

**ESTIMACION EN RATIOS DE COBERTURA
VARIANTES EN EL TIEMPO DE MÍNIMA VARIANZA
DESDE UN ENFOQUE MARKOV-REGIME-SWITCHING:
ANÁLISIS CON PETRÓLEO, ORO Y TRIGO**

Alberto Sánchez Martín

Trabajo de investigación 002/001

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutor: Dr. Jesús Ruiz Andújar

Universidad Complutense de Madrid

Universidad de Castilla-La Mancha

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

www.finanzascuantitativas.es

ESTIMACIÓN DE RATIOS DE COBERTURA VARIANTES EN EL TIEMPO DE MÍNIMA VARIANZA DESDE UN ENFOQUE MARKOV-REGIME-SWITCHING: ANÁLISIS CON PETRÓLEO, ORO Y TRIGO.

Alberto Sánchez Martín.

Máster Universitario en Banca y Finanzas Cuantitativas.

Universidad Complutense de Madrid.

Tutor:

Jesús Ruiz Andújar, Universidad Complutense de Madrid.

RESUMEN

El trabajo desarrolla varios modelos de estimación para calcular el ratio de cobertura de diversas materias primas, con sus respectivos futuros, usando modelos de regresión y modelos VAR(1) con varianza condicional BEKK-GARCH. Proponemos la incorporación, en esos modelos, de un proceso de cambio de régimen Switching Markov, creando nuevos modelos 'state-dependent'. Se desarrollará el cálculo de parámetros, mediante estimación, para obtener ratios de cobertura cambiantes en el tiempo de mínima varianza y se buscará cuál de ellos es más eficiente. Además de esos modelos el autor propone un proceso Markov-Regime-Switching de 4 estados en el modelo de regresión (MRS4), creando una matriz de transición recombinada a partir de dos matrices de transición markovianas independientes para el cálculo de 4 posibles estados de la varianza de las perturbaciones y para los parámetros del modelo de regresión.

Agradecimientos:

En primer lugar, agradecer a mi familia por creer en mí en todo momento y hacer posible que haya podido cumplir mis objetivos personales y académicos. Muy en especial a mis padres Ángel Sánchez García y M^a Teresa Martín Robles de quien he aprendido a ser quien soy hoy y a mi hermano Javier Ángel Sánchez Martín que siempre, y a pesar de todo, ha estado a mi lado.

También, quiero agradecer a mi tutor Jesús Ruiz Andújar la ayuda, disponibilidad y atención, en todo momento, que ha hecho posible realizar este trabajo. Agradecer las útiles ideas que me ha ido mostrando y que han hecho más preciso este trabajo.

Por último, me gustaría agradecer a todo el grupo de profesores y profesoras que he tenido el orgullo de conocer a lo largo de mi vida universitaria, tanto en la carrera como en el máster, puesto que sin sus enseñanzas nada de esto hubiese sido posible.

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	3
I. DESCRIPCIÓN DE DATOS.....	5
II. METODOLOGÍA.	6
II.1. Cálculo de ratio de cobertura constante en el tiempo mediante regresión. (MCO).	6
II.2. Cálculo del ratio de cobertura con regresión que sigue un proceso Markov-Regime-Switching con 2 estados para la varianza de las perturbaciones y parámetros del modelo de regresión. (MRS2).....	6
II.3. Cálculo del ratio de cobertura con regresión que sigue un proceso Markov-Regime-Switching con 4 estados, 2 para la varianza de las perturbaciones y 2 para los parámetros del modelo de regresión. (MRS4).	8
II.4. Cálculo del ratio de cobertura en modelos VAR (1) con matriz de covarianzas en las perturbaciones que sigue un modelo BEKK-GARCH. (VBEKK).....	11
II.5. Cálculo del ratio de cobertura en modelos VAR(1) con matriz de covarianzas en las perturbaciones que sigue un modelo BEKK-GARCH que sigue un proceso Markov-Regime-Switching de 2 estados para la varianza y las constantes del VAR(1). (VBEKK-MRS2).....	12
II.6. Eficiencia de cobertura.	14
III. RESULTADOS Y COMENTARIOS.	14
III.1. Resultados con regresión. (MCO, MRS2 y MRS4)	14
III.2. Resultados y comentarios con VAR(1) con BEKK-GARCH. (VBEKK y VBEKK-MRS2).	19
III.3. Efectividad de la cobertura.....	24
IV. CONCLUSIONES Y APORTACIONES.....	25
V. APÉNDICES.....	27
Apéndice I. Datos utilizados: Análisis de los datos, frecuencia, vencimientos de futuros y gráficos de rentabilidades y series temporales.	27
Apéndice II. Matrices de transición conjuntas estimadas para el proceso de Markov-Regime-Switching de 4 estados, 2 para la volatilidad y 2 para las medias.....	29
Apéndice III. Estudio de cobertura de mínima varianza variable en el tiempo mediante el uso de ventanas móviles.	30
Apéndice IV. Algoritmo de Kim para suavizado de probabilidades condicionales en Switching-Regime-Markov.	31
BIBLIOGRAFÍA.....	32

INTRODUCCIÓN.

En este trabajo, usamos los rendimientos del contado y del futuro del petróleo, trigo y oro para estimar los ratios de cobertura cambiantes en el tiempo de mínima varianza. Utilizando estos activos derivados como cobertura, y a partir de diferentes modelos alternativos se estudia cómo se puede reducir el riesgo de una exposición tomada con activos en el mercado spot (véase [Hull \(2009\)](#) para una introducción a los futuros y la forma de reducir riesgos a partir de una cartera de cobertura). Esa será la base de este trabajo. Se medirá la eficacia de la cobertura con:

- Un modelo de regresión lineal (MCO) que será el modelo de comparación,
- un modelo de regresión lineal para el cual se supone que tanto los parámetros del modelo como la varianza del término de perturbación siguen un proceso Markov –Switching con dos estados (MRS2),
- un modelo de regresión lineal para el cual se supone que los parámetros del modelo siguen un proceso Markov-Switching de dos estados independiente del proceso Markov-Switching, también de dos estados, que sigue la varianza de las perturbaciones; esto conduce a un modelo con 4 estados (MRS4),
- un modelo VAR(1) para el subyacente y el futuro, cuyo vector de perturbaciones tiene una matriz de varianzas y covarianzas cambiantes en el tiempo que siguen un proceso del tipo BEKK-GARCH (VBEKK) y
- finalmente, un modelo como el anterior al que se le introduce un proceso Markov-Switching de dos estados para los parámetros del modelo BEKK-GARCH y para las medias del VAR(1) (VBEKK-MRS2).

El objetivo final a alcanzar es estudiar la mejora de eficiencia en la cobertura de las materias primas con sus futuros usando modelos cada vez más complejos, en total se observará la eficiencia en 5 modelos. En primer lugar, estudiamos la mejora de efectividad con la incorporación, en un modelo base (regresión y VAR(1) con BEKK-GARCH) del proceso Markov-Regime-Switching. En segundo lugar, y no menos importante, se quiere saber si un modelo relativamente estilizadoes más efectivo que otro modelo con mayor complejidad. Buscamos encontrar mayor riqueza con menos parámetros estimados. Por último, es muy importante observar estas mejoras de eficiencia entre modelos con materias primas de diferentes orígenes, usos y mercados para poder extrapolar este comportamiento en una amplia gama de productos.

El estado actual de la literatura sobre procesos Markov-Regime-Switching y modelos BEKK-GARCH trata sobre diferentes artículos de investigación de donde se han conseguido las fuentes para realizar este trabajo. En [Chung-Ming Kuan \(2002\)](#) y en la sección 2.1 de [Massimo Guidolin \(2012\)](#) se dan los algoritmos para la estimación de modelos de regresión aplicados a las finanzas, cuyos parámetros siguen procesos Markov-Regime-Switching (para una introducción a los modelos Markov-Switching, concluyendo que el mecanismo Markov-Regime-Switching es un proceso aplicable a varios modelos de la literatura tradicional. [Hamilton \(1994\)](#)). En [Jae Myung \(2002\)](#) Define funciones de verosimilitud para estimar parámetros en modelos no lineales, como es el caso de Markov-Regime-Switching o BEKK-GARCH. En [Engle and Kroner](#)

(1995) se desarrollan los modelos BEKK-GARCH, describiendo completamente la función de verosimilitud de estos modelos para la estimación de parámetros de procesos multivariantes de la familia GARCH y que concluyen con la existencia de la relación de la forma reducida del GARCH y los modelos estructurales y proponiendo el estimador máxim-verosimilitud como un estimador eficiente de estimación. Por último, los artículos de Amir H. Alizadeh, Nikos K. Nomikos and Panos K. Pouliasis (2008) proponen extensiones del modelo bivalente VAR(1) para los rendimientos y BEKK-GARCH para la matriz de covarianzas condicionales de las perturbaciones del modelo VAR(1) y la introducción para un subconjunto de los parámetros del modelo de procesos Markov-Regime-Switching, además concluyen que existe una mejora de la eficiencia en la cobertura y en la utilidad que le reportaría a un inversor. Hsiang-Tai Lee and Jonathan K. Yoder (2007) hablan de la introducción de un sistema DCC dependiente de los estados en contra de el modelo DCC tradicional, concluyendo que es superior en cuanto a efectividad un modelo DCC dependiente de estado.

En nuestro trabajo aportamos la incorporación del modelo Markov-Regime-Switching de 4 estados en un modelo de regresión entre los rendimientos del spot y el futuro, caracterizándose por ser un modelo suficientemente no lineal, aunque muy estilizado en el número de parámetros a estimar en comparación con los modelos más complejos que estimamos en este estudio. Este nace de la recombinación de dos matrices de transición de un modelo Markov-Regime-Switching de 2 estados. Mostramos que, para diferentes productos, este modelo tiene un mejor comportamiento que los modelos más complejos BEKK-GARCH para reducir la varianza del ratio de cobertura.

Los resultados que se consiguen en la investigación son: Predominancia generalizada del modelo de regresión con Markov-Regime-Switching de 4 estados (MRS4). Escasa mejora de la eficiencia en la cobertura con la imposición, en un modelo de regresión y un modelo VAR (1) con BEKK-GARCH, de un proceso Markov-Regime-Switching de 2 estados. Un modelo más complejo con mayor número de parámetros a estimar no hace la cobertura más eficiente. Las materias primas con la incorporación del proceso Markov-Regime-Switching crea estados de volatilidad y medias estable en el/los que se encontrará gran parte del tiempo, teniendo otros estados donde se encuentra en menos ocasiones, incorporándose en éstos muy de vez en cuando. El efecto crisis crea dificultades a la hora de estimar modelos cuyas series temporales incorporen esas fechas de inestabilidad económica.

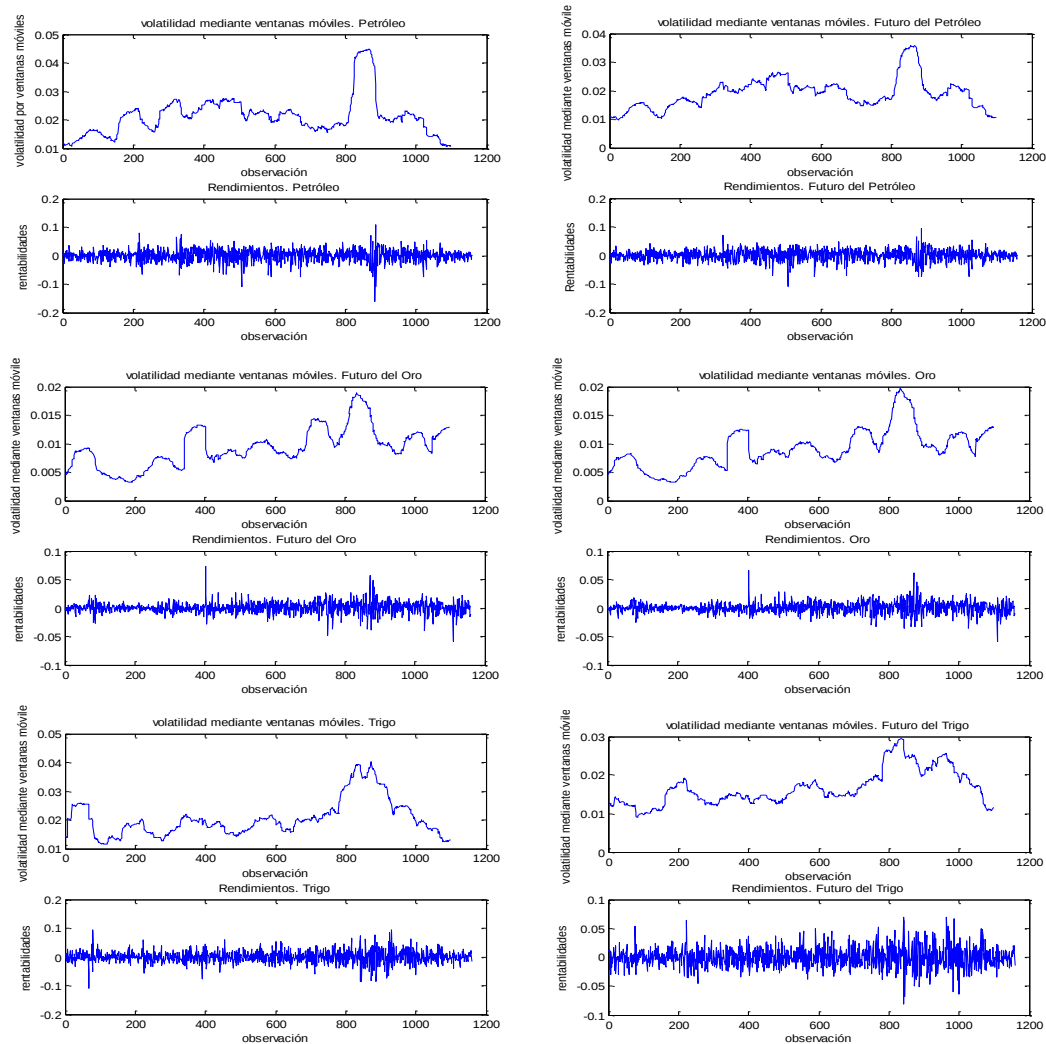
Este trabajo se organiza como sigue. En la sección I se describen los datos utilizados en el estudio. En la sección II se detallan los modelos y métodos utilizados para la estimación de los ratios de cobertura de los diferentes productos estudiados. En la sección III se analizan los resultados de las estimaciones de los ratios de cobertura a partir de las estimaciones de los modelos presentados en la sección anterior. Por último, en la sección IV se resumen los resultados y se dan posibles extensiones.

