obtenido 413 puntos. Esto implica que el conjunto dominante finito tiene 421 elementos, con lo que el modelo matemático completo consta de:

variables continuas	3368
variables binarias	421

restricciones	3385

Si consideramos los modelos secuenciales, tendríamos que resolver entonces 19 problemas, cuyos tamaños dependen del cardinal de $F(r)$ y oscilan entre

variables continuas	192	280
variables binarias	24	35
restricciones	209	297

Las soluciones óptimas para distintos valores de λ aparecen en la tabla 2. En la primera columna aparece el valor de λ para el que se ha resuelto el problema, en el que hemos considerado la combinación convexa λ *centro* + (1-λ) *mediana*. Esto significa que para λ=0 obtenemos el valor de la mediana (solución totalmente eficiente) mientras que para λ=1 calculamos el centro (solución totalmente equitativa). Para el resto, el valor de λ representa el valor que el decisor concede a la eficiencia frente a la equidad.

La segunda columna contiene el valor óptimo de la función objetivo de la centdiana, mientras que en la tercera aparece la solución óptima. El convenio seguido para expresar los puntos donde deben ubicarse los centros de servicio es el siguiente: cuando se trata de un vértice, aparece como un único dígito (por ejemplo, 3 representa que el centro de servicio debe estar ubicado en el vértice 3); cuando se trata del punto interior de una arista, la localización se representa como una terna (i,j,x) en la que las dos primeras componentes son los extremos de la arista y la tercera es la distancia que debe recorrerse desde el vértice i para llegar hasta la ubicación óptima (por ejemplo, (3,7,2.5) representa que el centro de servicio debe estar situado en la arista (3,7) a una distancia de 2.5 unidades del vértice 3). Observemos como, a medida que aumentamos el peso concedido a la equidad, la localización óptima va cambiando.

Las columnas cuarta y quinta muestran el valor que tienen la función objetivo mediana y la función objetivo centro para la localización calculada en el problema de la p-centdiana. Recordemos que el valor de la mediana es una medida inversa de la eficiencia, de modo que cuanto mayor es el valor de la mediana, menor es la eficiencia de la solución. Análogamente, el valor del centro es una medida inversa de la equidad, de manera que cuando el centro disminuye la equidad aumenta. Estos valores auxiliares son de gran ayuda a la hora de tomar una decisión final.

Para finalizar, la última columna recoge el valor de r para el cual se ha obtenido el óptimo en los modelos secuenciales.

Tabla 2: Resultados obtenidos.

λ	Valor centdiana	Localización	Valor mediana	Valor centro	*r*
0	34	3,6	34	10	8
0.1	31.6	3,6	34	10	10
0.2	29.2	3,6	34	10	8
0.3	26.8	3,6	34	10	9
0.4	24.4	3,6	34	10	8.5
0.5	22	3,6	34	10	8
0.6	19.6	3,6	34	10	8
0.7	17.2	3,6	34	10	8
0.8	14	6, (3,7,2.5)	40	7.5	9.5
0.9	10.75	6, (3,7,2.5)	40	7.5	9.5
1	7.5	6, (3,7,2.5)	40	7.5	9.5

Fuente: Elaboración propia.

6. CONCLUSIONES

Los modelos de localización, especialmente cuando se aplican en el sector público, deben ser capaces de encontrar soluciones eficientes y equitativas, esto es, soluciones capaces de satisfacer razonablemente las expectativas tanto de los gerentes como de los usuarios de un sistema. Estos dos conceptos, muchas veces antagónicos entre sí, han dado lugar a una nutrida cantidad de literatura. Mientras la definición de eficiencia, identificada con optimalidad, es aceptada por prácticamente todos los investigadores, no existe una forma única de medir la equidad, que varía según la percepción que los gerentes y usuarios tienen del concepto de justicia. Dos medidas comúnmente aceptadas son el coste total, para la eficiencia, y el máximo coste posible, para la equidad. En este trabajo, identificamos estas medidas con las funciones objetivo de dos conocidos problemas de localización sobre redes: el problema de la *p*-mediana (eficiencia) y el problema del *p*-centro (equidad). Siguiendo las ideas establecidas por Halpern en los años 70, buscamos una solución de compromiso planteando varios modelos de programación binaria mixta apropiados para diferentes tamaños de instancias, en los cuales el decisor puede elegir el grado de eficiencia y equidad de la solución. Estos modelos pueden utilizarse, además, para obtener un abanico de soluciones. De este modo, el decisor no se siente obligado a escoger *a priori*, sino que puede utilizarlos como herramientas de apoyo en la toma final de decisiones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por TIC2002-04242-C03.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Church, R. y ReVelle, C. (1974), *The maximal covering location problem*, Papers of the Regional Science Association, vol. 32, pp. 101-118.

Gerrard, R.A. y Church, R.L. (1995), *A general construct for the zonally constrained p-median problem*, Environment and Planning B: Planning and Design, vol. 22, pp. 213.236.

Hakimi, S.L. (1964), *Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph*, Operations Research, vol. 12, pp. 450-459.

Hakimi, S.L. (1965), *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*, Operations Research, vol. 13, pp. 462-475.

Halpern, J. (1976), *The location of a center-median convex combination on an undirected tree*, Journal of Regional Science, vol. 16, pp. 237-245.

Halpern, J. (1978), *Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph*, Management Science, vol. 24, pp. 535-544.

Halpern, J. (1980), *Duality in the cent-dian of a graph*, Operations Research, vol. 28, pp. 722-735.

Handler, G.Y. (1985), *Medi-centers of a tree*, Transportation Science, vol. 19, pp. 246-260.

Hansen, P.; Labbé, M. y Thisse, J.F. (1991), *From the median to the generalized center,* RAIRO, vol. 25, pp. 73-86.

Marsh, M.T. y Schilling, D.A. (1994), *Equity measurement in facility location analysis: a review and framework*, European Journal of Operational Research, vol. 74, pp. 1-17.

McAllister, D.M. (1976), *Equity and efficiency in public facility location*, Geographical Analysis, vol. 8, pp. 47-63.

Morrill, R.L. y Earickson, R. (1969), *Locational Efficiency of Chicago Hospitals*, Health Services Research, vol. 4, pp- 127-141.

Morrill, R.L. y Symons, J. (1977), *Efficiency and equity aspects of optimum location*, Geographical Analysis, vol. 9, pp. 215-225.

Ogryczak, W. (1997), *On cent-dians of general networks*, Location Science, vol. 5, pp. 15-28.

Ogryczak, W. (2000), *Inequality measures and equitable approaches to location problems*, European Journal of Operational Research, vol. 122, pp. 374-391.

Pérez Brito, D. y Moreno Pérez, J.A. (2000), *The generalized p-centdian on network*, TOP, vol. 8, pp. 265-285.

Pérez Brito, D.; Moreno Pérez, J.A. y Rodríguez Martín, I. (1997), *Finite dominating set for the p-facility cent-dian network location problem*, Studies in Locational Analysis, vol. 11, pp. 27-40.

Savas, E.S. (1978), *On equity in providing public services*, Management Science, vol. 24, pp. 800-808.

Shier, D.R. y Dearing, P.M. (1983), *Optimal locations for a class of non-linear, single-facility location problems on a network*, Operations Research, vol. 31, pp. 292-303.

Tamir, A.; Pérez Brito, D. y Moreno Pérez, J.A. (1998), *A polynomial algorithm for the p-centdian on a tree*, Networks, vol. 32, pp. 255-262.