LOS ERRORES COMO MOTIVACION PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

J. Manuel Sánchez Quinzá-Torroja

Antonio Sarmiento Escalona

J. Antonio Seijas Macías

Universidade da Coruña

RESUMEN

Los errores en matemáticas son la manifestación externa de un proceso complejo de enseñanza y aprendizaje. La investigación sobre el tema de los errores en el proceso de aprendizaje es un tema importante de la Educación Matemática que ha sido investigado en profundidad a lo largo de la última década. En la enseñanza tradicional de los primeros cursos de universidad los errores se detectan principalmente en los exámenes y se remedian mandando al alumno a la siguiente convocatoria confiando que el mismo ponga todo de su parte para rectificar. Esta forma de actuación debe cambiar en el marco de las nuevas titulaciones universitarias de economía y empresa donde se contempla además de las clases magistrales una amplia acción tutorial. El error además de detectarse debe diagnosticarse y ponerle remedio. En este trabajo indicamos algunas propuestas espontáneas que hemos realizado para transformar experiencias negativas de errores en matemáticas en experiencias positivas de actuación en clase en el marco bien conocido del planteamiento y resolución de problemas.

1. INTRODUCCIÓN

Los errores en matemáticas son la manifestación externa de un proceso complejo donde intervienen muchas variables: profesor, alumno, currículum, contexto sociocultural, etc. Por tanto, es muy difícil detectar sus causas y en consecuencia diseñar una actuación competente con vistas a su tratamiento.

Hay una serie de opiniones comunes en torno a los errores. Por ejemplo: 1) surgen en clase de manera espontánea y casi siempre sorprenden al profesor; 2) son persistentes, basados en concepciones falsas, y necesitan de una profunda reorganización de los conocimientos para su superación; 3) predominan los sistemáticos frente a los ocasionales o por azar; …

Su importancia viene refrendada por la existencia de páginas web como la de Schechter "The most common errors in undergraduate mathematics" donde se señalan los errores más frecuentes desde los relativos a la comunicación profesor/alumno a los más corrientes de notación, álgebra, razonamiento, etc …

La investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es un tema clave de la Educación Matemática. Brousseau [1997] en su Teoría de las Situaciones Didácticas incluye los errores dentro de la noción de "obstáculos en el aprendizaje" (proponiendo una clasificación de los mismos) y señala la necesidad de un "conflicto cognitivo" para superar las dificultades en el aprendizaje. Bell [1976] propone una Enseñanza por Diagnóstico en la que se detectan los errores que se producen en el aprendizaje, tipificando y analizando sus causas. Hecho el diagnóstico se puede atender a la superación del error mediante técnicas correctoras adecuadas. Rico [1997] propone cuatro líneas de investigación referidas al estudio de los errores:

- Análisis, causas, elementos, taxonomía de la clasificación de los errores. Cada uno de estos estudios responde a una determinada teoría psicopedagógica y a un planteamiento epistemológico particular del conocimiento y de la matemática.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a su capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.

- Investigaciones psicométricas que utilizan técnicas estadísticas como por ejemplo el contraste de hipótesis para analizar los errores.

- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores. Ejemplos de esta línea de actuación son las propuestas didácticas que como las que mostraremos posteriormente parten de los errores para la construcción de los conocimientos matemáticos correctos.

2. PUNTO DE VISTA ESTATICO DE LA MATEMATICA

Junto a planteamientos generales sobre los errores, como los citados, debemos considerar el contexto concreto en el que trabajamos. La docencia de las asignaturas de matemáticas tal y como se desarrolla en los primeros cursos de economía y empresa corresponde a lo que se denomina punto de vista estático de las matemáticas. Una clase en este nivel consta de (1) la enseñanza de conceptos; (2) la enseñanza de algoritmos; (3) la implementación de estos algoritmos (incluiríamos en este último apartado la propia elección del algoritmo adecuado). Un ejemplo, citado en Selden & Selden [2003], podría ser el siguiente: Sea f una función continua en un intervalo [a, b]. Para hallar el valor máximo de f en [a, b], (1) hallar la derivada de f, (2) hallar los puntos en que f' = 0, (3) hallar los puntos en que no existe f', (4) hallar el valor de la función f en los puntos obtenidos en el apartado (2), en el apartado (3) y en a y b; (5) el mayor y el menor de los valores obtenidos señala los puntos máximo y mínimo de f en el intervalo [a, b].

