PROBLEMAS DE BANCARROTA MULTI-ESCENARIO[1]

Miguel A. Hinojosa, Francisca J. Sánchez.
Universidad Pablo de Olavide.
Amparo M. Mármol.
Universidad de Sevilla.

RESUMEN

Los problemas de bancarrota representan situaciones donde un número de individuos o entidades acreedoras realizan reclamaciones sobre un cierto bien (estado) y el estado total disponible es insuficiente para satisfacer la demanda de todos los acreedores.

En este trabajo consideramos el caso en que las reclamaciones de los acreedores dependen de distintos escenarios o que son diferentes bajo distintos estados de la naturaleza. Para obtener repartos del estado disponible en estas situaciones proponemos distintas reglas de división que pueden considerarse racionales independientemente del escenario considerado.

[1] Esta investigación se ha realizado con la ayuda CENTRA (Centro de Estudios Andaluces)

1. INTRODUCCIÓN

Un problema de bancarrota aparece cuando una determinada propiedad, llamada también estado, no es suficiente para satisfacer las demandas de unos acreedores que tienen adquiridos unos derechos sobre la propiedad.

Desde muy antiguo se han venido dando problemas reales de este tipo. Son clásicos los ejemplos que aparecen en el Talmud babilónico (ver Aumann y Maschler, 1985).

En la literatura sobre bancarrota pueden encontrarse distintas reglas de reparto (ver Thomson, (2001)). En este trabajo nos centramos en dos de ellas, la regla proporcional, que reparte entre los acreedores la propiedad proporcionalmente a sus reclamaciones y la regla de igual pérdida que disminuye las demandas en igual medida con la única condición de que ningún acreedor le correspondan cantidades negativas.

Nuestro propósito es extender estas reglas al caso multi-escenario, es decir, la reclamación de los acreedores depende del escenario del problema. El escenario puede ser un estado de la naturaleza (en situación de incertidumbre), una situación territorial o espacial, temporal, social, etc. Las reglas multi-escenario que proponemos tendrán en cuenta las reclamaciones de los acreedores simultáneamente en todos los escenarios tenidos en cuenta.

2. EL PROBLEMA DE BANCARROTA

Un problema de bancarrota surge en situaciones donde un particular o empresa posee una propiedad o estado que no es suficiente para atender las reclamaciones de los acreedores. El problema que se plantea es cómo dividir la propiedad de la empresa que ha quebrado entre todos los acreedores.

Denotando por $N=\{1,...,n\}$ al conjunto de acreedores, el problema de bancarrota se representa como un par $(E;\ c) \in R \times R^n$, donde c es el vector de demandas de los acreedores $c = (c_1, ..., c_n)$, E es la propiedad o estado a repartir, D la suma de las demandas de los acreedores, y se cumple $0 \leq E \leq c_1 + ... + c_n = D$.

Entenderemos una regla de división o reparto en este problema como una función f que asigna a cada problema de bancarrota $(E;\ c)$ una solución $f(E;c)=(x_1, ..., x_n)$ tal que se cumplen las siguientes propiedades:

i) Racionalidad Individual: $x_i \geq 0,\ \forall i \in N$

ii) Eficiencia: $\sum_{i \in N} x_i = E$

2.1. Reglas de Reparto

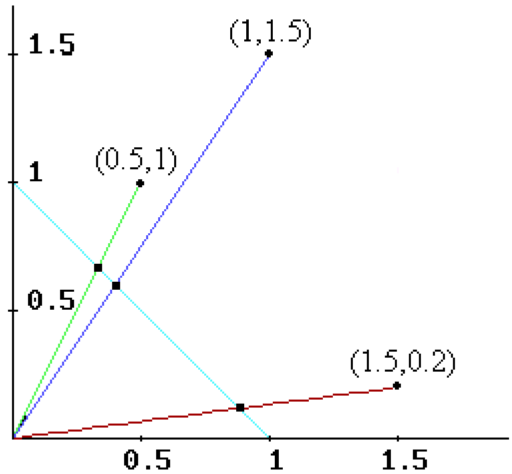
Hay un gran número de reglas de reparto que proporcionan asignaciones en los problemas de bancarrota basadas en distintas hipótesis de racionalidad, nosotros nos centraremos en dos de ellas que pasamos a exponer a continuación:

***Regla de Reparto Proporcional*:** asigna a cada demandante *i* la cantidad:

$$RP_i(E;c) = \frac{Ec_i}{D}.$$

Cada demandante obtiene una fracción de la propiedad que es proporcional a su participación en las demandas totales.

