

EFECTO DE LA ASIMETRÍA, CURTOSIS Y CÓPULAS EN LAS MEDIDAS DE EVALUACIÓN DE CARTERAS

Clàudia Gregori Mallorquín

Trabajo de investigación 004/014

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Ángel León

Dr. Lluís Navarro

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

www.finanzasquantitativas.com

Efecto de la asimetría, curtosis y cópulas en las medidas de evaluación de carteras

Clàudia Gregori Mallorquín

Trabajo de Investigación 000/014

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores:

Ángel León (Univ. Alicante)

Lluís Navarro (Univ. CEU Cardenal Herrera)

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

El presente trabajo estudia el efecto de la asimetría, curtosis y cópulas en las medidas de evaluación de carteras. En general, se cumple que la elección de la medida de performance influye en el ranking de la ordenación de carteras. Este resultado es contrario a estudios empíricos anteriores como Elling y Schuhmacher (2007), que concluyen que la medida de performance es irrelevante. En concreto, se analiza el efecto de la asimetría y curtosis en la evaluación de carteras. En resumen, estos momentos juegan un papel relevante en las medidas de evaluación de carteras. A continuación, se introduce el efecto de las cópulas (dependencia entre los activos) en las medidas de evaluación de carteras. En definitiva, los resultados refuerzan que la elección de la medida de performance influye en la evaluación de carteras donde el efecto de la asimetría, curtosis y cópulas será significativo.

Palabras clave: medidas de performance, corrección de rangos, ratio de Sharpe, ratio Farinelli-Tibiletti, asimetría, curtosis, cópula gaussiana, cópula archimedean,

Índice general

1. Introducción	6
2. Medidas de riesgo	7
2.1. Volatilidad.....	7
2.2. Lower partial moment (LPM).....	7
2.3. Valor en Riesgo (VaR).....	8
3. Medidas de performance	8
3.1. El ratio de Sharpe.....	8
3.2. Medidas performance basadas en los LPMs: El ratio Kappa.....	8
3.3. Medidas performance basadas en el ratio Farinelli-Tibiletti.....	9
3.4. Medidas performance basadas en el VaR.....	10
4. Base de datos y análisis estadístico	11
4.1. Bases de datos.....	11
4.2. Elaboración de las rentabilidades.....	11
4.3. Estadísticos descriptivos.....	11
4.4. Activo libre de riesgo.....	12
5. Cópula y distribución marginal	12
5.1. Aproximación Cornish-Fisher.....	13
5.2. Cópulas.....	14
5.2.1. Cópulas de la familia Elíptica.....	15
5.2.2. Cópulas de la familia Archimedean.....	16
6. Metodología para el análisis de los rankings entre diferentes medidas de performance	18
6.1. Correlación de rangos entre SR y otra medida.....	18
6.2. Efectos de la asimetría y curtosis en las medidas de performance.....	18

7. Análisis de simulación de medidas de performance para carteras de un activo.	19
7.1. Procedimiento de simulación.....	19
7.2. Comparación de rankings mediante correlación de Spearman.....	20
7.2.1. Ratio Farinelli-Tibiletti.....	20
7.2.2. Ratio Kappa y medidas basadas en el VaR.....	22
7.3. Análisis de regresión. Efecto de la asimetría y la curtosis	23
8. Análisis de simulación de las medidas performance para carteras con tres activos	24
8.1. Procedimiento de simulación.....	25
8.2. Efecto de la cópula.....	26
8.2.1. Comparación de rankings mediante la correlación de Spearman.....	26
8.2.2. Efecto de la asimetría y la curtosis en la correlación de Spearman	29
9. Conclusiones	31
10. Referencias	32

Anexo 1: Índice de figuras

Figura 5.1. Efecto de la asimetría en la distribución Cornish-Fisher.....	34
Figura 5.2. Efecto del exceso de curtosis en la distribución Cornish-Fisher.....	35
Figura 5.3. Cópula Gaussiana Multivariante para distintas correlaciones.....	36
Figura 5.4. Cópula de Gumbel Multivariante para distintos α 's.....	37
Figura 5.5. Cópula de Clayton Multivariante para distintos α 's.....	38
Figura 5.6. Cópula de Frank Multivariante para distintos α 's.....	39
Figura 7.1. Correlaciones de Spearman entre FTR y ratio de Sharpe.....	40
Figura 7.2. Boxplot de las correlaciones de Spearman para FTR en función de p	41
Figura 7.3. Boxplot de las correlaciones de Spearman para FTR en función de q	42
Figura 8.1. Efecto de la cópula Gaussiana y de Frank con distribución Normal.....	43
Figura 8.2. Efecto de la cópula Gumbel y de Clayton con distribución Normal.	44
Figura 8.3. Efecto de la asimetría en la correlación de Spearman, para las distintas cópulas.	45
Figura 8.4. Efecto del exceso de curtosis en la correlación de Spearman, para las distintas cópulas.....	46

Anexo 2: Índice de tablas

Tabla 4.1. Estadísticos descriptivos de los índices globales.....	47
Tabla 7.1. Correlaciones de Spearman ratio Kappa y medidas basadas en el VaR.....	48
Tabla 7.2. Resultados del análisis de regresión.....	49

1. Introducción

En general, este artículo está centrado en medidas de performance basadas en el “Lower Partial Moment” y “Upper Partial Moment”, también se incluyen algunas medidas basadas en el Valor en Riesgo. En la literatura, la medida de performance de referencia es el ratio de Sharpe, propuesta en el artículo de Sharpe (1966), de todos es bien sabido que se basa en la teoría media-varianza válida para cualquier rentabilidad con distribución Normal o cuadrática. Sin embargo, no suele ser muy asidua esta condición de “estabilidad” en los mercados financieros, sobre todo, en los mercados donde se negocian hedge funds (fondos especulativos de alto riesgo), seguros, etc. Por ello, creemos interesante la introducción de medidas de performance basadas en medidas de riesgo capaces de captar sucesos extremos.

Existe un gran debate sobre la aportación positiva o nula de dichas medidas de performance alternativas al ratio de Sharpe. Por parte de algunos autores como Eling y Schumacher (2007), se considera irrelevante la elección de la medida de performance. Sin embargo, autores como Farinelli et al. (2009), Zakamouline (2011), León y Moreno (2014), desmienten que la elección de la medida de performance sea irrelevante, además los dos últimos autores encuentran que la asimetría y la curtosis juegan un papel importante en la evaluación de la medida de performance.

En este artículo, se pretende corroborar que la elección de la medida de performance influye en el ranking de la ordenación de carteras, donde la asimetría y la curtosis juegan un papel relevante en la evaluación de la medida de performance. En la sección 7, se presenta un claro ejemplo, en el que se confirma la importancia de la elección de la medida de performance a través de la comparación de rankings de carteras mediante la correlación de rangos (Spearman) y de la asimetría y la curtosis en la evaluación de la medida de performance a través de un análisis de regresión.

En segundo lugar, en la sección 8 se introduce el efecto de las cópulas en las medidas de performance. En este ejemplo, la medida de performance alternativa al ratio de Sharpe utilizada es el ratio Farinelli-Tibiletti para distintas combinaciones de sus parámetros. En cuanto a las cópulas se examinan dos familias, Elípticas y Archimedean, presentadas en la sección 5. También, se analiza el efecto de la asimetría y la curtosis en $FTR(1,2)$, o ratio Upside potential, para las distintas cópulas. Finalmente, se demuestra que el efecto de la cópula junto a la elección de los parámetros del ratio Farinelli-Tibiletti influyen en el ranking de la ordenación de carteras. Además, se muestra la importancia del efecto de la asimetría y la curtosis en el $FTR(1,2)$ para distintas cópulas, ya que cuanto mayor es la asimetría o la curtosis menor es la correlación de rangos entre el ratio de Sharpe y el $FTR(1,2)$ para cualquiera de las cópulas.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la sección 2, se presentan definiciones y propiedades de las medidas de riesgo. En la sección 3, se construyen medidas de performance basadas en las medidas de riesgo presentadas en la sección anterior. En la sección 4, se presentan la base de datos y el análisis estadístico sobre el cual se apoya el análisis realizado en las secciones 7 y 8. En la sección 5, se estudian las cópulas y la distribución marginal. En la sección 6, se expone la metodología para el análisis de los rankings entre diferentes medidas de performance. En la sección 7, se realiza el análisis de simulación de las medidas de performance para carteras con un activo. En la sección 8, se realiza el análisis de simulación de las medidas de performance para carteras con tres activos. Por último en las secciones 9 y 10 se exponen, respectivamente, las conclusiones del trabajo y las referencias.

2. Medidas de riesgo

En esta sección, se procede a la introducción de las medidas de riesgo utilizadas para la construcción de las medidas de performance. Se percibe el riesgo de tres maneras distintas, mediante la volatilidad, el “lower partial moment” y el Valor en Riesgo.

2.1. Volatilidad

Esta medida de riesgo se utiliza para la construcción del ratio de Sharpe. Hace referencia a la desviación estándar de la cartera. Recuerde que la desviación estándar recoge tanto las desviaciones positivas como las negativas de la rentabilidad.

2.2. Lower partial moment (LPM)

La definición de “lower partial moment” de orden m para un nivel τ viene dada por

$$LPM_m(r, \tau) \equiv E_f[\max(\tau - r, 0)^m] = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - r)^m f(r) dr \quad (2.1)$$

donde r y $f(r)$ denotan, respectivamente, la rentabilidad de la cartera y su correspondiente función de densidad (pdf). Nótese que el LPM sólo recoge las desviaciones negativas de la rentabilidad por debajo del nivel τ . Esta medida de riesgo es más atractiva que la volatilidad, la cual recoge tanto las desviaciones positivas como las negativas. De igual manera, el “upper partial moment” de orden m para un mismo τ viene definido por

$$UPM_m(r, \tau) \equiv E_f[\max(r - \tau, 0)^m] = \int_{\tau}^{\infty} (r - \tau)^m f(r) dr \quad (2.2)$$

Nótese que el UPM sólo recoge las desviaciones positivas de la rentabilidad por encima del nivel τ . El nivel τ se interpreta como el mínimo aceptable de rentabilidad. En nuestro análisis, elegimos un τ igual a cero en la sección 7 para carteras con un único activo e igual a la rentabilidad del activo libre de riesgo en la sección 8 para carteras con tres activos. Más detalles sobre el activo libre de riesgo en el apartado 4.4.

A continuación, el LPM se utiliza para la construcción del ratio Kappa y, por consiguiente, para la construcción del ratio Farinelli-Tibiletti.

2.3. Valor en Riesgo (VaR)

El Valor en Riesgo (VaR) describe la posible pérdida de una inversión que no será superada con una probabilidad dada de $1 - \alpha$ en un periodo concreto. En nuestro análisis se trabaja con un nivel de confianza del 99% y del 95%.

3. Medidas de performance

En esta sección, se describen las medidas de performance utilizadas en este estudio. A lo largo de este trabajo denotamos r a la rentabilidad de la cartera y τ al nivel de rentabilidad mínima aceptable.

3.1. El ratio de Sharpe

Una generalización del ratio de Sharpe viene dado por

$$SR(r, \tau) = \frac{\mu_r - \tau}{\sigma_r}, \quad (3.1)$$

donde $\mu_r = E[r]$ es el valor esperado y σ_r es la desviación estándar de la cartera (r). El ratio de Sharpe estándar se define cuando tomamos τ como la rentabilidad del activo libre de riesgo.

3.2. Medidas performance basadas en los LPMs: El ratio Kappa

Los ratios *Kappa* utilizados son popularmente conocidos como el ratio *Omega-Sharpe* (ver Kaplan and Knowles, 2004) para $m = 1$, ratio de *Sortino* (ver Sortino and van der Meer, 1991) para $m = 2$ y ratio *Kappa 3* (ver Kaplan and Knowles, 2004) para $m = 3$. Los cuales vienen dados por

$$Kappa_m(r, \tau) = \frac{\mu_r - \tau}{\sqrt[m]{LPM_m(r, \tau)}} \quad (3.2)$$

3.3. Medidas performance basadas en el ratio Farinelli-Tibiletti

Dentro de la familia de las medidas de performance hechas a medida, se encuentra el ratio *Farinelli-Tibiletti*. El ratio *Farinelli-Tibiletti*, FTR, (ver, Farinelli and Tibiletti, 2003, 2008; Menn et al.,2005, pp. 208-209) viene definido por

$$FTR(r, p, q, \tau) = \frac{\sqrt[p]{E_f[(r - \tau)_+]^p}}{\sqrt[q]{E_f[(\tau - r)_+]^q}} \quad (3.3)$$

donde $(y)_+ \equiv \max(0, y)$, y $p, q > 0$.

Los parámetros p y q pueden equilibrarse coincidiendo con el perfil del inversor dirigido hacia la sobrevaloración o subestimación. Para valores altos de p y q , el inversor tiene una mayor preferencia por los sucesos extremos, ya sea en el caso de ganancias esperadas (parámetro p) o en el caso de pérdidas esperadas (parámetro q). Si la principal preocupación del inversor es si la cartera va a alcanzar su objetivo entonces el parámetro q tomará valores pequeños (i.e., $0 < q < 1$). Sin embargo, si las pequeñas desviaciones por debajo de la referencia, τ , son relativamente inofensivas comparadas con las grandes desviaciones (eventos catastróficos) entonces se recomienda que el parámetro q tome valores altos (i.e., $q > 1$). El orden adecuado para el parámetro p se elige de forma análoga y debe capturar la apreciación relativa de los resultados por encima del nivel de referencia, τ . Para nuestro análisis son necesarios ratios *Farinelli-Tibiletti* agresivos, por lo que a los parámetros p y q se les asignan valores altos, ya que nos centramos en sucesos extremos en las colas.

