

# **UNA METODOLOGÍA ACTIVA PARA LA ENSEÑANZA DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA ADE**

*J.C. Cortés, L. Jódar, M.D. Roselló, R.J. Villanueva  
Universidad Politécnica de Valencia*

## **RESUMEN**

El objetivo del trabajo es presentar la metodología docente aplicada en la asignatura de Fundamentos Matemáticos para ADE de la Universidad Politécnica de Valencia. Por nuestra experiencia, esta metodología conlleva un seguimiento personalizado, que sobre la base de trabajos realizados por equipos de dos alumnos, permite:

- aumentar los contenidos formativos e informativos de la asignatura,
- que el alumno reduzca el riesgo de fracaso trabajando la asignatura lo que necesite,
- que el alumno se construya su calificación en función de su esfuerzo y capacidad,
- obtener mejores calificaciones a los alumnos más ambiciosos.

Los trabajos consisten en la resolución de problemas que contienen el estudio completo de modelos matemático-económicos (desde las bases teóricas hasta las aplicaciones). Para guiar al alumno en esta tarea se realizan semanalmente seminarios.

Después de una primera selección de los trabajos a partir de su corrección, se realiza la verdadera evaluación a través de una prueba oral que consiste en la exposición oral en la pizarra ante el profesor, individual y obligatoria de todos los alumnos, de los problemas que hayan entregado, y donde demostrarán sus conocimientos sobre los problemas entregados. Esta metodología es elegida voluntariamente por el alumno frente a la evaluación tradicional.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Después de haber sido testigos durante años en el transcurso del desarrollo de nuestra labor docente de que las cosas que nos rodean han ido cambiando: los avances tecnológicos y su incorporación a la metodología de la enseñanza, los intereses formativos tanto del alumnado como de la sociedad donde estamos todos inmersos, los numerosos cambios de los planes de estudios, ... desde hace ya varios años los miembros de la unidad docente del Departamento de Matemática Aplicada en ADE nos hemos replanteado la forma de enseñar matemáticas a nuestros alumnos. Fruto de ello, hemos desarrollado una metodología basada en la resolución de problemas contextualizados en modelos económicos y en una evaluación basada en el trabajo continuo del alumno.

## **2. LA REALIDAD DE NUESTRA LABOR DOCENTE**

### **2.1. La realidad del profesorado**

En primer lugar, conviene subrayar que impartimos docencia en una Facultad de ADE que podemos considerar singular por estar ubicada en un campus tecnológico donde el Departamento de Matemática Aplicada, al cual pertenece nuestra unidad docente, imparte docencia en Escuelas de Ingeniería. Consideramos, sin embargo, que esta circunstancia ha favorecido a que nuestra mentalidad y predisposición se haya adaptado casi de forma natural a una enseñanza de las matemáticas para la Facultad de ADE basada en modelos matemáticos, en este caso de carácter económico, en los cuales se basa la metodología activa que desarrollaremos.

### **2.2. La realidad de nuestros alumnos**

Es un denominador común que los alumnos que llegan actualmente a la Universidad proceden de un sistema educativo que ha sufrido una pérdida considerable en horas de docencia en la asignatura de matemáticas. Esta realidad condiciona enormemente el planteamiento de los objetivos a cubrir en una asignatura universitaria de matemáticas. Esta circunstancia si cabe se agudiza más con el perfil de alumno que decide cursar los estudios en una facultad de ADE, puesto que por lo general procede del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, durante el cual, y en el mejor de los casos, se han recibido dos cursos de formación matemática de carácter básico.

A esta realidad debemos añadir que, en general, el alumnado que estudia ADE no tiene por qué tener una especial vocación hacia las matemáticas, lo cual, por otro lado es natural dado que la carrera que ha elegido no es la de Matemáticas. Es por tanto un error presuponer que el alumno ya está motivado en nuestra área, con lo cual, desarrollar un programa basado en conceptos muy abstractos y descontextualizados de la economía tiene un alto riesgo de fracaso. Esto justifica, en nuestra opinión, que un programa con alto contenido en modelización y aplicaciones de la matemática a la economía resulta más estimulante para el perfil de alumnado al cual nos dirigimos. Sin embargo, esto no debe interpretarse como un abandono deliberado del rigor que caracteriza la matemática, sino el aprovechamiento del contexto en el cual desarrollamos nuestro trabajo para acercar las matemáticas al alumno y hacerle ver cuán fecunda resulta su utilización para aproximarse a la realidad económica. Maticemos que el término rigor utilizado anteriormente debe ser entendido no como una inundación de resultados sino como un camino natural para el estudiante y antes que las demostraciones para el alumno hay otras prioridades como la conexión con las aplicaciones y la profesión, que se consigue con los modelos matemáticos de problemas de la actividad profesional.