El caso en el que hay dos acreedores que reclaman una cantidad sobre un determinado bien, es una situación que se puede representar gráficamente. Supongamos que tenemos 3 situaciones distintas donde las reclamaciones son (0.5, 1), (1, 1.5) y (1.5, 0.2) y el estado a dividir es E=1. La asignación que se hace a cada demandante según esta regla se obtiene como el punto de corte de la recta de posibles asignaciones dadas por la cantidad total a repartir con la recta que une la demanda con el origen.



Regla de Igual Pérdida: la cantidad asignada a cada demandante viene dada por:

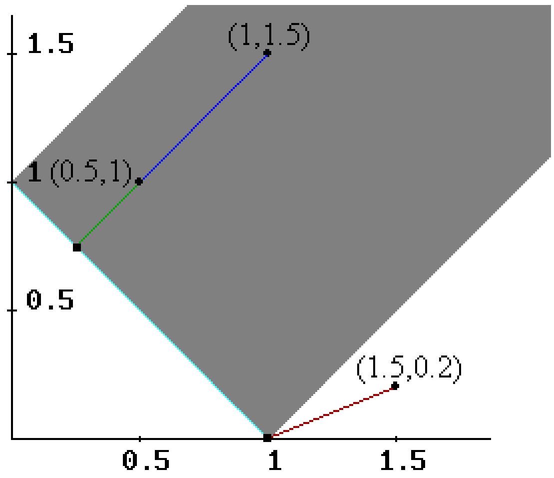
$$IP_i(E,c) = \max\left\{c_i - \frac{1}{\lambda}, 0\right\}$$

donde $0 \leq \lambda \leq \infty$ se selecciona de forma que:

$$\sum_{i=1}^{n} IP_i(E,c) = E.$$

En este método lo que se intenta es que todos los demandantes dejen de recibir la misma cantidad de dinero, a condición que esto no haga que alguno deba de aportar una cantidad positiva.

Siguiendo con el ejemplo anterior, podemos representar los repartos gráficamente:



A cada vector de reclamaciones se le asigna el punto más cercano a las demandas que esté sobre la recta de posibles soluciones y que sea factible. Los repartos que proporciona esta regla pueden obtenerse como las soluciones del siguiente problema mínimax:

$$\min_x \max_i \{c_i - x_i\}$$
$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = E$$
$$x_i \geq 0, \ \forall i \in N$$

que equivale al problema de programación lineal:

$$\min \quad p$$
$$s.a. \quad c_i - x_i \leq p, \quad i = 1, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = E$$
$$x_i \geq 0, \ \forall i \in N$$

2.2. Ejemplo

Supongamos que una empresa quiebra y dispone de un estado $E=1$ para repartir entre 3 acreedores. Las reclamaciones de éstos son $c = (0.6,\ 0.5,\ 0.7)$. La solución según la regla proporcional consiste en el siguiente reparto $x = (1/9,\ 5/18,\ 7/18)$. En la solución proporcional se está asignando a cada acreedor $5/9$ de sus respectivas reclamaciones, es decir, aproximadamente un 55,55% de lo que piden. Con esta asignación el grado de descontento de los acreedores puede medirse por la diferencia entre su reclamación y su asignación, siendo éste respectivamente para cada acreedor de *4/15, 2/9 y 14/45*.

Utilizando la regla de igual pérdida se busca que el acreedor con mayor grado de descontento esté lo mejor posible. Este procedimiento proporciona un reparto en el que estos descontentos tienden a igualarse, siendo en el ejemplo de *4/15*, es decir, un 26.66%. El reparto correspondiente a la regla de igual pérdida es $x = (3/9, 21/90, 39/90)$.

3. EL PROBLEMA DE BANCARROTA MULTI-ESCENARIO

Consideremos ahora situaciones en las que es necesario distribuir o repartir un estado entre un número de demandantes y éstos reclaman una cantidad distinta dependiendo del escenario que se considere. Los distintos escenarios pueden interpretarse como los diferentes estados de la naturaleza en situaciones de incertidumbre cuando no se dispone de información sobre las probabilidades de ocurrencia de los distintos estados.