I. DESCRIPCIÓN DE DATOS.

Los datos se han recabado de DATASTREAM, programa donde se encuentra en base de datos series temporales de valores. Los valores escogidos son materias primas y sus futuros. Las materias primas elegidas han sido Petróleo, Oro y Trigo. El código en DATASTREAM es CRUDOIL para petróleo, GOLDHAR para el Oro y WHEATSF para el trigo. Para el caso de los futuros del Petróleo, Oro y Trigo son NCLCS20, NGCCS20, CW.CS20 respectivamente. La frecuencia elegida para realizar la investigación es semanal. Y recorre el período comprendido desde 14/01/1992 hasta 01/04/2014. Los tres futuros vencen a 2 meses vista.

Como breve introducción de las variables las rentabilidades y volatilidades son las que se observan en la figura (0). Las volatilidades han sido estimadas mediante ventanas móviles en cuyas ventanas hay un número de 60 observaciones. Estas ventanas móviles serán utilizadas en el Apéndice III.

Figura (0) rendimientos y volatilidades mediante ventanas móviles. Petróleo y Oro.



II. METODOLOGÍA.

II.1. Calculo de ratio de cobertura constante en el tiempo mediante regresión. (MCO).

Obtenemos el ratio de cobertura de las commodities con su futuro mediante una regresión básica. Para la realización de este procedimiento usamos la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). El comportamiento de este modelo se realiza mediante una regresión anteriormente explicada del tipo

$$\Delta S_t = \alpha + \gamma_1 \Delta F_t + \varepsilon_t \quad \text{donde } \varepsilon_t \stackrel{iid}{\rightarrow} N(0, \sigma_\varepsilon) \quad (1)$$

Aquí ΔS_t denota las rentabilidades semanales del subyacente y ΔF_t denota las rentabilidades semanales del futuro correspondiente. α y γ_1 son los parámetros a estimar de la regresión, la cual se hace mediante MCO. Donde ε_t es el término de error que sigue una distribución normal independiente e idénticamente distribuida con media 0 y desviación típica σ_ε . Se estimarán los parámetros por MCO, ya que este es un estimador que supone: linealidad, ya que está construido mediante una combinación lineal de perturbaciones aleatorias; insesgadez, el valor esperado del parámetro estimado coincide con el valor real; eficiencia, no es posible encontrar otro estimador de los parámetros que siendo lineal e insesgado tenga una varianza menor que el estimador MCO (minimiza la varianza), y consistencia, que ampliando la muestra al total de la población, el valor estimado coincide con el real. En este estudio nos es importante el análisis de $\hat{\gamma}_1$, el cual denota el ratio de cobertura de mínima varianza constante en el tiempo, de tal manera que γ_1 también se puede explicar mediante el cociente de la covarianza entre ambos rendimientos y la varianza de los rendimientos del futuro $\gamma_1 = \frac{Cov(\Delta S_t, \Delta F_t)}{Var(\Delta F_t)}$. Éste resultado, por tanto, estará cercana a 1 cuando $Cov(\Delta S_t, \Delta F_t)$ sea muy parecida a la $Var(\Delta F_t)$.

Éste es el modelo base que vamos a utilizar en la primera parte del trabajo. Es una estimación muy simple, a partir de la cual iremos complicando la modelización con el fin de obtener el modelo no lineal para obtener de cobertura cambiante en el tiempo con mayor eficiencia en la cobertura.

II.2. Cálculo del ratio de cobertura con regresión que sigue un proceso Markov-Regime-Switching con 2 estados para la varianza de las perturbaciones y parámetros del modelo de regresión. (MRS2).

Este modelo es una extensión del anterior. En este caso vamos a imponer la existencia de dos posibles estados para la varianza de las perturbaciones. Según va pasando el tiempo nuestra regresión se podrá encontrar en cualquiera de estos estados, cambiándose, en cada período, la probabilidad de estancia en cada uno de ellos. Para empezar nuestro estudio, vamos a suponer en un principio que sólo hay 2 estados para la volatilidad y parámetros de la regresión. Estos 2 estados se interpretarán como ‘estado de baja volatilidad’ y ‘estado de alta volatilidad’. Suponemos que el proceso estocástico que recoge los diferentes estados de los parámetros de la regresión (1) así

como la varianza de las perturbaciones es un proceso de Markov $\xi_{t+1} = \mathcal{P}\xi_t + v_{t+1}$ con dos estados cuya matriz de transición es

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\xi_t \begin{cases} (1,0)' & \text{si } S_t = 1 \\ (0,1)' & \text{si } S_t = 2 \end{cases} \quad (3)$$

En la matriz de transición p_{ii} con $i=1,2$, corresponde a la probabilidad de estar en el estado i y seguir en el mismo estado en el periodo siguiente; por tanto, $1 - p_{ii}$ denota la probabilidad de cambiar al estado j cuando en el periodo anterior estábamos en el estado i . La representación formal de la cadena de Markov indica que dependiendo en que régimen estamos la variable aleatoria tomara uno de los vectores definidos. La siguiente parte será incluirlas en un modelo de regresión para estimar los parámetros deseados esta regresión es la misma que utilizamos en el apartado anterior. En ésta, la notación 'st' indica el estado en el periodo t :

$$\Delta S_t = \alpha_{st} + \gamma_{1,st} \Delta F_t + \varepsilon_t \quad \text{donde } \varepsilon_t \xrightarrow{iid} N(0, \sigma_{\varepsilon_{st}}) \quad st = 1,2 \quad (4)$$

Definimos η_t como el vector de funciones de densidad al estado de la variable explicada. El vector columna es:

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_1 - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_2 - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2}\right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Este vector cambia en cada período ya que, como es lógico, se producirán cambios en los rendimientos del futuro y del subyacente. A su vez vamos a suponer que las probabilidades condicionales dependen del estado en el que estuvieron en el paso anterior, es decir, se recoge información de toda la muestra únicamente con el paso anterior. También supondremos que el estado evoluciona con una cadena de Markov independientemente de las observaciones pasadas de ΔS_t y presentes y pasadas de ΔF_t . De manera que $P(S_t = i | S_{t-1} = j) = p_{ij}$. Luego definiendo la probabilidad asignada a que con la información en $t-1$ estemos en un estado u otro es la siguiente.

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \begin{bmatrix} P(S_t = 1 | \mathcal{Y}_t, \theta) \\ P(S_t = 2 | \mathcal{Y}_t, \theta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

De tal manera que ya podemos calcular las probabilidades condicionales $\hat{\xi}_{t,t}$ y $\hat{\xi}_{t+1,t}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{\hat{\xi}_{t,t-1} \odot \eta_t}{1_2' (\hat{\xi}_{t,t-1} \odot \eta_t)} \quad (7)$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \mathcal{P} \hat{\xi}_{t,t} \quad (8)$$

Para calcular estos dos valores obviamente primero se deben de dar unas condiciones iniciales a $\hat{\xi}_{1|0}$ y condiciones iniciales a los parámetros θ a estimar. $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \sigma_1, \sigma_2, p_{11}, p_{22})$. La condición inicial para $\hat{\xi}_{1,0}$ se obtiene de la probabilidad ergódica dada por las siguientes expresiones:

- $(I_N - \mathcal{P})\pi = 0_N$
- $1'_N \pi = 1$

Por tanto:

$$\hat{\xi}_{1,0} = \pi = (A'A)^{-1}A'e_3; \quad \text{con } A = \begin{bmatrix} I_2 - \mathcal{P} \\ 1'_2 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

En definitiva, el problema consiste en maximizar, para los parámetros $\hat{\theta}$, la función de verosimilitud dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta) = & \sum_{t=1}^T \log \left(\hat{\xi}_{1,t+1|t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_1 - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. \dots \hat{\xi}_{2,t+1|t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_2 - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Siendo $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \sigma_1, \sigma_2, p_{11}, p_{22})$ esto es un $(\alpha, \gamma_1, \sigma)$ para cada estado posible. Una vez con los $\hat{\xi}_{i,t|T}$ $i=1,2$ producidos por el suavizado de [Kim \(1993\)](#) (Véase Apéndice 4). El ratio de cobertura es:

$$\hat{\gamma}_t = \hat{\xi}_{1,t|T} \hat{\gamma}_{1,1} + \hat{\xi}_{2,t|T} \hat{\gamma}_{1,2} \quad (11)$$

II.3. Cálculo del ratio de cobertura con regresión que sigue un proceso Markov-Regime-Switching con 4 estados, 2 para la varianza de las perturbaciones y 2 para los parámetros del modelo de regresión. (MRS4).

En esta sección haremos un modelo con la misma dinámica que el visto en el punto anterior, pero en este caso propondremos 4 estados posibles en los que se puede mover la varianza de las perturbaciones y los parámetros del modelo. Los 2 primeros vendrán determinados por la volatilidad (volatilidad de las perturbaciones) encontrándonos con ‘estado de alta volatilidad’ y ‘estado de baja volatilidad’. Los 2 últimos estados dependerán de la media (parámetros del modelo de regresión (4)) para encontrar ‘estado de alta media’ y ‘estado de baja media’.

$$\Delta S_t = \alpha_{s_{2t}} + \gamma_{1,s_{2t}} \Delta F_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_{s_{1t}}}); \quad s_{1t} = 1,2; s_{2t} = 1,2 \quad (12)$$

Después de definir las matrices de transición, para los estados de la volatilidad y de la media, se recombinarán haciendo una sola matriz de transición con la cual trabajaremos. De manera que ahora tengamos unos resultados más ajustados a la realidad. Como se ha explicado anteriormente las matrices de transición independientes para volatilidad y media se construyen de la siguiente manera.

$$\mathcal{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(1)} & 1 - p_{22}^{(1)} \\ 1 - p_{11}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \mathcal{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(2)} & 1 - p_{22}^{(2)} \\ 1 - p_{11}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\xi_t^{(1)} \begin{cases} (1,0)' & \text{si } S_{1t} = 1 \\ (0,1)' & \text{si } S_{1t} = 2 \end{cases} \quad \xi_t^{(2)} \begin{cases} (1,0)' & \text{si } S_{2t} = 1 \\ (0,1)' & \text{si } S_{2t} = 2 \end{cases} \quad (14)$$

El superíndice ‘1’ nos indica que es la matriz de transición y la representación de la cadena de Markov de los 2 primeros estados, regímenes de media. El superíndice ‘2’ nos indica la matriz y representación de cadena de Markov de los otros 2 estados, regímenes de volatilidad. No obstante, a nosotros nos interesa una representación y matriz única para 4 estados, de tal manera que recoja la información conjunta de encontrarnos en los diferentes estados para las medias y las volatilidades. Por lo que los podemos redefinir en la siguiente representación.

$$\xi_t \begin{cases} (1,0,1,0)' & \text{si } S_{1t} = 1 \text{ y } S_{2t} = 1 & (S_t = 1) \\ (1,0,0,1)' & \text{si } S_{1t} = 1 \text{ y } S_{2t} = 2 & (S_t = 2) \\ (0,1,1,0)' & \text{si } S_{1t} = 2 \text{ y } S_{2t} = 1 & (S_t = 3) \\ (0,1,0,1)' & \text{si } S_{1t} = 2 \text{ y } S_{2t} = 2 & (S_t = 4) \end{cases} \quad (15)$$

Siendo:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P(S_{t+1} = 1|S_t = 1) & P(S_{t+1} = 1|S_t = 2) & P(S_{t+1} = 1|S_t = 3) & P(S_{t+1} = 1|S_t = 4) \\ P(S_{t+1} = 2|S_t = 1) & P(S_{t+1} = 2|S_t = 2) & P(S_{t+1} = 2|S_t = 3) & P(S_{t+1} = 2|S_t = 4) \\ P(S_{t+1} = 3|S_t = 1) & P(S_{t+1} = 3|S_t = 2) & P(S_{t+1} = 3|S_t = 3) & P(S_{t+1} = 3|S_t = 4) \\ P(S_{t+1} = 4|S_t = 1) & P(S_{t+1} = 4|S_t = 2) & P(S_{t+1} = 4|S_t = 3) & P(S_{t+1} = 4|S_t = 4) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para ello, calculamos las probabilidades de la nueva matriz $\mathcal{P}$ como sigue:

$$\begin{aligned} P(S_{t+1} = 1|S_t = 1) \\ &= P(S_{1,t+1} = 1, S_{2,t+1} = 1|S_{1,t} = 1, S_{2,t} = 1) \\ &\stackrel{ind.}{\implies} P(S_{1,t+1} = 1|S_{1,t} = 1)P(S_{2,t+1} = 1|S_{2,t} = 1) = p_{11}^{(1)}p_{11}^{(2)} \end{aligned}$$

... ..

