

VALORACIÓN DE ACTIVOS DERIVADOS SOBRE MERCANCIAS CUANDO EL RENDIMIENTO POR CONVENIENCIA CONVERGE A UNA MEDIA CÍCLICA

Daniel Bacaicoa Barber

Trabajo de investigación 005/014

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Manuel Moreno Fuentes

Dr. Federico Platanía

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

www.finanzascuantitativas.com

MÁSTER EN BANCA Y FINANZAS CUANTITATIVAS



Valoración de activos derivados sobre
mercancías cuando el rendimiento por
conveniencia converge a una media cíclica

Daniel Bacaicoa Barber

19 de septiembre de 2014

Tutores:

Manuel Moreno Fuentes (Universidad de Castilla-La Mancha)

Federico Platanía (Universidad Computense de Madrid)

Eskerrak

“Amari egindako zorrak ez dira inoiz ordaintzen”

Euskal esaera

Lehenik eta behin, Manuel eta Federicori, zuen laguntzarik gabe, lan hau ezin izango baitnuen gauzatu. Era berean, masterrean zein lizentziaturan izan ditudan irakasle bikain guztiei (askotxo izan baitira).

Orokorrean ikaskuntza prozesu honetan zehar ezagutu dudan gende guztiari, alboan izan ditudan eta lagundu didaten guztiei, baina, bereziki lizentziaturan eta masterrean egin ditudan lagunei eta urte zoragarri hauetan ezagutzeko zortea izan ditudan guztiei. Askok nire bizitzan txoko brezi bat hartu duzue.

Nire kuadrillari, beti hor egon zaretelako, zaudetelako eta egongo zaretela dakidalako. Zeuentzako brindixe!!

Nola ez, familiari. Ama, aita eta Anari. Ez dut bizitza zuek gabe imaginatu ere egin nahi. Eskerrik asko zaretena izateagatik.

Azkenik hainbeste maite nuen eta aurten joan zaigun aitona Joséri. Mila esker izan zarena izateagatik. Oroitzen zaitut. Uuxaaa pájaro!

Índice

1. Introducción	1
2. Modelos de referencia	3
2.1. Modelo de Moreno y Platanía (2013)	3
2.2. Modelo de Schwartz (1997)	5
3. El nuevo modelo	6
3.1. Proceso ajustado por riesgo	7
3.2. Solución del modelo ajustado por riesgo	9
3.3. Precio de derivados sobre la mercancía	15
4. El modelo econométrico	17
4.1. Modelo en el espacio de estados	18
4.1.1. Precio al contado desconocido	18
4.1.2. Precio al contado conocido	20
4.1.3. Modelo general en espacio de estados	21
4.2. Estimación mediante el filtro de Kalman	22
5. Datos	23
5.1. Energía (Petróleo)	23
5.2. Metal (Aluminio)	26
5.3. Agrícola (Café)	29
6. Estimación dentro de la muestra	31
6.1. Resultados	33
Energía (Petróleo)	33
Metal (Aluminio)	37
Agrícola (Café)	41
7. Conclusiones	45
Referencias	46

Apéndice	47
A. Demostraciones	47
B. Resultados matemáticos relevantes	55

Índice de figuras

1.	Evolución del rendimiento por conveniencia (determinista)	11
2.	Evolución del rendimiento por conveniencia (con ruido)	11
3.	Sensibilidad del rendimiento por conveniencia a los parámetros	13
4.	Vencimientos del petróleo	24
5.	Futuros del petróleo	25
6.	Rendimiento por conveniencia implícito para el petróleo	25
7.	Vencimientos del aluminio	27
8.	Futuros del aluminio	27
9.	Rendimiento por conveniencia implícito para el aluminio	28
10.	Vencimientos del café	30
11.	Futuros café	30
12.	Rendimiento por conveniencia implícito para el café	31
13.	Ajuste del rendimiento por conveniencia para el petróleo	34
14.	Ajuste 6º futuro del petróleo	35
15.	Ajuste 12º futuro del petróleo	36
16.	Ajuste del rendimiento por conveniencia para el aluminio	38
17.	Ajuste 6º futuro del aluminio	39
18.	Ajuste 12º futuro del aluminio	40
19.	Ajuste del rendimiento por conveniencia para el café	41
20.	Ajuste 3 ^{er} futuro del café	43
21.	Ajuste 6º futuro del café	44

Índice de tablas

1.	Descriptivos crudo	26
2.	Descriptivos aluminio	29
3.	Descriptivos café	31
4.	6º futuro del petróleo (parámetros estimados)	35
5.	12º futuro del petróleo (parámetros estimados)	36

6.	6° futuro del aluminio (parámetros estimados)	39
7.	12° futuro del aluminio (parámetros estimados)	40
8.	3 ^{er} futuro del café (parámetros estimados)	42
9.	6° futuro del café (parámetros estimados)	43

Resumen

Este trabajo presenta un nuevo modelo bifactorial en tiempo continuo que describe el comportamiento estocástico que siguen ciertos productos no financieros como son las mercancías (commodities) teniendo en cuenta que el rendimiento por conveniencia (convenience yield) y el precio de estos productos puede presentar cierta estacionalidad. Este modelo presenta una cierta tratabilidad analítica pues proporciona fórmulas cerradas para el precio de futuros y opciones Europeas sobre estas mercancías. Posteriormente, se analiza el comportamiento empírico de este modelo mediante un estudio “dentro de muestra” para tres productos: aluminio, petróleo y café.

Abstract

This Master thesis presents a new two-factor model in continuous-time that describes the stochastic behaviour of some commodities aiming to reflect that prices and the convenience yield of some commodities can show a certain degree of seasonality. We provide a closed-form solution for the prices of futures and European options on a commodity. Finally, we analyze the empirical behavior of the model with an in-sample analysis applied to three commodities: aluminum, oil and coffee.

1. Introducción

El mercado de mercancías (*commodities*) es de gran relevancia en lo que a mercados financieros se refiere ya que mueve un gran número de activos financieros. Además gran cantidad de los productos derivados como futuros, opciones y futuros sobre opciones tienen como subyacentes mercancías. Por eso, el estudio del comportamiento estocástico de los precios de estas es un tema de suma relevancia tanto en el nivel académico, dónde han sido y siguen siendo un tema de estudio muy importante, como para profesionales del sector.

Una de las características más a fondo para este tipo de activos, es la posibilidad de que presenten un comportamiento cíclico. Estos comportamientos varían según tipos de mercancías y pueden deberse a factores tan diversos como problemas de almacenaje ó estados climáticos. La mayoría de las mercancías presentan este tipo de patrones estacionales. En el caso de las agrícolas, esto puede ser debido a condiciones climáticas y medioambientales que hacen que las cosechas se den en determinadas épocas, por poner un ejemplo. Para las energéticos por su parte, pueden tener más relevancia, la dificultad de almacenaje y transporte ó posibles patrones de consumo que estos bienes pueden presentar. Los metales por contra, pueden depender más de condiciones relevantes al ciclo económico, por ejemplo, en el caso de metales preciosos, ya que sabemos que estos se utilizan a modo de bienes refugio, o de patrones de consumo u otras posibles causas para metales industriales.

El hecho de que muchas mercancías presenten esta característica ha hecho que sea estudiada y modelizada de diferentes formas. En la literatura, podemos encontrar un gran número de modelos diferentes que explican el comportamiento de los precios de las mercancías y sus implicaciones en la valoración de activos derivados. En este punto y para nuestro propósito son de especial relevancia aquellos modelos que tienen un comportamiento estocástico, y son en los que nos vamos a centrar.

Los modelos unifactoriales como el propuesto por Brennan y Schwartz (1985) asumen que solo existe una fuente de incertidumbre. Gibson y Schwartz (1990) ya estudian la idoneidad de introducir un segundo factor estocástico en el modelo, el rendimiento por conveniencia (*convenience yield*), y lo hacen para el caso del petróleo. Además estudian la adecuación de que este segundo factor siga un proceso con reversión a la media.

El hecho de introducir un segundo factor es ampliamente estudiado por Schwartz (1997), que en su artículo menciona, que la asunción de un único factor puede ser muy restrictiva ya que así, imponemos que solo existe una fuente de incertidumbre, estamos asumiendo que el precio a futuro (*forward price*) de la mercancía tiene la misma volatilidad que el precio al contado (*spot*). Es por eso que en este artículo, Schwartz contrapone modelos de dos y tres factores al modelo de un factor para diferentes mercancías, llegando a la conclusión de que los modelos de más de un factor explican más

que el unifactorial. Para Schwartz, los factores a incluir al precio de la mercancía, son el rendimiento por conveniencia y los tipos de interés. Además, los tres modelos presentados por Schwartz tienen reversión a la media, concluyendo, que esta es indispensable a la hora de modelizar el precio de mercancías comerciales.

Más adelante, Schwartz y Lucía (2002) estudian la inclusión de un patrón cíclico en la modelización de los precios de la electricidad en el estudio del mercado de energía nórdico. Presentan modelos de uno y dos factores en los que incluyen una componente determinista cíclica dependiente del tiempo. Moreno y Platanía (2013) amplían el modelo presentado por Schwartz y Lucía, modelizando el precio al contado de la mercancía mediante un proceso con reversión a la media, cuya media de largo plazo viene dada por una función periódica dependiente del tiempo, que modelizan mediante una serie de Fourier.

En el presente trabajo, presentaremos un nuevo modelo para describir el precio de las mercancías. Incorporamos en el modelo las características relevantes que hemos mencionado anteriormente. Así, extenderemos el modelo de dos factores presentado por Schwartz (1997) teniendo en cuenta la extensión de Moreno y Platanía (2013) al modelo de Schwartz y Lucía (2002). De esta manera, explicaremos el precio de las mercancías mediante un modelo en tiempo continuo que vendrá explicado por dos factores conjuntos. El primer factor modelizará el precio al contado de la mercancía mediante un movimiento geométrico browniano y el segundo, el rendimiento por conveniencia instantáneo por medio de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Nuestra aportación será modelizar la media de largo plazo de este segundo factor mediante una función periódica dependiente del tiempo, descrita por una serie de Fourier, para poder capturar la estacionalidad en el rendimiento por conveniencia de las mercancías.

En este punto, teniendo en cuenta la mejora que presenta el modelo de dos factores de Schwartz respecto al de uno, y teniendo en cuenta la importancia de la reversión a la media, nos preguntamos, ¿puede nuestro modelo explicar sustancialmente mejor que el modelo de dos factores de Schwartz el precio de las mercancías?

Que pretendamos recoger la posible estacionalidad en el rendimiento por conveniencia no es casual. Hull (2012) lo define cómo: “*La medida de los beneficios que obtiene el poseedor de un activo, que no son obtenidas por el tenedor de una posición larga en futuros de dicho activo*”. Debido al comportamiento estacional de las mercancías que ha sido estudiado por numerosos autores, el rendimiento por conveniencia también ha de presentar un patrón estacional similar al que presentan los precios de las mercancías. Por tanto, el hecho de que el rendimiento por conveniencia varíe entre diferentes períodos de forma cíclica es un factor a tener en cuenta y que estudiamos en este trabajo.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En la sección dos, se presentan y estudian brevemente los modelos que utilizaremos a modo de referencia. En la sección tres, presentamos el nuevo modelo y se mostramos la resolución analítica del

mismo, así como una fórmula cerrada para la valoración de futuros y opciones europeas escritas sobre la mercancía. En la sección cuarta presentamos el modelo econométrico que utilizaremos para el análisis dentro de la muestra. En la cuarta y quinta sección presentamos los datos que vamos a usar haciendo una breve descripción de estos y presentamos los resultados de la estimación respectivamente. Por último en la sexta sección, mostramos las conclusiones que se desprenden del estudio.

2. Modelos de referencia

Introduciremos a continuación los modelos que utilizaremos como benchmark. El primero será el modelo presentado por Moreno y Platanía (2013) en el último capítulo de la tesis. Este modelo está algo más alejado de lo que tenemos como objetivo de estudio ya que es un modelo de un factor y no tiene en cuenta por tanto, el rendimiento por conveniencia, aun así, lo incluimos ya que modeliza la media de largo plazo de la mercancía mediante una serie de Fourier, que es la que hemos incorporado nosotros en el segundo factor del nuevo modelo. El segundo modelo, será el modelo de dos factores presentado por Schwartz (1997), este es el modelo que extendemos cambiando la media de largo plazo constante por la función dependiente del tiempo.

Presentamos los modelos con mayor detalle a continuación.

2.1. Modelo de Moreno y Platanía (2013)

De aquí en adelante, llamaremos a este modelo Modelo 1¹.

Este modelo es una ampliación de los modelos unifactoriales presentados por Schwartz (1997) y por Schwartz y Lucía (2002), de hecho estos dos son modelos anidados en el modelo presentado por Moreno y Platanía (2013). Como hemos comentado anteriormente es un modelo que incorpora el componente estacional en su media de largo plazo y lo hace mediante una serie de Fourier. Moreno y Platanía hacen un análisis empírico del modelo, para ello, utilizan el Gas Natural, concretamente el Gas natural Henry Hub que se comercia en el (*NYMEX*) y lo hace para un periodo comprendido entre 1998 y 2011. El modelo más detallado se presenta a continuación.