Es interesante añadir la relación que existe entre las medidas *Kappa* y el ratio *Farinelli-Tibiletti*. Para $p = 1$ y $q = m$, siendo $m > 0$, la relación entre las medidas *Kappa* y el *FTR* es la siguiente:¹

$$FTR(r, 1, m, \tau) = Kappa_m(r, \tau) \cdot [1 + Kappa_1(r, \tau)^{-1}] \quad (3.4)$$

Además, entre las posibles combinaciones de los parámetros del FTR se encuentran dos casos particulares de la ecuación anterior que son el ratio *Omega* y el ratio *Upside potential* y estos casos son:

¹ Más detalles, véase León y Moreno (2014).

Para $p = q = 1$, FTR es igual al ratio $Omega^2$

$$\begin{aligned} Omega_1(r, \tau) &= \frac{E_f[(r - \tau)_+]}{E_f[(\tau - r)_+]} = \frac{UPM_1(r, \tau)}{LPM_1(r, \tau)} = \frac{(\mu_r - \tau) + LPM_1(r, \tau)}{LPM_1(r, \tau)} \\ &= Kappa_1(r, \tau) + 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para $p = 1$ y $q = 2$, FTR coincide con el ratio *Upside potential*

$$\begin{aligned} Ratio \textit{Upside potential} &= \frac{UPM_1(r, \tau)}{\sqrt{LPM_2(r, \tau)}} = \frac{(\mu_r - \tau) + LPM_1(r, \tau)}{\sqrt{LPM_2(r, \tau)}} \\ &= Kappa_2(r, \tau) + \frac{(\mu_r - \tau)}{Kappa_1(r, \tau) \cdot \sqrt{LPM_2(r, \tau)}} \\ &= Kappa_2(r, \tau) \cdot [1 + Kappa_1(r, \tau)^{-1}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.4. Medidas performance basadas en el VaR

Alternativamente, elegimos medidas de performance basadas en el VaR. Consideramos dos medidas de performance de este grupo, *Reward-to-VaR* (RVaR) y *Reward-to-CVaR* (RCVaR).

La media *RVaR* o *exceso de rentabilidad en VaR*, viene definida para un determinado nivel de confianza como:

$$RVaR^\alpha(r, \tau) = \frac{\mu_r - \tau}{|VaR^\alpha|} \quad (3.7)$$

La medida *RCVaR*, también conocida como el *ratio de Sharpe condicional*, viene definida como:

$$RCVaR^\alpha(r, \tau) = \frac{\mu_r - \tau}{CVaR^\alpha} \quad (3.8)$$

donde la pérdida esperada o valor en riesgo condicional, CVaR, se define como:

$$CVaR^\alpha = (1/\alpha)LPM_1(r, VaR^\alpha) - VaR^\alpha \quad (3.9)$$

Recordar que los niveles de confianza elegidos con los que se trabaja en el artículo son del 95% y del 99%.

² Para establecer la relación entre el ratio Kappa y el ratio Farinelli-Tibiletti se verifica que para $m = 1$ se cumple: $UPM_1(r, \tau) = (\mu_r - \tau) + LPM_1(r, \tau)$

4. Base de datos y análisis estadístico

4.1. Bases de datos

En el trabajo se consideran varios índices globales de Europa, Estados Unidos, América Latina y Asia. Más específicamente: Dax (Alemania), Bel20 (Bruselas), FTSE100 (Reino Unido), Ibex35 (España), SP500 (USA), Nasdaq (USA), Merval (Buenos Aires), Bovespa (Sao Paolo), Nikkei225 (Japón). Cada serie temporal incluye los precios al cierre diarios durante un periodo, aproximadamente, de 12 años. Comenzando el 25/10/2001 hasta el 07/02/2014. La base de datos se utiliza como referencia para la simulación de las carteras a lo largo del trabajo.

4.2. Elaboración de las rentabilidades

A partir de los precios de cierre, se construyen las series correspondientes de rentabilidades diarias. Se trabaja con el logaritmo natural de las rentabilidades diarias. En definitiva, la rentabilidad diaria viene definida como

$$r_t = \log(P_t/P_{t-1}) \quad (4.1)$$

donde P_t es el precio al cierre diario del índice el día t .

4.3. Estadísticos descriptivos

A continuación, se presentan varios estadísticos sobre las rentabilidades diarias de los índices globales en el Tabla 4.1. De todos ellos, nos centraremos en el coeficiente de asimetría y el exceso de curtosis. Aunque, también se haya tomado como referencia para la simulación de las carteras la media y la desviación estándar.

[Insertar Tabla 4.1]

El coeficiente de asimetría describe el grado de asimetría que presenta una distribución. Una distribución perfectamente simétrica tendría un coeficiente igual a cero, por ejemplo, la distribución Normal tiene asimetría cero. En la columna 4 de la Tabla 4.1 observamos que los coeficientes de asimetría negativos (i.e., Nikkei, SP500, Merval, FTSE100 y Bovespa) son mayores en valor absoluto que los coeficientes de asimetría positivos (i.e., Bel20, Nasdaq, Dax, Ibex35). El Nikkei presenta el mayor coeficiente de asimetría negativo con un valor de -0.5 . En los otros índices se observa que el coeficiente de asimetría oscila entre -0.2 y 0.15 .

La curtosis describe el grado de concentración que presentan los valores en la región central de la distribución. La distribución normal tiene curtosis 3 independientemente de su media o desviación estándar. Se conoce como leptocúrtica, o de colas anchas, a una distribución con curtosis mayor que 3. Aquí, vamos a trabajar con el exceso de curtosis, es decir, sustrayendo 3 a la curtosis tomando como referencia la Normal con un exceso de curtosis de 0. Si nos fijamos en la columna 5 de la Tabla 4.1 todos los índices tienen distribuciones leptocúrticas. El SP500 tiene el mayor exceso de curtosis próximo a 9. En segundo y tercer lugar están, respectivamente, el Nikkei y el FTSE100 con un exceso de curtosis cercano a 7. El exceso de curtosis para el resto de índices se sitúa entre 4 y 6. Por tanto, el exceso de curtosis es una de las características importantes a tener en cuenta a la hora de simular las carteras.

Finalmente, se utilizan estos valores de asimetría y exceso de curtosis para las simulaciones de rentabilidades de activos, etc. en secciones posteriores del artículo. Y se examina con detenimiento el efecto en las medidas de performance.

4.4. Activo libre de riesgo

En este trabajo, el activo libre de riesgo considerado ha sido el tipo de interés a tres meses de la Reserva Federal de Estados Unidos (FED), al que hacemos referencia como el nivel de rentabilidad mínima aceptable, τ , en la sección 8. Donde el tipo de interés a 3 meses de la FED es del 0.549% anual. Se trabaja con datos diarios, por tanto, $\tau = 0.549\%/360$.

5. Cópula y distribución marginal

Como se cita anteriormente, en el trabajo se analizan varios casos según la composición de la cartera. En primer lugar, en la sección 7, para las carteras compuestas por un solo activo se utiliza la aproximación Cornish-Fisher como la distribución marginal para la rentabilidad del activo.

En segundo lugar, en la sección 8, para las carteras compuestas por tres activos se utilizan dos familias de cópulas, Elíptica y Archimedean, para captar la dependencia entre las tres rentabilidades distintas (variables aleatorias) donde la distribución marginal de cada rentabilidad es Normal. La flexibilidad de poder aplicar diferentes supuestos entre la dependencia (multivariante) de las variables y la distribución marginal de cada una de ellas se debe gracias al uso del Teorema de Sklar. Más detalles, véase Cherubini et al. (2004).

5.1. Aproximación Cornish-Fisher

La variable aleatoria definida por la aproximación Cornish-Fisher, CF_i , se define como:

$$CF_i = z_i + sk_i(z_i^2 - 1)/6 + ek_i(z_i^3 - 3z_i)/24 - sk_i^2(2z_i^3 - 5z_i)/36 \quad (5.1)$$

siendo z_i la variable aleatoria $N(0,1)$, sk_i el coeficiente de asimetría y ek_i el exceso de curtosis del activo i . Se verifica que la media y varianza de CF_i son, respectivamente, de cero y uno. Por tanto, la rentabilidad de cada activo i viene dada por

$$r_i = \mu_i + \sigma_i CF_i \quad i = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

donde μ_i es la media y σ_i es la desviación estándar del activo i . Nótese que cuando $sk_i = 0$ y $ek_i = 0$, entonces $r_i = \mu_i + \sigma_i z_i$.

En las siguientes figuras se observa el efecto de la asimetría y del exceso de curtosis en la distribución Cornish-Fisher. A la derecha de cada figura, se observan los diagramas de caja (boxplot) y a la izquierda las funciones de densidad obtenidas mediante la función kernel. Por un lado, la Figura 5.1 representa el efecto de la asimetría en la distribución Cornish-Fisher manteniendo el exceso de curtosis en cero. Por otro lado, la Figura 5.2 representa el efecto del exceso de curtosis en la distribución Cornish-Fisher manteniendo la asimetría igual a cero.

[Insertar Figura 5.1]

En la figura anterior observamos como la distribución Cornish-Fisher capta perfectamente el coeficiente de asimetría (sk) asignado en cada caso. Por un lado, en el gráfico de la derecha podemos observar como para un $sk = -0.8$ (línea azul) la masa de probabilidad se concentra en la parte izquierda, y para un $sk = 0.8$ (línea roja) la masa de probabilidad se concentra en la parte derecha. Con un $sk = 0$ (línea verde) la función de densidad es simétrica y representa el caso de la Normal estándar. En los diagramas de caja, a la izquierda de la figura, observamos como la mediana no está centrada para los coeficientes de asimetría distintos a cero, desplazándose hacia la derecha y por tanto, con una cola más ancha a la izquierda para $sk = -0.8$ y viceversa para $sk = 0.8$.

[Insertar Figura 5.2]

En la Figura 5.2, en los diagramas de caja podemos observar que la mediana está centrada en los tres casos ya que suponemos una asimetría igual a cero, sin embargo, a medida que aumenta el exceso de curtosis (ek) aumenta el número de datos atípicos y la

caja se estrecha, es decir, la función de densidad (kernel) presenta colas más anchas y tiene un mayor apuntamiento. La línea azul representa un $ek = 0$, por tanto, estamos ante la Normal estándar. Los otros casos corresponden a un ek de 5 y de 9, respectivamente, línea verde y roja. El primer caso muestra un mayor apuntamiento y colas anchas, sin embargo, en el segundo caso el apuntamiento es menor aunque la probabilidad de obtener un dato atípico sea mayor (i.e., mayor exceso de curtosis) lo que viene reflejado en las colas, las cuales son más anchas. Nótese cómo la masa de probabilidad alrededor de la media para $ek = 9$ está dentro del área, o masa de probabilidad, para el mismo intervalo (en el eje ox) en el caso de $ek = 5$, y por tanto, el área en las colas de $ek = 9$ es mayor que en $ek = 5$.³

En definitiva, estas dos figuras muestran como podemos recoger la asimetría y la curtosis de las rentabilidades de los activos mediante la aproximación Cornish-Fisher (CF). Finalmente, utilizaremos la aproximación CF como la distribución marginal para las rentabilidades de cada uno de los activos que componen la cartera objeto de estudio. Nótese que esta distribución es diferente para distintas rentabilidades (variables aleatorias) al cambiar los parámetros de asimetría y exceso de curtosis como podemos ver en la ecuación 5.1.

5.2. Cópulas

En este trabajo se consideran dos familias de cópulas (Elíptica y Archimedean) y se analiza la aportación de cada una de ellas al estudio de las medidas de performance y, por consiguiente, a la influencia en la elección de la medida. En la familia Archimedean empleamos los tres tipos de cópulas más usuales que son la cópula de Frank, Gumbel y Clayton. Véase Cherubini et al. (2004).

En primer lugar, recordemos que una cópula es una distribución multivariante cuyas distribuciones marginales son uniformes $U(0,1)$. Empecemos con una cópula bivalente que se define como:

$$C(u_1, u_2) = \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2), \quad (5.3)$$

donde U_1 y U_2 son las variables aleatorias $U(0,1)$ independientes con valores, respectivamente, u_1 y u_2 . Sean $F_1(x)$ y $F_2(y)$ las funciones de distribución (marginales) de las variables aleatorias X e Y , y $F(x, y)$ la función de distribución conjunta de X e Y . El Teorema de Sklar nos permite unir distribuciones marginales, caracterizadas por sus

³ Si consideramos el caso de $ek = 12$, se observa que el apuntamiento es mayor que para $ek = 5$, y por tanto, mayor que para $ek = 9$. En definitiva, no existe una relación positiva de a mayor ek entonces mayor apuntamiento, siendo $sk = 0$. Pero, sí que existe una relación positiva de mayor ek entonces menor masa de probabilidad alrededor de la media (y mayor masa de probabilidad en las colas).

correspondientes funciones de distribución, con un tipo de dependencia entre las variables mediante una función cópula determinada. Es decir,

$$\begin{aligned} C(F_1(x), F_2(y)) &= \Pr(U_1 \leq F_1(x), U_2 \leq F_2(y)) = \Pr(F_1^{-1}(U_1) \leq x, F_2^{-1}(U_2) \leq y) \\ &= \Pr(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y) \end{aligned} \quad (5.4)$$

En definitiva, la función de densidad bivalente de X e Y , representada como $f(x, y)$, puede escribirse como:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)C(F_1(x), F_2(y)), \quad (5.5)$$

siendo $f_1(x)$ y $f_2(y)$ las funciones de densidad univariante, respectivamente, de X e Y .