Mejorar la competencia matemática de los alumnos en esta concepción de la enseñanza consiste en aumentar la cantidad y la dificultad de los algoritmos. Los errores surgen cuando aparecen algoritmos que no coinciden con los descritos en el curso. Esta dificultad evidente no se arregla, desde luego, aumentando ad infinitum el número de algoritmos citados en el curso. Por otra parte es inevitable que de manera espontánea surgan nuevos algoritmos combinando o modificando levemente otros algoritmos ya estudiados por los alumnos.

Por ejemplo, en un primer curso de cálculo se pueden plantear dos problemas relacionados: (1) Dada una curva y un punto en ella, hallar en qué punto la recta tangente en ese punto corta al eje OX; (2) Dada una curva, hallar un punto en ella tal que la recta tangente en ese punto pase por el origen de coordenadas. Las soluciones para estos problemas comprenden las mismas técnicas: hallar y evaluar derivadas y formular y resolver ecuaciones lineales; sin embargo, estudios realizados sobre el tema muestran que en el primer caso un 75% de los alumnos son capaces de resolver el problema mientras que en el segundo caso apenas lo hace un 20%.

Vemos que este punto de vista estático es inadecuado. La enseñanza en estos primeros años debe contemplar la posibilidad de crear nuevos algoritmos, al menos al nivel de combinar y/o modificar técnicas conocidas. Y lo que es más importante, la corrección de algoritmos debe formar parte de la formación de los alumnos.

Con respecto a esto último, puede ser muy interesante comparar los cursos de matemáticas con los cursos de programación. En éstos se les pide a los alumnos que elaboren sus algoritmos y que los validen. Sin embargo, una parte importante y fundamental del curso se dedica al tema de depurar los programas; el conocido procedimiento “debugging” provisto de sus técnicas propias. Esto no ocurre en los cursos de matemáticas donde no se trata de una manera específica los errores. Y en el mejor de los casos si un alumno trata de depurar un problema no va más allá de repetir las operaciones.

3. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCION DE PROBLEMAS

¿Cómo se crean o descubren nuevas matemáticas? ¿De dónde viene este teorema o esta teoría? ¿Cómo se llegó a él o a ella? ¿Cuáles fueron las conjeturas que se hicieron?. Estas son preguntas rara vez respondidas adecuadamente a nuestros alumnos. Tradicionalmente, el profesor anuncia un teorema de la misma manera que un mago anuncia la aparición de un conejo debajo de la chistera. Los alumnos quedan, al menos subconscientemente, insatisfechos y con la sensación de unas matemáticas mágicas, llenas de mitos y creencias.

Una manera de contribuir a desmitificar las matemáticas, aparte de animar a los alumnos a leer el conocido libro de Lakatos [1976], es incluir cada cierto tiempo en las clases actividades de planteamientos de conjeturas y/o problemas animando a los alumnos a que las planteen y resuelvan como se señala en el libro de Brown & Walters [1993].

Muchas disciplinas científicas experimentan “tensiones” entre contenido y proceso. Por ejemplo, los profesores de español o inglés enseñan a sus estudiantes lo que otros han escrito y rápidamente intentan que sus alumnos a su vez escriban, expresen sus ideas. ¿Se podría hacer algo parecido en matemáticas?. Normalmente, se atiborra al alumno de contenidos y no queda tiempo para desarrollar alguna posible forma de creatividad. Dar al alumno la posibilidad de reflexionar y plantear nuevas cuestiones es una forma de implicarlo en su aprendizaje. ¿Por qué las matemáticas deben consistir sólo en estudiar y responder cuestiones que alguien se ha preguntado y él mismo u otros han resuelto?. Los alumnos deben tener la sensación que un buen matemático no es sólo un resolvedor de problemas sino también un creador de nuevos problemas. Una tarea matemática nunca acaba. Volviendo al problema original y a su solución es casi siempre posible plantear otros problemas en relación al mismo.