$$\begin{aligned} P(S_{t+1} = 2|S_t = 3) \\ &= P(S_{1,t+1} = 1, S_{2,t+1} = 2|S_{1,t} = 2, S_{2,t} = 1) \\ &\stackrel{ind.}{\implies} P(S_{1,t+1} = 1|S_{1,t} = 2)P(S_{2,t+1} = 2|S_{2,t} = 1) \\ &= (1 - p_{22}^{(1)})(1 - p_{11}^{(2)}) \end{aligned}$$

... ..

$$\begin{aligned} P(S_{t+1} = 4|S_t = 4) \\ &= P(S_{1,t+1} = 2, S_{2,t+1} = 2|S_{1,t} = 2, S_{2,t} = 2) \\ &\stackrel{ind.}{\implies} P(S_{1,t+1} = 2|S_{1,t} = 2)P(S_{2,t+1} = 2|S_{2,t} = 2) = p_{22}^{(1)}p_{22}^{(2)} \end{aligned}$$

De tal manera que la matriz de transición condicionada y recombinada mantiene las propiedades de una matriz de transición markoviana. Queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(1)} p_{11}^{(2)} & p_{11}^{(1)} (1 - p_{22}^{(2)}) & (1 - p_{22}^{(1)}) p_{11}^{(2)} & (1 - p_{22}^{(1)}) (1 - p_{22}^{(2)}) \\ p_{11}^{(1)} (1 - p_{11}^{(2)}) & p_{11}^{(1)} p_{22}^{(2)} & (1 - p_{22}^{(1)}) (1 - p_{11}^{(2)}) & (1 - p_{22}^{(1)}) p_{22}^{(2)} \\ (1 - p_{11}^{(1)}) p_{11}^{(2)} & (1 - p_{11}^{(1)}) (1 - p_{22}^{(2)}) & p_{22}^{(1)} p_{11}^{(2)} & p_{22}^{(1)} (1 - p_{22}^{(2)}) \\ (1 - p_{11}^{(1)}) (1 - p_{11}^{(2)}) & (1 - p_{11}^{(1)}) p_{22}^{(2)} & p_{22}^{(1)} (1 - p_{11}^{(2)}) & p_{22}^{(1)} p_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Con esta matriz será con la que realizaremos todas las estimaciones. Ahora este vector de parámetros a estimar se ha ampliado de manera que ahora tenemos que estimar $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \sigma_1, \sigma_2, p_{11}^{(1)}, p_{22}^{(1)}, p_{11}^{(2)}, p_{22}^{(2)})$. Las funciones de densidad para estimar la verosimilitud también se amplía a:

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_1 - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_1 - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_2 - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_2 - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2}\right) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Dada la información que tenemos hasta t , las probabilidades que se asignan a cada estado son las siguientes:

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \begin{bmatrix} P(S_t = 1 | \mathcal{Y}_t, \theta) \\ P(S_t = 2 | \mathcal{Y}_t, \theta) \\ P(S_t = 3 | \mathcal{Y}_t, \theta) \\ P(S_t = 4 | \mathcal{Y}_t, \theta) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para estimar las matrices $\hat{\xi}_{t,t}$ y $\hat{\xi}_{t+1,t}$ usamos el mismo proceso recursivo que en el apartado anterior en (7) y (8) pero ahora para 4 estados, teniendo en cuenta que ahora las dimensiones de los vectores implicados han aumentado. También utilizamos como condición inicial las probabilidades ergódicas (9) con 4 estados. La función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta) = & \sum_{t=1}^T \log \left(\hat{\xi}_{1,t+1|t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_1 - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2}\right) \right] + \right. \\ & \hat{\xi}_{2,t+1|t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_1 - \gamma_{1,1}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2}\right) \right] + \\ & \hat{\xi}_{3,t+1|t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_2 - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_1^2}\right) \right] + \\ & \left. \hat{\xi}_{4,t+1|t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(\frac{-(\Delta S_t - \alpha_2 - \gamma_{1,2}\Delta F_t)^2}{2\sigma_2^2}\right) \right] \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Una vez con los $\hat{\xi}_{i,t,T}$ $i=1,2,3,4$ producidos por el suavizado de [Kim \(1993\)](#) (Véase Apéndice IV). El ratio de cobertura es:

$$\hat{\gamma}_t = (\hat{\xi}_{1,t|T} + \hat{\xi}_{2,t|T})\hat{\gamma}_{1,1} + (\hat{\xi}_{3,t|T} + \hat{\xi}_{4,t|T})\hat{\gamma}_{1,2} \quad (21)$$

II.4. Cálculo del ratio de cobertura en modelos VAR (1) con matriz de covarianzas en las perturbaciones que sigue un modelo BEKK-GARCH. (VBEKK).

En principio se modeliza el modelo VAR (1) con varianzas BEKK-GARCH, basado en el paper ‘Multivariate Simultaneous Generalized ARCH’ de [Engle and Kroner \(1995\)](#), en el cual vamos interpretamos las rentabilidades de subyacente y futuro con unas variables explicativas retardadas un período de subyacente y futuro. Este modelo se puede explicar partiendo de:

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= \alpha_1 + \gamma_{1,1}\Delta S_{t-1} + \gamma_{2,1}\Delta F_{t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ \Delta F_t &= \alpha_2 + \gamma_{1,2}\Delta S_{t-1} + \gamma_{2,2}\Delta F_{t-1} + \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_t | \Psi_{t-1} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \xrightarrow{iid} N(0, H_t) \end{aligned} \quad (22)$$

donde ΔS_t son las rentabilidades del subyacente y ΔF_t las rentabilidades del futuro, no obstante ΔS_{t-1} y ΔF_{t-1} son las variables retardadas de subyacente y futuro. Los errores siguen una distribución normal independiente e idénticamente distribuida con media 0 y varianza H_t . Los parámetros muestran el impacto de la variable explicativa en la variable explicada. Para obtener los parámetros de covarianza y varianza usamos el modelo BEKK-GARCH. Al ser esta modelización de la familia GARCH sabemos que se modeliza la matriz de covarianzas con el uso de los errores al cuadrado y la matriz de covarianzas retarda. El modelo BEKK-GARCH se describe a continuación:

$$H_t = C'C + A'\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}'A + B'H_{t-1}B \quad (23.a)$$

O de forma ampliada:

$$\begin{aligned} H_t &= \begin{pmatrix} h_{ss,t} & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h_{ff,t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}' \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}' \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{pmatrix}' H_{t-1} \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 \\ 0 & \beta_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23.b)$$

De esta expresión h_{ss} es la varianza condicional de los rendimientos del subyacente, h_{ff} la varianza condicional de los rendimientos de los futuros y h_{sf} la covarianza condicional entre ellos. Por otro lado ε_{t-1} es el vector de errores del VAR (1) del período anterior y H_{t-1} la matriz de covarianzas del tipo BEKK-GARCH del período anterior. En cuanto a A, B y C son las matrices de parámetros a estimar, para poder modelizar una varianza cambiante en el tiempo e interconectada entre subyacente y

futuro. Donde A corresponde a la matriz diagonal que tiene que ver con la persistencia del error VAR (1), y B es la matriz diagonal que tiene que ver con la persistencia de la varianza del período anterior. La matriz triangular superior C contiene también otro conjunto de parámetros de estimación. Una buena manera de conseguir la matriz de covarianzas para la primera observación consiste computar la matriz de covarianzas a largo plazo y utilizar tal matriz como matriz de covarianzas inicial:

$$E(H_t) = C'C + A'E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}')A + B'E(H_{t-1})B \rightarrow$$

poniendo en vectores columna quedaría $\rightarrow \text{vec}(H) = \text{vec}(C'C) + \text{vec}(A'HA) + \text{vec}(B'HB)$

(24.a)

Según las propiedades del operador “vec”:

$$\text{vec}(A'HA) = (A \otimes A)\text{vec}(H)$$
(24.b)

Por lo tanto todo esto queda:

$$\text{vec}(H) = [I_4 - (A \otimes A) - (B \otimes B)]^{-1}\text{vec}(C'C)$$
(24.c)

Después se ordena de nuevo la matriz H. Donde H se considera la matriz de covarianzas incondicional. Simplemente pasar de vector a matriz cuadrada (en nuestro caso), para tener la primera observación de la matriz de covarianzas. De esta manera se calcula la estructura GARCH para la varianza condicional. La función de máxima verosimilitud que se debe maximizar es para conseguir los parámetros $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,1}, \gamma_{2,1}, \gamma_{1,2}, \gamma_{2,2}, c_{11}, c_{12}, c_{22}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{22})$:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^T \log \left[\frac{1}{2\pi} |H_t|^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t \right) \right]$$
(25)

A partir de esta maximización obtenemos los parámetros a estimar $\hat{\theta}$. Para calcular finalmente el ratio de cobertura condicional a la matriz de covarianza del período t-1.

$$\gamma_1^* |\Omega_{t-1}| = \frac{h_{sf,t-1}}{h_{ff,t-1}}$$
(26)

II.5. Cálculo del ratio de cobertura en modelos VAR(1) con matriz de covarianzas en las perturbaciones que sigue un modelo BEKK-GARCH que sigue un proceso Markov-Regime-Switching de 2 estados para la varianza y las constantes del VAR(1). (VBEKK-MRS2).

Este proceso implica los cálculos anteriores pero con algo más de complejidad, al añadir, a un modelo VAR (1) con matriz de covarianzas condicionales BEKK-GARCH, un proceso Markov-Regime-Switching el cual estima 2 estados para la varianza de las perturbaciones y en los parámetros del modelo VAR(1), éstas son ‘alta volatilidad’ y ‘baja volatilidad’. Para poder reproducir esta modelización tenemos que recurrir a lo que en apartados anteriores denominábamos representación de la cadena de Markov y matriz de transición de probabilidades. Éstas se construyen:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}$$
(27)

$$\xi_t \begin{cases} (1,0)' & \text{si } S_t = 1 \\ (0,1)' & \text{si } S_t = 2 \end{cases} \quad (28)$$

Donde p_{11} es la probabilidad de encontrarnos en el régimen 1 y en el período siguiente seguir en el mismo, p_{22} se explica como la probabilidad de encontrarnos en el régimen 2 y continuar en el mismo. De esta manera podremos estimar un modelo en el cual nos tenemos 2 conjuntos de parámetros del VAR(1) y del proceso BEKK-GARCH correspondientes a cada uno de los estados.

$$\begin{aligned} \text{VAR(1):} \quad \Delta S_t &= \alpha_1^{(st)} + \gamma_{1,1} \Delta S_{t-1} + \gamma_{2,1} \Delta F_{t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ \Delta F_t &= \alpha_2^{(st)} + \gamma_{1,2} \Delta S_{t-1} + \gamma_{2,2} \Delta F_{t-1} + \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_t | \Psi_{t-1} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \sim N(0, H_{t,st}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{BEKK-GARCH:} \quad H_{t,st} = C_{st}' C_{st} + A_{st}' \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{st} + B_{st}' H_{t-1} B_{st} \quad ; st=1,2 \quad (30)$$

Las matrices A, B y C son ahora ‘state dependent’ Ahora las funciones de densidad para cada estado son:

$$\eta_t = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} |H_{1,t}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon_t' H_{1,t}^{-1} \varepsilon_t\right) \\ \frac{1}{2\pi} |H_{2,t}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon_t' H_{2,t}^{-1} \varepsilon_t\right) \end{cases} \quad (31)$$

Las probabilidades de que en un periodo los datos hayan sido extraídos de un régimen o del otro, dada la información hasta ese mismo instante, pueden calcularse recursivamente como se dio en (7), (8) y tomando como condición inicial para $\xi_{1,0}$ la probabilidad ergódica o a largo plazo (9). Para obtener H_{t-1} tenemos que computar casi al final del proceso iterativo la recombinación para $h_{ss,t}$, $h_{ff,t}$ y $h_{sf,t}$, que es lo que nos interesa al final para llegar al ratio de cobertura. Por tanto al tener ahora dos varianzas y covarianzas condicionales por cada estado, tenemos que combinarlas de acuerdo a nuestras probabilidades ξ_t . Para computar la recombinación de las varianzas y covarianzas condicionales se hará:

$$h_{ss,t} = \xi_{1,t}(r_{s,1,t}^2 + h_{ss,1,t}) + (1 - \xi_{1,t})(r_{s,2,t}^2 + h_{ss,2,t}) - (\xi_{1,t}r_{s,1,t} + (1 - \xi_{1,t})r_{s,2,t})^2 \quad (32.a)$$

$$h_{ff,t} = \xi_{1,t}(r_{f,1,t}^2 + h_{ff,1,t}) + (1 - \xi_{1,t})(r_{f,2,t}^2 + h_{ff,2,t}) - (\xi_{1,t}r_{f,1,t} + (1 - \xi_{1,t})r_{f,2,t})^2 \quad (32.b)$$

$$\begin{aligned} h_{sf,t} &= \xi_{1,t}(r_{s,1,t}r_{f,1,t} + h_{sf,1,t}) + (1 - \xi_{1,t})(r_{s,2,t}r_{f,2,t} + h_{sf,2,t}) - \\ &\quad (\xi_{1,t}r_{s,1,t} + (1 - \xi_{1,t})r_{s,2,t})(\xi_{1,t}r_{f,1,t} + (1 - \xi_{1,t})r_{f,2,t}) \end{aligned} \quad (32.c)$$

$$\varepsilon_{s,t} = \xi_{1,t}\varepsilon_{s,1,t} + (1 - \xi_{1,t})\varepsilon_{s,2,t} \quad (32.d)$$

$$\varepsilon_{f,t} = \xi_{1,t}\varepsilon_{f,1,t} + (1 - \xi_{1,t})\varepsilon_{f,2,t} \quad (32.e)$$

Para tener una primera observación para la matriz de covarianzas ponemos la matriz de covarianzas incondicional (23), lo mismo que en el apartado anterior, sólo que ahora se hace para cada uno de los dos regímenes de la varianza de las perturbaciones y del modelo VAR(1). Finalmente, maximizamos los parámetros $\theta = (\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}, c_{11,1}, c_{12,1}, c_{22,1}, c_{11,2}, c_{12,2}, c_{22,2}, \alpha_{11,1}, \alpha_{22,1}, \alpha_{11,2}, \alpha_{22,2}, \beta_{11,1}, \beta_{22,1}, \beta_{11,2}, \beta_{22,2}, p_{11}, p_{22})$ en la función de verosimilitud dada por:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^T \log \left[\xi_{1,t+1|t} \left(\frac{1}{2\pi} |H_t|^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t \right) \right) + \xi_{2,t+1|t} \left(\frac{1}{2\pi} |H_t|^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t \right) \right) \right] \quad (33)$$

Y para el cálculo del ratio de cobertura condicionada a la matriz de covarianzas del período anterior (el suavizado de [Kim\(1993\)](#), en este apartado, no se usa para la estimación del ratio de cobertura, pero sí para suavizar la matriz de probabilidades condicional)

$$\gamma_1^* | \Omega_{t-1} = \frac{h_{sf,t-1}}{h_{ff,t-1}} \quad (34)$$

II.6. Eficiencia de cobertura.