Por ejemplo, un determinado proyecto puede llevarse a cabo en distintos países, pero hay incertidumbre sobre cuál será el país en el que finalmente se desarrollará dicho proyecto. Son también varias las empresas de ámbito multinacional que están implicadas, a distintos niveles, en el desarrollo del proyecto. Estas empresas adjudicatarias tienen perfectamente calculados los costes de su participación para los distintos países candidatos. Tiene sentido que estos costes sean distintos dependiendo del país en el que se lleve a cabo el proyecto porque la normativa legal de los posibles países es distinta y porque la infraestructura de las empresas multinacionales también es distinta en cada país. Si el proyecto recibe una ayuda económica de un organismo internacional, surge el problema de repartir dicha ayuda entre las multinacionales participantes.

Este problema puede formalizarse como un problema de bancarrota multi-escenario donde el estado es la cuantía de la ayuda económica concedida al proyecto y las empresas multinacionales participantes pueden interpretarse como los acreedores que reclaman de la ayuda una cuantía igual al coste de su participación en el proyecto que es variable según el país o escenario en que se desarrolle el proyecto.

La modelización en un marco multiescenario puede ser también conveniente en ausencia de incertidumbre. Por ejemplo, en situaciones donde para establecer el reparto, se desea tener en cuenta simultáneamente las reclamaciones de los acreedores en distintas áreas territoriales o con relación a distintos grupos de población.

Formalmente definimos un problema de bancarrota multi-escenario como un par *(E;C)* donde *E* es el estado que va a ser dividido y *C* es una matriz de demandas de orden *mxn* donde c_{ji} representa la cantidad que el demandante, $i=1,\dots, n,$ reclama del estado, *E*, de acuerdo al escenario $j, j=1, \dots,m$.

El problema que surge es cómo dividir el estado *E* entre los demandantes independientemente del escenario considerado. En este caso también, una regla de reparto es una función que asigna a cada problema de bancarrota multiescenario un reparto $f(E;C)=(x_1,\dots,x_n)$ que cumple las propiedades de racionalidad individual y eficiencia.

3.1. Reglas de Reparto

Vamos a extender al caso multi-escenario las reglas proporcional y de igual pérdida condicionada mencionadas anteriormente.

- ***Regla de Reparto Proporcional.*** Si denotamos $x(j)$ el reparto obtenido aplicando la regla de reparto proporcional en cada escenario

$$x_i(j) = \frac{Ec_{ji}}{\sum_{i=1}^{n} c_{ji}}$$

λ_j representa la proporción correspondiente a cada escenario

$$\lambda_j = \frac{E}{\sum_{i=1}^{n} c_{ji}}$$

Una manera de asignar un único reparto a los acreedores consiste en asignar un peso a cada escenario, w_j ($w_j>0,\ \forall j=1,\dots,m,\ \sum_{j=1}^{m} w_j = 1$), que represente la importancia relativa o la probabilidad de ocurrencia de dicho escenario. Así la reclamación agregada sería:

$$c_i^* = \sum_{j=1}^{m} w_j c_{ji}, \quad \forall\, \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{n}$$

y la asignación proporcional ante estas reclamaciones será:

$$x_i^* = \frac{Ec_i^*}{\sum_{i=1}^{n} c_i^*}$$

Por ejemplo, si se quieren ponderar los escenarios en los que la suma de las reclamaciones de los acreedores sea más elevada sobre aquellos escenarios con una suma de reclamaciones inferior, un posible sistema de pesos sería:

$$w_j = \frac{\frac{1}{\lambda_j}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j}}$$

Si por el contrario se quieren primar los escenarios en los que la suma de las reclamaciones están más ajustadas al estado *E*, el sistema de pesos sería:

$$w_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_j}$$

- ***Reglas de igual pérdida generalizada:***

a) Para extender la idea de minimizar el descontento máximo de los acreedores al caso multi-escenario, consideramos como medida de la pérdida de los acreedores con respecto a sus reclamaciones cuando el reparto es *x* el vector $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_m(x))$, donde $p_j(x) = \max_i \{c_{ji} - x_i\}$. Es decir, las componentes de *p* representan la máxima pérdida de los agentes en cada escenario. Con objeto de obtener repartos que minimicen las pérdidas simultáneamente en cada escenario, consideramos el problema vectorial:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & p_1(x), \ldots, p_m(x) \\ s.a. & \sum_{i=1}^{n} x_i = E \\ & x_i \geq 0,\ i \in N \end{array} \qquad (1)$$

que equivale al siguiente problema de programación lineal multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & (p_1, p_2, \ldots, p_m) \\ s.a. & c_{ji}\text{-}x_i \leq p_j,\ \ \forall\, i = 1,\ldots,n,\ \forall\, j = 1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = E \\ & x_i \geq 0,\ i \in N \end{array} \qquad (2)$$

