ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE METODOLOGÍAS PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS BONUS-MALUS

Pilar García Pineda, Antonio Heras Martínez y José Antonio Núñez del Prado
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es mostrar un método para hacer comparaciones entre Sistemas Bonus Malus. Se comparan Sistemas Bonus Malus obtenidos mediante la metodología GPBM, basada en Programación por Metas y Sistemas Bonus Malus obtenidos mediante la metodología clásica, conocida como Escala de Bayes.

1. INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es hacer una comparación entre los sistemas bonus-malus obtenidos mediante diferentes metodologías. Aplicamos esta comparación a sistemas bonus-malus obtenidos mediante la metodología GPBM, expuesta por los autores en las Jornadas Asepuma 2002, y sistemas bonus-malus obtenidos mediante la metodología clásica.

Veremos una breve exposición de cada una de las metodologías empleadas en el diseño de los sistemas bonus-malus, el método que nos permite comparar dichos sistemas y un ejemplo que ilustre esta comparación.

2. SISTEMAS BONUS-MALUS

Una compañía de seguros utiliza un sistema Bonus-Malus cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- Existe un número finito de clases $C_1 ... C_K$ tales que cada póliza permanece en una clase durante un periodo de seguro (habitualmente un año).
- La prima para cada póliza depende únicamente de la clase en la que está.
- La clase a la que pertenece la póliza durante un periodo dado está determinado por la clase en el periodo precedente y el número de siniestros declarados en ese periodo, lo que se conoce como *Condición de Markov*.

Cada sistema Bonus-Malus está determinado por tres elementos:

- La *clase inicial*, que es la que se asigna a las nuevas pólizas.
- La *escala de primas* $\pi = (\pi_1, ..., \pi_K)$ donde π_i es la prima para la clase C_i.
- Las *reglas de transición,* es decir, las reglas que establecen las condiciones bajo las cuales una póliza que está en la clase C_i pasa a la clase C_j en el siguiente periodo. Estas reglas de transición vienen dadas en una matriz T de dimensión KxK donde sus elementos T_{ij} cumplen las siguientes condiciones:
  - Son conjuntos de números enteros r tales que una póliza pasa de la clase C_i a la clase C_j si declara r siniestros.
  - $\cup_{j=1}^{K} T_{ij} = \{0,1,2,...\}$ y $T_{ij} \cap T_{ij'} = \varnothing$ cuando $j \neq j'$.

Se supone que las características de riesgo de cada póliza están resumidas en el valor de un cierto parámetro λ, dichos valores para todas las pólizas de la cartera se supone que son una variable aleatoria Λ, y que los números de siniestros de la póliza, durante los diferentes años de vigencia de ésta, son variables aleatorias condicionalmente independientes y e idénticamente distribuidas para cada valor del parámetro de riesgo de la póliza. Se supone también que las cuantías de la siniestralidad individual son independientes de del número de siniestros y del parámetro de riesgo, y mutuamente independientes e idénticamente distribuidas. Este parámetro de riesgo, λ, se identifica con la frecuencia media de siniestros, que se supone estacionaria en el tiempo.

3. ESCALA DE BAYES

Tomando la media de la siniestralidad como unidad monetaria, el objetivo del diseño de un sistema Bonus-Malus consiste en calcular una prima pura para cada asegurado tan próxima como sea posible al verdadero valor (desconocido) de su parámetro.

La metodología más habitual, en la literatura actuarial, para diseñar sistemas Bonus-Malus es la construcción de la *escala de Bayes* . Esta escala se obtiene minimizando la esperanza del cuadrado del error de tarificación, definido como la esperanza del cuadrado de la diferencia entre la verdadera prima pura y la prima realmente pagada para una póliza infinitamente vieja elegida al azar.

La *probabilidad de transición* condicionada de una clase C_i a C_j en un periodo, para un valor de $\Lambda = \lambda$ dado, viene dada por $p_{ij}\left(\lambda\right) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r\left(\lambda\right) t_{ij}^r$ donde $p_r\left(\lambda\right)$ es la probabilidad condicionada a $\Lambda = \lambda$ de declarar r siniestros y t_{ij}^r toma los valores 1 si $r \in T_{ij}$ y 0 en caso contrario.