La cartera estará compuesta por el subyacente y el número de futuros determinado para la reducción de riesgo en nuestra cartera, esta reducción viene determinada por el número de futuros que se adquieran, el cual dependerá del modelo utilizado. Según [Alizadeh et al. \(2008\)](#):

$$Var(\Delta S_t - \gamma_t^* \Delta F_t) \quad (35)$$

La mejora de varianza se hará en términos comparativos. Es decir, se compara la mejora de eficiencia del mejor modelo con respecto a los demás [Alizadeh et al. \(2008\)](#):

$$Mejora \text{ de varianza} = 1 - \frac{Var(mejor \text{ modelo})}{Var(modelo \text{ a comparar})} \quad (36)$$

Con esta información compararemos la cartera sin cubrir y los 5 modelos que se han integrado en la investigación. Buscando, de todos ellos, cual es el más eficiente para minimizar el riesgo de una cartera.

III. RESULTADOS Y COMENTARIOS.

III.1. Resultados con regresión. (MCO, MRS2 y MRS4)

Comenzamos analizando la figura (1).

En el caso del Petróleo, con MCO obtenemos un ratio de cobertura de 1.018 y una volatilidad de 0.0217. Al pasar a MRS2 las medias varían entre 1.013 y 1.0252, siendo las volatilidades en 2 estados por un lado con una probabilidad de mantenimiento de 93.02% está 0.0027 y por otro lado con una probabilidad de mantenimiento en el estado

Tabla (1.a). Parámetros estimados en cada modelo para Petróleo y Oro.

Parámetros/Petról	MCO		MRS2		MRS4	
α_1	0	(0.9870)	-0.0000	(0.0001)	0.0001	(0.0001)
α_2			-0.0001	(0.0007)	-0.0015	(0.0010)
$\gamma_{1,1}$	1.018	(0.0000)***	1.0130	(0.0065)	1.0052	(0.0066)
$\gamma_{1,2}$			1.0252	(0.0348)	1.3067	(0.0483)
σ_1	0.021773		0.0027	(0.0002)	0.0025	(0.0001)
σ_2			0.0151	(0.0007)	0.0147	(0.0007)
$p_{11}^{(1)}$			0.9302	(0.0130)	0.9656	(0.0172)
$p_{22}^{(1)}$			0.8743	(0.0263)	0.4978	(0.1692)
$p_{11}^{(2)}$					0.9315	(0.0127)
$p_{22}^{(2)}$					0.8782	(0.0262)
$Max \mathcal{L}(\theta)$			-4304.1		-4314.4	

Parámetros/Oro	MCO		MRS2		MRS4	
α_1	-4.72e-5	(0.9870)	0.0001	(0.0001)	0.0001	(0.0004)
α_2			0.0000	(0.0002)	0.0001	(0.0001)
$\gamma_{1,1}$	0.9095	(0.0000)***	0.9427	(0.0126)	0.6214	(0.0568)
$\gamma_{1,2}$			0.8905	(0.0198)	0.9571	(0.0133)
σ_1	0.009698		0.0018	(0.0001)	0.0018	(0.0001)
σ_2			0.0051	(0.0002)	0.0050	(0.0002)
$p_{11}^{(1)}$			0.9272	(0.0176)	0.4829	(0.1571)
$p_{22}^{(1)}$			0.9014	(0.0267)	0.9309	(0.0353)
$p_{11}^{(2)}$					0.9382	(0.0168)
$p_{22}^{(2)}$					0.9098	(0.0260)
$Max \mathcal{L}(\theta)$			-5028.6		-5037.8	

2 de 87.43% está 0.0151. También podemos extraer la duración media de estancia en cada régimen, según [Alizadeh et al. \(2008\)](#), se calculará así: la duración media en el estado de baja volatilidad $1/(1-0.9302)=14$ semanas y la duración en el estado de alta volatilidad $1/(1-0.8743)=8$ semanas. Con MRS4 los ratios se dispersan a 1.0052 y 1.3067 y sus volatilidades se encuentran en 0.0025 y 0.0151. Las matrices de transición individualmente tienen unas probabilidades de mantenimiento en el estado 1 de media es 96.56% y para el estado 2 un 49.78%. Para las volatilidades para el primer estado 93.15% y para el segundo estado 87.82% (Ver Apéndice II).

En el caso del Oro, seguimos el mismo procedimiento, por MCO el ratio de cobertura es 0.9095 y la volatilidad 0.0096. Al pasar a MRS2 volvemos a ver un ratio de cobertura que se encuentra en un estado con 0.9427 con una probabilidad de 92.72% y en otro con 0.8905 con una probabilidad de 90.14%. La duración media en el estado de baja volatilidad es $1/(1-0.9272)=14$ semanas y en el estado de alta volatilidad $1/(1-0.9014)=10$ semanas. En el caso de MRS4 para el oro, se alejan más los ratios a 0.6214

Tabla (1.b) Parámetros estimados en cada modelo para Trigo.

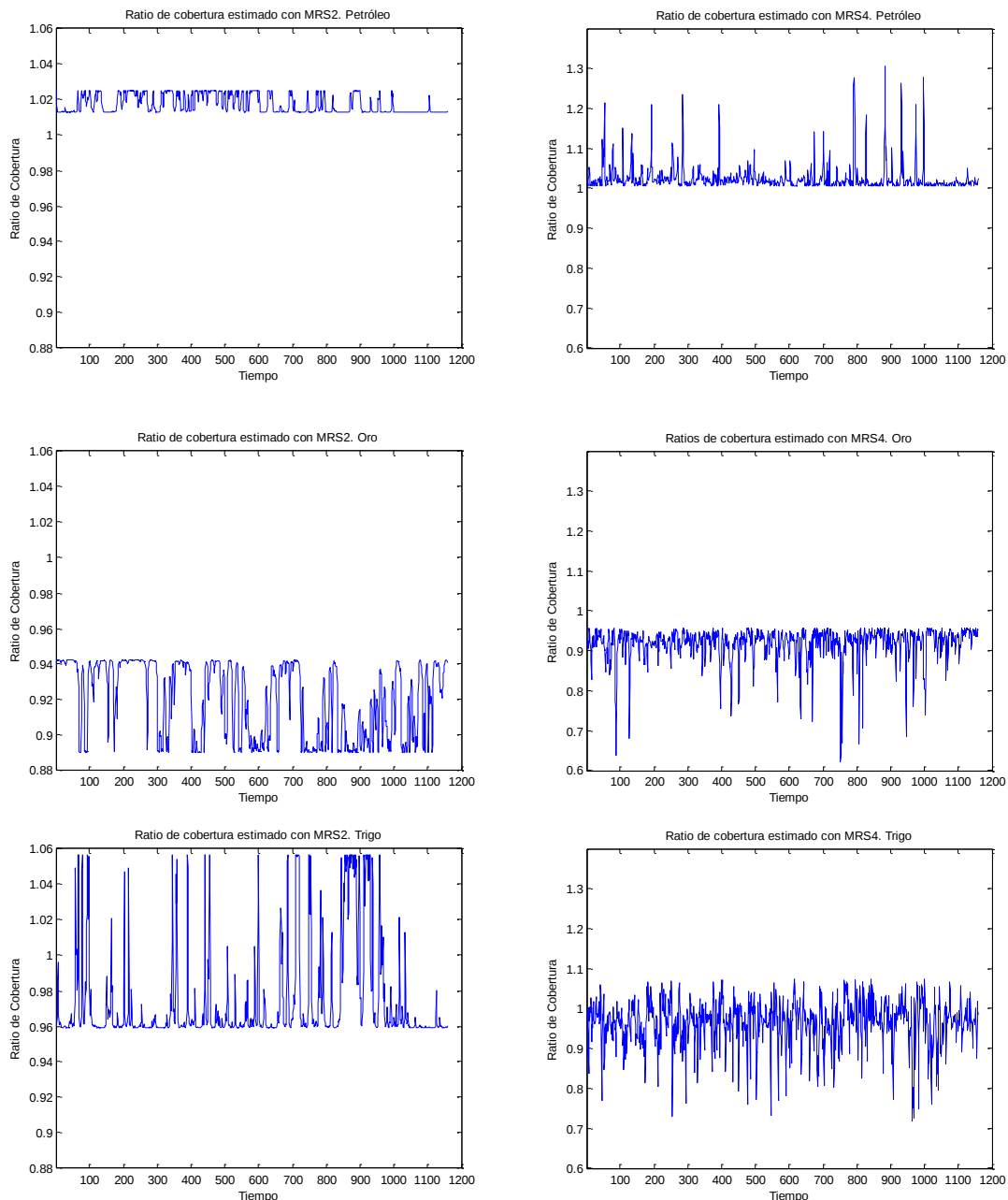
Parámetros/Trigo	MCO	MRS2	MRS4
α_1	-3.41e-5 (0.9870)	0.0001 (0.0003)	-0.0010 (0.0011)
α_2		-0.0002 (0.0020)	0.0006 (0.0007)
$\gamma_{1,1}$	0.9831 (0.0000)***	0.9586 (0.0199)	0.7148 (0.0962)
$\gamma_{1,2}$		1.0567 (0.1044)	1.0773 (0.0493)
σ_1	0.021143	0.0080 (0.0003)	0.0074 (0.0004)
σ_2		0.0265 (0.0019)	0.0262 (0.0019)
$p_{11}^{(1)}$		0.9567 (0.0140)	0.5393 (0.1840)
$p_{22}^{(1)}$		0.7741 (0.0613)	0.7941 (0.1319)
$p_{11}^{(2)}$			0.9529 (0.0154)
$p_{22}^{(2)}$			0.7589 (0.0667)
$Max \mathcal{L}(\theta)$		-3616.9	-3626.1

y 0.9571. Las volatilidades se encuentran en cada estado a un nivel de 0.0018 y 0.0050, las matrices de transición individualmente están la probabilidad de mantenimiento de media baja en 48.29% y de media alta un 93.09%. Para las volatilidades la capacidad de mantenimiento de volatilidad baja es un 93.82% y de volatilidad alta un 90.98% (Ver Apéndice II).

En el Caso del Trigo, con un modelo MCO el ratio de cobertura se encuentra en 0.9831 siendo su volatilidad 0.02114. Con la incorporación del sistema MRS2 los ratios se encuentran en 0.9586 y 1.0567, con volatilidades de 0.008 y 0.0265 con probabilidades de mantenimiento de 95.67% y 77.41% respectivamente. La duración media de estancia en el estado de baja volatilidad es de $1/(1-0.9567)=23$ semanas y en el estado de alta volatilidad es $1/(1-0.7741)=5$ semanas. Con MRS4 los ratios se dispersan a 0.7148 y 1.0773 y sus volatilidades se encuentran en 0.0074 y 0.0262. Las matrices de transición individualmente tienen unas probabilidades de mantenimiento en el estado 1 de media es 53.93% y para el estado 2 un 79.41%. Para las volatilidades 95.29% y 75.89 % (Ver Apéndice II).

Cabe destacar, a su vez, dentro de la importancia en estas tablas, las volatilidades de los parámetros estimados, los cuales se obtienen mediante el hessiano, derivado de forma numérica, de los parámetros. Existe gran significatividad de los parámetros que se han estimado para cada modelo, a excepción de los parámetros α_1 y α_2 , los cuales recogen información irrelevante en la regresión. Esto implica que en los parámetros estimados se recoge una alta información sobre comportamiento de la variable en la cual estamos estimando, justificando así el uso de los procesos Markov-Regime-Switching en la estimación. En este caso MRS4 se mueve con mayor sintonía a los shocks que se producen en la volatilidad del modelo, además de conseguir mayor riqueza informativa en los estados estimados.

Figura (1). Ratios de cobertura cambiantes en el tiempo para MRS2 (izquierda) y MRS4 (derecha)



En la figura (2), vemos cuales han sido las probabilidades condicionales de estar en un estado de alta volatilidad o en un estado de baja volatilidad en cada observación de la muestra para MRS2. Las 3 materias primas tienen el mismo comportamiento en cuanto al régimen de volatilidad más probable. Este régimen corresponde al de baja volatilidad, puesto que se da más a menudo en las observaciones de la muestra. Más pronunciado es así en el caso del trigo donde como se puede ver en los datos antes facilitados, la probabilidad de mantenerse en el estado de baja volatilidad es un 95.27%, frente al 75.89% de la alta, concluyendo así que en el caso del Trigo la volatilidad es más estable que en el resto de commodities.