Podemos extender fácilmente el caso de cópula bivalente al caso multivariante más general. En definitiva, la función de densidad multivariante de orden n sería:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (5.6)$$

5.2.1. Cópulas de la familia Elíptica

Dentro de las cópulas de la familia Elíptica trabajamos con la cópula Gaussiana, la cual genera el tipo de dependencia que hay en una distribución Normal Multivariante (distribuciones elípticas). Esta herramienta se utiliza en la simulación de carteras con tres activos, en la sección 8. A continuación, en la Figura 5.3 se presentan cuatro gráficos de la cópula Gaussiana cada uno de ellos con distinta matriz de correlaciones, ρ .

[Insertar Figura 5.3]

Como se observa en la Figura 5.3, se han tomado los valores para ρ de 0.4, 0.7 y 0.9 para mostrar como a mayor correlación la cópula Gaussiana capta una mayor dependencia entre los tres activos. Nótese que las colas son simétricas. En los gráficos de la derecha se muestran, en la parte superior, la cópula Gaussiana con la matriz de correlaciones históricas⁴ y, en la parte inferior, la cópula Gaussiana para un valor de $\rho = 0.7$, utilizadas en el apartado 8.1. Cabe decir, que el uso de ambas cópulas en la sección 8.1 es debido a que los activos tienen correlaciones históricas muy pequeñas y no se aprecia con claridad la dependencia entre los tres activos, por tanto, incluimos la cópula Gaussiana con $\rho = 0.7$.

⁴ Más detalles en el apartado 8.1.

5.2.2. Cópulas de la familia Archimedean

Entre las cópulas de la familia Archimedean más comúnmente conocidas se encuentran la cópula de Gumbel, Clayton y Frank. En la vida real es de sobras conocido que los rendimientos financieros casi nunca están normalmente distribuidos, por tanto, esta familia de cópulas suele ser utilizada en situaciones extremas o para los casos de distribuciones no normales. Por ello, consideramos adecuado el uso de estos tipos de cópulas, las cuales ayudan a comprobar que la correlación de rangos entre el SR y una medida de performance alternativa no es alta en el entorno donde las distribuciones son no-Normales.

En el caso bivalente, las cópulas Archimedean se describen de formas más simple que las elípticas, resultando muy atractivas para la simulación y esto se hace más claro, fácil y útil para grandes dimensiones. Estas serán utilizadas a lo largo de la sección 8, para modelar la dependencia entre los tres activos de cada cartera, por tanto, nos encontramos en el caso multivariante. Para el caso multivariante, resultan tediosas las construcciones de la cópulas de Gumbel y Frank, por ello, para generar los rentabilidades de los tres activos (variables aleatoria) se utiliza la rutina en Matlab *mvcoprnd.m*.

Estas cópulas paramétricas tienen un parámetro α , el cuál es el responsable de reflejar el grado de dependencia. A lo largo de este artículo se presentan, para cada cópula Archimedean, distintos parámetros α .⁵

Cópula de Gumbel

La cópula de Gumbel es utilizada para explicar una dependencia positiva, esto significa que se le asignará más peso a sucesos en el lado derecho de la función de distribución. A continuación en la Figura 5.4, se observa como cuanto mayor es el parámetro α , mayor es la concentración en la cola derecha:

[Insertar Figura 5.4]

Tanto la cópula Gumbel como la de Clayton son asimétricas, es decir, captan las fluctuaciones bruscas o repentinas que se pueden dar en los mercados, tanto cuando el mercado es alcista o bajista.

⁵ El parámetro α se puede obtener a través de las medidas de concordancia, ya que estas recogen las relaciones no lineales, es el caso de la τ de Kendall. Nótese que en el caso bivalente, la relación entre la τ de Kendall y el parámetro α es relativamente sencillo, en cambio, en el caso multivariante la relación no es tan clara.

Cópula de Clayton

La cópula de Clayton, es útil para mostrar la dependencia negativa, debido a que una de sus propiedades es que tiene una mayor (menor) dependencia en su cola izquierda (derecha). La construcción de la cópula de Clayton viene dada por

$$u_1 = v_1 \quad (5.7)$$

$$u_2 = \left(u_1^{-\alpha} \left(v_2^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1 \right) + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (5.8)$$

$$u_3 = \left[\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1 \right) \left(v_3^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} - 1 \right) + 1 \right]^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (5.9)$$

donde (v_1, v_2, v_3) son tres variables aleatorias independientes $U(0,1)$ ⁶ y el parámetro α mide la dispersión, a mayor α menor dispersión, es decir, mayor dependencia. En este trabajo hemos manejado cuatro α distintas, $\{1, 5, 15, 30\}$. En la Figura 5.5 se muestran los gráficos para cada α de una de las simulaciones de la cópula de Clayton utilizadas en este trabajo. A continuación, se observa como cuanto mayor es el parámetro α , mayor es la concentración en la cola izquierda.

[Insertar Figura 5.5]

Cópula Frank

El uso de la cópula de Frank es atractivo ya que puede capturar el rango completo de dependencia, al igual que la cópula Gaussiana. La única preferencia por la cópula de Frank respecto a la Gaussiana es que proporciona cantidades cerradas. Tenga en cuenta que la cópula de Frank, implica independencia asintótica en las colas de la distribución, es simétrica, por tanto, no es recomendable para modelar dependencia de sucesos extremos. En la siguiente figura se presenta la cópula de Frank para distintos valores de α :

[Insertar Figura 5.6]

En resumen, trabajamos en secciones posteriores con las cópulas Gaussiana y Frank y las cópulas Gumbel y Clayton que son simétricas y asimétricas, respectivamente.

⁶ Nótese que en la sección 8 las carteras están compuestas por tres activos, por ello, se simulan tres variables aleatorias $U(0,1)$.

6. Metodología para el análisis de los rankings entre diferentes medidas de performance

A continuación, presentamos los dos métodos utilizados en las secciones 7 y 8 para el análisis de los rankings entre el SR y una medida de performance alternativa. Hacemos hincapié en la finalidad de nuestro trabajo, encontrar diferencias en el ranking dado por las medidas de performance alternativas y el ranking dado por SR, para un conjunto de carteras. En desacuerdo, con los resultados obtenidos por Elling y Schuhmacher (2007) quienes concluyeron que las medidas de performance alternativas ofrecían un ranking similar al asignado por el ratio de Sharpe, resultando irrelevante la elección de la medida de performance. Esta evidencia empírica tampoco se sostiene en Zakamouline (2011) y en León y Moreno (2014). En primer lugar, se calcula la correlación de rangos (Spearman) entre el SR y cualquiera de las medidas definidas anteriormente. En segundo lugar, analizaremos el efecto de la asimetría y la curtosis en las medidas de performance utilizando los modelos de regresión propuestos por Zakamouline (2011).

6.1. Correlación de rangos entre SR y otra medida

Será necesario el uso de alguna medida de asociación alternativa al coeficiente de correlación de Pearson. Ésta será la correlación de rangos, también conocida como la correlación de Spearman. Véase Cherubini et al. (2004).

La correlación de rangos se define como la relación lineal entre dos variables, utilizando valores medidos a nivel de una escala ordinal. Ésta es la herramienta en la que nos basamos para conocer si realmente existen correlaciones altas entre las medidas de performance alternativas y el ratio de Sharpe. De modo que el ranking dado por la medida de performance alternativa será similar al ranking dado por el ratio de Sharpe para una correlación muy alta y distinto ranking para correlaciones bajas.⁷

6.2. Efectos de la asimetría y curtosis en las medidas de performance

Los efectos de la asimetría y la curtosis en las medidas de performance van a ser analizados remitiendo a los modelos utilizados en el trabajo de Zakamouline (2011). El primer modelo al que nos referiremos a lo largo del trabajo como M1 es el siguiente:

$$\log(\pi_i) = \log(\alpha_\pi) + \beta_\pi \log(SR_i) + \varepsilon_\pi, \quad \alpha_\pi, \beta_\pi > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.1)$$

⁷ Nótese que se pueden encontrar correlaciones negativas significando para una correlación muy alta en valor absoluto que el ranking sería el opuesto al dado por el ratio de Sharpe.

donde π_i denota cualquier medida de performance alternativa presentadas en la sección 3, SR_i es equivalente al ratio de Sharpe y ε_π es el término de error para la medida π seleccionada. El M1 será estimado por mínimos cuadrados ordinarios (MCO), obteniendo el estadístico R^2 , llamado $R_{\pi, M1}^2$.

El segundo modelo, M2, es el siguiente

$$\log(\pi_i) = \log(\alpha_\pi) + \beta_\pi \log(RS_i) + \beta_\pi^{sk} sk_i + \beta_\pi^{ek} ek_i + \varepsilon_\pi, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.2)$$

donde ε_π es el término de error para la medida π seleccionada. Y, β_π^{sk} y β_π^{ek} indican, respectivamente, la sensibilidad (relativa) de la medida de performance π al coeficiente de asimetría y al exceso de curtosis de la distribución de la rentabilidad de la cartera. También será estimado por MCO, obteniendo el estadístico R^2 , llamado $R_{\pi, M2}^2$, además de las estimaciones para β_π^{sk} y β_π^{ek} para las cuales se realiza el test de significatividad individual.

En definitiva, se utilizarán los estadísticos R^2 de ambos modelos para calcular la ganancia en términos relativos de pasar del M1 al M2, es decir, cuanto mejora la calidad del modelo al añadir el coeficiente de asimetría y el exceso de curtosis como variables explicativas. La ganancia viene dada por

$$Ganancia_\pi = \frac{R_{\pi, M2}^2 - R_{\pi, M1}^2}{R_{\pi, M1}^2} \quad (6.3)$$

7. Análisis de simulación de medidas de performance para carteras de un activo.

Esta sección se divide en tres apartados, en el primero se explica la simulación de las rentabilidades de las carteras de un solo activo y, consecuentemente, la simulación de las medidas de performance. En el segundo apartado, comparamos los rankings obtenidos por las distintas medidas de performance mediante la correlación de rangos. Por último, hacemos el análisis de regresión presentado en el apartado 6.2, centrándonos en algunas de las medidas de performance.

7.1. Procedimiento de simulación

El procedimiento de construcción y simulación de las carteras se lleva a cabo de la siguiente manera. Se han generado N carteras compuestas por un único activo de tamaño T , la longitud de la serie temporal va a ser aproximadamente la misma que para los datos históricos. Tenga en cuenta que a lo largo de este trabajo consideramos $N = 1000$ y

$T = 3000$ como el número de carteras y el tamaño de la serie temporal, respectivamente. Otro punto es la simulación de la media, μ_i , la desviación estándar, σ_i , el coeficiente de asimetría, sk_i , y el exceso de curtosis, ek_i , para cada una de las carteras, $i = 1, \dots, N$, que se mantienen constantes en cada simulación de N carteras. Donde $\mu_i \in [0.000762, 0.0015]$, $\sigma_i \in [0.005, 0.01]$, $sk_i \in [-0.5, 0.5]$, $ek_i \in [0, 9]$. Los intervalos se han elegido en base a los máximos y mínimos observados en los estadísticos descriptivos de las rentabilidades de los índices globales. Véase Tabla 3.1.

El primer paso es construir la aproximación Cornish-Fisher para la distribución marginal del activo y, el segundo, la rentabilidad de la cartera que en este caso será la misma que la del activo. Véase, el apartado 5.1.

Una vez construidas las rentabilidades obtenemos para cada cartera las medidas de performance presentadas en la sección 3 junto con el coeficiente de asimetría y el exceso de curtosis necesarios para llevar a cabo los modelos de regresión lineal, $M1$ y $M2$, presentados en el apartado 6.2.

Las N carteras son simuladas un total de 500 veces, por tanto, los resultados presentados son las medias de las correlaciones de Spearman y las medias de los resultados de los modelos de regresión lineal de las 500 simulaciones.

7.2. Comparación de rankings mediante correlación de Spearman

En este apartado, se presenta la correlación entre las medidas alternativas y el ratio de Sharpe y se analizan estos resultados. En primer lugar, la comparación de rankings se hace para el ratio de Farinelli-Tibiletti (FTR) y en segundo lugar para el ratio Kappa y las medidas basadas en el VaR.

7.2.1. Ratio Farinelli-Tibiletti

Para el análisis del FTR incluimos diferentes combinaciones de los parámetros p y q . Por un lado, se representa el FTR en función del parámetro p variando entre 0.01 y 10 con $q = 1$. Por el otro lado, se representa el FTR en función del parámetro q variando entre 0.01 y 10 con $p = 1$.