Se trata de un modelo de un factor que modeliza el precio de la mercancía, S_t , asumiendo que esta sigue un proceso estocástico que viene determinado por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \kappa (f(t) - \ln(S_t)) S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

¹A la hora de hacer el estudio empírico tendremos que truncar la serie de Fourier por lo que el modelo para el cual cogemos un solo término de esta lo llamaremos de aquí en adelante Modelo 1.1 y el modelo en el que cojamos dos coeficientes en la serie será de aquí en adelante Modelo 1.2

donde κ y σ , la velocidad de reversión a la media y la difusión del proceso respectivamente, son constantes, W_t es un proceso de Wiener estándar y el nivel de reversión a la media viene dado por una función periódica dependiente del tiempo, $f(t)$, que está caracterizada por una serie de Fourier, es decir,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Re(A_n e^{in\omega t})$$

de la que solo tenemos en cuenta la parte real ya que es la única que tiene sentido económico.

Definimos $X_t = \ln(S_t)$ y asumimos un precio de mercado del riesgo constante, λ . Así aplicando el lemma de Itô, el logaritmo del precio se puede representar mediante el proceso ajustado por riesgo,

$$dX_t = \kappa \left(f(t) - \frac{\sigma^2}{2\kappa} - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - X_t \right) dt + \sigma d\widetilde{W}_t$$

donde $\widetilde{W}_t = W_t + \lambda t$ es un proceso de Wiener estándar bajo la medida neutral al riesgo $\widetilde{\mathbb{P}}$

Nos damos cuenta de que el logaritmo del precio al contado viene caracterizado por un proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck, por tanto, para $T \geq s \geq t \geq 0$, la solución al proceso neutral al riesgo que sigue el logaritmo del precio al contado viene determinada por

$$\begin{aligned} X_s &= e^{-\kappa(s-t)} X_t + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa(s-t)}) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left[\frac{\kappa A_n}{\kappa + in\omega} (e^{in\omega s} - e^{-\kappa(s-t)+in\omega t}) \right] + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\widetilde{W}_u \end{aligned}$$

que esta distribuido de forma normal con media y varianza

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}[X_s | \mathcal{F}_t] &= e^{-\kappa(s-t)} X_t + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa(s-t)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left[\frac{\kappa A_n}{\kappa + in\omega} (e^{in\omega s} - e^{-\kappa(s-t)+in\omega t}) \right] \\ \widetilde{V}[X_s | \mathcal{F}_t] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(s-t)}) \end{aligned}$$

Como el logaritmo del precio de la mercancía sigue una distribución Gaussiana, el precio de la mercancía sigue una distribución lognormal. Por tanto el precio de un contrato a plazo (*forward*) sobre la mercancía viene dado por

$$\begin{aligned} F(S_t, t, T) &= \widetilde{\mathbb{E}}[S_T | \mathcal{F}_t] = \exp \left\{ \widetilde{\mathbb{E}}[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \widetilde{V}[X_T | \mathcal{F}_t] \right\} = \\ &= \exp \left\{ e^{-\kappa(T-t)} X_t + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left[\frac{\kappa A_n}{\kappa + in\omega} (e^{in\omega T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega t}) \right] \right\} \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$\begin{aligned} \ln(F(S_t, t, T)) &= e^{-\kappa(T-t)}X_t + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left[\frac{\kappa A_n}{\kappa + in\omega} (e^{in\omega T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega t}) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Moreno y Platanía también presentan las fórmulas cerradas para valorar opciones europeas y opciones europeas sobre el futuro de la mercancía.

2.2. Modelo de Schwartz (1997)

De aquí en adelante nos referiremos a este modelo como Modelo 2.

Nos centramos ahora en el modelo de dos factores presentado por Schwartz (1997). Este modelo incorpora en un segundo factor estocástico, el rendimiento por conveniencia, y lo modeliza mediante un proceso con reversión a la media. Schwartz hace un análisis empírico del modelo y lo compara con los otros modelos que propone en su artículo. Para ello, utiliza diferentes mercancías, concretamente utiliza petróleo, cobre y oro. El modelo más detallado se presenta a continuación.

El modelo consta de dos factores conjuntos. El primer factor modeliza el precio al contado de la mercancía mediante un movimiento geométrico Browniano, mientras que el segundo factor modeliza el rendimiento por conveniencia de la mercancía mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Los dos factores siguen el siguiente proceso estocástico conjunto

$$\begin{aligned} dS_t &= (\mu - \delta)S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^1 \\ d\delta_t &= \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{aligned}$$

donde μ , el término de deriva del primer factor, es constante, σ_1 y $\sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ son respectivamente las difusiones del proceso del precio al contado y del rendimiento por conveniencia. El segundo factor sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, por tanto es un proceso con reversión a la media, α , con una velocidad de reversión κ . W_t^1 y W_t^2 son dos procesos de Wiener estándares correlacionados, es decir, $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$.

Definiendo $X_t = \ln(S_t)$ y asumiendo un precio de mercado de riesgo asociado al el rendimiento por conveniencia constante, λ , y aplicando el lema de Itô al logaritmo del precio, obtenemos el proceso ajustado por riesgo

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_t \right) dt + \sigma_1 d\widetilde{W}_t^1 \\ d\delta_t &= (\kappa(\alpha - \delta_t) - \lambda) dt + \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 \end{aligned}$$

donde \widetilde{W}_t^1 y \widetilde{W}_t^2 son procesos de Wiener estándar correlacionados, $d\widetilde{W}_t^1 d\widetilde{W}_t^2 = \rho dt$, bajo la medida neutral al riesgo $\widetilde{\mathbb{P}}$

La solución al proceso neutral al riesgo que sigue el logaritmo del precio al contado para $T \geq s \geq t \geq 0$, viene dada por

$$X_s = X_t + \left(r - \alpha + \frac{\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) (s - t) + \left(\alpha - \frac{\lambda}{\kappa} - \delta_t \right) \frac{1 - e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} \\ + \sigma_1 \int_t^s d\widetilde{W}_u^1 - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^s (1 - e^{-\kappa(s-u)}) d\widetilde{W}_u^2$$

que está distribuida de forma normal con media y varianza

$$\widetilde{\mathbb{E}}[X_s | \mathcal{F}_t] = X_t + \left(r - \alpha + \frac{\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) (s - t) + \left(\alpha - \frac{\lambda}{\kappa} - \delta_t \right) \frac{1 - e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} \\ \widetilde{V}[X_s | \mathcal{F}_t] = \left(\frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\kappa} \right) (s - t) + \left(\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} \\ + \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(s-t)}}{4\kappa^3}$$

Como en el modelo anterior, el logaritmo del precio de la mercancía sigue una distribución normal. Por tanto, el precio de la mercancía sigue una distribución lognormal. Así, el precio de entrega de un forward sobre el la mercancía viene dado por

$$F(S_t, t, T) = \widetilde{\mathbb{E}}[S_T | \mathcal{F}_t] = \exp \left\{ \widetilde{\mathbb{E}}[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \widetilde{V}[X_T | \mathcal{F}_t] \right\} = \\ = S_t \exp \left\{ \left(r - \alpha + \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\kappa} \right) (s - t) + \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(s-t)}}{4\kappa^3} \right. \\ \left. + \left(\alpha - \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \delta_t \right) \frac{1 - e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} \right\}$$

o, alternativamente,

$$\ln(F(S_t, t, T)) = \ln(S_t) + \left(r - \alpha + \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\kappa} \right) (s - t) \\ + \left(\alpha - \frac{\lambda}{\kappa} + \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\kappa} - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \delta_t \right) \frac{1 - e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} \\ + \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(s-t)}}{4\kappa^3} \quad (2)$$

3. El nuevo modelo

De aquí en adelante, llamaremos a este modelo Modelo 3².

²A la hora de hacer el estudio empírico tendremos que truncar la serie de Fourier por lo que el modelo para el cual cogemos un solo término de esta lo llamaremos de aquí en adelante Modelo 3.1 y el modelo en el que cojamos dos coeficientes en la serie será de aquí en adelante Modelo 3.2.

El nuevo modelo, que presentamos a continuación, se basa en los dos modelos que hemos presentado anteriormente. Nuestro objetivo será dotar de una mayor flexibilidad el modelo de dos factores de Schwartz (1997). Para ello, nuestra aportación será la de modelizar la media de largo plazo de el rendimiento por conveniencia con una función dependiente del tiempo cíclica. Así pretendemos recoger mejor los efectos estacionales que puede haber en el largo plazo en esta.

Para ello, modelizamos el proceso conjunto de manera similar al Modelo 2. El precio al contado de la mercancía, S_t , seguirá un movimiento geométrico Browniano, y el rendimiento por conveniencia, δ_t , un proceso de Ornstein-Uhlenbeck cuya media de reversión viene dada por una función periódica dependiente del tiempo, $f(t)$. De acuerdo con esto, nuestros factores siguen el siguiente proceso conjunto

$$dS_t = (\mu - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^1 \quad (3)$$

$$d\delta_t = \kappa (f(t) - \delta_t) dt + \sigma_2 dW_t^2 \quad (4)$$

donde μ es el término de deriva para (3), $\kappa \in \mathbb{R}^+$ es la velocidad de reversión en (4) y $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}^+$ son los términos de difusión para (3) y (4) respectivamente, dW_t^1 y dW_t^2 son movimientos Brownianos estándares correlacionados con

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \quad (5)$$

y la media a la que revierte el rendimiento por conveniencia, $f(t)$, viene caracterizada mediante una serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Re(A_n e^{in\omega t}) \quad (6)$$

de la que únicamente nos ocupamos de la parte real ya que es la que tiene sentido económico.

En lo que se refiere al precio al contado, nos es de utilidad también, calcular el proceso que sigue el logaritmo del mismo. Para ello definimos $X_t = \ln(S_t)$ y le aplicamos el lema de Itô, por lo que obtenemos,

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_t \right) dt + \sigma_1 dW_t^1 \quad (7)$$

3.1. Proceso ajustado por riesgo

En primer lugar nos preocuparemos por mostrar el proceso neutral al riesgo. Para ello debemos calcular los precios de mercado de riesgo asociado al precio de la mercancía y de mercado de riesgo asociado a el rendimiento por conveniencia. Como este segunda

no puede ser cubierta, al ser un activo que no negociado en el mercado, tendrá un precio del mercado del riesgo asociado a él que consideraremos constante, es decir,

$$\Theta_2(\delta_t; t) = \frac{\lambda}{\sigma_2}$$

Por otro lado, para calcular el proceso neutral al riesgo que sigue el precio de la mercancía, al tener un rendimiento por conveniencia, tenemos que tratar a la mercancía como si pagara dividendos,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_1 dW_t^1 - \delta_t S_t dt$$

bajo este enfoque, el valor descontado de la mercancía no tiene que ser martingala, sino que lo tiene que ser el valor descontado con los dividendos reinvertidos, o dicho de otro modo, reinvertiendo el rendimiento por conveniencia.

Calculamos por tanto el valor del precio del mercado de riesgo $\Theta_1(S_t; t)$. Para ello, calculamos el proceso que sigue el precio descontado, reinvertiendo el rendimiento por conveniencia. Asumimos un tipo de interés libre de riesgo constante, r . Por tanto, el proceso de descuento que consideraremos,

$$D(t) = e^{\int_0^t (\delta_u - r) du} \Rightarrow dD(t) = (\delta_t - r)D(t)dt$$

y el proceso del precio descontado $d(D(t)S_t)$, que mediante la regla del producto de Itô³

$$\begin{aligned} d(D(t)S_t) &= dD(t)S_t dt + D(t)dS_t + dD(t)dS_t = \\ &= (\delta_t - r)D(t)S_t dt + D(t)(\mu - \delta_t)S_t dt + D(t)\sigma_1 S_t dW_t^1 = \\ &= D(t)(\mu - r)S_t dt + D(t)\sigma_1 S_t dW_t^1 = \\ &= D(t)\sigma_1 S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma_1} dt + dW_t^1 \right) \end{aligned}$$

por tanto, el precio del mercado del riesgo,

$$\Theta_1(S_t; t) = \frac{\mu - r}{\sigma_1}$$

e introducimos la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ que nos da el teorema de Girsanov bidimensional, para el precio de mercado del riesgo $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \Theta_2(t)) = \left(\frac{\mu - r}{\sigma_1}, \frac{\lambda}{\sigma_2} \right)$.

Así, bajo la nueva medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\tilde{W}_t^1 = W_t^1 + \frac{\mu - r}{\sigma_1} t \quad \text{y} \quad \tilde{W}_t^2 = W_t^2 + \frac{\lambda}{\sigma_2} t$$

³Más detalles sobre esta regla, véase Shreve (2004), Capítulo 4.

son Brownianos estándares correlacionados

$$d\widetilde{W}_t^1 d\widetilde{W}_t^2 = \rho dt$$

Si sustituimos estas expresiones en (3) y (4), obtenemos el proceso neutral al riesgo,

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t d\widetilde{W}_t^1 \\ d\delta_t &= \kappa \left(f(t) - \delta_t - \frac{\lambda}{\kappa} \right) dt + \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 \\ d\widetilde{W}_t^1 d\widetilde{W}_t^2 &= \rho dt \end{aligned}$$

reescribimos el modelo agrupando las constantes en el término de deriva. Para ello, definimos,

$$g(t) \equiv f(t) - A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \Re(A_n e^{in\omega t})$$

y, por tanto, el proceso que sigue el rendimiento por conveniencia queda de la siguiente manera,

$$d\delta_t = \kappa \left(A_0 - \frac{\lambda}{\kappa} + g(t) - \delta_t \right) dt + \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2$$

Finalmente, definiendo $\alpha = A_0 - \frac{\lambda}{\kappa}$ el proceso neutral al riesgo queda de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t d\widetilde{W}_t^1 \\ d\delta_t &= \kappa (\alpha + g(t) - \delta_t) dt + \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 \\ d\widetilde{W}_t^1 d\widetilde{W}_t^2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{8}$$

3.2. Solución del modelo ajustado por riesgo

Nos centramos en la resolución del proceso neutral al riesgo.