En la figura (3). Podemos observar la cantidad de veces que la regresión se ha encontrado en los diferentes estados que se han impuesto en el modelo de regresión con MRS4. De ahora en adelante estado 1, estado 2, estado 3 y estado 4 se

Figura (2). Probabilidades condicionadas de estancia en baja volatilidad. $\hat{\xi}_{i,t,T}$. MRS2.

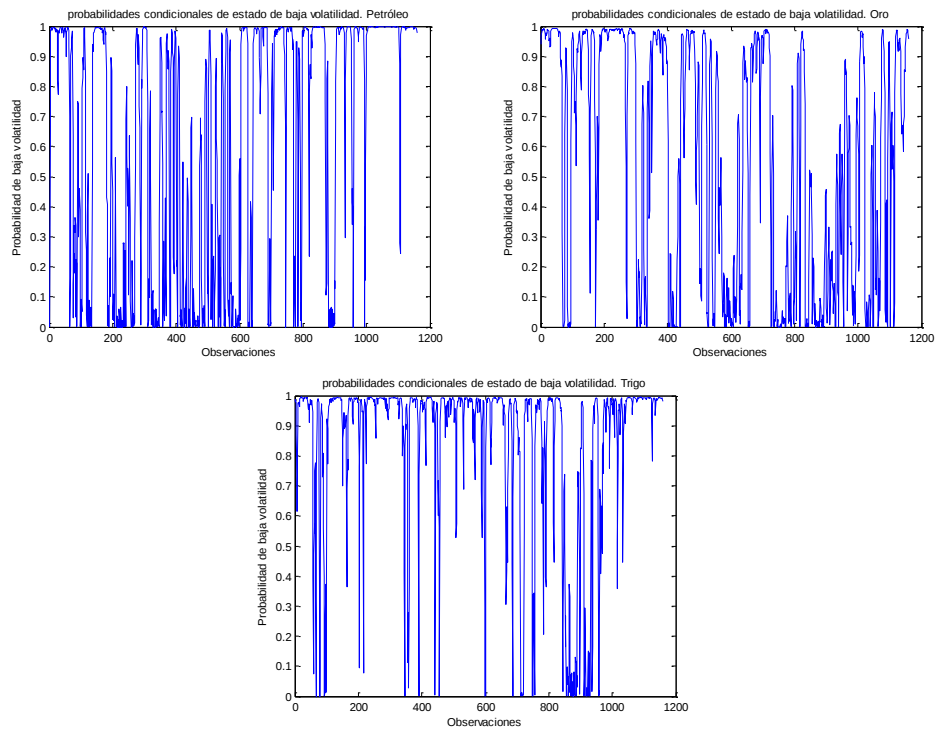
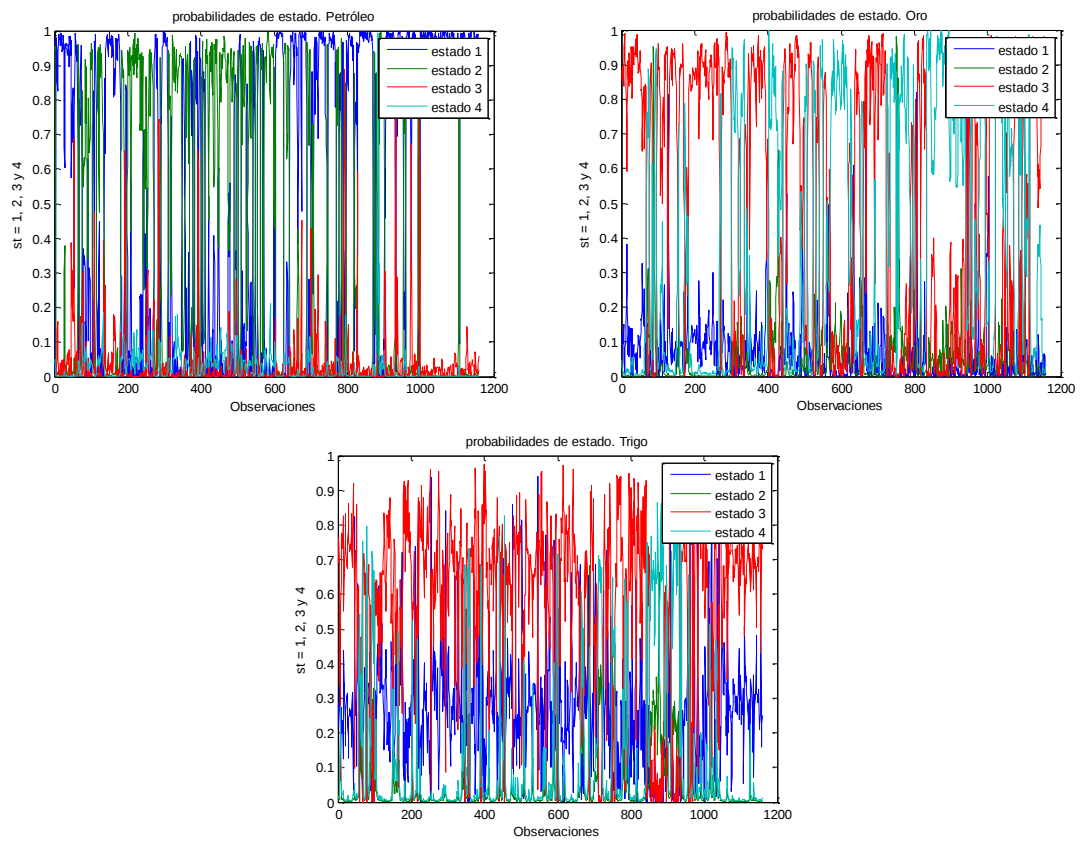


Figura (3). Probabilidades condicionadas de estancia en cada estado. $\hat{\xi}_{i,t,T}$. MRS4.



denominarán ‘estado de media y volatilidad bajas’, ‘estado de media baja y volatilidad alta’, ‘estado de media alta y volatilidad baja’ y ‘estado de media y volatilidad altas’.

En todos ellos nos encontramos con el mismo patrón (para un análisis más completo ver Apéndice II). En primer lugar, el predominio sobre los demás estados del estado 3 y el estado 4, esto es, ‘estado de media alta y volatilidad baja’ y ‘estado de media y volatilidad altas’. No obstante entre ellos se puede observar que el estado que relativamente suele predominar más a menudo en la muestra es el de ‘estado de media alta y volatilidad baja’ y el estado que menos suele aparecer es el de ‘estado de media baja y volatilidad alta’. En segundo lugar, el caso apartado del petróleo donde existe una mayor predominancia en el estado 1 y el estado 2.

De estos resultados podemos dar una conclusión en la que la volatilidad suele estar más estable en los parámetros de $\hat{\sigma}_1$ estimado en cada materia prima, a su vez suele ser más normal encontrarse con un ratio de cobertura $\hat{\gamma}_{1,2}$ estimado en cada modelo.

Resaltamos también el efecto crisis que se produjo en la economía en el 2008 ya que a partir de la observación 850 se observa un gran cambio en los gráficos de ratios de cobertura y en los de probabilidad condicional, estas observaciones de la muestra que comprenden de la 850 hasta el final corresponden a la fecha comprendida entre 06/05/2008 y 01/04/2014. Observamos un mayor efecto en el petróleo y oro.

III.2. Resultados y comentarios con VAR(1) con BEKK-GARCH. (VBEKK y VBEKK-MRS2).

Para el análisis de los resultados nos vamos a centrar primero en la Tabla (2.a), Tabla (2.b) y Tabla (2.c) donde se ven los parámetros estimados para el modelo VAR (1) y los parámetros estimados para el modelo BEKK-GARCH. La importancia comparativa reside en la parte derecha de la tabla donde se recogen los datos estimados para el modelo VBEKK-MRS2. En ésta se ve cual es la probabilidad de mantenerse en el estado 1 y en el estado 2 (En este apartado el estado 1 es alta volatilidad, en diferencia del anterior punto).

Para el caso del Petróleo ambas son muy permanentes en los estados, con un 91.47% de mantenerse en el estado 1 (alta volatilidad) y un 91.92% de mantenerse en el estado 2 (baja volatilidad). la duración media de mantenimiento en baja volatilidad es $1/(1-0.9147)=12$ semanas y para mantenerse en el estado de alta volatilidad $1/(1-0.9192)=12$ semanas.

Para el caso del Oro la probabilidad de mantenerse en el estado 1 (alta volatilidad) es 73.99% siendo más persistente el estado 2 (baja volatilidad) con 95.69%. Y la duración media en el primer estado $1/(1-0.7399)=4$ semanas y en el segundo estado $1/(1-0.9569)=23$ semanas.

Por último en el caso del Trigo la probabilidad de mantenerse en el estado 1 (alta volatilidad) es 48.75% siendo más persistente el estado 2 (baja volatilidad) con 85.58%

Tabla (2.a). Parámetros estimados en cada modelo para Petróleo.

Parámetros/ Petróleo	VBEKK		VBEKK-MRS2	
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.0004	(0.0005)	-0.0001	(0.0009)
$\alpha_2^{(1)}$	0.0012	(0.0005)	0.0002	(0.0008)
$\alpha_1^{(2)}$			0.0003	(0.0007)
$\alpha_2^{(2)}$			0.0003	(0.0007)
$\gamma_{1,1}$	-0.0456	(0.0926)	0.0393	(0.1008)
$\gamma_{2,1}$	-0.1599	(0.1022)	-0.0294	(0.1000)
$\gamma_{1,2}$	0.4210	(0.0769)	0.4759	(1.7079)
$\gamma_{2,2}$	-0.5993	(0.0858)	-0.4555	(1.7032)
$c_{1,1}^{(1)}$	0.0077	(0.0005)	0.0082	(0.0012)
$c_{1,2}^{(1)}$	0.0070	(0.0004)	0.0054	(0.0014)
$c_{2,2}^{(1)}$	-0.0000	(0.0007)	0.0020	(0.0029)
$c_{1,1}^{(2)}$			0.0126	(0.0005)
$c_{1,2}^{(2)}$			0.0123	(0.0005)
$c_{2,2}^{(2)}$			-0.0000	(0.0002)
$a_{1,1}^{(1)}$	0.1831	(0.0185)	0.3121	(0.0432)
$a_{2,2}^{(1)}$	0.0536	(0.0229)	0.1082	(0.0744)
$a_{1,1}^{(2)}$			0.5363	(0.0391)
$a_{2,2}^{(2)}$			0.5395	(0.0391)
$b_{1,1}^{(1)}$	0.9101	(0.0089)	0.9257	(0.0131)
$b_{2,2}^{(1)}$	0.9262	(0.0072)	0.9670	(0.0266)
$b_{1,1}^{(2)}$			0.5203	(0.0026)
$b_{2,2}^{(2)}$			0.5325	(0.0120)
p_{11}			0.9147	(0.0098)
p_{22}			0.9192	(0.0122)
$Max \mathcal{L}(\theta)$	7155.9		7445.9	

con probabilidad de mantenimiento en el estado primero $1/(1-0.4875)=2$ semanas y de mantenimiento en el estado segundo $1/(1-0.8558)=7$ semanas.

En cuanto a las desviaciones típicas de los parámetros estimados, que se marcan entre corchetes al lado derecho del valor de dichos parámetros. Para el modelo BEKK existe no significatividad en algunos parámetros del VAR(1), puede ser por consecuencia de la causalidad entre las variables. Para el VBEKK-MRS2 en principio decir que existe una alta significatividad en casi todos ellos, generalizándose la no significatividad en todos los parámetros estimados del modelo VAR(1), esto se puede interpretar por la información que ya recoge en los datos el modelo BEKK-GARCH y el proceso MRS2 hace que la información adicional dada por el modelo VAR(1) sea no significativa.

Tabla (3.b). Parámetros estimados en cada modelo para Oro.

Parámetros/ Oro	VBEKK		VBEKK-MRS2	
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.0007	(0.0002)	0.0031	(0.0021)
$\alpha_2^{(1)}$	0.0007	(0.0002)	0.0031	(0.0022)
$\alpha_1^{(2)}$			-0.0001	(0.0002)
$\alpha_2^{(2)}$			-0.0001	(0.0002)
$\gamma_{1,1}$	-0.3481	(0.0822)	-0.3694	(1.3407)
$\gamma_{2,1}$	0.4479	(0.0801)	0.3848	(1.3390)
$\gamma_{1,2}$	0.1263	(0.0869)	0.1668	(0.2615)
$\gamma_{2,2}$	-0.0617	(0.0851)	-0.1431	(0.2550)
$c_{1,1}^{(1)}$	0.0015	(0.0002)	0.0113	(0.0019)
$c_{1,2}^{(1)}$	0.0018	(0.0002)	0.0110	(0.0019)
$c_{2,2}^{(1)}$	-0.0003	(0.0001)	0.0038	(0.0009)
$c_{1,1}^{(2)}$			0.0003	(0.0007)
$c_{1,2}^{(2)}$			0.0009	(0.0009)
$c_{2,2}^{(2)}$			0.0000	(0.0009)
$a_{1,1}^{(1)}$	0.1998	(0.0179)	0.0456	(0.0543)
$a_{2,2}^{(1)}$	0.2443	(0.0162)	0.0892	(0.0690)
$a_{1,1}^{(2)}$			0.2753	(0.0407)
$a_{2,2}^{(2)}$			0.3383	(0.0534)
$b_{1,1}^{(1)}$	0.9651	(0.0050)	0.8812	(0.0666)
$b_{2,2}^{(1)}$	0.9516	(0.0070)	0.8731	(0.0749)
$b_{1,1}^{(2)}$			0.8487	(0.0719)
$b_{2,2}^{(2)}$			0.8285	(0.0838)
p_{11}			0.7399	(0.1272)
p_{22}			0.9569	(0.0257)
$Max \mathcal{L}(\theta)$	8946.1		8.8991	

Concluyendo que es necesaria la estimación del proceso Markov-Regime Switching y dando a entender la existencia de varios regímenes en el comportamiento de las series temporales que se estudian.