La media de las correlaciones de Spearman entre el SR y FTR en función del parámetro p (con $q = 1$) se presenta en el gráfico superior de la Figura 7.1. De igual modo, la media de las correlaciones de Spearman entre el SR y FTR en función del parámetro q (con $p = 1$) se presenta en el gráfico inferior de la Figura 7.1. Nótese que el tamaño de la correlación de rangos (Spearman) para cada simulación es igual a N .

[Insertar Figura 7.1]

En la figura anterior observamos en el gráfico superior que para valores pequeños de p (i.e., $p < 1$) la correlación del FTR con el SR es inferior a 0.5, pero a medida que aumenta el parámetro p hacia 1, la correlación aumenta hasta alcanzar su máximo en $p = q = 1$, es decir, el ratio Omega es el que presenta una mayor correlación con el SR, 0.8. Sin embargo, una vez alcanzado el máximo, para $p > 1$ la correlación disminuye hasta alcanzar valores negativos aunque cercanos a cero. Se observa una gran disminución en el coeficiente de correlación al pasar del ratio Omega al FTR con p igual a 2 y 3, en cambio, a partir de $p \geq 4$ la disminución es muy leve.

En el gráfico inferior, para el FTR en función de q con $p = 1$, observamos un comportamiento similar, para valores de q cercanos a cero la correlación es inferior a 0.5 y aumenta a medida que q se acerca a 1, llegando a su máximo valor con el ratio Omega, $p = q = 1$. Para el ratio FTR con $q = 2$, o ratio Upside potential, la correlación disminuye hasta 0.66. A partir de $p \geq 3$ la disminución de la correlación se atenúa, siendo cercana a 0.45. Véase que en este caso la correlación del FTR con el SR es pequeña (y positiva) excepto para el ratio Omega.

A continuación, en la Figura 7.2 visualizamos la correlación de Spearman de cada FTR en función de p en diagramas de caja. De igual manera, la Figura 7.3 presenta la correlación de Spearman de cada FTR en función de q .

[Insertar Figura 7.2]

[Insertar Figura 7.3]

La mediana para cada uno de los FTR se sitúa próxima a la media representada en la Figura 7.1, por ello el diagrama de caja del ratio Omega se sitúa el más alto ya que tiene la mayor mediana. Si trazamos una línea imaginaria uniendo los diagramas, el resultado en la Figura 7.2 y 7.3 es muy similar al gráfico superior e inferior de la Figura 7.1, respectivamente. También se aprecia que en todos los casos hay muy poca dispersión, por tanto, los gráficos anteriores con la representación de las medias son idóneos.

En definitiva, los resultados de la correlación de rangos (Spearman) entre los FTR y el SR presentan evidencia de una correlación baja y, con el fin de desarrollar una regla de decisión, definimos como baja una correlación de rango inferior a 0.8. Ya que sólo conocemos el valor de la correlación de rangos de la muestra, \hat{R}_S , para definir un umbral preciso, consideramos la distribución asintótica de R_S . Por tanto, se considera la $H_0: R_S \leq 0.8$ frente a $H_1: R_S > 0.8$, a un nivel de significación del 1%. En detalle, si denotamos por ρ a la transformación Fisher de R_S , $\rho = 0.5 \ln\left(\frac{1+\hat{R}_S}{1-\hat{R}_S}\right)$ y por $\hat{\rho}$ la correspondiente cantidad muestral, asintóticamente tenemos:

$$\sqrt{N-2}\hat{\rho} \sim N(\rho, 1) \quad (7.1)$$

Esto nos permite definir el umbral requerido para R_S como

$$R_S^*(\alpha) = \frac{\left(\exp\left(\ln\left(\frac{1+R_S}{1-R_S}\right) + 2z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{N-2}}\right) \right) - 1}{\left(\exp\left(\ln\left(\frac{1+R_S}{1-R_S}\right) + 2z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{N-2}}\right) \right) + 1} \quad (7.2)$$

donde $z_{1-\alpha}$ es el cuantil $(1-\alpha)$ de la distribución normal estándar. En nuestro análisis, con $N = 1000$, y $\alpha = 1\%$, el umbral que define una baja correlación es **0.825**. Por tanto, existe evidencia de correlaciones de Spearman bajas ente los FTR y SR.

7.2.2. Ratio Kappa y medidas basadas en el VaR

El análisis de los ratios Kappa y de las medidas basadas en el VaR se realiza para toda la muestra, N , y para dos sub-muestras. Una sub-muestra incluye aquellas carteras con SR inferior al SR medio, es decir, inferior a la media del SR para toda la muestra y, la otra, las carteras con un SR superior al SR medio, denominadas H_1 y H_2 , respectivamente. De acuerdo con la evidencia empírica más bajo será el coeficiente de correlación de Spearman entre la medida alternativa y SR cuanto mayor sea SR. Una razón de ello es que cuanto mayor es el SR mayor ha de ser el ajuste por falta de normalidad de la distribución de la rentabilidad de la cartera hecho por cualquier medida de performance alternativa, ver Zakamouline (2011). En definitiva, tratamos de apuntar hacia este comportamiento empírico en nuestro análisis de simulación utilizando las dos sub-muestras, H_1 y H_2 .

En la Tabla 7.1 se muestran las medias de las correlaciones de rangos (Spearman) respecto al SR para toda la muestra y para las sub-muestras. Tenga en cuenta que el tamaño de la correlación de Spearman para cada simulación es igual a N para toda la muestra e igual a H_1 y H_2 para las sub-muestras.

[Insertar Tabla 7.1]

Es cierto, que cuando analizamos la correlación para toda la muestra tanto los tres ratios *Kappa* como el *RVaR* y *RCVaR* presentan correlaciones elevadas. Siendo Sortino el ratio de mayor correlación con el SR, **0.98** y el Omega-Sharpe el ratio con menor correlación, **0.8**. Recuerde que en nuestro análisis con $N = 1000$ y $\alpha = 1\%$, el umbral que define una baja correlación es **0.825**, por tanto, hay evidencias de correlaciones de rango altas, excepto para los FTR y el ratio Omega-Sharpe.

Sin embargo, al dividir la muestra en carteras con SR menor (H_1) o mayor (H_2) que la media de los ratios de Sharpe hallamos que las correlaciones se reducen en ambos casos resultando mayores para la muestra H_1 que para la muestra H_2 . Se sigue manteniendo que Sortino presenta la correlación más alta y Omega-Sharpe presenta la correlación más baja, en ambos casos. Nótese que con $N = 500$ y $\alpha = 1\%$, el umbral que define una baja correlación es 0.834, por tanto, hay evidencias de correlaciones bajas, excepto para el ratio Sortino.

Finalmente, los resultados confirman la evidencia empírica, es decir, cuanto mayor es el ratio de Sharpe más baja será la correlación con una medida de performance alternativa.

7.3. Análisis de regresión. Efecto de la asimetría y la curtosis

En este apartado, se presentan los resultados del análisis de regresión para algunas de las medidas anteriores, en concreto, los ratios Kappa, las medidas basadas en el VaR y el ratio Farinelli-Tibiletti para los parámetros $FTR(1,5)$ y $FTR(5,1)$. A continuación, se muestran los resultados en la siguiente tabla

[Insertar Tabla 7.2]

La tabla 7.2 presenta los resultados de las estimaciones del $M2$ por MCO. En primer lugar, las estimaciones beta (columnas 3 y 4) son estadísticamente significativas a un nivel de significación del 1% para todas las medidas de performance. Esto significa que la asimetría y la curtosis juegan un papel importante en las medidas de performance. Además, nos fijamos en los signos de las betas, donde la asimetría tiene un efecto positivo sobre las medidas Kappa y ambos FTR, en cambio, sobre las medidas basadas en el VaR el efecto es negativo. El signo del exceso de curtosis es negativo para las medidas Kappa excepto para el Omega-Sharpe que tiene un efecto positivo. Sobre las medidas basadas en el VaR el efecto del exceso de curtosis dependerá del nivel de confianza, es decir, para un nivel de confianza del 95% el efecto es positivo y para un 99% el efecto es negativo. Por último, el efecto del exceso de curtosis no será el mismo en ambos FTR, ya que para $FTR(1,5)$ el efecto es negativo mientras que para $FTR(5,1)$ el efecto será positivo. Cabe decir, que la variable explicativa $\log(SR)$ en el $M2$ es significativa a un nivel de significación del 1%, excepto en los FTR que no es significativa. Nótese que en la estimación del $M1$ donde sólo se considera como variable explicativa el $\log(SR)$ el estadístico R_{M1}^2 es muy cercano a cero para los FTR.

En segundo lugar, los resultados del test de Chow indican que en todos los casos es más óptimo realizar dos regresiones, ya que el p-valor del test de Chow es cero en todas las medidas de performance (columna 9), por tanto, hay evidencias de cambio estructural.

Entonces, es conveniente que la muestra quede dividida en SR altos y bajos debido a que cuanto más alto es el SR mayor es la sensibilidad de la asimetría y la curtosis (tamaño de las betas) para cualquier medida de performance a los momentos altos de la distribución.

En tercer lugar, la correlación de Spearman con respecto al SR (columna 5) es menor para la sub-muestra H_2 (valores altos del SR) como se confirmó en el apartado anterior, independientemente de la medida de performance excepto para *FTR* (1,5).

Por último, la ganancia (columna 8) es positiva tanto para la sub-muestra H_1 como para H_2 , es decir, el *M2* recoge mejor la proporción de la variación de la medida de performance explicada por las variaciones de las variables explicativas de forma lineal que el *M1*. Hay que destacar que la ganancia es mayor para la sub-muestra H_2 para cualquiera de las medidas de performance, excepto para ambos FTR. Aunque, en ambos FTR la ganancia en las dos sub-muestras es muy grande, por lo que nos conforma observar que la asimetría y el exceso de curtosis son relevantes para explicar estos ratios, recordar que $\log(SR)$ no es significativo en el *M2*.

En resumen, los resultados siguen la misma línea de Zakamouline (2011), es decir, cuanto mayor es el SR menor es la correlación de rangos entre SR y una medida de performance alternativa y a la vez mayor es el efecto de la asimetría y la curtosis en la medida alternativa. En efecto, el ratio de Sharpe no es suficiente cuando las distribuciones de las rentabilidades son no-Normales, por tanto, la elección de la medida de performance influye en el ranking de ordenación de carteras.

8. Análisis de simulación de las medidas performance para carteras con tres activos

Como bien comprobamos en la sección anterior la elección de la medida de performance influye en el ranking de carteras donde el efecto de la asimetría y del exceso de curtosis en dichas medidas es relevante. En esta sección, se analizan los efectos de las distintas cópulas presentadas en la sección 5 y únicamente nos centramos en el FTR con las distintas combinaciones de los parámetros analizados en el apartado 7.2.1. Por un lado, se estudian y se comparan los rankings dados por el FTR y el SR siguiendo la metodología desarrollada en el apartado 6.1. Por otro lado, se estudia el efecto de la asimetría y la curtosis en la correlación de rangos (Spearman) para cada cópula. El procedimiento de simulación se describe en el siguiente apartado.

8.1. Procedimiento de simulación

La construcción y simulación de las carteras se lleva a cabo generando N carteras compuestas por tres activos de tamaño T , recordando que la longitud de la serie temporal es aproximadamente la misma que para los datos históricos. Previamente, se simulan los pesos de las carteras, w , los cuales no admiten ventas en descubierto y se mantienen constantes en cada simulación. Para crear la dependencia entre los tres activos utilizaremos la cópula Gaussiana con matriz de correlaciones históricas y para ρ de 0.7, la cópula Gumbel para los α 's 4 y 6, la cópula de Clayton para los α 's 5 y 15 o la cópula de Frank para los α 's 6 y 8.

Hay que tener en cuenta que la matriz de correlaciones históricas entre los tres activos para la creación de la cópula Gaussiana viene dada por el coeficiente de correlación de Pearson entre Bel20, Dax y Nikkei. La matriz de correlaciones es la siguiente:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.0268 & 0.0184 \\ & 1 & -0.0123 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

donde, j indica la fila. $Bel20_{j=1}$, $Dax_{j=2}$, $Nikkei_{j=3}$ ⁸.

La media y la desviación estándar para los tres activos que componen las carteras son, respectivamente, 0.0015 y 0.015 para el activo 1, 0.000762 y 0.0075 para el activo 2, y 0.000381 y 0.005 para el activo 3. Cuando se analiza el comportamiento de la correlación con cada una de las cópulas suponemos que los activos que componen la cartera tienen un coeficiente de asimetría y un exceso de curtosis de cero, por tanto, la distribución marginal de la rentabilidad de cada activo es Normal. De esta manera, se observa el efecto puro de las cópulas en la correlación de Spearman.

Por otro lado, cuando se analiza el efecto de la asimetría se varía el coeficiente de asimetría del activo 2 entre -0.5 y 0.5 manteniéndose constantes e iguales a cero los coeficientes de asimetría de los activos 1 y 3 y el exceso de curtosis de los tres activos. De forma análoga, se analiza el comportamiento de la correlación cuando el exceso de curtosis del activo 2 varía entre 0 y 9, manteniéndose constantes e iguales a cero el exceso de curtosis de los activos 1 y 3 y la asimetría de los tres activos. Por tanto, en el apartado 8.2.2, se aproxima por Cornish-Fisher la distribución marginal de la rentabilidad del activo 2 mientras que los activos 1 y 3 siguen teniendo distribuciones marginales Normales.