En la enseñanza tradicional los alumnos ven los problemas como ajenos a ellos: vienen dados en los libros o por el profesor. Pocas veces se justifica la necesidad de los mismos. Son meros ejercicios para comprobar una buena asimilación de la teoría.

Sin embargo deberían hacerse preguntas cómo estas, ¿cómo se crea o descubre nueva matemática?, ¿de dónde viene este teorema o esta teoría?, ¿cómo se llegó a ella?, ¿qué actuó para estimular su conjetura o desarrollo?, ¿qué interés tiene este tema para la economía y la empresa?, ¿las matemáticas desarrollan la teoría económica o la teoría económica desarrolla las matemáticas?.

Estas son cuestiones candentes que son raramente respondidas adecuadamente a nuestros estudiantes. Tradicionalmente, el profesor anuncia un teorema exactamente igual que un mago anuncia que va a salir un conejo debajo de la chistera, dejando a los alumnos (subconscientemente) preguntándose sorprendidos de dónde viene y cómo fue descubierto y añadiendo una mayor mitificación insatisfactoria a las matemáticas.

Una manera de desmitificar las matemáticas es incluir actividades adecuadas de planteamientos de problemas entre las actividades en intervalos regulares en las clases y animar a los alumnos a formular sus propias preguntas e investigarlas. Debe señalarse a los alumnos que un buen matemático no es meramente un buen revolvedor de problemas, sino también un creativo planteador de problemas. Una tarea matemática nunca se acaba. Retomando el problema original o su solución, es casi siempre posible plantear otros problemas relacionados con él.

Uno de los problemas de la enseñanza tradicional es que los alumnos no tienen ningún control de propiedad sobre los problemas: usualmente los problemas le son dados al alumno por el profesor o el libro de texto. No tienen nada que ver en la selección de los problemas ni en su formulación. En contra, de mi propia experiencia personal y de mis alumnos es claro que éstos estarán más motivados si pueden formular sus propias cuestiones e investigarlas; dará un mayor sentido de control y feeling de creación de nuevas matemáticas.

En el corazón de hacer conjeturas y plantear problemas está la habilidad para mirar y preguntar cuestiones desde diferentes perspectivas. Por ejemplo, es un buen hábito para adquirir preguntarse a uno mismo las siguientes preguntas siempre que nos aproximemos a un problema matemático, resultado o situación puede llevarnos a la formulación de nuevas conjeturas:

¿Qué si ... se cambia?

¿Qué ocurre si … ?

¿Qué si no … ?

Aunque la investigación de tales cuestiones no lleva necesariamente a nuevas y excitantes cuestiones de vez en cuando puede tener éxito y replantearse viejos temas y conceptos no bien madurados. Siempre hay que aprender. Antídoto contra la rutina.

4. ALGUNOS EJEMPLOS

Los errores pueden servir como punto de partida y fuente de motivación para interesantes investigaciones en el terreno de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el punto de vista de la enseñanza se trata de hacer positivas experiencias negativas, como son la aparición de errores. En el nivel de las matemáticas elementales se han hecho numerosos estudios sobre el tema, pero algunos errores se arrastran hasta cursos superiores.

Un error frecuentemente citado es el que aparece por la tendencia a pensar que "todas las cosas son aditivas". En matemáticas una función u operación f se dice aditiva si $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Por ejemplo esto es verdadero para algunas operaciones familiares:

- el límite de una suma es la suma de límites,

- la derivada de una suma es la suma de derivadas,
- la integral de una suma es la suma de integrales.