### **2.3. La realidad de la asignatura**

El panorama al cual nos enfrentamos en el desarrollo de nuestro trabajo respecto de la temporalización de la que disponemos para enseñar matemáticas en ADE es una característica común en otras muchas universidades: tenemos asignados muy pocos créditos para poder transmitir a nuestros alumnos el bagaje matemático que consideramos sería deseable que tuviesen en su formación universitaria. Sin embargo, esto no debe de servir de excusa para crear desasosiego y hacer del programa un lugar de refugio donde volver a reescribir lo que siempre se ha venido haciendo, pero ahora con menos tiempo.

Nuestra realidad particular es que nos encargamos de la asignatura Fundamentos Matemáticos para la Administración y Dirección de Empresas (FMADE), que se desarrolla en el primer cuatrimestre del primer curso, y a la cual le corresponden 7,5 créditos desdoblados en 6,5 créditos de teoría y problemas y 1 crédito de prácticas de laboratorio, donde se utiliza el asistente de cálculo simbólico *Mathematica*.

Dado que después de cursar esta asignatura el alumno que desee continuar con su formación matemática sólo lo puede hacer a través de una asignatura de libre elección con 6 créditos, éramos conscientes que cualquier elaboración de un curriculum para la asignatura de FMADE debería sacrificar aspectos tradicionales. Como consecuencia de esta realidad y de la experiencia acumulada por algunos miembros de nuestra unidad docente, se pensó en desarrollar una metodología alternativa que soslayase todas estas dificultades. Fruto de ello surgió la metodología activa que aquí proponemos y que llevamos desarrollando durante tres cursos académicos consecutivos y que pasamos a describir en el siguiente epígrafe.

### **3. UNA METODOLOGÍA ACTIVA BASADA EN LA MODELIZACIÓN**

#### **3.1. Objetivos**

El objetivo es el desarrollo de una metodología docente con seguimiento personalizado, que sobre la base de trabajos realizados por equipos de dos alumnos, permita:

- aumentar los contenidos formativos e informativos de la asignatura,
- que el alumno reduzca el riesgo de fracaso trabajando la asignatura lo que necesite,
- que el alumno se sienta más motivado al trabajar, mediante problemas matemáticos que contienen modelos económicos, aspectos más cercanos a sus intereses formativos, permitiéndole de esta forma tener una visión más positiva del papel de las matemáticas en su formación integral,
- que el alumno se construya su calificación en función de su esfuerzo y capacidad recompensando así su esfuerzo realizado,
- obtener mejores calificaciones a los alumnos más ambiciosos.

#### **3.2. Descripción del proceso**

Para facilitar al docente interesado en esta experiencia la comprensión de la dinámica de la metodología propuesta, detallamos a continuación cómo se lleva a cabo.

- Los profesores preparan una colección de problemas, que es diferente cada curso y que contiene aproximadamente 40 enunciados.

- Esta colección es accesible para los alumnos desde el inicio del curso.
- Los alumnos se inscriben en equipos de dos personas, facilitando unos datos que permiten a los profesores identificarlos y localizarlos cuando haya que acordar la cita de la prueba oral.
- Los alumnos tienen que realizar un total de 11 problemas divididos en dos tipos:
  - **Tipo A:** son 6 asignados a los equipos de alumnos por los profesores de la asignatura. Serán diferentes para cada equipo y cubren los diferentes contenidos específicos de la asignatura.
  - **Tipo B:** son 5 y los eligen los alumnos de entre el resto de problemas de la colección que no les hayan sido asignados en la Tipo A. En la elección de estos problemas es donde los equipos muestran su ambición y su deseo de alcanzar mejores notas.
- Los alumnos tienen además 6 horas semanales de seminarios-tutorías, independientes de las tutorías individuales de cada profesor, cuyo horario se hace público oportunamente, donde los profesores
  - realizan problemas aparecidos en colecciones de años anteriores o que faciliten la resolución de los de la colección del correspondiente curso académico,
  - orientan y supervisan el trabajo personal de los alumnos.
- Con objeto de realizar un seguimiento del trabajo desarrollado por los alumnos, la entrega de los problemas se hace en dos tandas:
  - La primera, de 6 problemas, 3 de tipo A y 3 de tipo B, a mediados de noviembre. Los problemas de tipo A pueden resolverse con los contenidos de la asignatura que el profesor ha desarrollado en las clases ordinarias.
  - La segunda, de los restantes 5 problemas, a finales de diciembre.