En la Figura (4) se observan los ratios de cobertura cambiantes en el tiempo de mínima varianza estimados para cada materia prima (Petróleo, Oro y Trigo). Se observa obviamente una mayor rapidez de ajuste en el caso del modelo con Markov-Regime-Switching, esto se explica con la existencia de un mayor número de parámetros que están implicados en la modelización del ratio. No obstante debe haber algunos cambios entre ambos modelos, ya que en el caso de VBEKK-MRS2 imponemos 2 regímenes para cada estado de VAR (1) y BEKK-GARCH conjuntos, dando así una idea global de

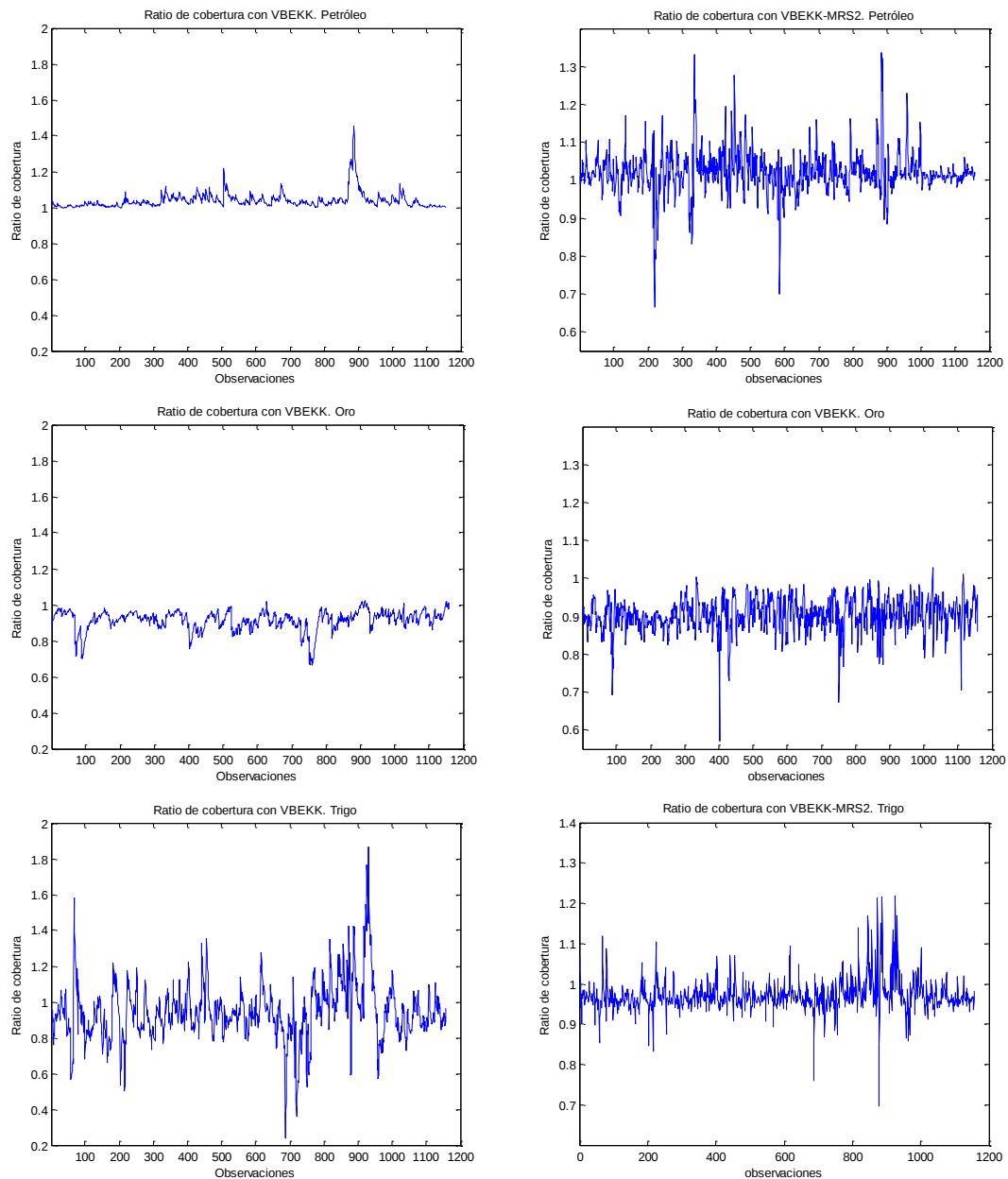
Tabla (3.c). Parámetros estimados en cada modelo para Trigo.

Parámetros/ Trigo	VBEKK		VBEKK-MRS2	
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.0004	(0.0005)	0.0022	(0.0025)
$\alpha_2^{(1)}$	0.0008	(0.0005)	0.0028	(0.0019)
$\alpha_1^{(2)}$			-0.0004	(0.0006)
$\alpha_2^{(2)}$			-0.0006	(0.0005)
$\gamma_{1,1}$	-0.0557	(0.0423)	-0.0437	(0.0688)
$\gamma_{2,1}$	-0.0107	(0.0306)	0.0054	(0.0361)
$\gamma_{1,2}$	-0.0328	(0.0327)	0.0306	(0.3339)
$\gamma_{2,2}$	0.0002	(0.0031)	-0.0383	(0.3474)
$c_{1,1}^{(1)}$	0.0056	(0.0007)	0.0256	(0.0042)
$c_{1,2}^{(1)}$	0.0037	(0.0006)	0.0139	(0.0059)
$c_{2,2}^{(1)}$	-0.0026	(0.0006)	0.0141	(0.0041)
$c_{1,1}^{(2)}$			0.0091	(0.0015)
$c_{1,2}^{(2)}$			0.0101	(0.0018)
$c_{2,2}^{(2)}$			0.0012	(0.0042)
$a_{1,1}^{(1)}$	0.3681	(0.0304)	0.1189	(0.0358)
$a_{2,2}^{(1)}$	0.2891	(0.0331)	0.1289	(0.3116)
$a_{1,1}^{(2)}$			0.2489	(0.0793)
$a_{2,2}^{(2)}$			0.2175	(0.0705)
$b_{1,1}^{(1)}$	0.8905	(0.0196)	0.9184	(0.1073)
$b_{2,2}^{(1)}$	0.9202	(0.0209)	0.8648	(0.5205)
$b_{1,1}^{(2)}$			0.5839	(0.0522)
$b_{2,2}^{(2)}$			0.5068	(0.1014)
p_{11}			0.4875	(0.0468)
p_{22}			0.8558	(0.0305)
$Max \mathcal{L}(\theta)$	6658		6746.2	

cuál sería la forma de la cobertura en el caso de que haya en la economía shocks que crean una volatilidad agresiva y, por otro lado, si esos shocks crean una volatilidad más pasiva.

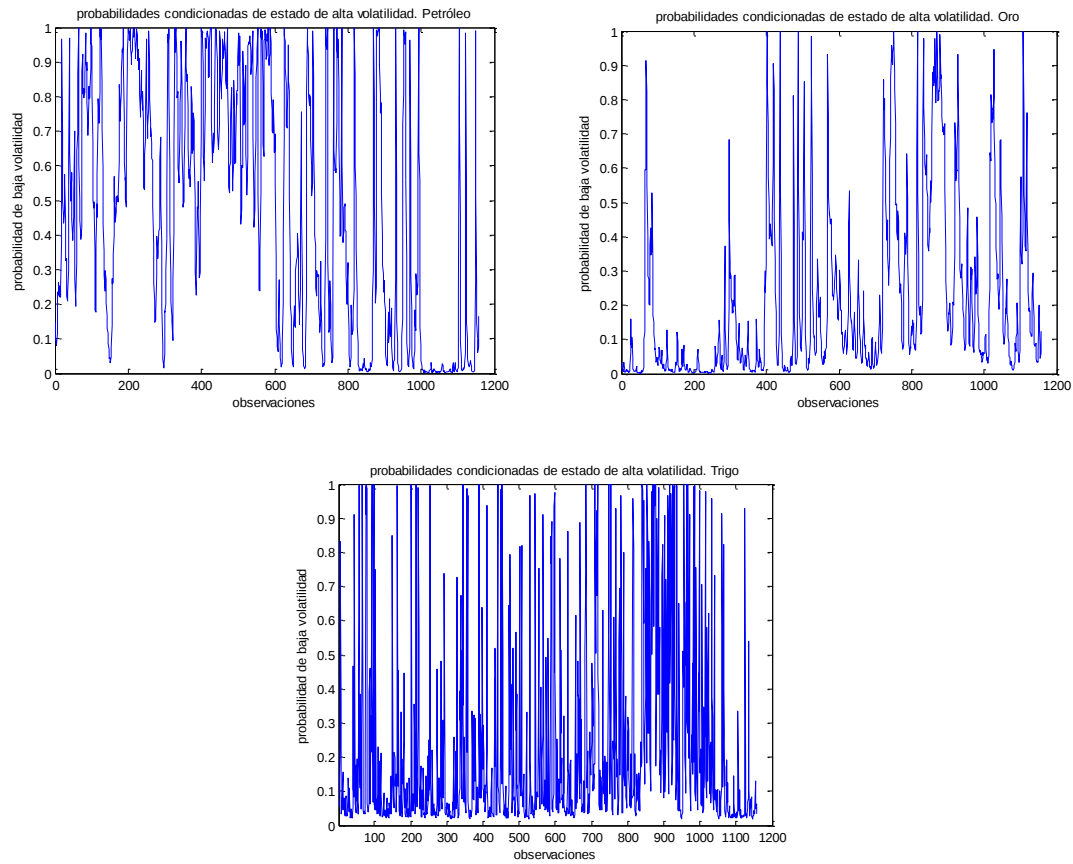
Supone, además, gran interés la figura (5) donde vemos las probabilidades condicionadas de alta volatilidad estimadas del modelo VBEKK-MRS2. En el caso del petróleo la volatilidad se mantiene particularmente alta al principio de la muestra, mientras que para el final de la misma la volatilidad predominante es la que se encuentra en el estado de baja volatilidad. Mientras que para los dos siguientes (oro y trigo) la volatilidad que suele aparecer a lo largo de la muestra es la baja. Es importante también interpretar el efecto crisis que se produjo en la economía en el 2008 ya que a

Figura (4). Ratios de cobertura cambiantes en el tiempo para modelo VBEKK (derecha) y VBEKK-MRS2 (izquierda)



partir de la observación 850 se observa un gran cambio en los gráficos de ratios de cobertura y en los de probabilidad condicional, estas observaciones de la muestra que comprenden de la 850 hasta el final corresponden a la fecha comprendida entre 06/05/2008 y 01/04/2014.

Figura (5). Probabilidades condicionadas de estancia en alta volatilidad. $\hat{\xi}_{i,t,T}$. VBEKK-MRS2



III.3. Efectividad de la cobertura.

Tabla (3). Eficiencia de cobertura según el modelo utilizado. $Datos * 10^{-3}$

	Petróleo		Oro		Trigo	
Efectividad de la cobertura	Varianza	Mejora Varianza con MRS4	Varianza	Mejora Varianza con MRS4	Varianza	Mejora Varianza con MRS4
Cartera no cubierta	0.4708	82.79%	0.09405	88.04%	0.44701	65.97%
MCO	0.086205	5.98%	0.013115	14.24%	0.16694	8.89%
MRS2	0.08619	5.97%	0.013029	13.68%	0.1662	8.48%
MRS4	0.081044	---	0.011247	---	0.1521	---
VBEKK	0.088622	8.55%	0.013084	14.04%	0.1667	8.76%
VBEKK-MRS2	0.088568	8.49%	1.3009	13.54%	0.16585	8.29%

En la Tabla(3) se compara la eficiencia en la cobertura, de las tres materias primas con sus respectivos futuros, con los 5 modelos explicados y con la cartera sin cubrir, la cual recoge sólo la varianza del subyacente. En esta tabla están las varianzas de las carteras (Varianza), y la mejora en la varianza de estas carteras que produce el modelo MRS4 sobre los otros modelos (Mejora Varianza con MRS4). El punto interesante a observar es la mejora de varianza, puesto que es el indicador que nos permite observar cual es la reducción del riesgo de cada cartera. La reducción de riesgo de las carteras sin cubrir con MRS4 es bastante alta (siendo 82.79% en el Petróleo, 88,04% en el Oro y 65.97% en el Trigo), pero esta reducción de varianza sigue produciéndose en carteras cubiertas con otros modelos diferentes a MRS4, que también arrojan ratios de cobertura de mínima varianza, siendo más pronunciado en el caso del Oro, donde con MRS4 cubrimos un 14.24% mejor que con MCO, un 14.04% que con VBEKK y un 13.54% que con VBEKK-MRS2. Aunque no sea tan pronunciada, esta mejora de eficiencia se extrapola a las otras materias primas estudiadas Petróleo y Trigo. Utilizamos la ‘Mejora Varianza con MRS4’ como indicador de la eficiencia de la cobertura.