Pero esto no es cierto para una importante clase de operaciones. Sin embargo, el concepto de aditividad está tan arraigado como para hacer que los alumnos recurran a él a la menor ocasión. Por ejemplo:

$(a + b)^2$	NO es igual a	$a^2 + b^2$.
$\sqrt{a+b}$	NO es igual a	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
sen (a + b)	NO es igual a	sen(a) + sen(b)
$\frac{1}{a+b}$	NO es igual a	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

El que crea que errores de este tipo no aparecen en la enseñanza universitaria no tiene más que pedir a los alumnos que estudien el crecimiento de la función y = $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

El sistema que tradicionalmente se emplea para corregir errores como los de la tabla anterior está basado en la creencia en que éstos no son muy fuertes y que son aleatorios; o sea, no están basados en ideas matemáticas o psicológicas previas. Probablemente para corregirlos el profesor haga uso de actividades como las siguientes: 1) hacer un contraejemplo numérico; i. e. $(2 + 3)^2 = 5^2 \neq 2^2 + 3^2$; usamos falseabilidad para convencer al alumno; 2) hacer una demostración geométrica; 3) hacer un producto de binomios. A pesar de todo, la experiencia confrontada con pruebas objetivamente realizadas, muestra que el error es persistente y está muy arraigado en las creencias de nuestros alumnos. La ayuda que, para superar un error, consiste en contraponer el argumento insuficiente del alumno con la verdad establecida del profesor, y exigir su inmediata sustitución sin ninguna otra justificación, es inadecuada.

Con objeto de transformar en positiva la experiencia negativa de los errores se hizo la siguiente pregunta dentro de un test realizado a alumnos de primer curso de matemáticas para la economía y empresa: “Suponiendo que tu crees que es verdadera la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, justifícala de todas las maneras que se te ocurran ¿En qué principio o idea matemática te has basado para dar esa respuesta y por tanto cometer ese error?”. Las siguientes son algunas justificaciones que aparecieron:

(i) aplico la ley distributiva del exponente sobre la suma $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

(ii) aplico la inducción en el orden del exponente: $(a + b)^1 = a^1 + b^1$;

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$,

…………………………,

$(a + b)^n = a^n + b^n$.

(iii) consideremos el teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$; si hacemos $c = a + b$ tenemos el resultado buscado;

(iv) la siguiente frase suena correcta: “el cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de sus cuadrados”;

(v) sabemos que $(a\ b)^2 = a^2\ b^2$, y como el producto es una generalización de la suma debe ocurrir que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$;

(vi) los profesores dicen que si se cambia de signo a la izquierda de una ecuación o identidad debe cambiarse de signo a la derecha; comencemos por $(a + b)(a – b) = a^2 - b^2$; aplicando la regla $(a + b)(a + b) = a^2 + b^2$.

(vii) ……………………………………………………………………………… …………………………

Podemos observar que cada una de estas justificaciones tiene dos cosas en común con las demás: 1) ha usado alguna regla ó principio matemático asimilado previamente; 2) ha usado la noción que en matemáticas el futuro debe ser similar al presente. Además las múltiples ideas previas que aparecen en las justificaciones sugieren que una simple corrección por parte del profesor es insuficiente. Por ejemplo, si un alumno justifica la fórmula citada en base a la inducción sería conveniente repasar este principio. Más sorprendente es la justificación basada en el hecho que la multiplicación es una generalización de la adición, (i. e., $2 \times 3 = 2 + 2 + 2$; $3 \times 2 = 3 + 3$); y como en el caso anterior debería revisarse este principio válido para números enteros positivos: ¿qué significado tendría $(1/2) \times (1/2)$ ó $(-3) \times (-3)$?.

En algunos casos, todavía más interesantes por el impacto que provocan y sus posibilidades didácticas, procedimientos incorrectos pueden llevar a resultados correctos. Un caso muy citado en matemáticas elementales es la simplificación de la fracción:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

¿Podemos dar por mala esta respuesta? O este ejemplo es lo suficientemente interesante como para plantear una serie de nuevas preguntas en clase. ¿Por qué esta absurda simplificación produce el resultado correcto? ¿Es éste el única caso en que ocurre?. Se pueden hacer una cantidad considerable de preguntas sobre el tema dando origen a una gran cantidad de actividades matemáticas de resolución de problemas. Así, si preguntamos por otras fracciones en las que ocurra lago parecido descubrimos que $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$ y si nos lanzamos a aventuras más ambiciosas y preguntamos por fracciones de tres dígitos podemos encontrar que $\frac{594}{297} = \frac{54}{27}$.