⁸ Estos índices se eligen como ejemplo, así bien puede elegirse cualquier otra combinación.

En definitiva, la rentabilidad de cada activo, r_1, r_2 y r_3 , vienen dadas por:

$$r_i = \mu_i + \sigma_i zCF_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.2)$$

Nótese que para los casos donde la asimetría y el exceso de curtosis del activo son iguales a cero, zCF_i será igual a la distribución Normal, z_i . Para más detalle véase la sección 5, apartado 5.1.

Tras construir las rentabilidades de los activos el siguiente paso consiste en construir la rentabilidad de la cartera, R_c , dada por:

$$R_{c,j} = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 \quad j = 1, \dots, N \quad (8.3)$$

Por último, se obtienen para cada cartera los FTR y el SR. En el apartado 8.2.1, las N carteras se van a simular 500 veces. Entonces, los resultados presentados son las medias de las correlaciones de Spearman de las 500 simulaciones. En cambio, en el apartado 8.2.2, las N carteras se van a simular 100 veces para los distintos coeficientes de asimetría y exceso de curtosis, donde además de las medias también se muestran los cuartiles de las correlaciones de Spearman de las 100 simulaciones.

8.2. Efecto de la cópula

En primer lugar, se compara el efecto de las cópulas simétricas y asimétricas en el comportamiento de la correlación de Spearman. En segundo lugar, se observa el efecto de la asimetría y el exceso de curtosis en la correlación de Spearman en cada cópula.

8.2.1. Comparación de rankings mediante la correlación de Spearman

En este apartado, se muestran los resultados de las distintas cópulas donde las carteras están compuestas por tres activos con coeficiente de asimetría y exceso de curtosis igual a cero, es decir, con distribuciones marginales Normales. Recordamos que el FTR se calcula para las mismas combinaciones de parámetros analizadas en el apartado 7.2.1. A diferencia de que el mínimo de rentabilidad considerado (τ) ahora es el activo libre de riesgo.

En las Figuras 8.1 y 8.2, mostramos los gráficos de las correlaciones de Spearman respecto al ratio de Sharpe cuando el FTR depende del parámetro p gráfico de arriba y en función del parámetro q gráfico de abajo. Donde previamente, la dependencia entre los tres activos se crea a partir de la cópula Gaussiana, la cópula Gumbel, Clayton y Frank.

[Insertar Figura 8.1]

[Insertar Figura 8.2]

En primer lugar, en la Figura 8.1, junto al efecto de la cópula Gaussiana para la matriz de correlaciones históricas y para un valor de ρ de 0.7 se presenta también el efecto de la cópula de Frank para valores de α iguales a 6 y 8, ya que como se menciona anteriormente ambas tienen la capacidad de capturar el rango completo de dependencia, sin embargo, implican independencia en las colas de la distribución.

Por un lado, el efecto que se aprecia en la cópula de Frank (con α igual a 6 y 8, respectivamente, línea roja y línea azul) y en la cópula Gaussiana (con un valor de ρ de 0.7, línea verde) es similar a los resultados observados en la sección anterior para carteras de un activo siendo de nuevo el ratio Omega el pico más alto con una correlación cercana a 1. Vale destacar la disminución de la correlación a medida que el parámetro es mayor que 1 o cercano a cero. Nótese que esto se observa en los dos gráficos del FTR, en función del parámetro p y en función del parámetro q , respectivamente, gráfico superior e inferior.

Por otro lado, el efecto de la cópula Gaussiana, en ambos casos (línea azul y verde), en el comportamiento de la correlación para el FTR en función de p (gráfico superior) sigue en la línea del efecto descrito anteriormente. Las curvas se desplazan hacia arriba cuanto menor es la matriz de correlación, es decir, cuando hay más dispersión. Al examinar los resultados dados por la cópula de Frank se observan correlaciones más bajas que para la cópula Gaussiana. Sin embargo, en este caso a mayor dispersión las curvas se desplazan hacia abajo, es decir, las correlaciones son menores para un $\alpha = 6$ (línea roja) que para un $\alpha = 8$ (línea celeste). En definitiva, conforme p se aproxima a 1 la correlación aumenta, pero una vez alcanzado el máximo en Omega, si continúa aumentando p la correlación disminuye hasta alcanzar valores cercanos a 0.6, 0.4, 0.2 y 0, respectivamente, línea azul, verde, celeste y roja. En el gráfico inferior, para el FTR en función de q , el efecto de la cópula Gaussiana con $\rho = 0.7$ y la cópula de Frank con α 's 8 y 6 es parecido al descrito en el gráfico superior. Omega es el ratio con mayor correlación respecto al SR. Cuando $q \in [0.01, 1]$ la correlación aumenta desde 0.4 hasta situarse próxima a 1, sin embargo, para valores de $q > 1$ observamos una disminución de las correlaciones hasta 0.35, 0 y 0.2, respectivamente, para la línea verde, celeste y roja. En resumen, la cópula Gaussiana continúa presentando mayores correlaciones que la cópula de Frank, pero ahora se observan en la cópula de Frank menores correlaciones para un $\alpha = 8$ (línea celeste) que para un $\alpha = 6$ (línea roja).

En segundo lugar, en la Figura 8.2, presentamos los gráficos para la cópula Gumbel con α 's 4 y 6 y la cópula de Clayton con α 's 5 y 15. Recordemos que a medida que aumentamos el parámetro α la dependencia positiva en la cópula Gumbel y negativa en la cópula de Clayton es mayor entre los tres activos. Véase Figura 5.3.

En primer lugar, llama la atención que la cópula de Clayton presente menores correlaciones que la cópula Gumbel en el gráfico superior al contrario de lo que observamos en el gráfico inferior. Esto se debe a que en el gráfico superior el ratio Farinelli-Tibiletti está en función de p , es decir, cambiamos el numerador mientras el denominador se mantiene constante para $q = 1$. Recordemos que el numerador del FTR se construye con el “Upper partial moment”, el cual sólo considera las desviaciones positivas de las rentabilidades desde τ (i.e., el activo libre de riesgo). Por tanto, examinando previamente la cópula de Gumbel que explica dependencia positiva entre los activos de la cartera nos encontramos con correlaciones más altas, ya que la cópula y el FTR en función de p van hacia el mismo sentido (positivo). Sin embargo, al considerar la cópula de Clayton que explica dependencia negativa entre los activos de la cartera resulta que el comportamiento de la correlación de Spearman tiende a la baja, es decir, las correlaciones son menores debido a que la cópula y el FTR en función de p van en sentidos opuestos.

En el gráfico inferior, el FTR está en función de q , es decir, variamos el denominador construido a partir del “Lower partial moment”, el cual sólo considera las desviaciones negativas de las rentabilidades desde τ . Por tanto, al considerar la cópula de Gumbel nos encontramos con correlaciones más bajas que al considerar la cópula de Clayton, ya que la cópula de Gumbel y el FTR en función de q van en sentidos opuestos, en cambio, la cópula de Clayton y el FTR en función de q van hacia el mismo sentido (negativo). Ha de tenerse en cuenta que la cópula de Clayton tiene un mayor empuje hacia la dependencia negativa que la cópula de Gumbel hacia la dependencia positiva, por ello, las correlaciones para la cópula de Clayton en el gráfico inferior son bastante altas, entorno al 0.8 y 0.97, respectivamente, para α 5 y 15.

Cabe decir, que en ambos gráficos y para ambas cópulas cuanto mayor es el grado de dependencia mayor es la correlación de Spearman entre los FTR y el SR.

En definitiva, centrándonos en la cópula de Clayton en el gráfico superior y en la cópula Gumbel en el gráfico inferior se observa un comportamiento de la correlación similar al ya descrito. Cuando el parámetro del que depende el FTR es cercano a 0 las correlaciones se sitúan en ambos casos cercanas al 0.65, a medida que nos aproximamos al ratio Omega la correlación aumenta hasta alcanzar un valor cercano a 1 para el ratio Omega. En cambio, cuando el parámetro toma valores mayores a 1 la correlación tiende a disminuir hasta situarse, en el gráfico superior, en valores cercanos a 0.6 y 0.4,

respectivamente, para Clayton con α 15 y 5. Y en el gráfico inferior, se sitúa en valores cercanos a 0.3 y 0.15, respectivamente, para Gumbel con α 6 y 4.

Se concluye, que la correlación de rangos entre el FTR y el SR va a depender de los parámetros (p,q) elegidos para FTR y de la elección de la cópula junto a su grado de dependencia. La idea general, es que el efecto de la cópula en el comportamiento de la correlación de rangos respecto al SR es relevante.

8.2.2. Efecto de la asimetría y la curtosis en la correlación de Spearman

El último apartado del trabajo ilustra el efecto del coeficiente de asimetría (sk) y del exceso de curtosis (ek) en el comportamiento del coeficiente de correlación de Spearman entre el ratio Upside potential y el SR. Dicho efecto se analiza tal y como se explica en el apartado 8.1 (procedimiento de simulación). Como ejemplo se elige el ratio Upside potential que corresponde al $FTR(1,2)$, alternativamente, se podría elegir cualquier valor de p y q para el FTR. A continuación, presentamos ambos gráficos donde a parte de la media de las 100 simulaciones también representamos los cuartiles.

[Insertar Figura 8.3]

[Insertar Figura 8.4]

En la Figura 8.3 se presentan cuatro gráficos cada uno de ellos se diferencia en el tipo de cópula utilizada para crear dependencia entre los activos de la cartera donde la distribución marginal de la rentabilidad de dos de los activos (i.e., activos 1 y 3) será Normal ya que suponemos un ek y exceso de curtosis igual a cero. Mientras que la distribución marginal de la rentabilidad del activo 2 se aproxima por Cornish- Fisher suponiendo en este caso un exceso de curtosis igual a cero y un coeficiente de asimetría variable entre -0.5 y 0.5 . De este modo, se muestra el efecto de la asimetría en el comportamiento de la correlación de Spearman. Se observa en los cuatro gráficos el mismo comportamiento, es decir, cuanto mayor es el coeficiente de asimetría ya sea positiva o negativa menor será la correlación de Spearman del ratio Upside potential respecto al SR. En cambio, con un sk cercano a 0 la correlación es mayor. Véase que la máxima correlación en todos los casos se obtiene cuando el $sk = 0$, es decir, cuando la distribución marginal de las rentabilidades de cada activo es Normal. En el primer gráfico referente a la cópula Gaussiana encontramos correlaciones bastante altas, ya que la mínima correlación media es aproximadamente de 0.85 para un $sk = 0.5$. En los otros tres gráficos para la cópula de Frank, Gumbel y Clayton, respectivamente, con α 8, 6 y 15 la

mínima correlación media está próxima a 0.5 y la encontramos en los extremos, es decir, cuando el sk es -0.5 y/o 0.5 .

En definitiva, es importante que en la distribución marginal de la rentabilidad para cada activo que compone la cartera se tenga en cuenta el coeficiente de asimetría del activo ya que cuanto mayor sea el coeficiente de asimetría menor será la correlación respecto al SR, es decir, la asimetría influye en la elección de la medida de performance.

Por último, en la Figura 8.4 se presentan cuatro gráficos diferenciados por el tipo de cópula utilizado para crear dependencia entre los activos de la cartera donde la distribución marginal de la rentabilidad de dos de los activos (i.e., activos 1 y 3) será Normal ya que suponemos un coeficiente de asimetría y exceso de curtosis igual a cero. Mientras que la distribución marginal de la rentabilidad del activo 2 se aproxima por Cornish- Fisher suponiendo en este caso una asimetría igual a cero y un exceso de curtosis variable entre 0 y 9. Generalmente, en los cuatro casos se puede observar que cuanto mayor es el ek más baja es la correlación respecto al SR. Sin embargo, se encuentran diferencias en el primer gráfico (cópula Gaussiana) respecto a los otros gráficos, ya que a medida que aumenta el ek la correlación disminuye progresivamente hasta que el $ek \geq 7$ donde la correlación media se estanca sobre 0.45. Nótese que partimos de un $ek = 0$ con el cual la correlación está cercana a 1. Para la cópula de Frank con $\alpha = 8$ partiendo de un $ek = 0$ la correlación se sitúa en 0.7 y conforme aumenta el ek la correlación media llega a su mínimo, aproximadamente 0.10, cuando $ek = 4$. A partir de aquí la correlación tiende a aumentar gradualmente pero aun así no sobrepasa una correlación mayor a 0.35. Para la cópula de Gumbel con $\alpha = 6$ y Clayton con $\alpha = 15$, ambos gráficos, presentan las mismas pautas. Partiendo de un $ek = 0$ la correlación se sitúa cercana a 1, conforme aumenta el ek la correlación media llega a su mínimo, aproximadamente 0.3, cuando el $3 < ek < 5$. A partir de aquí la correlación tiende a aumentar gradualmente, pero sin sobrepasar una correlación mayor a 0.6.