Estos valores se recogen en una matriz $P\left(\lambda\right)$ de dimensión *KxK*, llamada *matriz de transición.* Estas definiciones nos permiten considerar un sistema Bonus-Malus como una cadena de Markov y, teniendo en cuenta las propiedades de las cadenas de Markov, es posible demostrar que existe una distribución de probabilidad estacionaria (condicionada) $\left(p_1(\lambda),..., p_K(\lambda)\right)$ donde $p_i(\lambda)$ está definida como el valor del límite, cuando el número de periodos $\to\infty$, de la probabilidad condicionada de que una póliza pertenezca a la clase C_i, dado $\Lambda = \lambda$.

Esta distribución de probabilidad estacionaria coincide con el autovector por la izquierda asociado con el autovalor 1 de la correspondiente matriz de transición, cuyas componentes sean positivas y sumen la unidad.

4. GPBM

Esta metodología está basada en Programación por Metas. Como para la obtención de la escala de Bayes, el cálculo de la escala de primas de un sistema Bonus-Malus se puede considerar como un problema de teoría de la decisión en el cual las posibles decisiones son la escala de primas $(\pi_1,...,\pi_K)$, los estados aleatorios de la naturaleza son los valores de Λ, y la pérdida asociada a cada posible decisión $(\pi_1,...,\pi_K)$ y a cada valor de Λ es el valor absoluto del error de tarificación $\left|\sum_{i=1}^{K}\pi_i p_i(\lambda)-\lambda\right|$.

La decisión óptima será la escala $(\pi_1,...,\pi_K)$ que minimice $\int\left|\sum_{i=1}^{K}\pi_i p_i(\lambda)-\lambda\right| dU(\lambda)$. Esta expresión es, en general, bastante difícil de resolver. No obstante, si suponemos que el parámetro Λ tiene una distribución discreta, es decir, toma los valores $(\lambda_1,...,\lambda_m)$ con probabilidades $(q_1,...,q_m)$ respectivamente, entonces es equivalente a minimizar $\sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{K}\pi_i p_i(\lambda)-\lambda\right| q_j$, lo que es también equivalente al siguiente programa lineal

$$\min\sum_{j=1}^{m}\left(x_j + y_j\right) q_j$$

$$\left\{\begin{array}{c} \pi_1.p_1(\lambda_1)+...+\pi_K.p_K(\lambda_1)+x_1-y_1=\lambda_1 \\ ... \\ \pi_1.p_1(\lambda_m)+...+\pi_K.p_K(\lambda_m)+x_m-y_m=\lambda_m \\ \pi_i \geq 0 \quad i=1...K \\ x_j, y_j \geq 0 \quad j=1...m \end{array}\right\}$$

donde los valores óptimos de las variables x_j e y_j representan los errores de tarificación negativo y positivo, respectivamente, para una póliza de parámetro λ_j.

En los programas generales de programación por metas el decisor intenta encontrar los valores de las variables de decisión tales que ciertas funciones objetivo tomen valores tan próximos como sea posible a un conjunto de metas previas. En este caso, dichas metas son los valores $\lambda_1,...,\lambda_m$, posibles valores del parámetro Λ e intentamos encontrar los valores de las variables de decisión $\pi_1,...,\pi_K$ tales que se aproximen, para cada póliza de parámetro λ_j, el valor de la media de las primas pagadas por ese asegurado $\sum_{i=1}^{K} \pi_i p_i\left(\lambda_j\right)$ y su frecuencia de siniestros real λ_j.

El grado de desequilibrio financiero viene dado por $\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^0 - y_j^0\right).q_j$ donde x_j^0, y_j^0 son las variables de desviación óptimas solución del programa lineal. Luego es posible incorporar la propiedad de equilibrio financiero al sistema Bonus-Malus simplemente añadiendo al programa lineal la restricción $\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^0 - y_j^0\right).q_j = 0$.