Actualmente, en los primeros años de universidad en la asignatura de matemáticas para la economía y la empresa los errores se detectan habitualmente en los exámenes. Hay que ser consciente que la importancia que se da a la detección de errores y a su tratamiento en este nivel depende de muchos factores. Por ejemplo, el profesorado de este nivel puede tener una formación inicial matemática o económica lo que influye en la valoración de los errores. Por ejemplo, es difícil no dar por válido el hecho de aplicar directamente la regla de Barrow a la integral, $\int_0^7 \sqrt{\frac{30}{q}} dq$ aunque debería tratarse como una integral impropia de segunda especie. Sin embargo, la escasez de tiempo y el síndrome de la completitud del programa ocasiona que no se debatan en clases cuestiones que como ésta aparecen con notable frecuencia y que nos llevarían a profundizar en el propio concepto de integral impropia.

Es probable que esta visión del error sea incompleta.

En un examen parcial de cálculo diferencial se les pide a los alumno que calculen la integral indefinida: $\int \frac{dx}{(1+x)(1-x^2)}$. En el momento de la corrección los profesores se dan cuenta de la aparición de un error inesperado. Probablemente, debido a la presentación habitual de este tipo de problemas con el denominador descompuesto en factores, y a la confusión de tomar el factor 1 – x^2 por 1 + x^2, muchos alumnos hacen la siguiente descomposición en factores simples:

$$\frac{1}{(1+x)(1-x\ \ )} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x^2}$$

Este tipo de error nos remite a una dificultad conceptual mientras que el hecho que alguno consiga resolver un sistema incompatible como aparece al hallar los coeficientes es más un tema de errores aleatorios.

A pesar de que los alumnos reconocen que en la clase magistral hemos dicho como deben ser los posibles denominadores de las fracciones en la descomposición de una función racional en fracciones simples no quedan satisfechos con la solución dada. No encuentran una sustancial diferencia entre la anterior y la siguiente:

$$\frac{1}{(1+x)(1-x\ \ )} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1-x}$$

En ambos casos, el grado del numerador es una unidad menor que el del denominador y al sumar la parte derecha es posible formar un sistema que solo por casualidad es incompatible.

5. CONCLUSIONES

1) Los errores en matemáticas son la manifestación externa de un proceso complejo de enseñanza y aprendizaje donde intervienen muchas variables: profesor, alumno, currículum, contexto socio-cultural, etc.
2) Junto a planteamientos generales sobre los errores y su tratamiento hay que considerar el contexto concreto en el que se trabaja.

3) Una manera de desmitificar la matemáticas es incluir cada cierto tiempo en las clases actividades de planteamientos de problemas, estableciendo conjeturas y animar a los alumnos a que las planteen y las resuelvan.
4) Los alumnos estarán más motivados si pueden formular sus propias cuestiones e investigarlas ya que tendrán mayor sensación de control sobre su educación matemática y sobre su proceso de aprendizaje.
5) En la actualidad en el primer año de matemáticas para la economía y la empresa los errores se detectan en los exámenes.
6) La visión del error y su superación es distinta por parte de un profesor con formación inicial matemática que por parte de un profesor con formación inicial económica. El matemático dará pues importancia a la precisión de los razonamientos, mientras que el economista se fijará más en la validez de los resultados.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELL A. (1976) The Learning of General Mathematical Strategies. Doctoral Dissertation. Shell Center for Mathematical Education. University of Nottingham.
- BROUSSEAU G, (1997) Theory of Didactic Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.
- BROWN S., WALTERS M, (Eds.) (1993) Problem Posing: Reflections and Applications. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- LAKATOS I, (1976) Pruebas y Refutaciones. Alianza Editorial. Madrid.
- RICO, L. (1997). Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria. Síntesis. Madrid.
- SELDEN A., SELDEN J. (2003). Errors and Misconceptions in Collage Level Theorem Proving. Tennessee Technological University. Department of Mathematics. Technical Report.