Cabe destacar que en las clases ordinarias se desarrollan los conceptos y herramientas básicas que el alumno necesitará tanto para la realización de los problemas como para su formación en la asignatura, pero siempre bajo las directrices que ya se han

mencionado: enfocar las matemáticas para estudiar modelos económicos y permitir una conexión con otras asignaturas que el alumno está cursando simultáneamente o cursará en un futuro, como por ejemplo, Microeconomía, Macroeconomía, Estadística, Análisis Cuantitativo, Matemática Financiera... Esto no implica que algunos de los problemas que proponemos tengan un contenido exclusivamente matemático con la finalidad de que los alumnos preparen aspectos fundamentales para posteriormente poder profundizar en los modelos económicos utilizando estas herramientas matemáticas. Finalmente, también hay que subrayar que con el objetivo doble de poder aplicar lo aprendido en las clases de prácticas de laboratorio y aprovechar la potencia de cálculo del ordenador, algunos problemas deben ser resueltos obligatoriamente con *Mathematica*.

La experiencia acumulada con esta metodología activa de enseñanza nos permite destacar que con el seguimiento de la misma paliamos el importante problema del escaso número de créditos que tenemos para poder formar a los alumnos al nivel en que sería deseable, ya que los problemas nos permiten hacer extensiones del contenido del programa en la dirección que deseamos en cada momento, permitiendo así que aquellos alumnos que eligen o se les asigna estas actividades puedan profundizar en aspectos que, con una metodología tradicional basada exclusivamente en la explicación magistral y el examen escrito, sería utópico alcanzar.

Una vez el grupo entrega los problemas, los profesores los corrigen, y si éstos tienen la calidad suficiente, los dos componentes del grupo son convocados a una prueba oral que a continuación comentamos:

- La prueba oral es la verdadera evaluación, y consiste en la exposición oral en la pizarra ante el profesor, individual y obligatoria de todos los alumnos, de los problemas que hayan entregado, y donde demuestran sus conocimientos sobre los problemas realizados.
- La prueba oral se realiza en día y hora acordados por el alumno y el profesor, una vez finalizados los exámenes ordinarios de enero.
- El alumno debe asistir a la prueba oral con los enunciados de la colección de problemas y no puede utilizar ningún otro material durante el ejercicio.
- Al alumno se le comunica si ha aprobado cuando finaliza la prueba oral.

- La competencia sobre la fiabilidad del trabajo realizado es exclusiva del profesor y no contempla interpretaciones ni comparaciones.

Finalmente, subrayemos que esta metodología activa sólo se aplica en la convocatoria de enero, pero no en la extraordinaria que se realiza en el mes de abril. La razón fundamental es la de promover que el alumno no demore su evaluación con el consecuente riesgo de abandono de la asignatura.

### **3.3. Ventajas observadas de la metodología**

En este epígrafe señalaremos los aspectos positivos y negativos que en nuestra opinión supone desarrollar esta metodología activa de enseñanza, enfocándolo desde tres perspectivas distintas: el alumno, el profesor y la universidad.

#### *3.3.1. Desde la perspectiva del alumno*

Basándonos en la información recogida a través de las encuestas y el diálogo con nuestros alumnos, éstos señalan las siguientes ventajas:

- Se construyen su calificación en función del esfuerzo que han dedicado a resolver los problemas, dado que al consistir la prueba oral en la defensa del trabajo realizado durante meses, reducen el riesgo de fracaso al no enfrentarse en ningún momento a un examen tradicional donde se lo juegan todo a una carta.
- La elección por parte de los alumnos de los problemas del tipo B les permite avanzar en su formación en una dirección que ellos mismos han elegido y que por lo tanto les resulta más estimulante.
- Este sistema potencia el trabajo en equipo.
- Con esta metodología se refuerza la relación no sólo con sus compañeros de otros grupos a través del trabajo en los seminarios, sino también con los profesores, enriqueciendo más su formación al tratarse de un trabajo dinámico frente a la posición estática de la enseñanza tradicional basada en un monólogo del profesor.
- La sensación del alumnado es la de estar formándose en una asignatura que sí le es útil para comprender otras que está o estará cursando, al abordar problemas matemáticos con enunciado económico.