El punto clave, en esta comparación de eficiencia, se encuentra en la gran mejora que se produce en la cobertura con el uso de MRS4. Se ve además una escasa mejora en MCO contra MRS2 y VBEKK contra VBEKK-MRS2., siendo incluso mejor MCO que VBEKK-MRS2 en el petróleo. Y éste es el punto clave, es decir, con un modelo más estilizado (MRS4) se obtienen mayores beneficios que con modelos complejos (VBEKK y VBEKK-MRS2) en las 3 materias primas estudiadas en la investigación. La riqueza en los parámetros estimados con MRS4 es la causa de esta conclusión. Cabe destacar la gran mejora de la eficiencia marginal en la cobertura con MRS4 y escasa mejora de la eficiencia marginal en la cobertura con MRS2. La riqueza de los parámetros que se estiman es superior, mejorando por:

$$\text{multiplicador de eficiencia} = \frac{\text{mejora de eficiencia MRS4 con respecto MCO}}{\text{mejora de eficiencia MRS2 con respecto MCO}} = \frac{1 - \frac{0.011247}{0.013115}}{1 - \frac{0.013029}{0.013115}} =$$

21 veces MRS4 a MRS2, ambos contra MCO, en el caso del oro.

IV. CONCLUSIONES Y APORTACIONES.

En este trabajo hemos computado ratios de cobertura para diferentes productos utilizando diversos modelos de estimación alternativos como son: MCO, MRS2, MRS4, VBEKK y VBEKK-MRS2. Ante todo, la importancia reside en la introducción del proceso Markov-Regime-Switching, en este proceso nos encontramos con varios regímenes, donde se puede estimar el ratio de cobertura, y que parece captar significativamente los movimientos de las variables de la regresión y del VAR (1) con BEKK-GARCH en su caso, el modelo BEKK-GARCH es un modelo bivalente de parametrización de la varianza. En cuanto a los datos utilizados, han sido el petróleo, el oro y el trigo, que son materias primas que se comercializan de forma diferente atendiendo a alternativos usos.

La motivación principal que el autor ha tenido es la de conseguir un modelo que pueda estimar con mejora de la eficiencia en la cobertura, con respecto a los modelos

tradicionales de la literatura; Otra motivación importante que nos ha llevado que, aparte de ser eficiente en la cobertura, lo estime con un número inferior de parámetros reduciendo el coste computacional. De estas dos motivaciones hace que se elijan los modelos Markov-Regime-Switching, dado que los parámetros estimados en modelos con este proceso producen gran riqueza informativa. Motivaciones que se plasman en la creación del modelo MRS4.

La principal aportación, desde el punto de vista metodológico, es la estimación de un modelo de regresión, entre el spot y el futuro de las materias primas, en el cual los parámetros y las perturbaciones siguen un proceso Markov-Regime-Switching con 4 estados, dos estados para los parámetros de la regresión independientes de los dos estados que rigen el comportamiento de la varianza de las perturbaciones. Además, y como principal aportación desde el punto de vista de los resultados obtenidos, obtenemos un modelo muy efectivo para computar los ratios de cobertura cambiantes en el tiempo de mínima varianza, éste es MRS4. Así, lo importante para que un modelo sea eficiente no es la cantidad de parámetros que estimes, sino la calidad de estos parámetros estimados. Por tanto, como conclusión global, no es de extrañar que, por la facilidad de estimación y la obtención de mayores beneficios, se recomiende el uso del modelo MRS4.

Las conclusiones generales: Predominancia generalizada del modelo de regresión MRS4. El modelo MRS4 se muestra más eficiente en comparación con los otros modelos utilizados para todas las materias primas analizadas. Las materias primas de sectores diferentes hacen este estudio más significativo; Además MRS4 es más eficiente en comparación a un modelo que tiene que estimar más del doble de parámetros (VBEKK-MRS2), esta predominancia es explicada por la riqueza en los datos estimados; Los costes computacionales de estimación también se minimizan, dado que la espera media de MRS4 es de 20-35 segundos, mientras que para VBEKK-MRS2 es de 20-30 minutos; Un modelo más complejo con mayor número de parámetros a estimar no tiene por qué hacer la cobertura más eficiente. Se puede observar dado que VBEKK-MRS2 estima 24 parámetros y MRS4 estima 10 parámetros, y tiene menores costes temporales de estimación, sin embargo es más efectivo MRS4 *‘Lo importante para que un modelo sea eficiente no es la cantidad de parámetros que estimes, sino la calidad de estos parámetros’*.

Por otro lado, Para todas las materias primas analizadas el régimen de baja volatilidad tiene una duración media mayor en el modelo univariante; Estos resultados se mantienen en el modelo bivariante (a excepción del petróleo). En el caso MRS4 las materias primas encuentran mayor estabilidad en ‘baja volatilidad y alta media’ y ‘alta volatilidad y media’ (a excepción del caso del petróleo). Es muy importante, también, explicar el proceso de estimación atendiendo al proceso crisis el cual hace los datos estimados más imprecisos de lo normal, a consecuencia de los cambios bruscos de volatilidad que se produjeron en el momento que estalló la crisis. Estas dificultades son mayores en el Petróleo y el Oro que en el Trigo.

Las posibles extensiones de este trabajo consistirían en: medir la capacidad predictiva de los modelos dados, para ver si sigue siendo tan predominante el modelo MRS4; Estimar los modelos VBEKK y VBEKK-MRS2 con matrices completas de estimación, para A y B, para calcular la matriz de covarianzas condicionales H_t y $H_{t,st}$, con mayores costes computacionales; Realizar la estimación en un hipotético modelo VBEKK-MRS4, el cual, es mucho más complejo a la hora de estimar debido también a los altos costes computacionales.

V. APÉNDICES.

Apéndice I. Datos utilizados: Análisis de los datos, frecuencia, vencimientos de futuros y gráficos de rentabilidades y series temporales.

Los datos se han recabado de DATASTREAM, programa donde se encuentra en base de datos series temporales de valores. Los valores escogidos son materias primas y sus futuros. Las materias primas elegidas han sido Petróleo, Oro y Trigo. El código en DATASTREAM es CRUDOIL para petróleo, GOLDHAR para el Oro y WHEATSF para el trigo. Para el caso de los futuros del Petróleo, Oro y Trigo son NCLCS20, NGCCS20, CW.CS20 respectivamente. La frecuencia elegida para realizar la investigación es semanal. Y recorre el período comprendido desde 14/01/1992 hasta 01/04/2014. Los tres futuros vencen a 2 meses vista. Como breve introducción de las variables las rentabilidades y volatilidades son las que se observan en la figura (6)

Las volatilidades han sido estimadas mediante medias móviles en cuyas ventanas hay un número de 60 observaciones. Estas ventanas móviles serán utilizadas en el Apéndice

Figura (6) rendimientos y volatilidades mediante ventanas móviles.

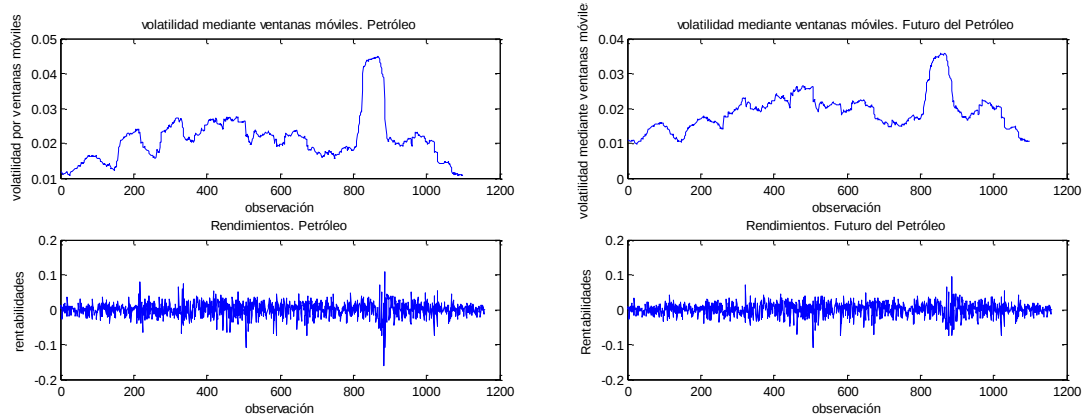
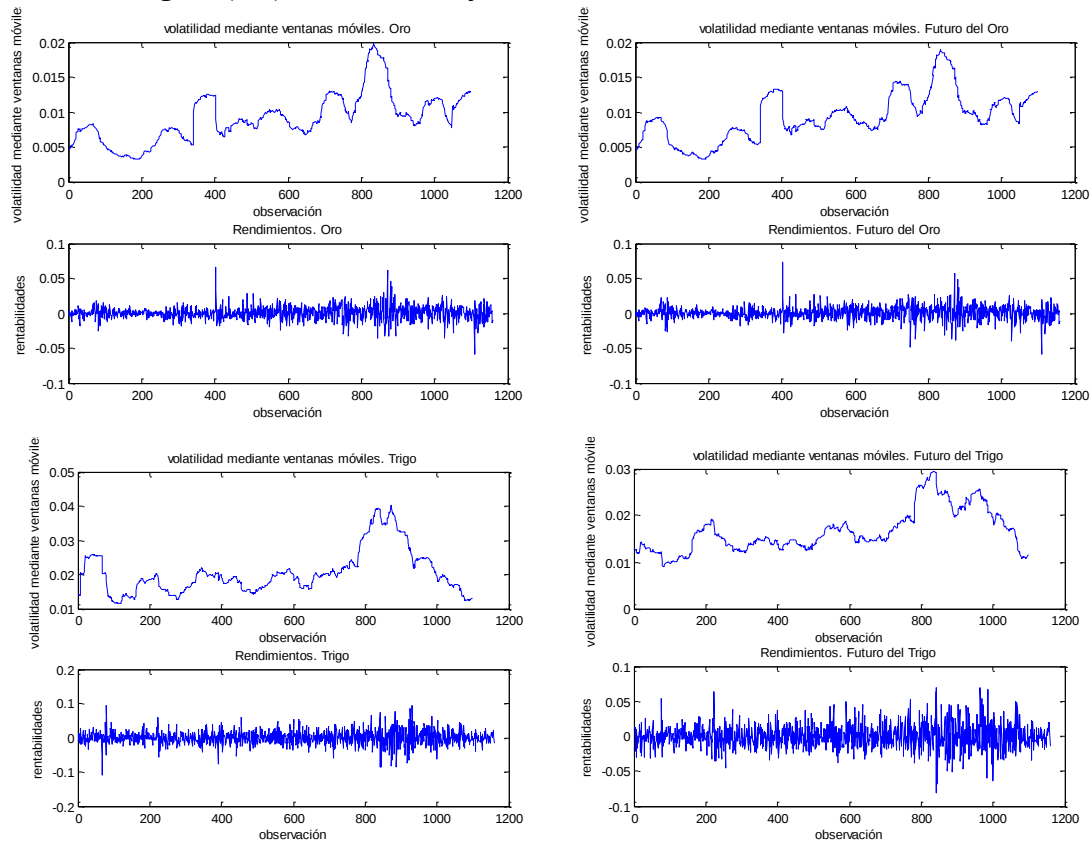


Figura (6.b) rendimientos y volatilidad mediante ventanas móviles.



III. También para asegurar la normalidad de estas series financieras vamos a observar el ‘qqplot’ en cada una de ellas, éste es una función de Matlab en el cual observa la serie financiera ordenada en función de sus cuantiles. De manera que cuanto más se ajuste a la línea roja (distribución normal pura) más ajustada está a la distribución de probabilidad normal. Se puede asumir normalidad en los puntos interiores de la muestra ordenada, en cuanto a sus valores extremos no siguen una distribución normal, dado que estos valores no coinciden con los cuantiles dados por dicha distribución. Esto nos es importante a la hora de asumir normalidad para poder estimar los parámetros.

Figura (7.a) Distribución normal vs. Serie histórica (‘qqplot’).