En primer lugar, presentamos el proceso que sigue el rendimiento por conveniencia. Es importante conocer la dinámica de este factor, ya que no es observable y el precio de la mercancía, depende directamente de él. Es importante saber cómo evoluciona antes de resolver el proceso conjunto, por eso, además de resolverlo analíticamente, presentaremos también gráficamente la evolución de el rendimiento por conveniencia según el proceso que planteamos.

Proposición 1. *Para $T \geq t \geq 0$, la solución al proceso neutral al riesgo que sigue el*

rendimiento por conveniencia, se muestra en la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \delta_T = & e^{-\kappa(T-t)}\delta_t + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) + \\ & + \sigma_2 \int_t^T (1 - e^{-\kappa(T-u)}) d\widetilde{W}_u^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Demostración. Apéndice A □

Valiéndonos de resultado anterior, podemos mostrar la distribución condicional que sigue el proceso del rendimiento por conveniencia,

Proposición 2. *Para $T \geq t \geq 0$, la distribución condicional que sigue el proceso del rendimiento por conveniencia es normal con media E y varianza Σ^2 que vienen dados por las siguientes expresiones.*

$$\begin{aligned} E = \widetilde{\mathbb{E}}[\delta_T | \mathcal{F}_t] = & e^{-\kappa(T-t)}\delta_t + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ & + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Sigma^2 = \widetilde{Var}[\delta_T | \mathcal{F}_t] = \frac{\sigma_2^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \quad (11)$$

Demostración. Apéndice A □

Con objetivos ilustrativos, proponemos arbitrariamente una serie de parámetros para reflejar la flexibilidad de nuestro modelo para el rendimiento por conveniencia y mostramos gráficamente su evolución temporal.

La 1 muestra únicamente el proceso de deriva incluido en (9), es decir, eliminamos el término de difusión haciendo $\sigma_2 = 0$. Ambos paneles en esta Figura ilustran, respectivamente, las diferencias que puede haber tomando uno o dos coeficientes en la serie de Fourier.

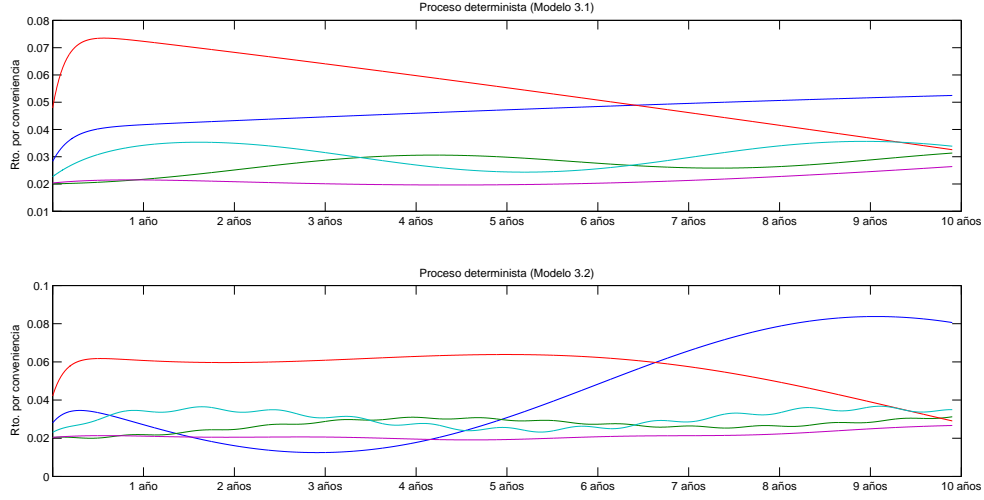


Figura 1: Simulación de la serie temporal del rendimiento por conveniencia sin difusión ($\sigma_2 = 0$) para cinco conjuntos de parámetros arbitrarios. En la primera imagen se toman $A_{n=9,x} = 0$, $A_{n=9,y} = 0$. El valor de α es de 0,03 para todos.
 Línea azul: $\kappa = 0,52$, $A_{n=1,x} = 0,02$, $A_{n=1,y} = -0,05$, $A_{n=9,x} = 0,01$, $A_{n=9,y} = 0,12$, $\omega = 0,006$
 Línea verde: $\kappa = 0,03$, $A_{n=1,x} = -0,11$, $A_{n=1,y} = -0,1$, $A_{n=9,x} = 0,2$, $A_{n=9,y} = 0,01$, $\omega = 0,09$
 Línea roja: $\kappa = 0,69$, $A_{n=1,x} = 0,07$, $A_{n=1,y} = 0,09$, $A_{n=9,x} = -0,03$, $A_{n=9,y} = 0,01$, $\omega = 0,005$
 Línea turquesa: $\kappa = 0,22$, $A_{n=1,x} = 0,02$, $A_{n=1,y} = -0,03$, $A_{n=9,x} = 0,04$, $A_{n=9,y} = 0,03$, $\omega = 0,08$
 Línea morada: $\kappa = 0,14$, $A_{n=1,x} = -0,06$, $A_{n=1,y} = 0,06$, $A_{n=9,x} = 0,02$, $A_{n=9,y} = 0,02$, $\omega = 0,02$

Mostramos también el proceso con los mismos conjuntos de parámetros pero esta vez con ruido. Para ello hemos añadido a la figura anterior el componente de difusión, esto lo hemos hecho tomando $\sigma_2 = 0,002$. Tomamos una desviación típica pequeña, esto, permite que el ruido no distorsione la vista del proceso determinista que hemos mostrado en la imagen anterior. Los parámetros son los mismos que en la figura 1.

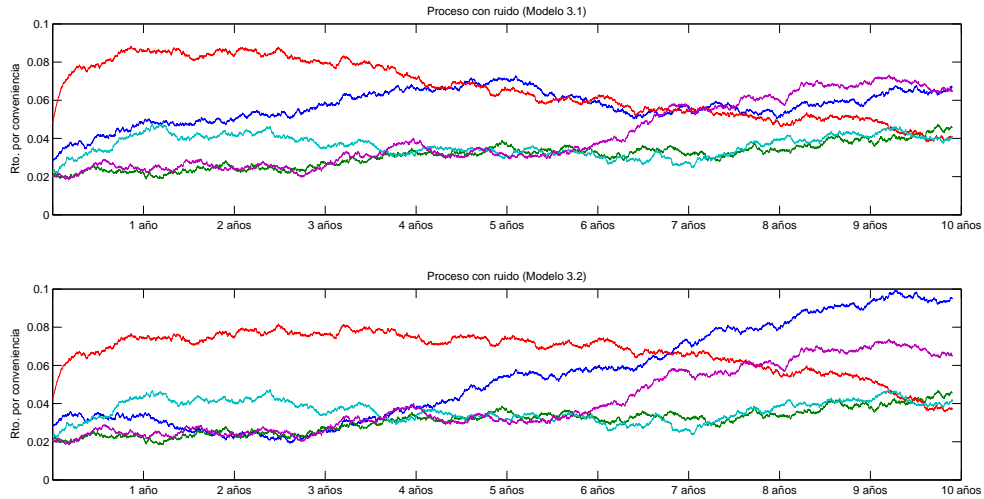


Figura 2: Simulación de la serie temporal del rendimiento por conveniencia con difusión ($\sigma_2 = 0,002$) para los mismos conjuntos de parámetros de la figura 1.

Vemos que la modelización del rendimiento por conveniencia mediante los parámetros que proponemos ofrece una gran versatilidad. Esto, nos permite que podamos aproximarlos de una manera lo más precisa posible.

Puede resultar de gran interés también el presentar gráficamente la sensibilidad del rendimiento por conveniencia a diferentes parámetros.

En los siguientes gráficos se muestra la sensibilidad del rendimiento por conveniencia a variaciones en diferentes parámetros que intervienen en su modelización. Para cada uno de los casos proponemos unos parámetros arbitrarios y variamos uno de ellos para ver el comportamiento del rendimiento por conveniencia al incrementar o disminuirlo.

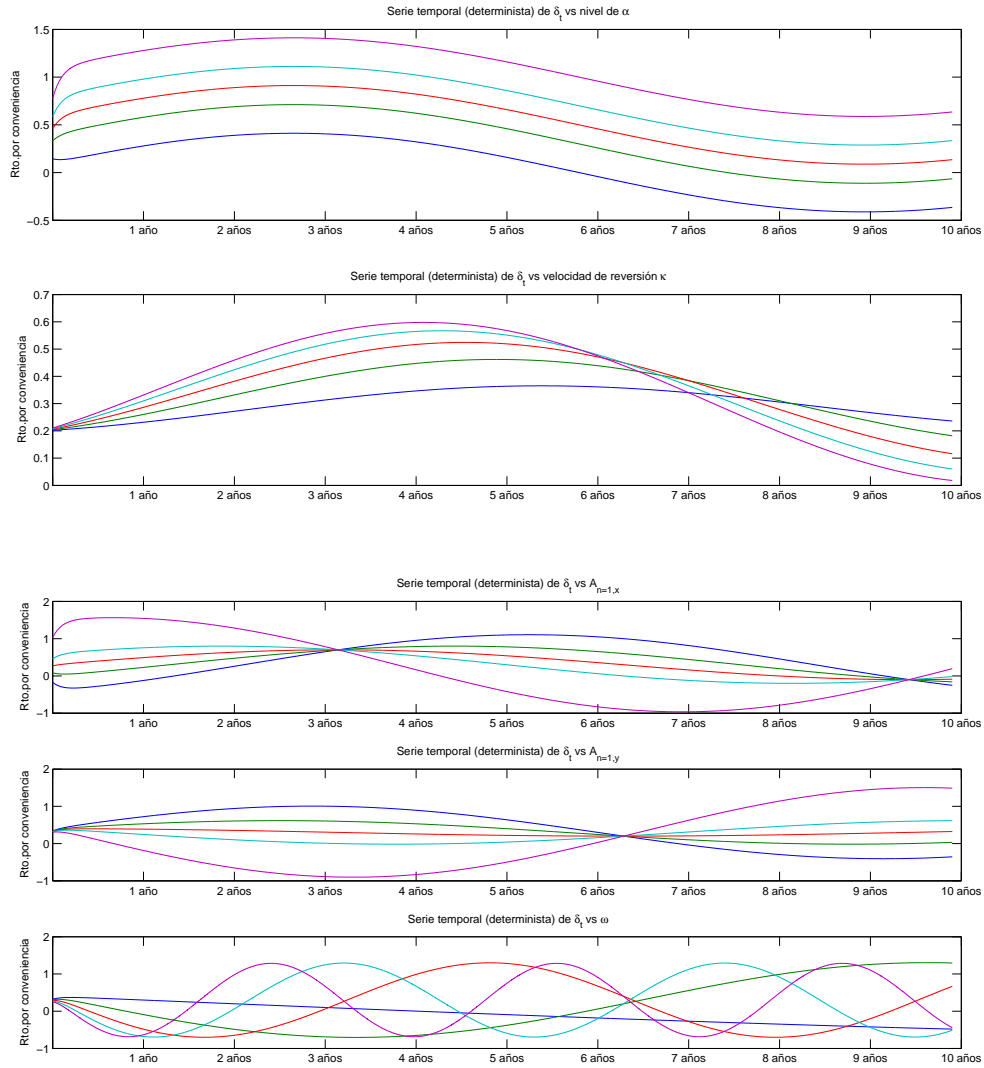


Figura 3: Sensibilidad a los parámetros para la simulación del proceso sin difusión, $\sigma_2 = 0$, con parámetros elegidos arbitrariamente: $\alpha = 0,3$, $\kappa = 1$, $A_{n=1,x} = 0,1$, $A_{n=1,y} = -0,4$ y $\omega = 0,05$.

En el primer gráfico se mantienen todos los parámetros constantes salvo α que toma los siguientes valores:

Azul: $\alpha = 0$, verde: $\alpha = 0,3$, roja: $\alpha = 0,5$, turquesa: $\alpha = 0,7$, morada: $\alpha = 1$.

En el segundo gráfico se mantienen todos los parámetros constantes salvo κ que toma los siguientes valores:

Azul: $\kappa = 0,01$, verde: $\kappa = 0,02$, roja: $\kappa = 0,03$, turquesa: $\kappa = 0,04$, morada: $\kappa = 0,05$.

En el tercer gráfico se mantienen todos los parámetros constantes salvo $A_{n=1,x}$ que toma los siguientes valores:

Azul: $A_{n=1,x} = -0,7$, verde: $A_{n=1,x} = -0,3$, roja: $A_{n=1,x} = 0$, turquesa: $A_{n=1,x} = 0,3$, morada: $A_{n=1,x} = 1,2$.