Asimismo, es posible incorporar otras necesidades de mercado siempre y cuando se puedan expresar como restriccciones lineales, como por ejemplo:

$$\begin{gathered}
\pi_i - \pi_{i+1} \geq d_i \\
\pi_i - \pi_{i+1} \leq d_i \\
\pi_1 - \pi_K \leq D \\
\pi_1 \geq .... \geq \pi_K \\
\pi_1 - \pi_n \geq D
\end{gathered}$$

4. MÉTODO PARA COMPARAR SISTEMAS BONUS-MALUS

El sistema Bonus-Malus ideal sería aquel en el que cada asegurado pagara su verdadera siniestralidad media. En este caso no se cometerían errores de tarificación, es decir, éstos serían siempre nulos.

El valor de estos errores de tarificación podemos representarlo gráficamente en un eje de coordenadas, donde en el eje de abscisas se representan los valores de λ, es decir, la siniestralidad media individual y en el eje de ordenadas los errores de tarificación positivos y negativos.

Si trazamos una línea que una todos los errores de tarificación, ya que la siniestralidad media aunque está discretizada es una variable continua, el área ponderada por la probabilidad de la variable Λ, siniestralidad media individual, nos informa sobre el error cometido en la tarificación.

Si consideramos el valor de esta área como una medida del error cometido al tarificar, un sistema Bonus-Malus será mejor que otro si el valor de su área ponderada es menor.

En muchos casos una simple ojeada al gráfico de errores nos permitirá comparar sistemas Bonus-Malus.

5. EJEMPLO Y COMPARACIÓN DE AMBOS MÉTODOS

Tomamos los datos de un ejemplo (Norberg, 1976). Se construye un sistema Bonus-Malus con 13 clases. Se considera que la siniestralidad está distribuida según la función de estructura discreta dada por la siguiente tabla:

λ_i	.033	.067	.1	.133	.167	.2	.233	.267	.3	.333	.367
$P(\Lambda=\lambda_i)=q_i$	.143	.172	.143	.114	.1	.086	.072	.057	.043	.029	.014

.4	.433	.467	.5	.533	.567	.6	.633	.667
.007	.006	.004	.003	.001	.001	.001	.0001	.0001

Tomando el coste medio de un siniestro como unidad monetaria se obtiene que $E\Lambda=0.152$. Se toma como clase inicial k=12 y como reglas de transición las dadas por la matriz:

$$T=\begin{pmatrix}
\{1,2,...\} & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\{1,2,...\} & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\{1,2,...\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\{2,3,...\} & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - & - \\
\{2,3,...\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - & - \\
\{3,4,...\} & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - & - \\
\{3,4,...\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - & - \\
\{4,5,...\} & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - & - \\
\{4,5,...\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - & - \\
\{5,6,...\} & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - & - \\
\{5,6,...\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} & - \\
\{6,7,...\} & \{5\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & - & \{0\} \\
\{6,7,...\} & - & \{5\} & - & \{4\} & - & \{3\} & - & \{2\} & - & \{1\} & - & \{0\}
\end{pmatrix}$$

Las probabilidades de la distribución estacionaria no condicionada y las primas obtenidas mediante la escala de Bayes se muestran en la siguiente tabla:

Clase	**Probabilidad**	**Prima**
1	0.012	0.409
2	0.011	0.381
3	0.011	0.354
4	0.012	0.331
5	0.013	0.308
6	0.014	0.290
7	0.018	0.267
8	0.021	0.251
9	0.034	0.222
10	0.038	0.210
11	0.093	0.170
12	0.079	0.163
13	0.0643	0.113

Aplicamos ahora nuestra metodología con estos mismos datos. Hemos impuesto además la condición de que la prima pagada en la clase 12, que es la clase de entrada, sea la siniestralidad media que, como hemos visto anteriormente, es 0.152. También hemos impuesto otras condiciones para que la escala de primas sea estrictamente decreciente.

Calculamos la distribución estacionaria para los valores de Λ y las reglas dadas en la matriz T mediante el procedimiento explicado anteriormente.