### *3.3.2. Desde la perspectiva del profesor*

Antes de citar las ventajas que encontramos al desarrollar nuestra labor bajo esta metodología, adelantamos que el único inconveniente que hemos encontrado es el aumento del trabajo a realizar por nuestra parte: para realizar el seguimiento de los grupos a través de los seminarios y de la corrección de los trabajos escritos, así como el desarrollo de las numerosas pruebas orales que conlleva el método, ya que, según el curso académico, aproximadamente entre el 70% y el 98% del alumnado matriculado en la asignatura decide voluntariamente seguir esta metodología. Pero todo esto se ve compensado con las siguientes ventajas que el método tradicional no nos reporta:

- La elaboración de las listas de problemas, las cuales cambiamos cada curso, suponen un reto interesante para el grupo de profesores, puesto que no se trata de ejercicios o actividades rutinarias, sino del desarrollo de modelos matemático-económicos, lo cual nos obliga a consultar textos de otras áreas como Microeconomía, Estadística,...., aumentando nuestra formación.
- La realización de los seminarios permite mantener un contacto directo con los alumnos, lo cual nos enriquece y nos acerca al conocimiento de sus problemas en nuestra materia.
- En nuestra opinión la realización de la prueba oral permite evaluar aspectos que nunca pueden reflejarse en una prueba escrita, como pueden ser la destreza propia de un razonamiento matemático transmitido oralmente, o la posibilidad de preguntar sobre la justificación de algún aspecto que en una prueba escrita, o en la propia entrega de los problemas, queda plasmado como una simple rutina.

### *3.3.3. Desde la perspectiva de la universidad*

Esta metodología conecta con las nuevas tendencias que basadas en las directrices europeas a través del sistema de créditos ECTS está impulsando la universidad en la cual impartimos clase y que pronto deberá implantarse en el resto de universidades del espacio europeo.

### *3.3.4. Desde la perspectiva de los resultados*

Después de varios cursos en los que hemos aplicado esta metodología, hemos observado un notable incremento en el número de alumnos que se presentan a la evaluación de la asignatura y un considerable aumento en el porcentaje de aprobados respecto de los cursos en los que se aplicaba el sistema de evaluación tradicional.

## **4. UN EJEMPLO DE PROBLEMA VOLUNTARIO**

A continuación, con objeto de que se comprenda mejor el tipo de problemas que proponemos a nuestros alumnos, mostramos uno de ellos basado en un modelo económico formulado en términos de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal a coeficientes constantes.

### **4.1. Ejemplo: Política de precios y stock óptimo**

Muchos fabricantes tienen cierto stock (inventario) básico de su producto para satisfacer cualquier demanda repentina e inesperada de los clientes. El stock está limitado evidentemente por la capacidad de almacenamiento disponible. El nivel de stock tenderá a bajar en periodos de fuerte demanda, pero como hay tiempo de desfase en el ajuste de la producción a la demanda, el stock tiende a aumentar cuando la demanda disminuye. Si el nivel de stock es demasiado bajo, entonces hay riesgo de perder clientes cuya demanda no pueda ser satisfecha inmediatamente, pero un inventario demasiado grande involucra la paralización de capital productivo.

La fábrica de ladrillos VIM ha fijado un nivel óptimo de  $L_0$  (en miles) para su stock de ladrillos no vendidos y propone mantener el stock tan próximo como sea posible a  $L_0$ , para lo cual va a adoptar una política de precios que consiste en lo siguiente; si el stock está por encima de  $L_0$  entonces baja el precio de los ladrillos, de modo que las ventas suben y el stock baja. Si el stock está por debajo de  $L_0$ , entonces se sube el precio y el stock sube. Ahora bien, mientras que esta política mantendrá el stock cerca del óptimo, la fábrica está preocupada de que esta política pueda provocar cambios fuertes y grandes en los precios y que cause alarma y confusión en los clientes. Por eso se interesa por saber y analizar la estabilidad del precio de los ladrillos.