En el cuarto gráfico se mantienen todos los parámetros constantes salvo $A_{n=1,y}$ que toma los siguientes valores:

Azul: $A_{n=1,y} = -0,7$, verde: $A_{n=1,y} = -0,3$, roja: $A_{n=1,y} = 0$, turquesa: $A_{n=1,y} = 0,3$, morada: $A_{n=1,y} = 1,2$.

En el quinto gráfico se mantienen todos los parámetros constantes salvo ω que toma los siguientes valores:

Azul: $\omega = 0,01$, verde: $\omega = 0,05$, roja: $\omega = 0,1$, turquesa: $\omega = 0,15$, morada: $\omega = 0,2$.

Presentaremos también el rendimiento por conveniencia acumulado, aunque puede resultar de menos interés práctico, nos interesa tenerla para demostrar los resultados siguientes.

Lema 1. Para $T \geq s \geq t \geq 0$, el rendimiento por conveniencia acumulado entre t y s ,

$$\int_t^s \delta_u \, du$$

sigue el siguiente proceso

$$\int_t^s \delta_u \, du = \frac{\delta_t - \delta_s}{\kappa} + \alpha(s - t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega s} - e^{in\omega t}) \right) + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^s d\widetilde{W}_u^2 \quad (12)$$

Demostración. Apéndice A □

Una vez que conocemos la dinámica del rendimiento por conveniencia y que entendemos la flexibilidad que nuestro modelo aporta para aproximarla, nos centramos en la resolución del modelo de dos factores conjunto, el modelo (8), que hemos planteado en la sección anterior. Resolvemos el proceso para el logaritmo del precio en la proposición que se muestra a continuación.

Proposición 3. Para $T \geq t \geq 0$, la solución al proceso neutral al riesgo que sigue el logaritmo del precio al contado de la mercancía, $X_t = \ln(S_t)$, viene descrito por la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} X_T = X_t &+ \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \alpha \right) (T - t) + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} (\alpha - \delta_t) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t}) \right) + \\ &+ \sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1 - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T (1 - e^{-\kappa(T-u)}) d\widetilde{W}_u^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Demostración. Apéndice A □

Nótese, que el proceso que sigue S_t no es más que tomar la exponencial a ambos lados de la ecuación (13) en la proposición anterior.

En este caso no haremos un gráfico que ilustre el precio del futuro bajo el modelo que presentamos ya que este, depende directamente del rendimiento por conveniencia y por tanto, deberíamos simularlo tomando una variable que ya, anteriormente hemos simulado por lo que perdemos la noción clara de como se modeliza el precio de la mercancía bajo el modelo que presentamos.

Ahora, valiéndonos de las características del proceso que acabamos resolver, podemos concluir que el logaritmo del precio, se distribuye de forma normal con media E

y varianza Σ^2 que se detallan en la siguiente proposición. Equivalentemente, podemos decir que el precio se distribuye de forma lognormal.

Proposición 4. *Para $T \geq t \geq 0$, la distribución condicional del logaritmo del precio al contado de la mercancía es normal con media E y varianza Σ^2 ,*

$$E = \widetilde{\mathbb{E}}[X_T | \mathcal{F}_t] = X_t + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \alpha \right) (T - t) + \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{\kappa} (\alpha - \delta_t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t}) \right) \quad (14)$$

$$\Sigma^2 = \widetilde{\text{Var}}[X_T | \mathcal{F}_t] = \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{k^2} - \frac{2}{k} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) (T - t) + \left(\frac{2}{k^2} \sigma_1 \sigma_2 \rho - 2 \frac{\sigma_2^2}{k^3} \right) (1 - e^{-k(T-t)}) + \frac{\sigma_2^2}{2k^3} (1 - e^{-2k(T-t)}) \quad (15)$$

Demostración. Apéndice A □

3.3. Precio de derivados sobre la mercancía

La distribución condicional del logaritmo del precio, X_t , es normal con media E que describe mediante (14) y varianza Σ^2 definida en (15). Por esto, sabemos que el precio, S_t , se distribuye de forma lognormal, y aplicando las propiedades de esta distribución, podemos dar el precio futuro de la mercancía, mediante la siguiente proposición.

Proposición 5. *Para $T \geq t \geq 0$, el precio de entrega de un forward sobre la mercancía es*

$$\begin{aligned} F(S_t, t, T) &= e^{E + \frac{\Sigma^2}{2}} = \\ &= S_t \exp \left\{ \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) (T - t) \right. \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \left(\alpha - \delta_t + \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \\ &\quad + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

ó equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\ln(F(S_t, t, T)) &= E + \frac{\Sigma^2}{2} = \\
&= \ln(S_t) + \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho \right) (T - t) \\
&+ \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \left(\alpha - \delta_t + \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \\
&+ \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n + \kappa} (e^{i\omega T} - e^{i\omega t - \kappa(T-t)}) \right) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n} (e^{i\omega T} - e^{i\omega t}) \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

donde E y Σ^2 son las obtenidas en (14) y (15).

Demostración. Apéndice A □

De la misma manera que hemos calculado el precio de una entrega futura de la mercancía, nos ocupamos también del valor que debe tener una opción europea emitida sobre esta bajo el nuevo enfoque que presentamos en este trabajo. En este caso presentamos la fórmula cerrada para el caso de una opción call europea, el precio de la put puede obtenerse mediante la paridad put-call.

Consideramos una opción call europea con precio de ejercicio K y vencimiento en T , emitida sobre la mercancía. Su precio en t , vendrá dado por, $c(S_t, \delta_t; t, T, K)$. La condición terminal viene dada por,

$$c(S_t, \delta_t; T, T, K) = \text{máx} \{S_T - K, 0\} \equiv (S_T - K)^+$$

Bajo la medida neutral al riesgo, $\tilde{\mathbb{P}}$, el precio en t de la opción, viene dado por,

$$c(S_t, \delta_t; t, T, K) = \tilde{\mathbb{E}} [e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

de lo que se deriva la siguiente proposición,

Proposición 6. *Sea $T \geq t \geq 0$, el precio en t de una opción call Europea con vencimiento en T y precio de ejercicio K sobre la mercancía es,*

$$\begin{aligned}
c(S_t, \delta_t; t, T, K) &= \tilde{\mathbb{E}} [e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)} \left(e^{E + \frac{\Sigma^2}{2}} \Phi(d_1) - \Phi(d_1 - \Sigma) \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

donde $d_1 = \frac{E + \Sigma^2 - \log(K)}{\Sigma}$ y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la normal estándar.

Demostración. Apéndice A □

Podemos obtener la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer el precio de la call europea. El resultado se detalla en la siguiente proposición.

Proposición 7. *El precio de una call europea escrita sobre una mercancía, que venga determinada por la función $c(t, S, \delta)$ valorada mediante el modelo que proponemos debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales.*

$$-rc = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}(r - \delta)S + \frac{\partial c}{\partial \delta}\kappa(\alpha + g - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial \delta^2}\sigma_2^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \delta}S\sigma_1\sigma_2\rho$$

sujeto a la condición final

$$c(T, S, K) = (S_T - K)^+ \tag{19}$$

Demostración. Apéndice A □

4. El modelo econométrico

La dificultad de estimar empíricamente este modelo reside en que tenemos variables que no son observables en el mercado, como es el caso del rendimiento por conveniencia, o, puede resultar complicado encontrar, como es el caso del precio al contado de algunas mercancías. En el caso de que no dispusiéramos del precio al contado, podríamos utilizar el futuro más cercano a vencimiento a modo de aproximación, pero en el caso del rendimiento por conveniencia instantáneo, esto resulta más complicado. Gibson y Schwartz (1990) la aproximan con dos futuros a distintos vencimientos, de forma que,

$$\delta_{GS} = r_{imp} - \ln \left(\frac{F(S_t, T + \Delta T)}{F(S_t, T)} \right)$$

donde $F(S_t, T)$ y $F(S_t, T + \Delta T)$ son los futuros a cierto vencimiento T y el siguiente futuro más cercano a este.

Nosotros, tomaremos como una aproximación del rendimiento por conveniencia, el rendimiento por conveniencia implícito que toma Lautier (2002), basándose en la que toman Brennan y Schwartz (1985)

$$\delta_t^{imp} = r - \frac{\ln(F(S_t, t, T_1)) - \ln(F(S_t, t, T_2))}{T_1 - T_2}$$

donde T_1 y T_2 son los vencimientos más cercanos.

Al tener variables estado que no son directamente observables pero que siguen procesos Markovianos⁴, el procedimiento adecuado es utilizar el modelo en la forma de espacio de estados, y una vez que lo tengamos de esta forma, podremos aplicar el filtro de Kalman para estimar las variables estado así como nuestros parámetros ya que el filtro nos dará una función de verosimilitud que maximizaremos.

Usaremos el filtro de Kalman para estimar una variable estado $x \in \mathbb{R}^n$ donde x_t vendrá dada por una ecuación diferencial estocástica y tendremos una ecuación de medida.

4.1. Modelo en el espacio de estados

Para escribir nuestro modelo en la forma de espacio de estados, utilizaremos dos ecuaciones, una de transición para las variables no observables que sabemos siguen un proceso de Markov de primer orden

$$x_t = A_t x_{t-1} + c_t + R_t \xi_t \quad \xi_t \sim N(0, V_t) \quad (20)$$

y una ecuación de medida

$$y_t = Z_t x_t + d_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \quad (21)$$

Para escribir nuestro modelo en la forma del espacio de estados, tendremos que diferenciar los casos en los que conocemos el precio al contado de los que no, ya que, en el caso en el que lo conozcamos, en la ecuación de transición habremos de estimar una sola variable estado mientras que en el otro caso tendremos que estimar además del rendimiento por conveniencia el precio al contado. En ambos casos utilizaremos como ecuación de medida la ecuación (17).

4.1.1. Precio al contado desconocido

Este es el caso más general⁵. En este caso, tomamos como variables estado el rendimiento por conveniencia y el precio al contado.

En primer lugar, presentamos la ecuación de transición a la que llegamos discretizando las ecuaciones (4) y (7)

⁴Un proceso es Markoviano si cumple la propiedad de Markov, es decir, si sólo depende del pasado a través del presente. Más formalmente la propiedad podía escribirse como, $\mathbb{P}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t | X_s)$

⁵No es nuestro caso porque nosotros disponemos de datos del precio al contado. Aun así, es interesante presentarlo ya que la variación entre ambos casos es pequeña y se puede obtener en ambos casos la misma expresión para la parte de estimación

$$\begin{aligned}
dX_t &= \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2} - \delta_t \right) dt + \sigma_1 dW_t^1 \Rightarrow X_{t+\Delta t} - X_t = \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta t - \delta_t \Delta t + \xi_t^1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow X_{t+\Delta t} = X_t + \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta t - \delta_t \Delta t + \xi_t^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\delta_t &= \kappa(f(t) - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^2 \Rightarrow \delta_{t+\Delta t} - \delta_t = \kappa f(t)\Delta t - \kappa\delta_t\Delta t + \xi_t^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \delta_{t+\Delta t} = \kappa f(t)\Delta t + (1 - \kappa\Delta t)\delta_t + \xi_t^2
\end{aligned}$$

donde $\xi_t^1 \sim N(0, \sigma_1^2 \Delta t)$, $\xi_t^2 \sim N(0, \sigma_2^2 \Delta t)$ y $Cov(\xi_t^1, \xi_t^2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho \Delta t$

Podemos escribirlo en forma matricial,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{pmatrix} x_t \\ \delta_t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}_t} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \Delta t \\ \kappa f(t) \Delta t \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 - \kappa \Delta t \end{pmatrix}}_{Q_t} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{t-\Delta t} \\ \delta_{t-\Delta t} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}_{t-\Delta t}} + \boldsymbol{\xi}_t \\
\boldsymbol{\xi}_t &\sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \Delta t & \sigma_1 \sigma_2 \rho \Delta t \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho \Delta t & \sigma_2^2 \Delta t \end{pmatrix}}_{V_t} \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

y de forma más compacta

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{c}_t + Q_t \boldsymbol{\alpha}_{t-\Delta t} + \boldsymbol{\xi}_t \quad \boldsymbol{\xi}_t \sim N(\mathbf{0}, V_t) \tag{23}$$

La ecuación de medida vendrá dada por (17). Como t indexará el instante temporal en el que nos encontramos y para no tener problemas con la notación, y sobre todo pensando en la hora de estimar, como los tiempos a vencimiento no serán constantes, llamaremos, $T - t = \tau$ y así, $T = t + \tau$.

A la ecuación (17) le añadimos perturbaciones con media cero y varianza h , para tener en cuenta las diferencias entre oferta y demanda (*bid-ask spreads*), los límites en precios, la no simultaneidad de las observaciones, errores en los datos, etc.

$$\begin{aligned}
\ln(F(S_t, \tau)) = & X_t - \frac{1 - e^{-\kappa(\tau)}}{\kappa} \delta_t + \\
& + \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) \tau + \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} + \\
& + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \left(\alpha + \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n + \kappa} (e^{in\omega(t+\tau)} - e^{in\omega t - \kappa\tau}) \right) - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n} (e^{in\omega(t+\tau)} - e^{in\omega t}) \right) \\
& + \varepsilon_t
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\ln(F(S_t, \tau))} \right\} d_t \quad (24)$$

de manera más compacta

$$Y_t = Z_t \boldsymbol{\alpha}_t + d_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, N \quad (25)$$

donde $Y_t = \ln(F(S_t, \tau))$, $Z_t = [1, -\frac{1-e^{-\kappa\tau}}{\kappa}]$, $\boldsymbol{\alpha}_t = [x_t, \delta_t]'$, es el vector que obtenemos de la ecuación de transición (22), $\varepsilon_t \sim N(0, h)$ y N es el número de observaciones de las que disponemos.

