

# PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA Y TEORÍA DE LA CARTERA: UNA APLICACIÓN CON MAPLE

*Eva M<sup>a</sup> del Pozo García*

*M<sup>a</sup> Jesús Segovia Vargas*

*Zuleyka Díaz Martínez*

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I  
Universidad Complutense de Madrid

## Resumen

Bien es sabido que la programación matemática ha evolucionado notablemente en los últimos años, debido fundamentalmente a la gran capacidad de estas técnicas para la modelización de una amplia variedad de problemas en diversos campos y al espectacular desarrollo de la informática, que posibilita la aplicación práctica de los algoritmos.

En el presente trabajo se plantea la programación y resolución de un problema típico de optimización matemática aplicado a la Teoría de la Cartera utilizando para ello el programa *Maple*.

**Palabras clave:** optimización matemática, programación, Teoría de la Cartera, Maple.

Como es sobradamente conocido, la Teoría de carteras y la consiguiente teoría del equilibrio en el mercado de capitales nació en 1952 con un trabajo de Markowitz y desarrollada a partir de entonces con un gran número de aportaciones debidas a prestigiosos investigadores como Tobin, Sharpe, Litner etc.

Nos referiremos, al modelo basado en la teoría de formación y selección de carteras, entendiendo por cartera una determinada combinación de activos financieros.

Cuando el inversor forma su cartera trata de combinar un conjunto de activos individuales de forma que el conjunto de todos ellos le garantice una rentabilidad, seguridad y liquidez aceptables, objetivos que son, en cierta medida, incompatibles entre sí.

Las dos características principales de los modelos media-varianza son:

1.- El rendimiento de un título o cartera se mide mediante la media o esperanza matemática de la variable aleatoria  $r$ , descrita anteriormente y como medida del riesgo se acepta la varianza de dicha variable.

2.- Los inversores prefieren las carteras que sean Pareto-óptimas respecto a la media y a la varianza, es decir, dadas dos carteras con el mismo rendimiento esperado van a preferir aquella con menos riesgo y dadas dos carteras con la misma varianza preferirá aquella con mayor rendimiento esperado.

En cualquier caso, con la diversificación se puede disminuir la varianza manteniendo la misma rentabilidad esperada sobre todo cuando las rentabilidades de varios activos estén negativamente correlacionadas.

Está claro, por lo tanto, que el decisor elegirá una cartera bien diversificada.

Dados  $n$  títulos cuyas rentabilidades nos vienen dadas por la variable aleatoria  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Se trata de calcular la proporción de cada título que debe contener la cartera, para ello, denotaremos dichas proporciones como:

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

$$X_i \begin{cases} E_i = E(x_i) \\ \sigma_i^2 = Var(x_i) \\ \sigma_{ij} = Cov(x_i, x_j) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Rentabilidad de la Cartera  $C = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n$   
 $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1$

La Esperanza Matemática de la cartera será:

$$E = E(c) = E(x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n) = E_1\omega_1 + \dots + E_n\omega_n$$

y la Varianza:

$$\begin{aligned} Var(c) &= \sigma_c^2 = Var(x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n) = \sigma_1^2\omega_1^2 + \dots + \sigma_n^2\omega_n^2 + \sum_{i \neq j} 2\omega_i\omega_j\sigma_{ij} = \\ &= (\omega_1 \dots \omega_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \omega^t \Sigma \omega \end{aligned}$$

Al ser  $Var(C) \geq 0$  siempre, está claro que  $\omega^t \Sigma \omega \geq 0 \quad \forall \omega \neq 0$

Así pues  $\omega^t \Sigma \omega$  es una forma cuadrática semidefinida positiva y por tanto la función es convexa

Matemáticamente, las carteras óptimas son las soluciones del siguiente programa multiobjetivo:



## Ejemplo 1

Veamos un ejemplo que resolvemos para tres activos

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 2,3\omega_1^2 + 1,4\omega_2^2 + 1,8\omega_3^2 + 0,93\omega_1\omega_2 + 0,62\omega_1\omega_3 + 0,22\omega_2\omega_3 \\ \text{Sujeto a:} \quad & 15,1\omega_1 + 12,5\omega_2 + 14,7\omega_3 = E_0 \\ & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \end{aligned}$$

donde sus respectivas esperanzas matemáticas y varianzas son las siguientes:

$$\begin{aligned} E_1 &= 15,1 & E_2 &= 12,5 & E_3 &= 14,7 \\ \sigma_1^2 &= 2,3 & \sigma_2^2 &= 1,4 & \sigma_3^2 &= 1,8 \\ \sigma_{12} &= 0,93 & \sigma_{13} &= 0,62 & \sigma_{23} &= 0,22 \end{aligned}$$

formamos la función Lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1, \lambda_2) &= 2,3\omega_1^2 + 1,4\omega_2^2 + 1,8\omega_3^2 + 0,93\omega_1\omega_2 + 0,62\omega_1\omega_3 + 0,22\omega_2\omega_3 + \\ &+ \lambda_1(15,1\omega_1 + 12,5\omega_2 + 14,7\omega_3 - E_0) + \lambda_2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1) \end{aligned}$$

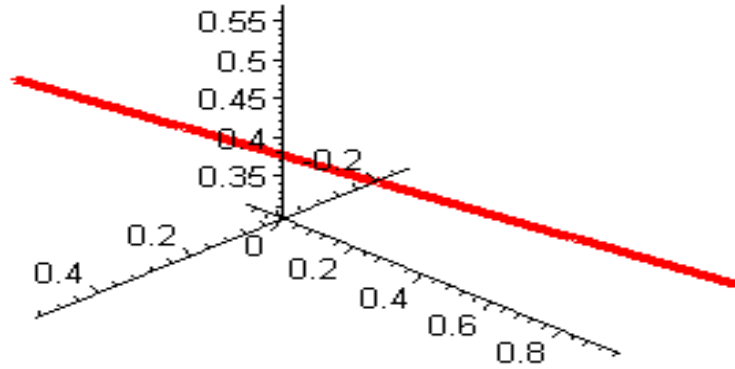
hacemos las derivadas parciales de la lagrangiana

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega_1} &= 4,6\omega_1 + 0,93\omega_2 + 0,62\omega_3 + 15,1\lambda_1 + \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_2} &= 2,8\omega_2 + 0,93\omega_1 + 0,22\omega_3 + 12,5\lambda_1 + \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_3} &= 3,6\omega_3 + 0,62\omega_1 + 0,22\omega_2 + 14,7\lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

y resolvemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} 4,6\omega_1 + 0,93\omega_2 + 0,62\omega_3 + 15,1\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2,8\omega_2 + 0,93\omega_1 + 0,22\omega_3 + 12,5\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 3,6\omega_3 + 0,62\omega_1 + 0,22\omega_2 + 14,7\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 15,1\omega_1 + 12,5\omega_2 + 14,7\omega_3 - E_0 &= 0 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

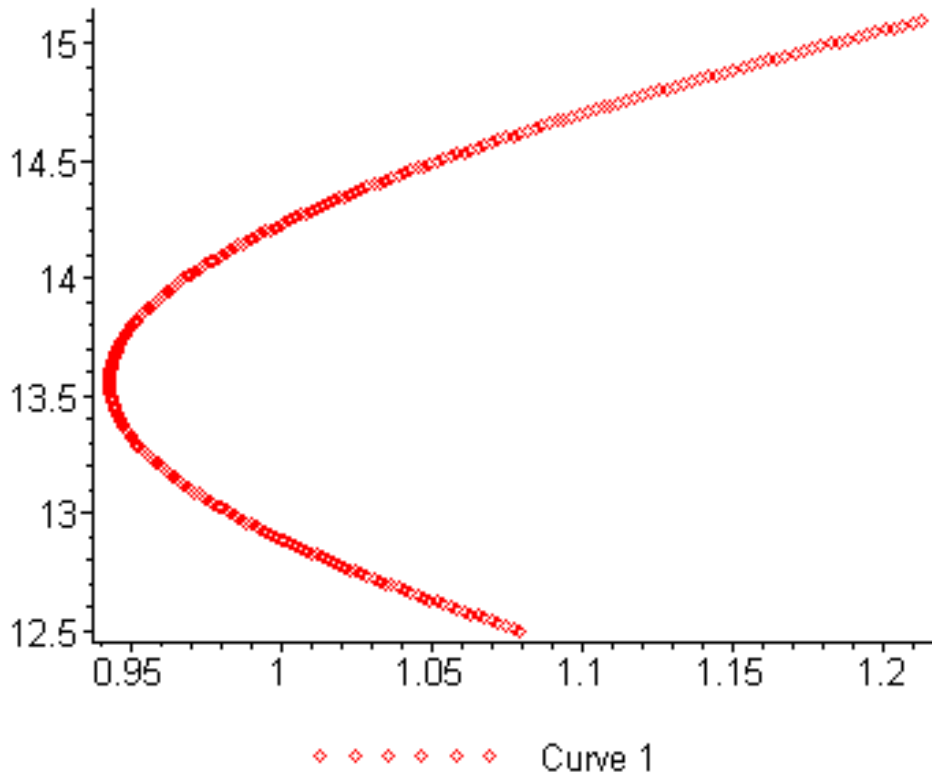
las soluciones del mismo serán los óptimos de Pareto