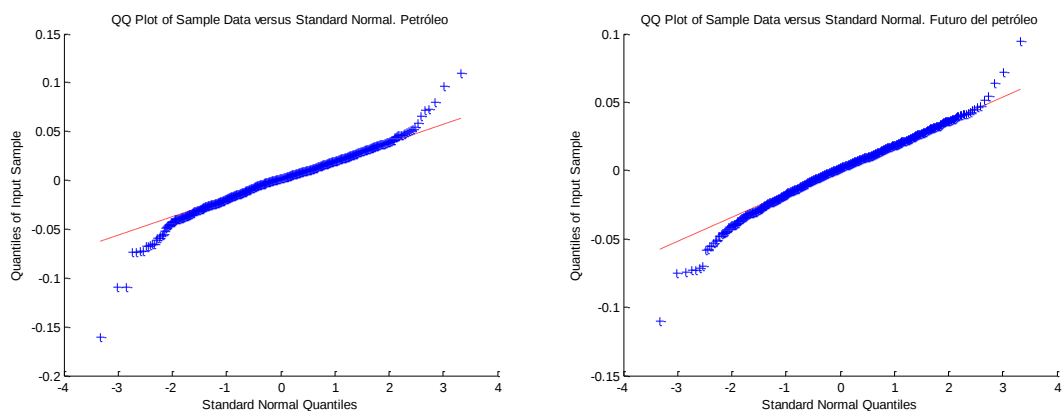
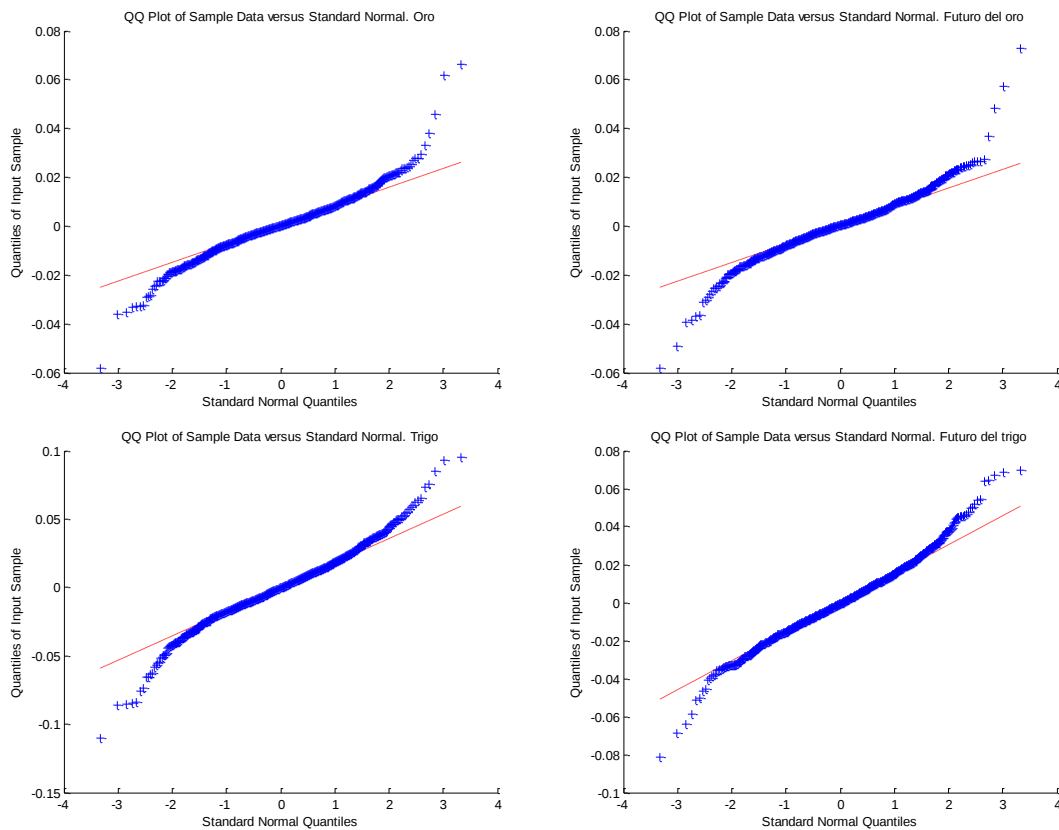


Figura (7.b) Distribución normal vs. Serie histórica ('qqplot').



Apéndice II. Matrices de transición conjuntas estimadas para el proceso de Markov-Regime-Switching de 4 estados, 2 para la volatilidad y 2 para las medias.

Las matrices de transición para MRS4 ya han sido estudiadas anteriormente en el trabajo. El caso es que, para un análisis eficaz, se propone en este apéndice ver cuáles han sido los valores de la matriz de transición estimada en ese modelo.

$$\text{Matriz de Transición para el Petróleo} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.8995 & 0.1176 & 0.4678 & 0.0611 \\ 0.0661 & 0.8480 & 0.0344 & 0.4410 \\ 0.0321 & 0.0042 & 0.4638 & 0.0606 \\ 0.0024 & 0.0302 & 0.0341 & 0.4372 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz de Transición para el Oro} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.4531 & 0.0436 & 0.0648 & 0.0062 \\ 0.1176 & 0.4394 & 0.0043 & 0.0629 \\ 0.4851 & 0.0466 & 0.8734 & 0.0840 \\ 0.0319 & 0.4704 & 0.0575 & 0.8469 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz de Transición para el Trigo} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.5139 & 0.1300 & 0.1962 & 0.0496 \\ 0.0254 & 0.4093 & 0.0097 & 0.1563 \\ 0.4391 & 0.1111 & 0.7567 & 0.1914 \\ 0.0217 & 0.3497 & 0.0374 & 0.6027 \end{bmatrix}$$

Para un análisis completo vamos paso por paso: Para el petróleo existe una probabilidad de 89,95% de mantenerse en el estado de 'volatilidad y media baja' ($1/(1-0.8995)=10$ semanas), un 84,8% de mantenerse en un estado de 'volatilidad alta y media baja' ($1/(1-0.848)=7$ semanas), un 46.38% de mantenerse en el estado de 'media alta y volatilidad baja' ($1/(1-0.4638)=2$ semanas) y un 43,72% de mantenerse en un estado de 'volatilidad

y media alta' ($1/(1-0.4372)=2$ semanas). Para el oro existe una probabilidad de 45,31% de mantenerse en el estado de 'volatilidad y media baja' ($1/(1-0.4531)= 2$ semanas), un 43,94% de mantenerse en un estado de 'volatilidad alta y media baja' ($1/(1-0.4394)= 2$ semanas), un 87.34% de mantenerse en el estado de 'media alta y volatilidad baja' ($1/(1-0.8734)=8$ semanas) y un 84.79% de mantenerse en un estado de 'volatilidad y media alta' ($1/(1-0.8479)=7$ semanas). Para el trigo existe una probabilidad de 51.39% de mantenerse en el estado de 'volatilidad y media baja' ($1/(1-0.5139)=2$ semanas), un 40.93% de mantenerse en un estado de 'volatilidad alta y media baja' ($1/(1-0.4093)=2$ semanas), un 75.67% de mantenerse en el estado de 'media alta y volatilidad baja' ($1/(1-0.7567)=4$ semanas) y un 60.27% de mantenerse en un estado de 'volatilidad y media alta' ($1/(1-0.6027)=2$ semanas).

Estos datos son también una forma de ver qué estado es el más predominante a lo largo de la muestra, es un estudio análogo al que se hizo en el apartado 'resultados y comentarios' con las gráficas de probabilidad de estancia en cada estado para SRM4. Como ya se ha anunciado anteriormente, se encuentra la estabilidad para los estados 'media alta y volatilidad baja' así como 'volatilidad y media baja'

Apéndice III. Estudio de cobertura de mínima varianza variable en el tiempo mediante el uso de ventanas móviles.

No se ha incorporado en los modelos que anteriormente se han estado estimando, aun así ha sido de gran utilidad el estudio de las series temporales con ventanas móviles, me ha ayudado en cuanto a la interpretación de los modelos que aparecen en este trabajo. Sobre todo para ver si lo que se ha estimado corresponde con algo factible o por el contrario es lejano de la realidad.

El tamaño de la ventana móvil ha consistido en 60 observaciones, esta ventana móvil consiste en calcular la volatilidad y covarianza de las variables (subyacente y futuro) a lo largo de la muestra usando todas las observaciones menos las 60 primeras. Las cuales son necesarias para empezar la estimación de la volatilidad en el primer instante.

$$\sigma_{t,S,VM} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=N+1}^{2N+1} (r_{i,S} - \bar{r}_S)^2}$$

$$\sigma_{t,F,VM} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=N+1}^{2N+1} (r_{i,F} - \bar{r}_F)^2}$$

$$\sigma_{SF,t,VM} = \frac{1}{N} \sum_{i=N+1}^{2N+1} (r_{i,S} - \bar{r})(r_{i,F} - \bar{r})$$

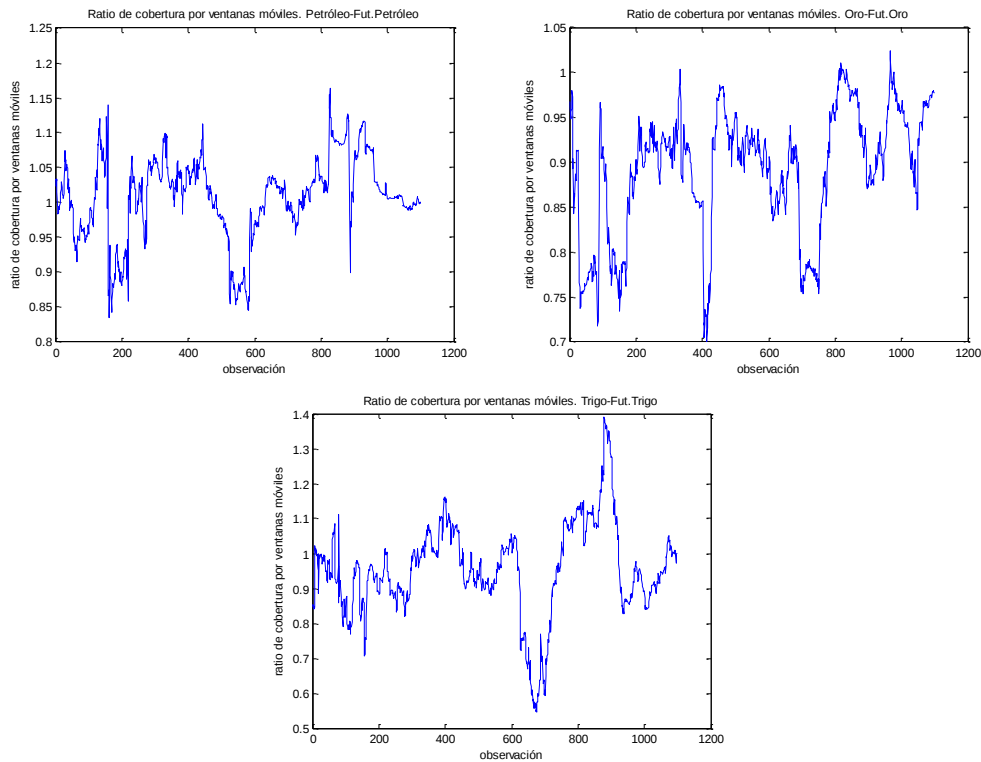
Siendo N el número de observaciones que se encuentran dentro de la ventana, $\bar{r}$ es la media de la variable en esa ventana y r_i el conjunto de rentabilidades ordenadas según

el momento que ocurrió y que se encuentran en la submuestra de la ventana. En el caso de covarianza es el mismo procedimiento pero ahora con dos activos. Y denotando por $\sigma_{t,F,VM}$ la desviación típica en ventanas móviles para el futuro y $\sigma_{t,SF,VM}$ la covarianza en ventanas móviles para el subyacente y el futuro. Los ratios de cobertura dependen de las volatilidades y covarianzas que a su vez se han sacado de submuestras. Luego, se define el ratio de cobertura cambiante en el tiempo de mínima varianza como:

$$\gamma_t = \frac{\sigma_{SF,t,VM}}{\sigma_{t,F,VM}}$$

Los gráficos obtenidos mediante este método son:

Figura (8) Ratios de cobertura mediante ventanas móviles.



Apéndice IV. Algoritmo de Kim para suavizado de probabilidades condicionales en Switching-Regime-Markov.

En este trabajo se ha realizado el ‘suavizado de probabilidades condicionales de Kim’ en todos los modelos donde se ha visto implicado el proceso Switching-Regime-Markov que han sido en MRS2, MRS4 (para probabilidades condicionales y ratio de cobertura) y VBEKK-MRS2 (para probabilidades condicionales). Este suavizado consiste en poder eliminar en la medida de lo posible los saltos espontáneos que puedan aparecer en las probabilidades condicionales al estado 1 y 2 con modelos MRS2 y VBEKK-MRS2, así como al estado 1, 2, 3 y 4 en caso de que hagamos MRS4. Este algoritmo está basado en Kim (1993). Las $\hat{\xi}_{t,T}$ son luego suavizadas y se realiza después de obtener los datos y parámetros a estimar:

$$\hat{\xi}_{t,T} = \hat{\xi}_{t,t} \odot \left[\mathcal{P}[\hat{\xi}_{t+1,T} \doteq \hat{\xi}_{t+1,t}] \right].$$

Las probabilidades suavizadas se obtienen iterando en la expresión anterior hacia atrás para $t=T-1, T-2, \dots, 1$. Estas iteraciones se inician con $\hat{\xi}_{t,T}$ obtenido de $\hat{\xi}_{t,t}$ para $t=T$. Este algoritmo es válido sólo cuando S_t , y cuando Z_t , el vector de variables explicativas, es estrictamente exógeno, significando que Z_t es independiente de S_τ para todo t, τ . De esta manera nos queda $\hat{\xi}_{t,T}$ una matriz $n \times k$, donde n es el número de observaciones de la muestra para la variable a estimar y k es el número de estados.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Alizadeh, Amir H., Nomikos, Nikos K. and Pouliasis, Panos K. (2008) 'A Markov Regime Switching Approach for Hedging Energy Commodities' Journal of Banking & Finance, 2008, vol. 32, issue 9, pages 1970-1983.
- [2] Engle, Robert F. and Kroner, Kenneth F. (1995) 'Multivariate Simultaneous generalized GARCH' Econometric Theory. Vol. 11, No. 1, pages 122-150.
- [3] Guidolin, Massimo (2012) 'Markov Switching Models in Empirical Finance' Working Paper n. 415, pages 7-11.
- [4] Hamilton, J.D. (1994) 'Capítulo 22 del libro "Time series analysis"' ed. Princeton University Press.
- [5] Hull, J.C. (6ta edición) 'Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones' ed. Pearson. Prentice Hall.
- [6] Kim, C.J., (1993). Unobserved-component time series models with Markov-switching heteroscedasticity: changes in regime and the link between inflation rates and inflation uncertainty. J. Business Econom. Statist. 113, pages 341-349.
- [7] Kuan, Chung-Ming (2002) 'Lecture on the Markov Switching Model' Working paper.
- [8] Lee, Hsiang-Tai and Yoder, Jonathan K. (2007) 'A bivariate Markov Regime switching GARCH approach to estimate time varying minimum variance hedge ratios' Applied Economics. Volume 39, Issue 10, 2007 .
- [9] Lee, Hsiang-Tai (2010) 'Regime switching correlation hedging' Journal of Banking & Finance, 2010, vol. 34, issue 11, pages 2728-2741.
- [10] Myung, J (2002) 'Tutorial on maximum likelihood estimation' Journal of Mathematical Psychology 47, pages 90-100.