En consecuencia, es importante que en la distribución marginal de la rentabilidad para cada activo se tenga en cuenta tanto el coeficiente de asimetría como el exceso de curtosis del activo ya que cuanto mayor sea el coeficiente de asimetría o de curtosis menor será la correlación respecto al SR, es decir, ambos influyen en la elección de la medida de performance.

9. Conclusiones

El trabajo se elabora para medidas basadas en “lower partial moment” y en el VaR donde la primera es capaz de captar sólo las desviaciones negativas y la segunda es una media resumida del riesgo de mercado. Por un lado, se analiza el caso de las carteras con un activo, en las cuales la distribución marginal de la rentabilidad del activo se aproxima por Cornish-Fisher, donde previamente se asigna un valor al coeficiente de asimetría y al exceso de curtosis dentro de los máximos y mínimos observados en nuestra base de datos. De modo que, las distribuciones de las carteras son no Gaussianas. A continuación, se analizan los rankings de las medidas de performance alternativas y el ratio de Sharpe mediante la correlación de rangos (Spearman). Llegando a tres conclusiones importantes. En primer lugar, al analizar la correlación de rangos entre el FTR y el SR se concluye que para valores de $FTR(p, 1)$ y $FTR(1, q)$, respectivamente, $0.01 < p < 10$ y $0.01 < q < 10$ las correlaciones son bajas e incluso se llegan a alcanzar valores cercanos a cero en el primer caso, excepto para el ratio Omega donde hay indicios de una elevada correlación con el SR. En segundo lugar, se analiza la correlación de Spearman respecto al SR y se realiza el análisis de regresión de los ratios Kappa y las medidas basadas en el VaR. El análisis se hace para dos sub-muestras quedando la muestra total dividida en carteras con SR superior o inferior al ratio de Sharpe medio. En consecuencia, obtenemos que cuanto mayor es el SR más baja es la correlación con una medida de performance alternativa y mayor es la sensibilidad de la asimetría y la curtosis para cualquier medida de performance. Por tanto, el efecto de la asimetría y la curtosis es muy importante en las medidas de evaluación de carteras.

Por otro lado, para el caso de las carteras con tres activos se asumen distintas cópulas (Gaussiana, Frank, Gumbel y Clayton) de modo que la dependencia entre los activos se manifiesta de distintas maneras siendo la distribución marginal de cada rentabilidad Normal. En primer lugar, se analiza el efecto de cada cópula en el comportamiento de la correlación de Spearman entre el FTR y el SR. Recogiendo lo más importante, confirmamos que el efecto del tipo de cópula utilizado para crear dependencia entre los activos es relevante en las medidas de evaluación de carteras, especialmente, en el caso de las cópulas asimétricas. Se observan correlaciones más bajas en los casos donde la dependencia de la cópula Gumbel (positiva) o Clayton (negativa) está en sentido opuesto al cambio del FTR en función de LPM o UPM. Brevemente, se presenta otro claro ejemplo en el que la elección de la medida de performance influye en el ranking de ordenación de carteras, y es más dicha influencia será mayor o menor dependiendo del tipo de cópula utilizado junto con su grado de dependencia. En segundo lugar, se analiza el efecto de la asimetría y el exceso de curtosis en la correlación de Spearman entre el UPR ($FTR(1,2)$) y el SR para cada cópula, asumiendo la aproximación Cornish-Fisher para la distribución marginal de uno de los activos con unos determinados valores de

asimetría o de exceso de curtosis. En conjunto, para las cuatro cópulas, se logran unos resultados similares concluyendo que la asimetría y el exceso de curtosis tienen un impacto negativo en la correlación de Spearman entre SR y UPR, es decir, cuanto mayor es la asimetría o el exceso de curtosis menor será la correlación de rangos.

En conclusión, se confirma la evidencia empírica, la elección de la medida de performance influye en el ranking de la ordenación de carteras, cuando la distribución marginal de las rentabilidades no son Gaussianas. Además, se demuestra que a mayor ratio de Sharpe menor es la correlación de rangos (Spearman) entre SR y la medida de performance alternativa y mayor es la sensibilidad de la asimetría y la curtosis en la medida alternativa. Así mismo, se comprueba el efecto notable de la cópula, del coeficiente de asimetría y exceso de curtosis en las medidas de evaluación de carteras.

Recapitulando, el trabajo está centrado en el efecto de las cópulas, asimetría y curtosis en la evaluación de carteras, tratando de constatar si el ratio de Sharpe es suficiente o son necesarias medidas de evaluación de carteras alternativas. Al mismo tiempo, se dejan para futuras investigaciones, el análisis de la correlación de rangos entre las medidas de performance alternativas, la construcción de un índice de medidas que nos muestre el ranking de las carteras respecto a un conjunto de medidas de performance (véase Caporin y Lisi, 2009), y la elaboración del análisis dinámico para las medidas de performance, es decir, analizar series temporales de las medidas de performance.

10. Referencias

Agarwal, V., Naik, N.Y., 2004, Risk and portfolio decisions involving hedge funds: Risk, return and incentives, *Review of Financial Studies* 17 (1), 63-98.

León, Ángel; Moreno, Manuel y Walter Paiva (2014), Lower partial moments under Gram Charlier distribution: Performance measures and Efficient Frontiers. Working Paper.

Zakamouline, V., 2011, The performance measure you choose influences the evaluation of hedge funds, *Journal of Performance Measurement* 15, (3), 48-64.

Farinelli, S., Tibiletti, L., 2008, Sharpe thinking in asset ranking with one-sided measures, *European Journal of Operational Research* 185, 1542-1547.

Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W., 2004, *Copula Methods in Finance*, Wiley.

Eling, M., Schuhmacher, F., 2007, Does the choice of performance measure influence the evaluation of hedge funds?, *Journal of Banking & Finance* 31, 2632-2647.

Sharpe, W.F., 1994, The Sharpe ratio, *Journal of Portfolio Management* 21, 49-58.

Sortino, F.A., van der Meer, R., Platinga, A. 1999, The Dutch triangle, *Journal of Portfolio Management* 26 (Fall), 50-58.

Kaplan, P.D., Knowles, J.A., 2004, Kappa: A generalized downside risk adjusted performance measure, *Journal of Performance Measurement* 8 (3), 42-54.

Gibbons, J.D., 1992, *Nonparametric Statistical Inference*, Marcel Dekker, New York.

Dowd, K., 2000, Adjusting for risk: An improved Sharpe ratio, *International Review of Economics and Finance* 9(3), 209-222.

Keating, C., Shadwick, W.F., 2002, A Universal Performance Measure, *Journal of Performance Measurement* 6 (3), 59-84.

Caporin, M., Lisi, F., 2009, Comparing and selecting performance measures for ranking assets.

Heni Boubaker, Nadia Sghaier, 2013, Portfolio optimization in the presence of dependent financial returns with long memory: a copula based approach. *Journal of Banking and Finance*, 37, p. 361-377

Anexo 1: Índice de figuras

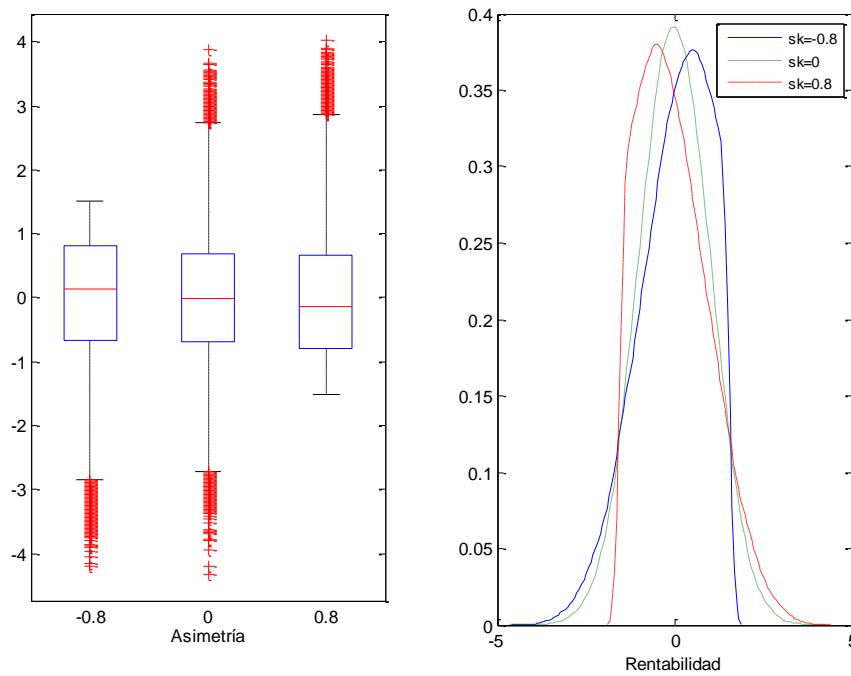


Figura 5.1. Efecto de la asimetría en la distribución Cornish-Fisher.

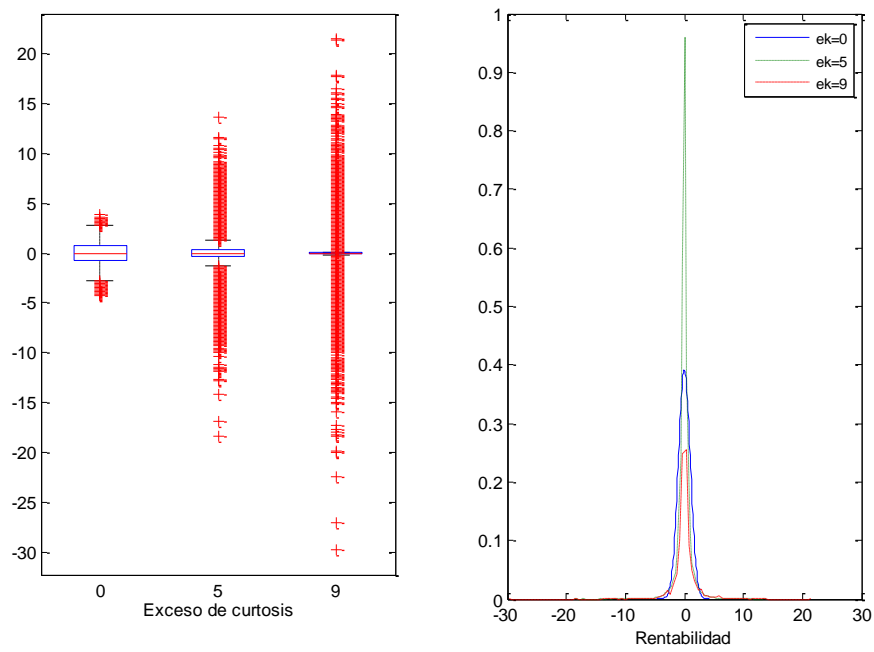
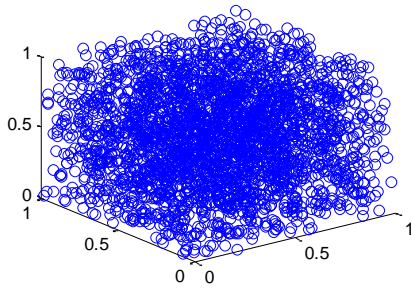
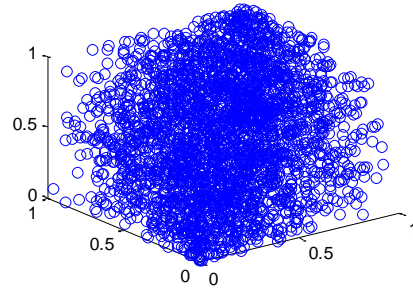


Figura 5.2. Efecto del exceso de curtosis en la distribución Cornish-Fisher.

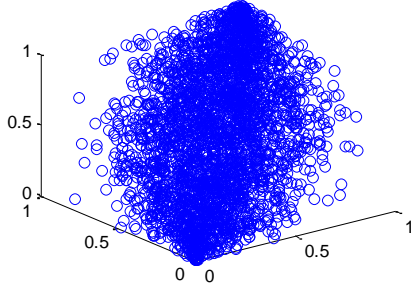
Cópula Gaussiana con ρ histórica (BEL20, Dax, Nikkei)



Cópula Gaussiana con $\rho = 0.4$



Cópula Gaussiana con $\rho = 0.7$



Cópula Gaussiana con $\rho = 0.9$

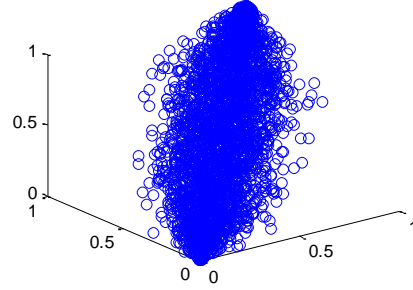


Figura 5.3. Cópula Gaussiana Multivariante para distintas correlaciones.