Los repartos obtenidos como soluciones eficientes de este problema son tales que no existe otro en que la máxima pérdida de los acreedores sea menor en todos los escenarios.

b) En el caso anterior se considera el problema exclusivamente desde la racionalidad individual midiendo el grado de descontento de los acreedores en cada escenario a través de las diferencias c_{ji} -x_i. Otra opción sería analizarlo desde la racionalidad colectiva midiendo el descontento de un grupo S de acreedores por la diferencia: $\sum_{i\in S} c_{ji} - \sum_{i\in S} x_i$. De esta forma buscamos repartos que minimicen el máximo descontento de un acreedor o grupo de acreedores resolviendo el problema:

$$\begin{aligned}
&\min_x \ (p_1, p_2, \ldots, p_m) \\
&s.a. \quad \sum_{i\in S} c_{ji} - \sum_{i\in S} x_i \le p_j, \ \ \forall\, S \subset N = \{1,\ldots,n\},\ \forall\, j = 1,\ldots,m \\
&\qquad\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = E \\
&\qquad\quad x_i \ge 0,\ i \in N
\end{aligned} \tag{3}$$

3.2. Ejemplo

Supongamos que el estado es $E=1$, y hay tres escenarios y tres acreedores cuyas reclamaciones son:

Demandante	Escenario I	Escenario II	Escenario III
1	0.6	0.3	0.6
2	0.5	0.7	0.5
3	0.7	0.7	0.9

En cada escenario puede establecerse un reparto proporcional donde la cantidad asignada a cada acreedor es una proporción fija de sus reclamaciones que es distinta en cada escenario. Este reparto es:

Demandante	Escenario I	Escenario II	Escenario III
1	1/3	0.176	3/10
2	5/18	0.412	1/4
3	7/18	0.412	9/20
Proporción	5/9	0.588	1/2

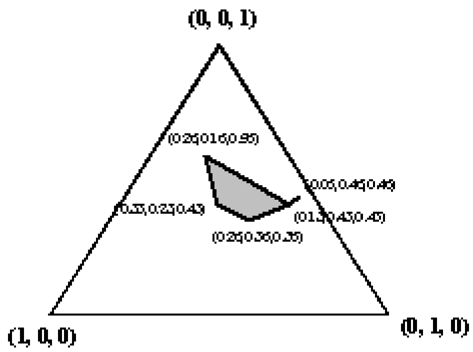
En la siguiente tabla se comparan los repartos correspondientes a las reclamaciones medias de los acreedores con los repartos que ponderan los escenarios primando que las reclamaciones se ajusten al estado o que las reclamaciones sean altas:

Demandante	Reclamaciones Medias			Reclamaciones Medias			Reclamaciones Medias		
1	0.273			0.27			0.275		
2	0.309			0.313			0.305		
3	0.418			0.417			0.42		
Escenario	Esc. I	Esc. II	Esc. III	Esc. I	Esc. II	Esc. III	Esc. I	Esc. II	Esc. III
Pesos	1/3	1/3	1/3	0.338	0.358	0.304	0.327	0.309	0.364

En cuanto a las soluciones de igual pérdida, los repartos que obtenemos en cada escenario son:

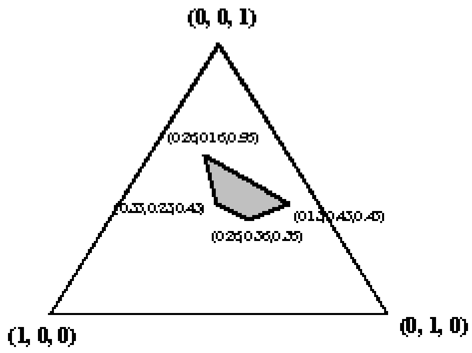
	Igual Pérdida Condicionada		
Demandante	Esc. I	Esc. II	Esc. III
1	1/3	1/15	4/15
2	7/30	7/10	1/6
3	13/30	7/10	17/30