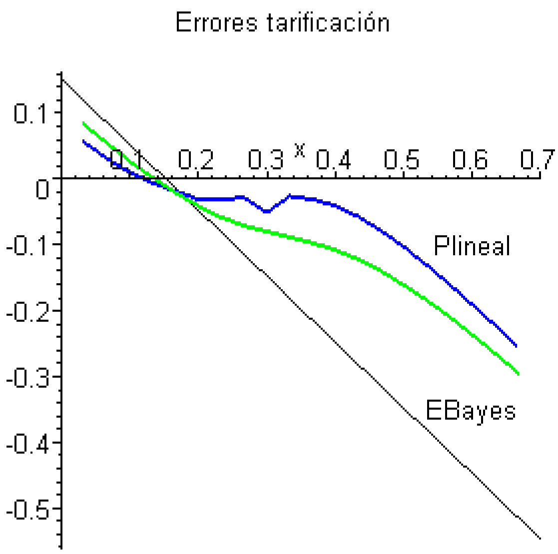
Entonces, tenemos que resolver el siguiente programa lineal:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{13}\left(x_i + y_i\right) q_i \\
&\textit{sujeto a} \\
&\begin{cases}
\sum_{i=1}^{13} p_i\left(\lambda_i\right)\pi_i + x_i - y_i = \lambda_j \quad j = 1,\dots,20 \\
\pi_1 \geq \pi_2 \geq \pi_3 \geq \dots \geq \pi_{12} \geq \pi_{13} \\
\pi_i \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0 \\
\sum_{i=1}^{20}\left(x_j - y_j\right) q_j = 0 \\
\pi_{12} = 0.152 \\
\pi_i \geq 1.01\pi_{i+1} \quad i = 1,\dots,13
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Resolviendo este programa para los datos anteriores se obtiene como valor de la función objetivo 0.0298 y como escala de primas:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
π_i	.418	.414	410	.406	.402	.398	.394	.390	.386	.382	.153	.152	.083

Para comparar los resultados obtenidos con ambos métodos se calculan los errores de tarificación cometidos con ambas escalas de primas. Estos errores de tarificación se corresponden con los valores de las variables de holgura del programa lineal; los x_j son los errores negativos, es decir, cuando se está cobrando al asegurado menos de lo que correspondería por su siniestralidad media, y los y_j errores positivos en el sentido de que se está cobrando al asegurado más de su siniestralidad media. Se han calculado los errores de tarificación y se han representado en un gráfico dónde, en el eje de abscisas se han representado los valores de λ, es decir, la siniestralidad media individual, y en el eje de ordenadas los errores de tarificación. Se ha representado también la recta de los errores cometidos en el caso de no emplear sistemas Bonus-Malus, ya que en ese caso todos los asegurados pagarían la siniestralidad media de toda la cartera.



Como podemos observar en la figura los errores, tanto positivos como negativos son mayores en el caso en que no se aplica sistema Bonus-Malus; éste sería el caso de la recta. La situación ideal, en la que no se cometerían errores, sería cuando la gráfica de errores coincidiera con el eje OX. Comprobamos que los errores cometidos mediante la metodología basada en programación lineal son siempre menores que los cometidos mediante la escala de Bayes, lo que significa que la primera escala es más equitativa que la segunda. Puesto que asimismo es más flexible, ya que en ella se han incorporado distintas características comerciales deseables, y puesto que ambas conservan el equilibrio financiero, podemos concluir que la primera escala de primas obtenida mediante Programación Lineal tiene mejores propiedades que la escala de Bayes y resulta por tanto preferible a esta última.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DEGROOT, M.H. (1970): “Optimal statistical decisions”, McGraw-Hill, New York.
- GARCÍA, M. P. (2001): “Diseño de sistemas de tarificación Bonus-Malus mediante la metodología de programación por metas”. Tesis Doctoral. UCM. Madrid.
- GRIMMETT, G.R., STIRZAKER, D.R. (1992): “Probability and Random Processes”, Oxford University Press, Oxford.

- HOSSACK, POLLARD, ZEHNWIRTH (1983): “Introductory statistics with applications in general insurance”, Cambridge University Press, Cambrigde.
- LEMAIRE, J. (1985): “Automobile insurance: actuarial models”, Kluwer, Boston.
- LEMAIRE, J. (1995): “Bonus-Malus systems in automobile insurance”, Kluwer, Boston
- NORBERG, R. (1976): “A credibility theory for automobile bonus systems”, Scandinavian Actuarial Journal, pp. 92-107
- WHITNEY (1918): “The theory of experience rating, Procedings of the Casualty” Actuarial and Statistical Society of America, 4, pp. 274-292.