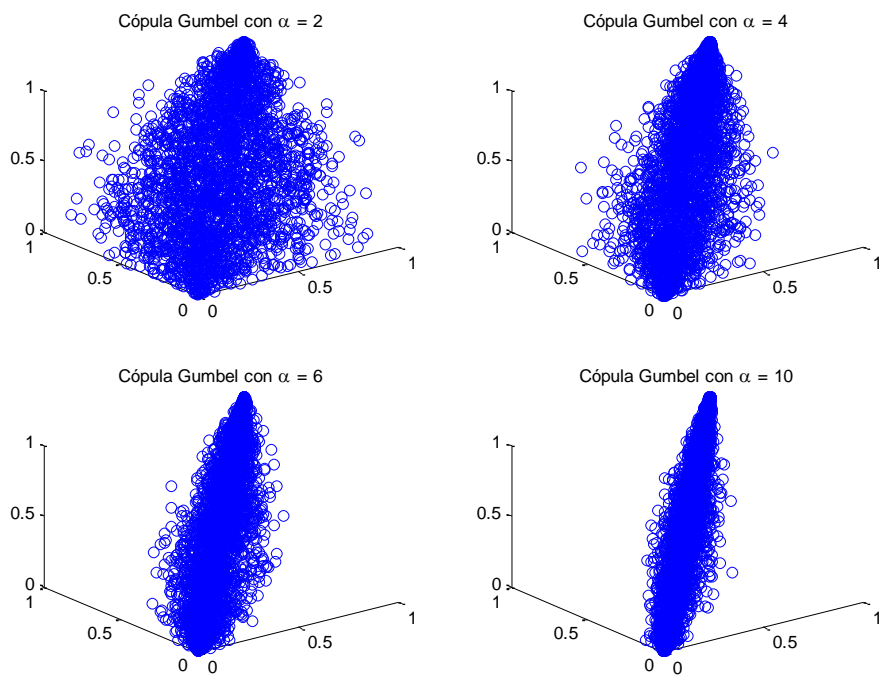


Figura 5.4. Cópula de Gumbel Multivariante para distintos α 's.

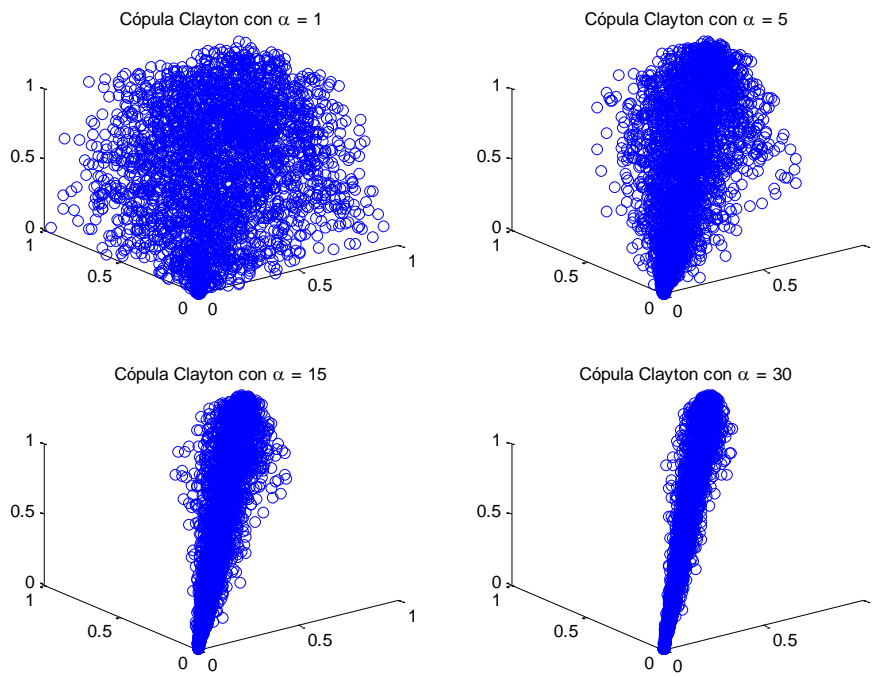


Figura 5.5. Cópula de Clayton Multivariante para distintos α 's.

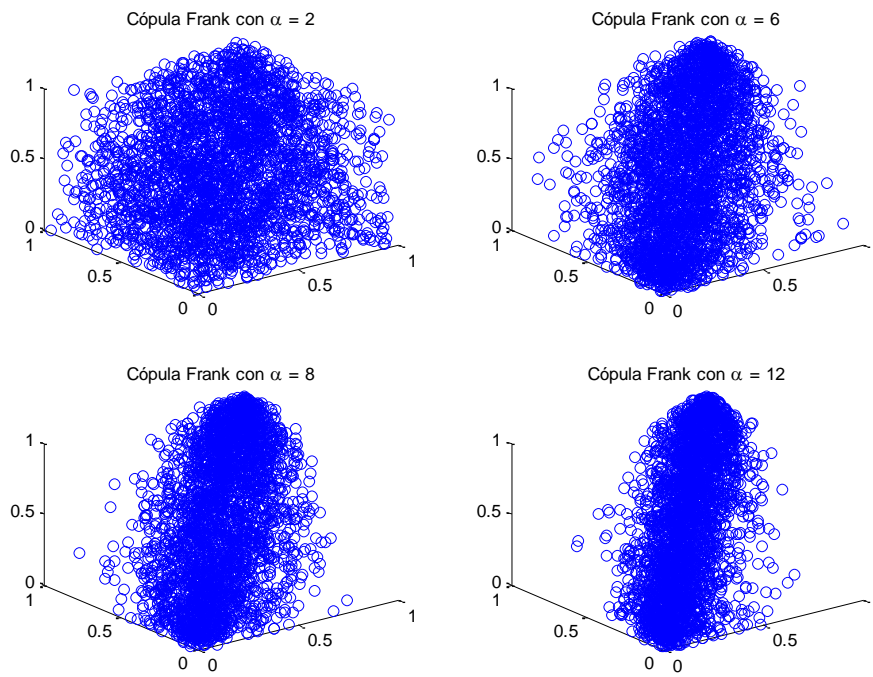


Figura 5.6. Cópula de Frank Multivariante para distintos α 's.

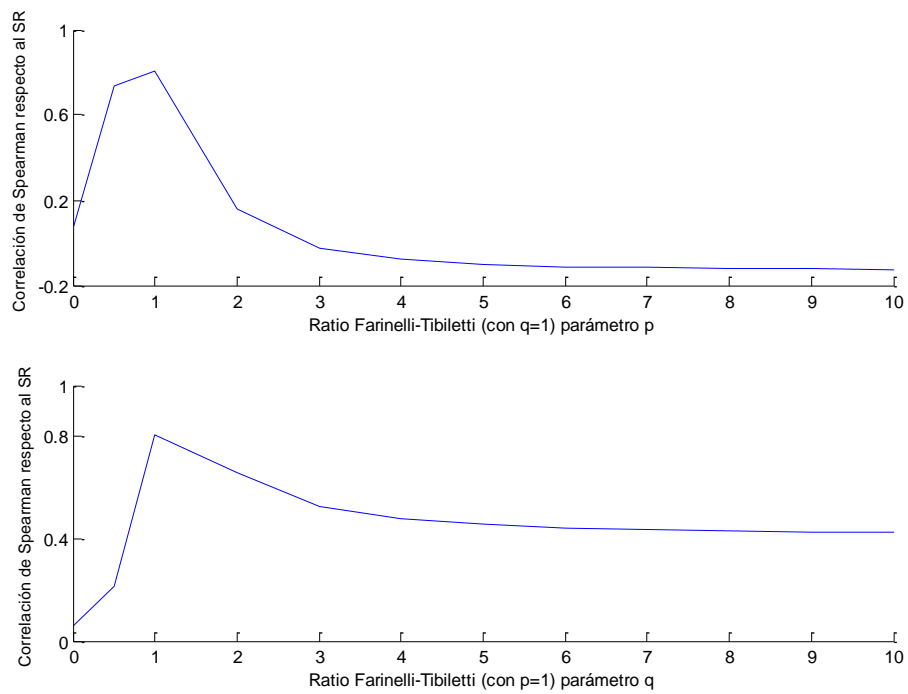


Figura 7.1. Correlaciones de Spearman entre FTR y ratio de Sharpe.

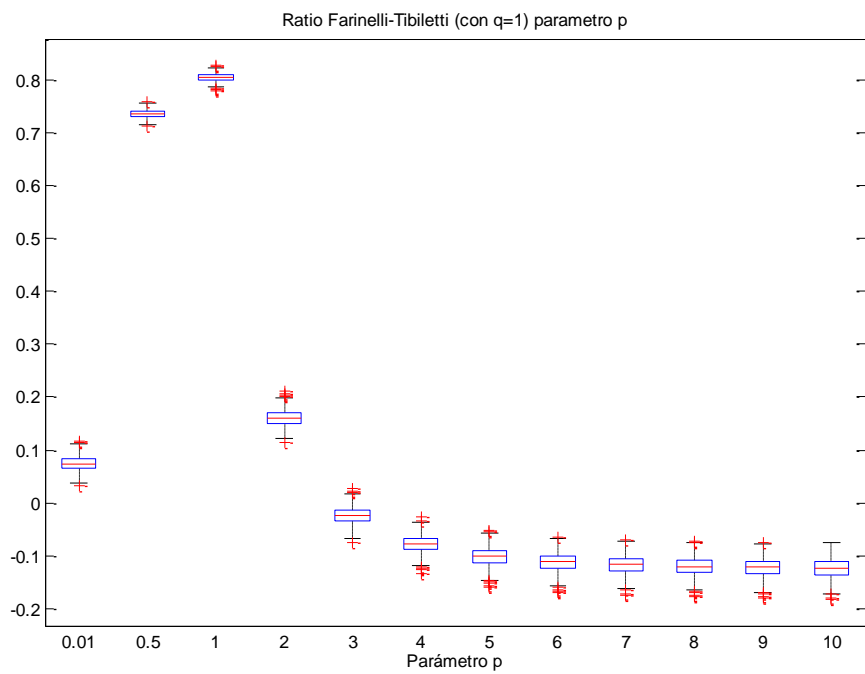


Figura 7.2. Boxplot de las correlaciones de Spearman para FTR en función de p .

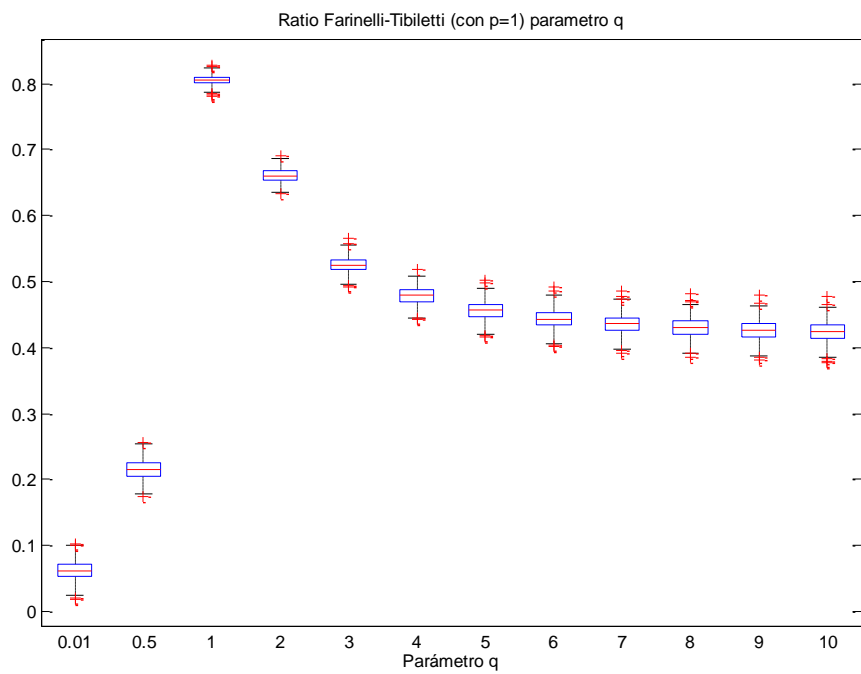


Figura 7.3. Boxplot de las correlaciones de Spearman para FTR en función de q .

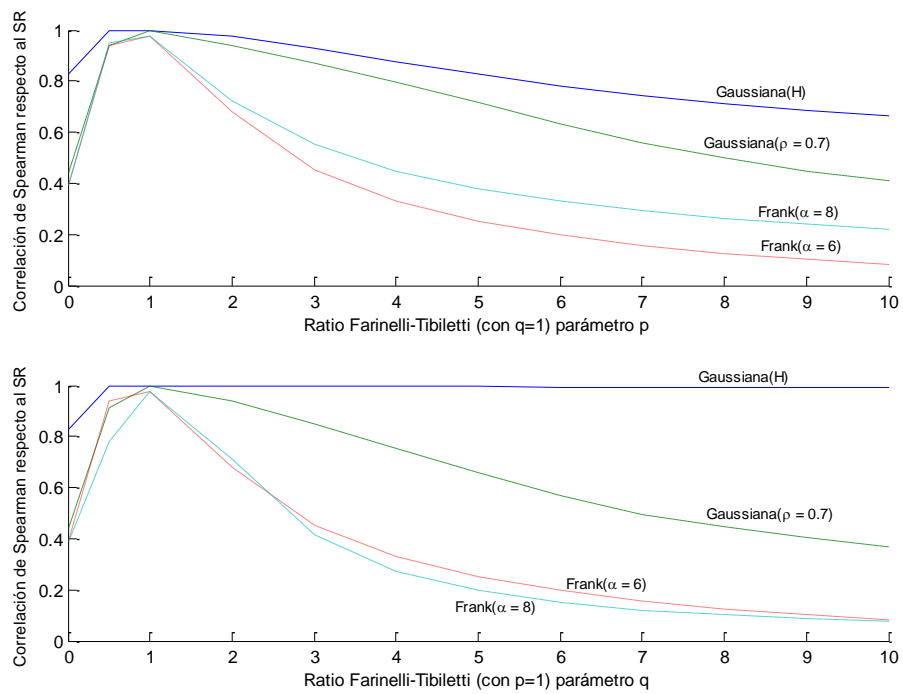


Figura 8.1. Efecto de la cópula Gaussiana y de Frank con distribución Normal.