Si planteamos la generalización de la regla al caso multi-escenario según el problema de programación lineal multicriterio (2) tendríamos el siguiente resultado:



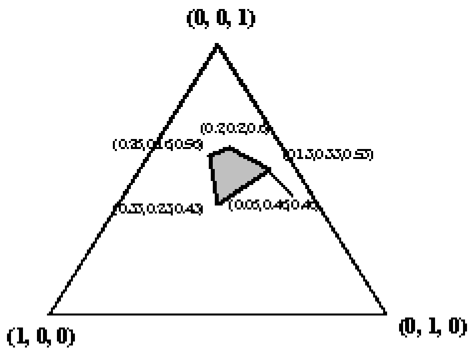
Obsérvese que tres de los puntos extremos del conjunto de soluciones maximin corresponden a las soluciones maximin escalares en cada escenario. El centroide del conjunto de soluciones del problema maximin vectorial es *(16/75, 1/3, 34/75)*.

Si agregamos los objetivos obtenemos soluciones eficientes del problema vectorial. En nuestro caso no se obtiene una solución única pero el conjunto de soluciones se reduce, obteniéndose ahora 4 de los 5 puntos extremos anteriores.

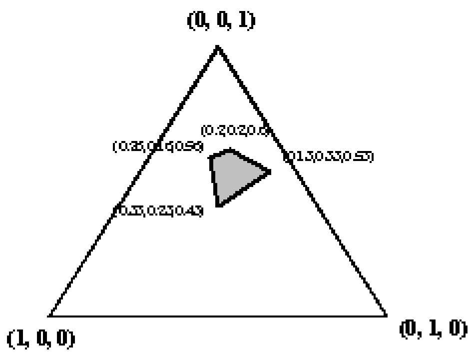


El centroide ahora se traslada al reparto *(1/4, 3/10, 9/20).*

Si el problema se plantea desde el punto de vista de la racionalidad colectiva, se transforma en la resolución del problema (3), cuyo conjunto de soluciones se representa en la siguiente gráfica.



El centroide del conjunto de soluciones es *(0.2, 0.28, 0.52).* Si se agregan los objetivos del problema la solución es:



y el centroide pasa a ser *(7/30, 7/30, 8/15).*

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos propuesto reglas de reparto que pueden considerarse racionales independientemente del escenario considerado. Nos hemos centrado en situaciones de bancarrota, aunque dichas reglas son extensibles a otros problemas reales como la distribución de impuestos, el reparto de beneficios, y las herencias cuando el reparto indicado en el testamento no coincide con la herencia a repartir.

Cuando se extienden las reglas de reparto al caso multi-escenario el inconveniente principal es que la solución no consiste en un único reparto si no en un conjunto de repartos entre los que elegir. Los procedimientos para reducir dichos conjuntos de repartos consisten en la consideración de distintas ponderaciones de las reclamaciones en los escenarios. Utilizamos esta idea en el caso de la extensión de la regla proporcional. En el caso de la solución de igual pérdida generalizada es posible un refinamiento del conjunto de soluciones mediante un procedimiento lexicográfico análogo al utilizado en Hinojosa et al. (2004) para juegos cooperativos multi-escenario.

Los problemas de bancarrota pueden analizarse también desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativos (Curiel et al.,1987). En el caso multi-escenario es posible hacer un estudio paralelo al que se ha hecho en este trabajo en el juego de bancarrota asociado para el que es posible extender el concepto de solución de igual pérdida condicionada.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN, R.J. and MASCHLER, M. (1985). “Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud”. Journal of Economic Theory, 36, pp. 195-213.
- CURIEL, I; MASCHLER, M.; TIJS, S.H. (1987). “Bankruptcy Games”. Zietschrift für Operations Research 31. A143-A159.
- HINOJOSA, M.A., MÁRMOL, A.M. and THOMAS, L.C. (2004) “Core, Least Core and Nucleolus for Multiescenario Cooperative Games”, en prensa en European Journal of Operational Research.
- THOMSON, W. (2001) “Axiomatic analyses of bankruptcy and taxation problems: a survey”. University of Rochester.