y su imagen por la función:

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \left( \sum_{i=1}^n E_i \omega_i, \sqrt{\sum_{ij=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j} \right)$$

es la denominada frontera eficiente.



## Ejemplo 2

En este caso resolveremos de nuevo un programa para tres activos, de los cuales uno de ellos es un activo libre de riesgo

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 1,4\omega_2^2 + 1,8\omega_3^2 + 0,22\omega_2\omega_3 \\ \text{Sujeto a:} \quad & 7\omega_1 + 12,5\omega_2 + 14,7\omega_3 = E_0 \\ & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{array}{lll} E_1 = 7 & E_2 = 12,5 & E_3 = 14,7 \\ \sigma_1^2 = 0 & \sigma_2^2 = 1,4 & \sigma_3^2 = 1,8 \\ \sigma_{12} = 0 & \sigma_{13} = 0 & \sigma_{23} = 0,22 \end{array}$$

formamos la función Lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_1, \lambda_2) = & 1,4\omega_2^2 + 1,8\omega_3^2 + 0,22\omega_2\omega_3 + \\ & + \lambda_1(7\omega_1 + 12,5\omega_2 + 14,7\omega_3 - E_0) + \lambda_2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1) \end{aligned}$$

hacemos las derivadas parciales de la lagrangiana

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_1} = 7\lambda_1 + \lambda_2$$

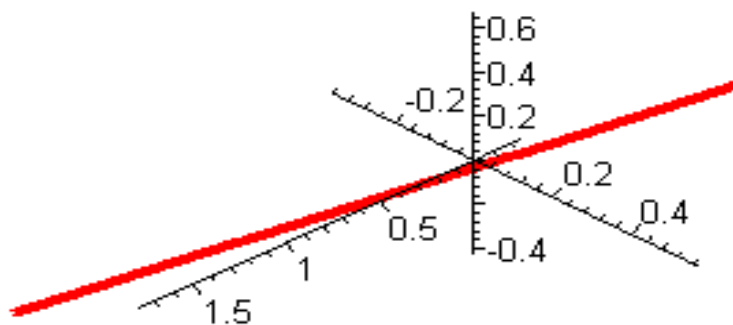
$$\frac{\partial L}{\partial \omega_2} = 2,8\omega_2 + 0,22\omega_3 + 12,5\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_3} = 3,6\omega_3 + 0,22\omega_2 + 14,7\lambda_1 + \lambda_2$$

y resolvemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 7\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2,8\omega_2 + 0,22\omega_3 + 12,5\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3,6\omega_3 + 0,22\omega_2 + 14,7\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 7\omega_1 + 12,5\omega_2 + 14,7\omega_3 - E_0 = 0 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