4.1.2. Precio al contado conocido

Este caso es más simple, ya que pasamos de dos, a una única variable inobservable. En este caso la ecuación de transición se reduce a discretizar la ecuación (3), que rige la dinámica del rendimiento por conveniencia. Esto lo hacemos de la misma manera que en el apartado anterior,

$$\begin{aligned}
d\delta_t = \kappa(f(t) - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^2 & \Rightarrow \delta_{t+\Delta t} - \delta_t = \kappa f(t)\Delta t - \kappa\delta_t\Delta t + \xi_t^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \delta_{t+\Delta t} = \kappa f(t)\Delta t + (1 - \kappa\Delta t)\delta_t + \xi_t
\end{aligned}$$

donde $\xi_t^1 \sim N(0, \sigma_1^2 \Delta t)$.

Por tanto, la ecuación de transición, será

$$\underbrace{\delta_t}_{\boldsymbol{\alpha}_t} = \underbrace{\kappa f(t)\Delta t}_{\mathbf{c}_t} + \underbrace{(1 - \kappa\Delta t)}_{Q_t} \underbrace{\delta_{t-\Delta t}}_{\boldsymbol{\alpha}_{t-\Delta t}} + \xi_t \quad \xi_t \sim N(0, \underbrace{\sigma_2^2 \Delta t}_{V_t})$$

que podemos escribirla empleando exactamente la misma notación que en la ecuación (23).

En lo que respecta a la ecuación de medida, un simple cambio en la ecuación (24) es suficiente para obtener nuestra ecuación. Ahora, como conocemos el precio de contado, este se agrupa dentro del término d_t , de forma que,

$$\ln(F(S_t, \tau)) = -\frac{1 - e^{-\kappa(\tau)}}{\kappa} \delta_t + \left. \begin{aligned} &+ X_t + \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) \tau + \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} + \\ &+ \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \left(\alpha + \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n + \kappa} (e^{in\omega(t+\tau)} - e^{in\omega t - \kappa\tau}) \right) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n} (e^{in\omega(t+\tau)} - e^{in\omega t}) \right) \end{aligned} \right\} d_t \quad (26)$$

$$+ \varepsilon_t$$

que podemos reescribir empleando misma ecuación (25)

$$Y_t = Z_t \boldsymbol{\alpha}_t + d_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, N \quad (27)$$

donde $Y_t = \ln(F(S_t, \tau))$ y $\varepsilon_t \sim N(0, h)$, pero ahora, $\boldsymbol{\alpha}_t = \delta_t$ y $Z_t = -\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$.

4.1.3. Modelo general en espacio de estados

En cualquiera de los dos casos las ecuaciones de transición y medida pueden escribirse de la misma manera. Por tanto, el modelo en el espacio de estados viene dado por las siguientes ecuaciones,⁶

<p>ECUACIÓN DE TRANSICIÓN</p> $\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{c}_t + Q_t \boldsymbol{\alpha}_{t-\Delta t} + \boldsymbol{\xi}_t \quad \boldsymbol{\xi}_t \sim N(\mathbf{0}, V_t)$ <p>ECUACIÓN DE MEDIDA</p> $\ln F_t(S_t, \tau) = d_t + Z_t \boldsymbol{\alpha}_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, h)$	(28)
--	------

donde las matrices las hemos definido en los apartados anteriores para cada uno de los casos que planteamos.

⁶Nótese que, en cada caso, las variable o matrices cambian pero podemos dar el modelo de forma genérica para los dos casos. Esto nos será de utilidad al presentar el filtro de Kalman ya que no tendremos que diferenciar el caso en el que conocemos el precio de contado del que no lo conocemos y la estimación se llevara a cabo de forma muy similar

4.2. Estimación mediante el filtro de Kalman

Una vez que tenemos el modelo en la forma del espacio de estados, aplicaremos el filtro de Kalman para estimar nuestros parámetros. Partiremos del modelo en el espacio de estados que hemos dado en (28).

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que nos permite dar una predicción óptima de la(s) variable(s) estado considerando únicamente el valor estimado previamente. La forma en que lo hace, básicamente y sin entrar en mucho detalle, es en dos etapas, una de predicción y otra de corrección.

En primer lugar se da el valor de la variable de estado “*a priori*” en t_i , $\hat{\alpha}_{t_i}^-$, con la estimación del estado en t_{i-1} . También damos la matriz de varianzas y covarianzas del error asociada a la estimación “*a priori*”,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t_i}^- &= \mathbf{c}_t + Q_t \hat{\alpha}_{t_{i-1}} \\ P_{t_i}^- &= Q_t P_{t_{i-1}} Q_t' + V_t\end{aligned}$$

En una segunda fase, la de corrección, se corrige esta estimación teniendo en cuenta el error entre el dato observado y el predicho con la estimación “*a priori*”. Para ello se calculan el error de la predicción “*a priori*”, $\ln(F(S_{t_i}, \tau_{t_i})) - \ln(\widehat{F}(S_{t_i}, \tau_{t_i}))$, y la ganancia de Kalman (*Kalman gain*)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{t_i} &= \ln(F(S_{t_i}, \tau_{t_i})) - (d_{t_i} + Z_{t_i} \hat{\alpha}_{t_i}^-) \\ K_{t_i} &= P_{t_i}^- Z_{t_i}' (Z_{t_i} P_{t_i}^- Z_{t_i}' + H_t)^{-1}\end{aligned}$$

y con estas dos ecuaciones se corrigen la predicción, es decir, se da una estimación *a posteriori*, de la variable estado y de la matriz de varianzas y covarianzas

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t_i} &= \hat{\alpha}_{t_i}^- + K_{t_i} \mathbf{v}_{t_i} \\ P_{t_i} &= (I - K_{t_i} Z_{t_i}) P_{t_i}^-\end{aligned}$$

En cada una de las iteraciones, el filtro de Kalman, nos da la verosimilitud, que será la herramienta que emplearemos para estimar los parámetros. En cada iteración, si llamamos Y al vector de observaciones, $Y = F_t(S_t, \tau)$ y φ al vector de parámetros a estimar,

$$\ell(\varphi|Y_{t_i}) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} |G_{t_i}| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{t_i}' G_{t_i}^{-1} \mathbf{v}_{t_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

o de manera equivalente

$$\ell(\varphi|Y) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^N |G_{t_i}| - \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^N \mathbf{v}_{t_i}' G_{t_i} \mathbf{v}_{t_i}$$

donde $G_{t_i} = Z_{t_i} P_{t_i}^{-1} Z_{t_i}' + H_t$ es la matriz de covarianzas de $Y_{t_i} | Y_{t_i-1}$.

Para obtener la estimación de los parámetros por máxima verosimilitud tenemos que, maximizar esta función, es decir,

$$\hat{\varphi}_{\text{MV}} = \arg \max_{\varphi \in \Phi} \ell(\varphi | Y)$$

5. Datos

Los datos que vamos a utilizar para estimar el modelo son los futuros más cercanos a vencimiento de mercancías de diferentes sectores para poder comprobar el efecto estacional en el rendimiento por conveniencia. Para ello, usaremos una mercancía agrícola, el café en este caso, uno energético, el petróleo y un metal industrial, el aluminio. No utilizaremos un metal precioso ya que este tipo de materias primas, al ser utilizados como producto refugio, suelen tener un efecto estacional menos claro, basado más en el ciclo económico que en factores climáticos, de producción o consumo o de almacenamiento.

Como hemos comentado anteriormente, como aproximación del rendimiento por conveniencia, tomaremos el rendimiento por conveniencia implícito tal como lo hace Lautier(2002), es decir,

$$\delta_t^{\text{imp}} = r - \frac{\ln(F_t(\tau_1)) - \ln(F_t(\tau_2))}{\tau_1 - \tau_2}$$

donde τ_1 y τ_2 indican el vencimiento más cercano y el segundo vencimiento más cercano, respectivamente.

Presentamos a continuación en más detalle los datos que vamos a utilizar y mostramos gráficamente la serie temporal del rendimiento por conveniencia implícito para cada una de las mercancías que vamos a emplear en nuestro análisis en el periodo en el que las vamos a analizar.

5.1. Energía (Petróleo)

En primer lugar, como precio representativo del petróleo, utilizaremos datos semanales de futuros sobre el petróleo Brent, negociado en el *Intercontinental Exchange (ICE)*.⁷ Estos datos corresponden a los 20 futuros con vencimiento más próximo desde el 1/09/2005 hasta el 8/05/2014, lo que supone un total de 454 datos.

⁷Hasta 2005, el mercado de negociación era el mercado internacional del petróleo *International Petroleum Exchange (IPE)*. Los dos primeros futuros que utilizamos vencen en Octubre y Noviembre de 2005 y se negociaron en el IPE.

Mostramos los tiempos a vencimiento de cada uno de los futuros que, debido al proceso de selección, no es constante. Para el primer futuro, este tiempo a vencimiento varía entre 1 y 30 días, es decir, según se acerca el vencimiento del futuro le quedan menos días para vencer y, cuando vence, tomamos el siguiente futuro con vencimiento más próximo.

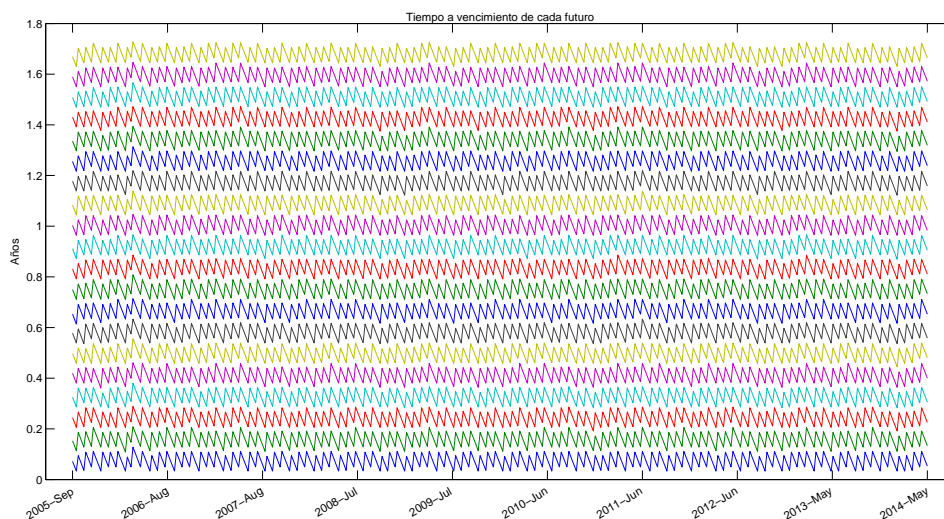


Figura 4: Tiempos a vencimiento de los futuros para el petróleo (años)

Para llevar a cabo nuestro análisis, tomaremos únicamente dos futuros, uno a un plazo medio y otro a un plazo largo. Tomamos el sexto y el duodécimo futuro a vencimiento más cercano. Los vencimientos de estos futuros en la figura 4 vienen indicados, respectivamente, por la primera línea amarilla y la segunda línea morada en la zona inferior. Para el primero el vencimiento varía entre cinco y seis meses, y para el segundo entre once y doce meses.

A continuación presentamos de forma gráfica los futuros que vamos a utilizar con el objetivo de tener una visión del comportamiento que han tenido, tanto el precio al contado como los futuros utilizados en el análisis.

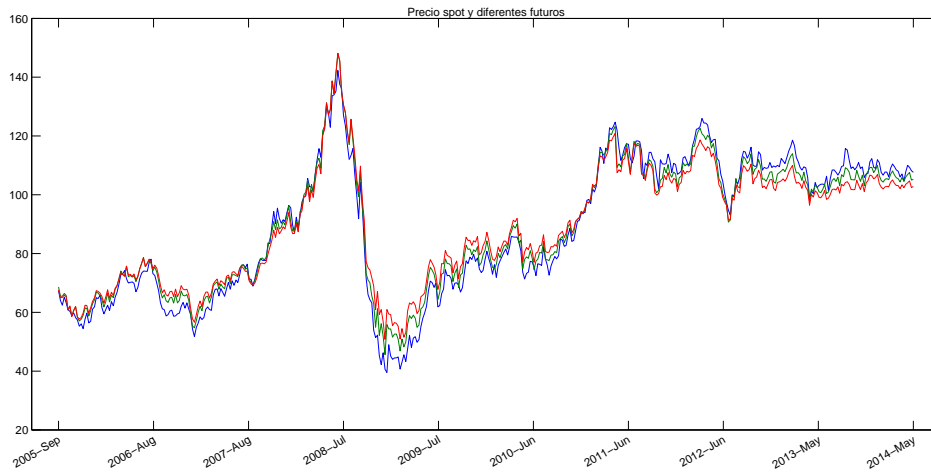


Figura 5: Precio al contado (azul), 6^o(verde) y 12^o (rojo) futuros a más cercano vencimiento para el petróleo

En noviembre de 2008 es de reseñar la caída en el precio que podemos ver. El debilitamiento de las perspectivas económicas, incrementó la probabilidad de que la demanda de energía cayera lo que situó el precio del barril por debajo de \$50.