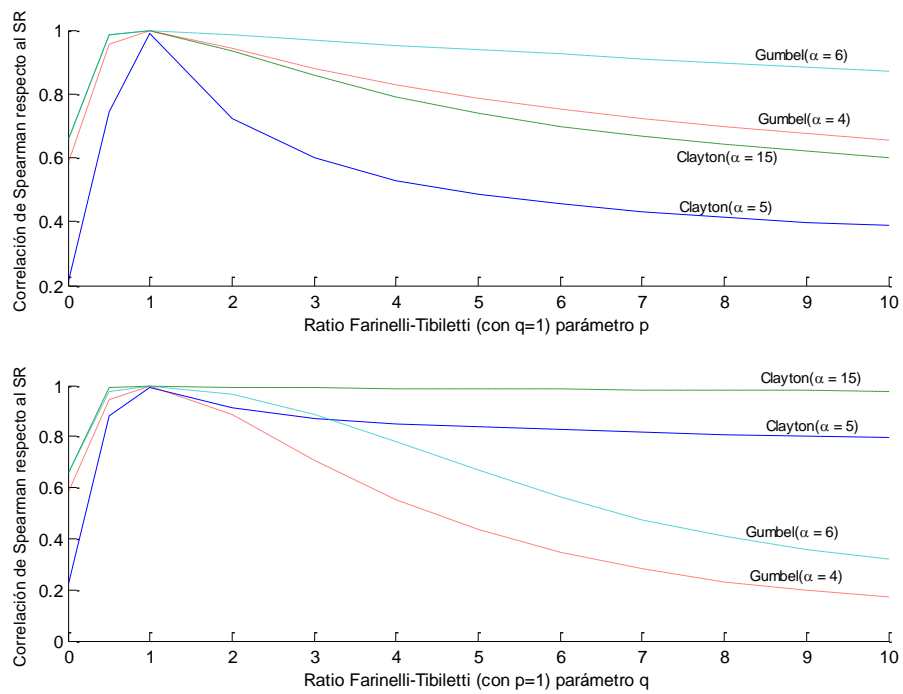


Figura 8.2. Efecto de la cópula Gumbel y de Clayton con distribución Normal.

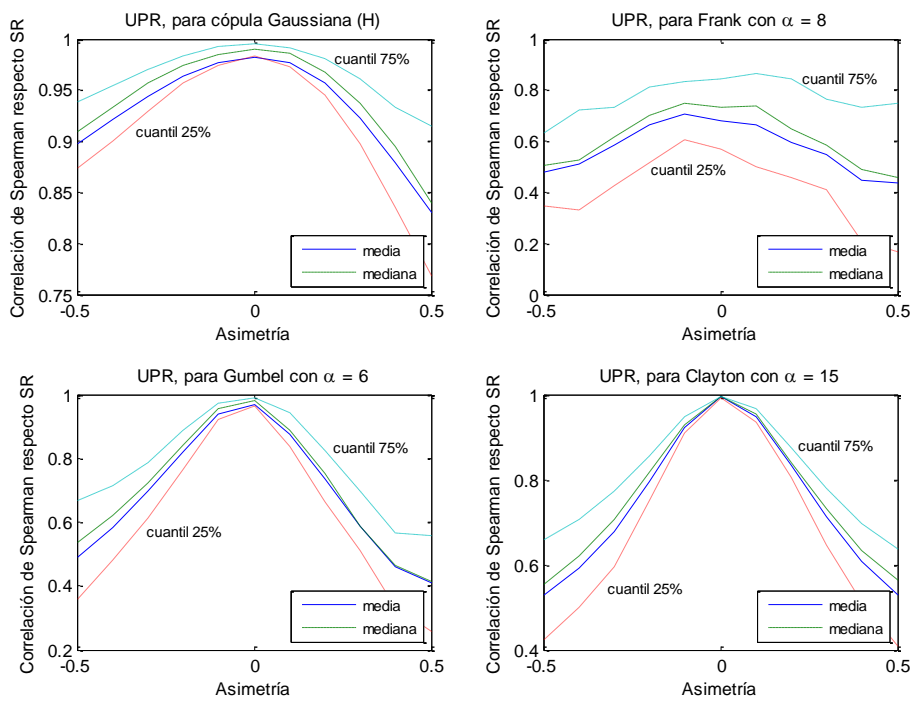


Figura 8.3. Efecto de la asimetría en la correlación de Spearman, para las distintas cópulas.

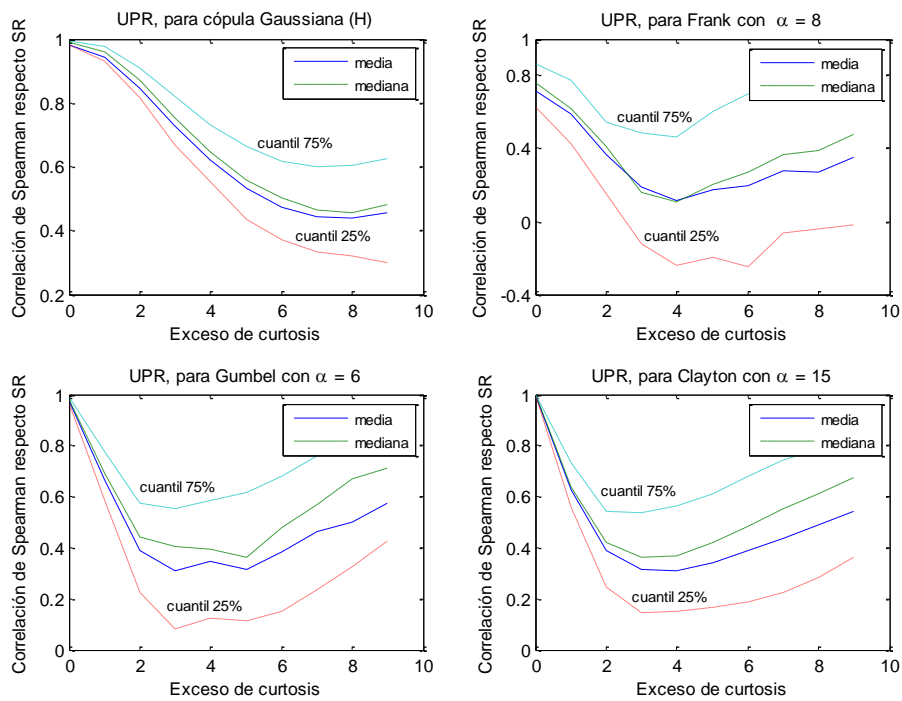


Figura 8.4. Efecto del exceso de curtosis en la correlación de Spearman, para las distintas cópulas.

Anexo 2: Índice de tablas

Tabla 4.1. Estadísticos descriptivos de los índices globales.

Índices globales	Media	Desv.Típica	Asimetría	E.curtosis	Máy.	Mín.
BEL20	0.0000342	0.0134	0.0272	5.9162	0.0933	-0.0832
BOVESPA	0.0004640	0.0183	-0.0872	4.5025	0.1368	-0.1210
DAX	0.0002168	0.0157	0.0552	4.6903	0.1080	-0.0743
FTSE100	0.0000826	0.0126	-0.1279	6.8354	0.0938	-0.0926
IBEX35	0.0000788	0.0153	0.1497	5.6292	0.1348	-0.0959
MERVAL	0.0010356	0.0210	-0.1538	5.3160	0.1612	-0.1295
NASDAQ	0.0002842	0.0159	0.0351	4.9357	0.1185	-0.1111
NIKKEI	0.0000944	0.0157	-0.4866	6.9268	0.1323	-0.1211
SP500	0.0001587	0.0130	-0.2092	8.9575	0.1096	-0.0947

Tabla 7.1 Correlaciones de Spearman ratio Kappa y medidas basadas en el VaR.

Medida Perf.	T	H₁	H₂
Omega-Sharpe	0.8054	0.6424	0.5889
Sortino	0.9807	0.9463	0.9264
Kappa 3	0.9136	0.8031	0.7530
RVaR (95%)	0.8910	0.7528	0.7358
RVaR (99%)	0.9271	0.8351	0.7740
RCVaR (95%)	0.9106	0.7858	0.7731
RCVaR (99%)	0.9265	0.8343	0.7726
FTR(1,5)	0.4556	0.2601	0.3071
FTR(5,1)	-0.1010	-0.0091	-0.0759

Tabla 7.2. Resultados del análisis de regresión.

Medidas Perf.	Intervalo del SR	beta SK	beta Ek	Corre Rank.	R^2_{MR}	R^2_{MSR}	Ganancia	Test de Chow (p-valor)
Omega-Sharpe	H ₁	0.0161	0.0085	0.6424	0.5148	0.7863	0.5276	18.0759
	H ₂	0.0236	0.0120	0.5889	0.3690	0.8012	1.1712	(0.0000)
Sortino	H ₁	0.0495	-0.0004	0.9463	0.9354	0.9818	0.0496	46.3222
	H ₂	0.0690	-0.0014	0.9264	0.8860	0.9697	0.0945	(0.0000)
Kappa 3	H ₁	0.0743	-0.0052	0.8031	0.7295	0.9183	0.2587	39.5758
	H ₂	0.0994	-0.0086	0.7530	0.6295	0.9031	0.4346	(0.0000)
RVaR (5%)	H ₁	-0.0210	0.0047	0.7528	0.6674	0.8454	0.2666	12.1116
	H ₂	-0.0334	0.0060	0.7358	0.5636	0.8420	0.4940	(0.0000)
RVaR (1%)	H ₁	-0.0347	-0.0019	0.8351	0.7659	0.8125	0.0608	11.4809
	H ₂	-0.0529	-0.0039	0.7740	0.6443	0.7703	0.1955	(0.0000)
RCVaR (5%)	H ₁	-0.0244	0.0045	0.7858	0.7085	0.8644	0.2201	11.9550
	H ₂	-0.0396	0.0060	0.7731	0.6260	0.8611	0.3756	(0.0000)
RCVaR (1%)	H ₁	-0.0364	-0.0021	0.8343	0.7619	0.8105	0.0638	13.3467
	H ₂	-0.0566	-0.0043	0.7726	0.6430	0.7706	0.1984	(0.0000)
FTR(1,5)	H ₁	0.0932	-0.0155	0.2601	0.0683	0.6533	8.5642	25.1423
	H ₂	0.1232	-0.0223	0.3071	0.1137	0.7310	5.4271	(0.0000)
FTR(5,1)	H ₁	0.1171	0.0177	-0.0091	0.0011	0.6364	587.3688	21.3000
	H ₂	0.1319	0.0250	-0.0759	0.0092	0.7426	79.3658	(0.0000)

La Tabla 7.2 presenta los resultados de las estimaciones del modelo $M2$ por MCO. Para el $M2$ todas las regresiones contienen las mismas variables explicativas: el logaritmo del ratio de Sharpe, la asimetría (sk) y el exceso de curtosis (ek). Las estimaciones beta correspondientes a sk y ek están expuestas, respectivamente, en las columnas 3 y 4. Considerando una cierta variable dependiente (medida de performance) en la columna 1, la regresión se ejecuta dos veces. El tamaño total de la muestra, N , se divide en dos partes teniendo una regresión para cada sub-muestra. El criterio seguido para dividir N depende del tamaño del ratio de Sharpe (SR) para cada cartera, $i \in \{1, \dots, N\}$, denotado SR_i . La columna 2 presenta el intervalo del SR , con H_1 y H_2 . Si $SR_i \in H_1$ entonces la cartera i tiene un SR menor que la media del SR para toda la muestra, N , por otro lado, si $SR_i \in H_2$ entonces la cartera i tiene un SR mayor que la media del SR para toda la muestra, N . Esta tabla muestra un total de 18 regresiones distintas. La columna 5 representa la correlación de Spearman entre alguna de las medidas de performance de la columna 1 y el SR para cada sub-muestra. Las columnas 6 y 7, llamadas R^2_{M1} y R^2_{M2} , corresponden, respectivamente, al estadístico R^2 del $M1$ y del $M2$. La columna 8, presenta la ganancia en términos relativos de explicar la medida de performance de la columna 1 con el $M1$ a explicarla a través del $M2$. La última columna representa el valor y el p-valor (entre paréntesis) del test de Chow con hipótesis nula no hay cambio estructural (una regresión) e hipótesis alternativa hay cambio estructural (dos regresiones). Todas las carteras están simuladas mediante el procedimiento descrito en el apartado 7.1. Nótese que hemos repetido este procedimiento un total de 500 veces, por tanto, los valores y estimaciones de la tabla (desde la columna 3 a la 9) son realmente las medias sobre las 500 estimaciones. Las estimaciones beta (columnas 3 y 4) son estadísticamente significativas a un nivel de significación del 1% para todas las medidas de performance.