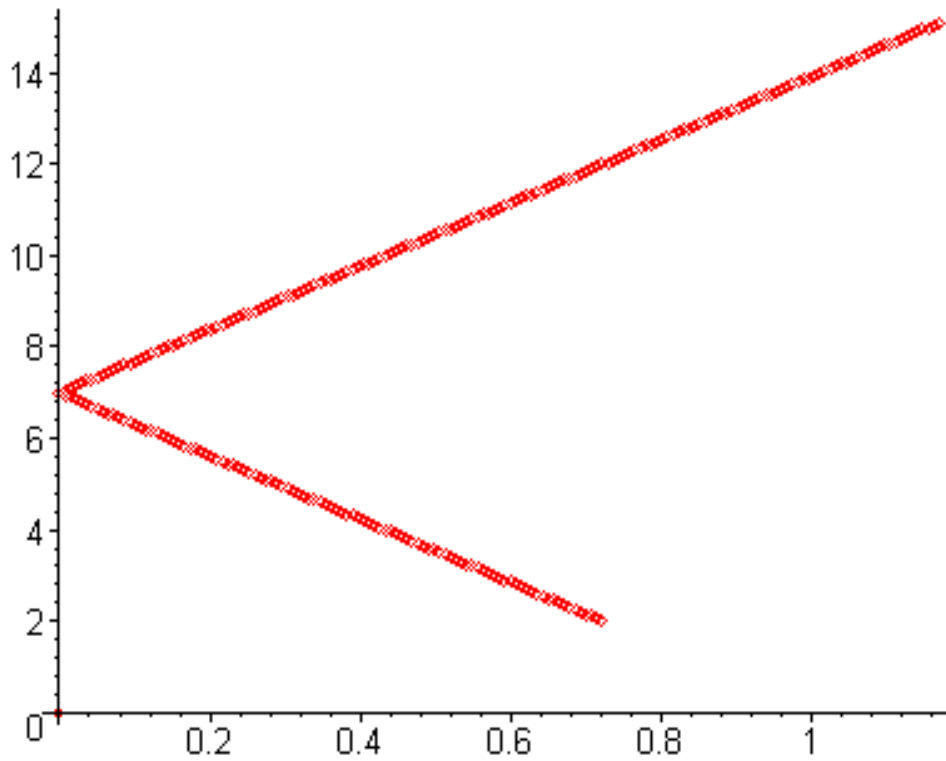
y obtenemos de nuevo los óptimos de pareto



y su imagen por la función:

$$f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \left( \sum_{i=1}^n E_i \omega_i, \sqrt{\sum_{ij=1}^n \sigma_{ij} \omega_i \omega_j} \right)$$

es nuevamente la frontera eficiente.



La elección de una entre todas las carteras óptimas (dentro de la frontera eficiente) la realizará el decisor escogiendo aquella que maximiza su utilidad.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ALEGRE, P., BADIA, C. ORTI, F., RODON, C. SAEZ, J. SANCHO, T., TARRIO, J. y TERCEÑO, A. (1991) *Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales*. Tomo 2, AC.
2. BALBÁS, A. y GIL, J. A. (1990) *Programación Matemática*. AC.
3. BARBOLLA, R. CERDÁ, E. SANZ, P. (1991) *Optimización Matemática: teoría, ejemplos y contraejemplos*. Espasa-Calpe.
4. CABALLERO, R. E., CALDERÓN, S., GALACHE, T. PL, GONZÁLEZ, A. C., REY, M<sup>a</sup>. L., RUIZ, F. (1993) *Matemáticas aplicadas a la economía y a la empresa*. Pirámide.
5. CABALLERO, R. E., GONZÁLEZ, A. C. y TRIGUERO, S. A. (1992) *Métodos matemáticos para la economía*. Mc Graw Hill.
6. CHIANG, A. C. (1992) *Elements of Dynamic Optimization*. Mc Graw Hill.
7. COSTA REPARAZ, E. (1989) *Matemáticas para economistas*. Pirámide.
8. COSTA REPARAZ, E. (1991) *Problemas y cuestiones de matemáticas para economistas*. Pirámide.
9. GUERRERO CASAS, F. M. (1994) *Curso de optimización. Programación matemática*. Ariel Economía.
10. HERAS, A. , GUTIERREZ, A., BALBÁS, A. GIL, J.A. y VILAR, J.L. (1990) *Programación matemática y modelos económicos: Un enfoque teórico-práctico*. A.C.
11. SYDSAETER, K. y HAMMOND, P. J. (1996) *Matemáticas para el análisis económico*. Pentice-Hall.