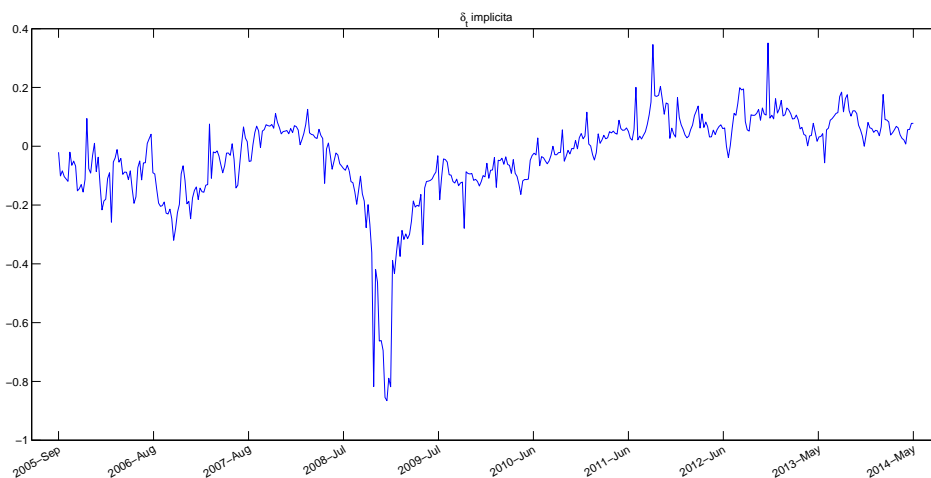


Figura 6: Rendimiento por conveniencia implícito para el petróleo

Como se puede ver en la imagen, la caída del precio del petróleo en noviembre de 2008 supuso una caída muy pronunciada en el valor del rendimiento por conveniencia.

Mostramos por ultimo la media y la desviación típica tanto del precio de contado y los futuros como el del rendimiento por conveniencia.

Tabla 1: Descriptivos crudo

Par.	media	Desviación típica
$F_t(\tau_1)$	88.6145	23.3551
$F_t(\tau_2)$	88.7676	22.7634
$F_t(\tau_3)$	88.9567	22.2578
$F_t(\tau_4)$	89.1018	21.8234
$F_t(\tau_5)$	89.2060	21.4376
$F_t(\tau_6)$	89.2801	21.0837
$F_t(\tau_7)$	89.3223	20.7560
$F_t(\tau_8)$	89.3414	20.4446
$F_t(\tau_9)$	89.3414	20.1549
$F_t(\tau_{10})$	89.3254	19.8824
$F_t(\tau_{11})$	89.2956	19.6259
$F_t(\tau_{12})$	89.2481	19.3781
$F_t(\tau_{13})$	89.1869	19.1441
$F_t(\tau_{14})$	89.1115	18.9205
$F_t(\tau_{15})$	89.0256	18.7092
$F_t(\tau_{16})$	88.9297	18.5093
$F_t(\tau_{17})$	88.8251	18.3193
$F_t(\tau_{18})$	88.7150	18.1370
$F_t(\tau_{19})$	88.6034	17.9662
$F_t(\tau_{20})$	88.4896	17.8053

Par.	media	Desviación típica
δ_t^{imp}	-0.1022	0.2268
S_t	84.5401	19.2887

Media y desviaciones típicas para el rendimiento por conveniencia implícito, el precio al contado y precio de los futuros observados del petróleo

5.2. Metal (Aluminio)

En segundo lugar, utilizaremos datos semanales consistentes en futuros sobre el aluminio. Como precio para el aluminio, utilizaremos *Aluminium 99.7%* que se negocian en el *London Metal Exchange (LME)*. Tenemos datos semanales completos de los 12 futuros a más cercano vencimiento desde el 1/06/2004 hasta el 14/03/2013, lo que supone un total de 481 datos. Como en el caso anterior, únicamente utilizaremos el sexto y duodécimo futuro a más cercano vencimiento.

Mostramos el tiempo a vencimiento de cada uno de los futuros, que tiene una interpretación idéntica a la del caso del aluminio.

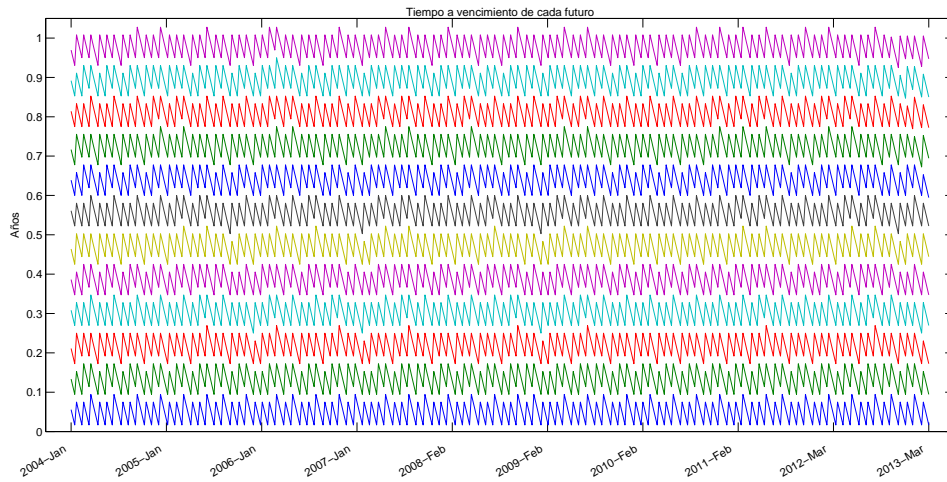


Figura 7: Tiempos a vencimiento de los futuros para el aluminio

A continuación se presenta de forma gráfica los futuros que vamos a utilizar con el objetivo de tener una visión del comportamiento del precio al contado y de los futuros.

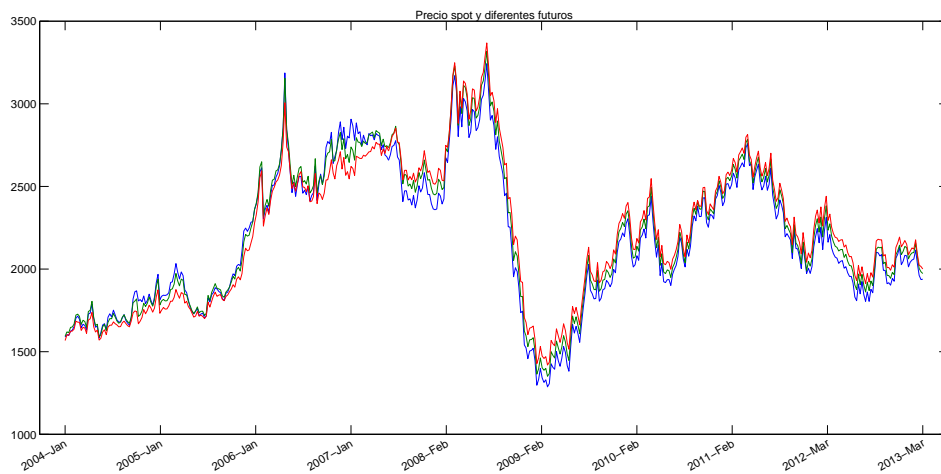


Figura 8: Precio al contado (azul), 6° (verde) y 12° (rojo) futuros a más cercano vencimiento para el aluminio

Se puede apreciar que, entre mediados de 2008 y principios de 2009, el precio del aluminio cae alrededor de un 50 %. La principal explicación es que la crisis financiera de 2008 y la desaceleración global de 2009 destruyeron gran parte de la demanda de bienes duraderos lo que hizo desplomarse la demanda (y, por tanto, el precio) del aluminio.

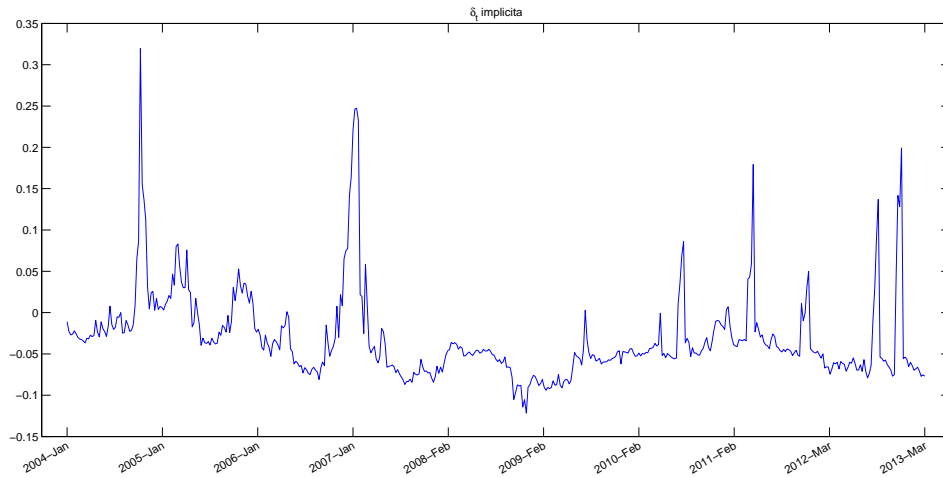


Figura 9: Rendimiento por conveniencia implícito para el aluminio

En el gráfico, vemos que el rendimiento por conveniencia implícito presenta patrones cíclicos que pueden resultarnos de gran interés debido a que queremos explicar la media de largo plazo de este mediante una función periódica.

“*A priori*” el aluminio no se presentaba como un gran candidato para comprobar la efectividad del nuevo modelo que proponemos, ya que, al ser más susceptible a cambios en industrias que lo usan, tiende a fluctuar de forma cíclica con cambios en las condiciones generales macroeconómicas y no con factores puramente estacionales como podría ser el clima.

Como en el caso del petróleo, presentamos la media y desviación típica del precio al contado y de los futuros así como del rendimiento por conveniencia.

Tabla 2: Descriptivos aluminio

Par.	media	Desviación típica
$F_t(\tau_1)$	2187.9	423.44
$F_t(\tau_2)$	2196.8	424.63
$F_t(\tau_3)$	2204.9	425.6
$F_t(\tau_4)$	2210.8	426.21
$F_t(\tau_5)$	2215	426.6
$F_t(\tau_6)$	2218.2	426.7
$F_t(\tau_7)$	2220.7	426.42
$F_t(\tau_8)$	2222.5	425.92
$F_t(\tau_9)$	2223.9	425.17
$F_t(\tau_{10})$	2224.9	424.42
$F_t(\tau_{11})$	2225.5	423.7
$F_t(\tau_{12})$	2226.1	422.97

Par.	media	Desviación típica
δ_t^{imp}	-0.031027	0.05383
S_t	2183.4	423.1

Media y desviaciones típicas para el rendimiento por conveniencia implícito, el precio al contado y precio de los futuros observados del aluminio

5.3. Agrícola (Café)

Por último, utilizaremos datos semanales consistentes en futuros sobre el café. Como precio para el café, utilizaremos *Brazilian coffee* que se negocian en el *Coffee, Sugar and Cocoa Exchange (CSCE)*. Tenemos datos completos de los 9 futuros a más cercano vencimiento desde el 1/01/2003 hasta el 15/01/2014, lo que supone un total de 577 datos. Aunque nosotros tendremos en cuenta únicamente el tercer futuro y sexto futuro a más cercano vencimiento. Debido a que los vencimientos en el caso de estos futuros son un poco diferentes, el tercer y sexto futuro nos dan vencimientos similares a los que nos daban el sexto y el duodécimo para las dos mercancías anteriores.

Las mercancías sobre bienes agrícolas se presentan “*a priori*” como los mejores aliados de este estudio, ya que el componente cíclico está muy marcado al venir dado por factores climáticos que suelen tener una componente periódica muy importante.

Llama la atención que los vencimientos para esta mercancía son distintos. Esto se debe a que no todos los meses hay un futuro. Más concretamente, tenemos futuros solo para los meses de marzo, mayo, julio, septiembre y diciembre, lo que le da este aspecto al gráfico de tiempo a vencimiento de cada futuro a más cercano vencimiento.

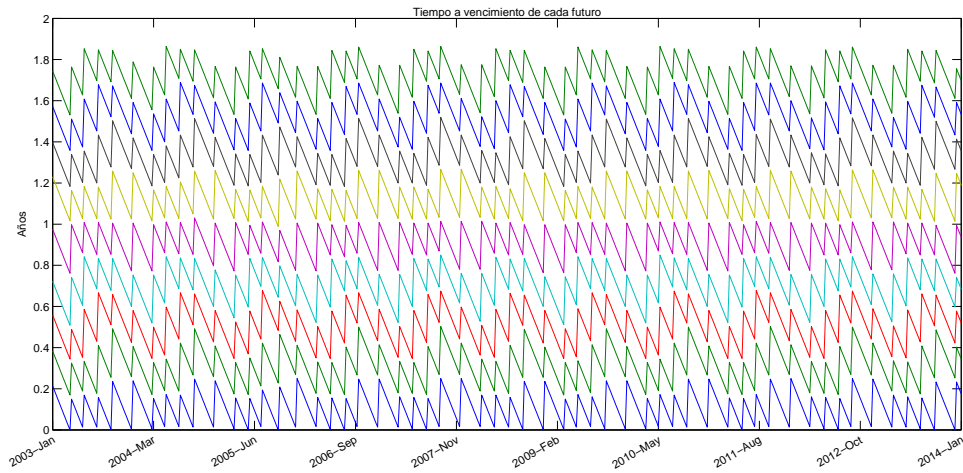


Figura 10: Tiempos a vencimiento de los futuros para el café

Como hemos comentado anteriormente, tomamos sólo los futuros tercero y sexto ya que, primero, tenemos menos futuros, y el vencimiento que abarcan estos son más amplios. Vemos el comportamiento que han tenido tanto el precio de contado como los futuros que vamos a utilizar.