El precio en decenas de euros por cada mil ladrillos en el instante  $t$ ,  $P(t)$ , cambia en proporción a la diferencia entre el stock actual en el instante  $t$ , denotado  $L(t)$  y el óptimo  $L_0$  (medido en miles). Este hecho se describe matemáticamente así:

$$P'(t) = -\gamma(L(t) - L_0) \quad (1)$$

donde  $\gamma$  es una constante de proporcionalidad positiva. El pronóstico de ventas  $S(t)$ , medido en miles de ladrillos, según la fábrica es

$$S(t) = 250 - 30P(t) - 8P'(t) \quad (2)$$

y obsérvese que  $S(t)$  crece cuando  $P'(t) < 0$ . La fábrica determina niveles de producción  $Q$  (en miles) según la ecuación

$$Q(t) = 120 - 4P(t) \quad (3)$$

**a)** Es cierto que el cambio en el stock es igual a la diferencia entre los ladrillos  $Q(t)$  producidos y los vendidos  $S(t)$ . Justificar a partir de aquí, que

$$L'(t) = Q(t) - S(t) \quad (4)$$

**b)** Mostrar a partir de (1)-(4) que  $P(t)$  satisface una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$P''(t) + AP'(t) + BP(t) = C \quad (5)$$

determinando  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

**c)** Hallar la solución general de la ecuación de  $P(t)$  obtenida en el apartado **a**).

**d)** Encontrar condiciones para que los precios  $P(t)$  sean estables, es decir, que exista el límite de  $P(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sugerencia: La condición debe obtenerse en términos de  $\gamma$ .

Acabamos comentando los diferentes contenidos matemáticos que permite trabajar el modelo anterior.

En primer lugar, la ecuación (1) debe ser interpretada económicamente por los alumnos utilizando para ello el concepto así como la interpretación de la derivada para estudiar la monotonía. Esto les permite comprender que una variación del precio permitirá reducir o aumentar el stock respecto del umbral óptimo.

El apartado a) pretende reforzar la importancia del concepto de derivada como herramienta para reflejar el cambio instantáneo de una magnitud, en este caso de carácter económico.

Mediante una manipulación apropiada de las ecuaciones (1)-(4), las cuales deben ser comprendidas desde el punto de vista económico por los alumnos, se llega a una formulación del modelo en términos de una ecuación diferencial del tipo (5), que es uniparamétrica en términos de la constante  $\gamma$ . A partir de aquí, empieza un trabajo donde con la herramienta matemática tiene que discutirse las soluciones del modelo considerando que las mismas deben de tener las restricciones que imponga el contexto económico. En este análisis surgen tres casuísticas en función de las raíces características de la ecuación (5).

Finalmente mediante el último apartado se propone realizar un estudio del comportamiento del modelo a largo plazo. Se deben imponer condiciones sobre el parámetro que aparecía libremente en (1) para que los precios se comporten adecuadamente.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CORTÉS, R., CORTÉS, J.C., JÓDAR, L., MORERA, J.L. y VILLANUEVA, R.J. (2002). “Problemas y exámenes de fundamentos matemáticos para la administración y dirección de empresas”. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- CORTÉS, R., CORTÉS, J.C., JÓDAR, L., ORERO, G., ROSELLÓ, M.D. y VILLANUEVA, R.J. (2003). “Breve manual de *Mathematica* / Curt manual de *Mathematica*”. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- CORTÉS, R., CORTÉS, J.C., JÓDAR, L., ORERO, G., ROSELLÓ, M.D. y VILLANUEVA, R.J. (2003). “Problemas y modelos matemáticos para la administración y dirección de empresas”. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- CORTÉS, J.C., JÓDAR, L., ROSELLÓ, M.D. y VILLANUEVA, R.J. (2003). “Fonaments Matemàtics per a l’Administració i Direcció d’Empresa”. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- HENRICI, P. (1972). “Reflections of a teacher of applied mathematics”. *Quart. J. Applied Maths.*, pp. 31-39.
- ROTA, G.C. (1997). “Indiscrete Thoughts”. Birkhäuser, Boston.