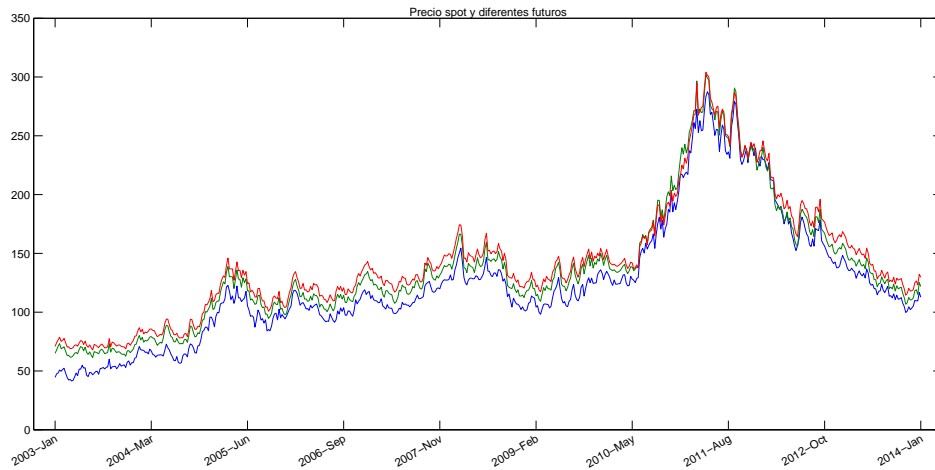


Figura 11: Precio de contado (azul), 3º(verde) y 6º (rojo) futuros a más cercano vencimiento para el café

Mostramos también la dinámica que ha seguido en ese período el rendimiento por conveniencia implícito.

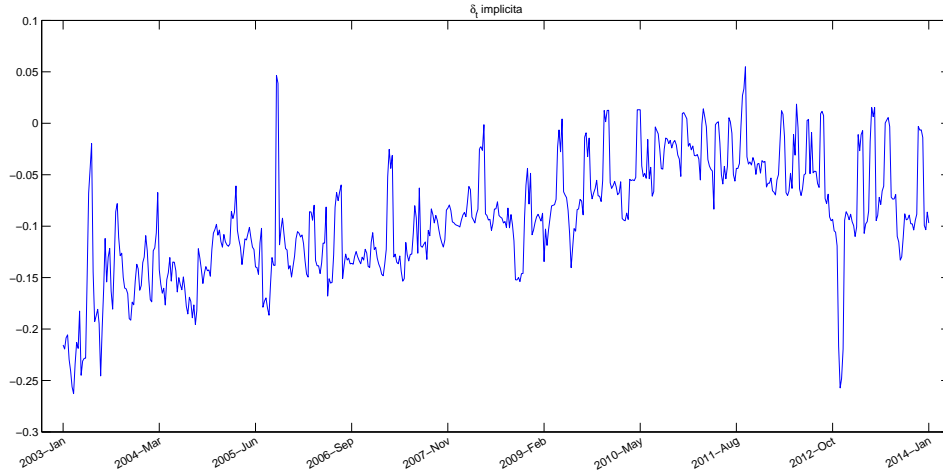


Figura 12: Rendimiento por conveniencia implícito para el café

Gráficamente, parece que el rendimiento por conveniencia implícito para el café presenta patrones cíclicos que se repiten con una frecuencia anual o inferior al año. Damos estadísticos descriptivos como en los casos anteriores.

Tabla 3: Descriptivos café

Par.	media	Desviación típica
δ_t^{imp}	0.0926	0.0573
S_t	124.9937	52.9421

Par.	media	Desviación típica
$F_t(\tau_1)$	131.3570	52.0395
$F_t(\tau_2)$	133.8585	51.8626
$F_t(\tau_3)$	136.3254	51.7553
$F_t(\tau_4)$	138.4812	51.4535
$F_t(\tau_5)$	140.4143	50.8863
$F_t(\tau_6)$	142.1854	50.0952
$F_t(\tau_7)$	143.6482	49.1105
$F_t(\tau_8)$	144.8987	48.1279
$F_t(\tau_9)$	145.9928	47.2051

Media y desviaciones típicas para CY, precio spot y precio de los futuros observados del café

6. Estimación dentro de la muestra

Anteriormente hemos presentado los precios que seguirán los futuros bajo el enfoque de cada uno de los modelos mediante las ecuaciones (1), (2) y (17). La estimación

de los parámetros la haremos de forma diferente para el Modelo 1 (tanto en el Modelo 1.1 cómo en el Modelo 1.2) y para los Modelos 2 y 3.

Para estimar los parámetros estructurales del primer modelo minimizaremos los errores de estimación que abordaremos mediante el esquema de mínimos cuadrados no ponderados, como lo hacen Moreno y Platanía (2013). Los parámetros en los otros dos modelos, se estiman los parámetros maximizando la función de verosimilitud proporcionada por el filtro de Kalman.

Detallamos cómo llevaremos a cabo las estimaciones con los diferentes modelos.

Modelo 1 Queremos minimizar el error del modelo que vendrá dado por una ecuación

$$\ln(F(S_t, t, T)) - e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) = \sum_{i=1}^l \beta_i z_{it} + u_t$$

dónde, l es el número de parámetros a estimar y,

$$\begin{aligned} z_{1t} &= 1 - e^{-\kappa(T-t)} \\ z_{2t} &= \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{4\kappa} \\ \beta_1 &= \alpha; \beta_2 = \sigma_S^2 \end{aligned}$$

y $\Re \left[(A_{x,n_1} + iA_{y,n_1}) \frac{\kappa}{\kappa + in_1\omega} (e^{in_1\omega s} - e^{-\kappa(s-t) + in_1\omega t}) \right]$ viene dado por $\beta_3 z_{3t} + \beta_4 z_{4t}$.

Para el Modelo 1.2 tendremos además,

$\Re \left[(A_{x,n_2} + iA_{y,n_2}) \frac{\kappa}{\kappa + in_2\omega} (e^{in_2\omega s} - e^{-\kappa(s-t) + in_2\omega t}) \right]$ que viene dado por $\beta_5 z_{5t} + \beta_6 z_{6t}$.

Modelos 2 y 3 Nos valemos de la función de verosimilitud que nos da el filtro de Kalman. Así variaremos los parámetros de nuestro modelo para maximizar la función de verosimilitud que hemos presentado en la sección 4.2. Esto es,

$$\hat{\varphi}_{MV} = \arg \max_{\varphi \in \Phi} \ell(\varphi|Y)$$

dónde

$$\ell(\varphi|Y) = -\frac{NOBS}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^{NOBS} |F_{t_i}| - \frac{1}{2} \sum_{t_i=1}^{NOBS} \mathbf{v}'_{t_i} F_{t_i} \mathbf{v}_{t_i}$$

Los parámetros a estimar son:

$\varphi = \{\alpha, \kappa, \sigma_S, \sigma_\delta, \rho, \lambda, h\}$ para el Modelo 2,

$\varphi = \{\kappa, \sigma_S, \sigma_\delta, \rho, \lambda, A_0, A_{x,n_1}, A_{y,n_1}, \omega, h\}$ para el Modelo 3.1 y

$\varphi = \{\kappa, \sigma_S, \sigma_\delta, \rho, \lambda, A_0, A_{x,n_1}, A_{y,n_1}, A_{x,n_2}, A_{y,n_2}, \omega, h\}$ para el Modelo 3.2

Es importante enfatizar en el caso de que al estimar, el filtro de Kalman también esta estimando la variable no observable y por tanto, obtenemos una serie temporal estimada para el rendimiento por conveniencia.

Por último, antes de proceder a mostrar los resultados obtenidos de la estimación, resulta interesante la obtención del múltiplo de la frecuencia fundamental. Moreno y Platanía (2013), calculan el espectro de la parte del precio del futuro que no queda recogida parte estimada que no corresponde a la función periódica. De esta manera, demuestran que con un máximo de tres términos en la serie de Fourier debería ser suficiente para un buen ajuste en el precio del futuro que no queda recogido por la estimación sin tener en cuenta la serie.

Nosotros por simplificar el análisis seguimos otra metodología que también se desprende de la tesis. Hacemos una malla en el parámetro ω y estimamos nuestro modelo para cada valor de esta malla. Para cada una de las estimaciones, calcularemos la suma de cuadrados de los residuos o la función de verosimilitud. Vemos para qué valores de ω obtenemos los dos máximos (en el caso de que lo hayamos hecho con la verosimilitud) o los mínimos (en el caso de que hayamos calculado la suma de los cuadrados de los residuos) locales mayores. Calculamos el valor de n que hace que $n \cdot \omega_1 = \omega_2$, y así obtenemos el múltiplo de la frecuencia fundamental.

6.1. Resultados

Mostramos los resultados obtenidos de las estimaciones. Los parámetros no son directamente comparables a los del Modelo 1 o tienen una interpretación distinta a los del Modelo 3, aun así comentaremos las similitudes o diferencias entre algunos de ellos. Cabe destacar como ya lo hemos hecho antes en la presentación del Modelo 2, que éste es un modelo anidado en el nuestro, por tanto, tomando $A_{x,n_1} = A_{y,n_1} = A_{x,n_2} = A_{y,n_2} = 0$ obtenemos el Modelo 2.

Presentamos, comentamos y representamos gráficamente los resultados que hemos obtenido para cada uno de los modelos.

Energía (Petróleo)

En primer lugar representamos el rendimiento por conveniencia estimado tanto con el Modelo 2 como con Modelo 3.1, para cada uno de los futuros que analizamos.

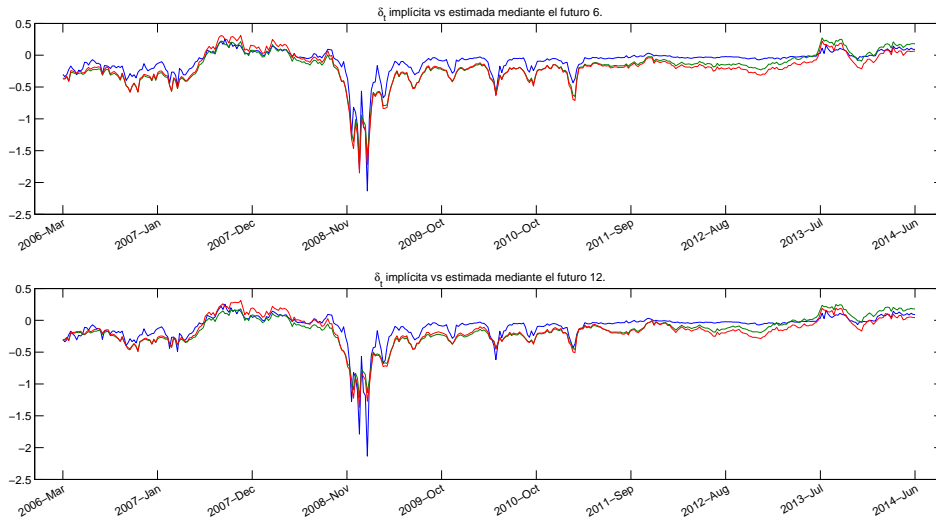


Figura 13: Rendimiento por conveniencia estimados e implícito para el petróleo
 Línea azul: δ_t^{imp}
 Línea verde: $\hat{\delta}_t$ estimada con el Modelo 2
 Línea roja: $\hat{\delta}_t$ estimada con el Modelo 3.1

Podemos observar que el rendimiento por conveniencia estimado por medio de ambos modelos se ajusta bien al implícito, si bien en el periodo en el que dura la recesión global el estimado por los Modelos 2 y 3.1, es sistemáticamente inferior al implícito en el caso de ambos futuros.

Los parámetros estimados por los modelos que hemos presentado se resumen en las siguientes tablas así como gráficos que representan el futuro observado y el estimado y el error absoluto entre estos.

Tabla 4: Parámetros estimados para el 6° futuro del petróleo

Par.	Modelo 1,1 $n_1=1$	Modelo 1,2 $n_1=1, n_2=13$	Modelo 2	Modelo 3,1 $n_1=1$	Modelo 3,2 $n_1=1, n_2=11$
$\hat{\alpha}$	2.082(0.002)	1.779(0.406)	-0.11(0.030)	-	-
$\hat{\kappa}$	0.437(0.004)	0.419(0.003)	1.116(0.037)	2.019(0.003)	2.053(0.166)
$\hat{\sigma}_s$	1.546(0.007)	1.568(0.118)	1.960(0.028)	1.157(0.002)	4.005(0.093)
$\hat{\sigma}_\delta$	-	-	0.158(0.016)	0.197(0.009)	0.197(0.017)
$\hat{\rho}$	-	-	0.463(0.057)	0.358(0.042)	0.241(0.039)
$\hat{\lambda}$	-	-	-0.35(0.007)	-0.58(0.036)	-0.60(0.082)
\hat{A}_0	-	-	-	-0.13(0.012)	-0.18(0.008)
\hat{A}_{x,n_1}	-0.22(0.006)	-13.6(7.710)	-	0.029(0.034)	0.008(0.028)
\hat{A}_{y,n_1}	-0.14(0.013)	-13.5(7.708)	-	0.076(0.028)	0.059(0.036)
\hat{A}_{x,n_2}	-	-0.05(0.004)	-	-	0.055(0.036)
\hat{A}_{y,n_2}	-	0.098(0.004)	-	-	-0.00(0.002)
$\hat{\omega}$	0.735(0.016)	0.613(0.001)	-	0.650(0.042)	0.543(0.012)
\hat{h}	-	-	0.000(0.000)	0.000(0.000)	0.000(0.000)
$\sum \hat{u} $	9.272	8.521	5.778	5.740	5.727
$\sum \hat{u}^2$	0.391	0.311	0.161	0.160	0.161

Parámetros estimados para el sexto futuro a más cercano vencimiento para el petróleo,
 $\hat{u}_t = \ln(F_t(S_t, t, T)) - \ln(F_t(S_t, t, T))$

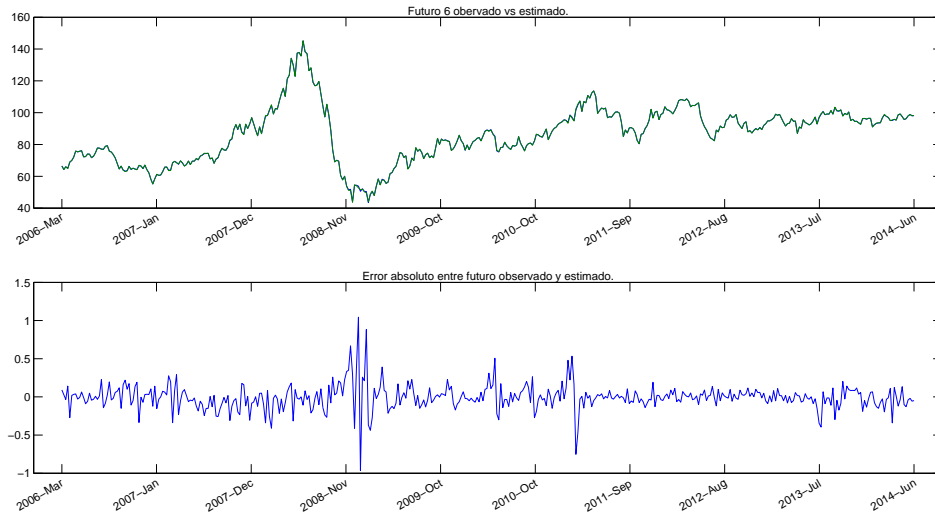


Figura 14: Futuro y estimación para el sexto futuro del petróleo en la imagen de arriba y en la imagen de abajo la diferencia absoluta entre estos dos

Tabla 5: Parámetros estimados para el 12º futuro del petróleo

Par.	Modelo 1,1 $n_1=1$	Modelo 1,2 $n_1=1, n_2=13$	Modelo 2	Modelo 3,1 $n_1=1$	Modelo 3,2 $n_1=1, n_2=11$
$\hat{\alpha}$	2.382(0.002)	1.865(0.425)	-0.12(0.037)	-	-
$\hat{\kappa}$	0.341(0.002)	0.321(0.003)	0.994(0.020)	1.700(0.000)	1.689(0.015)
$\hat{\sigma}_s$	1.300(0.005)	1.347(0.116)	3.986(0.013)	4.080(0.007)	9.987(0.001)
$\hat{\sigma}_\delta$	-	-	0.144(0.016)	0.191(0.004)	0.190(0.013)
$\hat{\rho}$	-	-	0.404(0.003)	0.963(0.002)	0.995(0.005)
$\hat{\lambda}$	-	-	-0.09(0.005)	0.258(0.017)	1.208(0.037)
\hat{A}_0	-	-	-	-0.15(0.034)	-0.25(0.001)
\hat{A}_{x,n_1}	-0.17(0.022)	2.651(0.215)	-	0.038(0.002)	0.017(0.022)
\hat{A}_{y,n_1}	-0.00(0.031)	2.757(0.213)	-	0.057(0.018)	0.035(0.009)
\hat{A}_{x,n_2}	-	-0.16(0.004)	-	-	0.205(0.001)
\hat{A}_{y,n_2}	-	-0.00(0.006)	-	-	-0.00(0.001)
$\hat{\omega}$	0.635(0.018)	0.636(0.001)	-	0.652(0.004)	0.514(0.012)
\hat{h}	-	-	0.000(0.000)	0.000(0.000)	0.000(0.000)
$\sum \hat{u}_t $	12.69	10.94	4.894	4.857	4.846
$\sum \hat{u}_t^2$	0.650	0.474	0.109	0.109	0.108

Parámetros estimados para el duodécimo futuro a más cercano vencimiento para el petróleo,
 $\hat{u}_t = \ln(F_t(S_t, t, T)) - \ln(F_t(\hat{S}_t, t, T))$

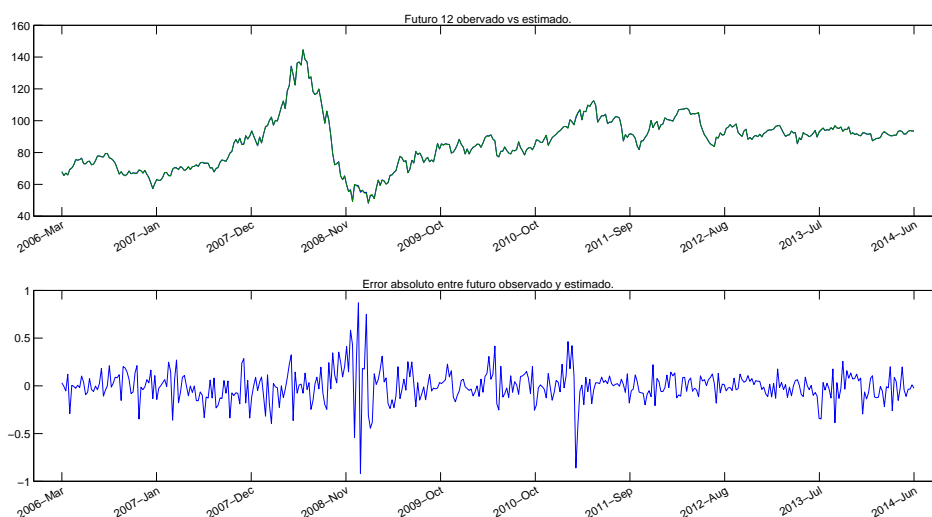


Figura 15: Futuro y estimación para el duodécimo futuro del petróleo en la imagen de arriba y en la imagen de abajo la diferencia absoluta entre estos dos

Como era de esperar, los mayores errores de ajuste se dan en el periodo en el que

más cambia el precio del petróleo, pues son cambios bruscos en los que la volatilidad es mayor, y que los modelos tienen mayor dificultad para recoger.

En lo que respecta a los parámetros, observamos que $\hat{\omega}$ es de entorno a 0.65 tanto para el precio del futuro, que es la que estima el Modelo 1 como para el rendimiento por conveniencia que es el que estima el Modelo 3. Esto quiere decir que tanto el rendimiento por conveniencia como el precio tienen una frecuencia de entre 8 y 10 años que guía tanto el precio como el rendimiento por conveniencia de los futuros del petróleo. Era de esperar un comportamiento parecido tanto en el precio como en el rendimiento por conveniencia, y éso es precisamente lo que acabamos de comprobar. El múltiplo de la frecuencia fundamental es de en torno a 10, lo que quiere decir que como segunda frecuencia que guíe tanto el precio de los futuros como el rendimiento por conveniencia, se presenta la anual.

Comprobamos que salvo para el término de difusión del precio, los parámetros más relevantes de los modelos 2 y 3 como son el coeficiente de correlación y el término de difusión para el rendimiento por conveniencia son valores cercanos.

Por último comentar que para el precio de los futuros del petróleo, el incorporar la media de reversión no supone una gran ventaja a la hora de explicar el precio del futuro. De hecho para el sexto futuro el incorporar el Modelo 3.1 reduce en un 0.7% la suma de errores absoluta sobre el Modelo 2, y el Modelo 3.2 sólo la reduce en un 0.9%. Lo mismo pasa para el duodécimo futuro donde el Modelo 3.1 reduce en sólo un 0.8% y el Modelo 3.2 en un 1%.

Metal (Aluminio)

Como en el caso anterior, representamos el rendimiento por conveniencia estimado tanto con el Modelo 2 como con Modelo 3.1, para cada uno de los futuros que analizamos al implícito.

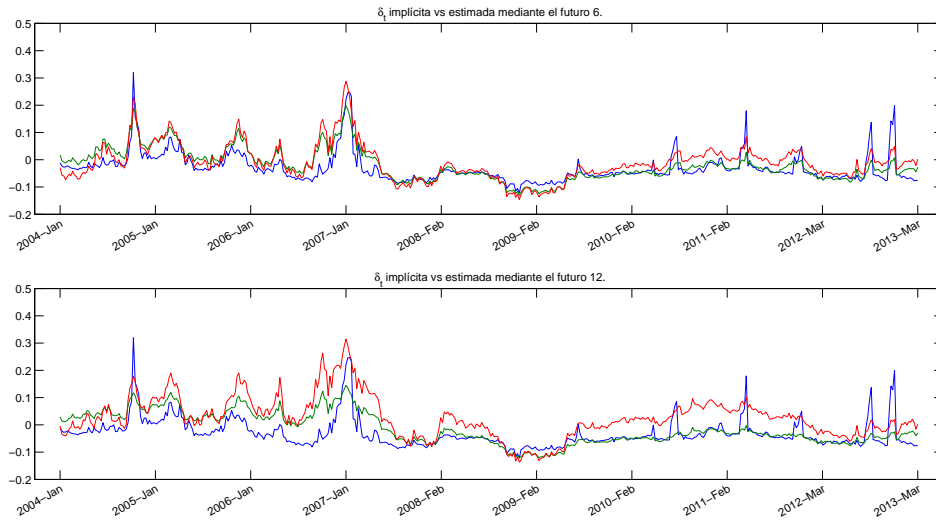


Figura 16: Rendimiento por conveniencia estimados e implícito para el aluminio
 Línea azul: δ_t^{imp}
 Línea verde: $\hat{\delta}_t$ estimada con el Modelo 2
 Línea roja: $\hat{\delta}_t$ estimada con el Modelo 3.1

Podemos observar que el rendimiento por conveniencia estimado por medio de ambos modelos se ajusta bien al implícito siempre y cuándo el vencimiento no sea a muy largo plazo. Cuando estamos con futuros a más largo plazo vemos que el estimado por medio del Modelo 2 se ajusta bastante bien al implícito aunque en algunos periodos es superior a este, pero que el estimado por medio del Modelo 3.1 es superior al implícito casi en todo el periodo de estudio.

Los parámetros estimados por los modelos que hemos presentado se resumen en las siguientes tablas así como gráficos que representan el futuro observado y el estimado y el error absoluto entre estos.

Tabla 6: Parámetros estimados para el 6° futuro del aluminio

Par.	Modelo 1,1 $n_1=1$	Modelo 1,2 $n_1=1, n_2=7$	Modelo 2	Modelo 3,1 $n_1=1$	Modelo 3,2 $n_1=1, n_2=15$
$\hat{\alpha}$	2.832(0.036)	7.977(0.012)	-0.01(0.000)	-	-
$\hat{\kappa}$	0.073(0.002)	0.070(0.002)	1.531(0.000)	3.501(0.000)	3.533(0.000)
$\hat{\sigma}_s$	0.882(0.511)	-9.96(0.156)	1.664(0.000)	1.650(0.000)	0.132(0.000)
$\hat{\sigma}_\delta$	-	-	0.105(0.000)	0.156(0.000)	0.154(0.002)
$\hat{\rho}$	-	-	0.745(0.001)	0.678(0.000)	0.301(0.000)
$\hat{\lambda}$	-	-	0.139(0.000)	0.192(0.000)	-0.37(0.000)
\hat{A}_0	-	-	-	0.004(0.000)	-0.10(0.001)
\hat{A}_{x,n_1}	-0.52(0.052)	-0.67(0.019)	-	0.055(0.001)	0.081(0.000)
\hat{A}_{y,n_1}	0.412(0.076)	0.087(0.011)	-	0.018(0.000)	0.006(0.000)
\hat{A}_{x,n_2}	-	-0.00(0.020)	-	-	0.022(0.000)
\hat{A}_{y,n_2}	-	-0.20(0.013)	-	-	-0.00(0.000)
$\hat{\omega}$	0.406(0.013)	0.469(0.001)	-	0.404(0.000)	0.406(0.000)
\hat{h}	-	-	0.000(0.000)	0.000(0.000)	0.000(0.000)
$\sum \hat{u} $	5.469	4.993	0.048	0.023	0.012
$\sum \hat{u}^2$	0.107	0.083	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$6,7 \cdot 10^{-6}$

Parámetros estimados para el sexto futuro a más cercano vencimiento para el aluminio,
 $\hat{u}_t = \ln(F_t(S_t, t, T)) - \ln(F_t(S_t, t, T))$

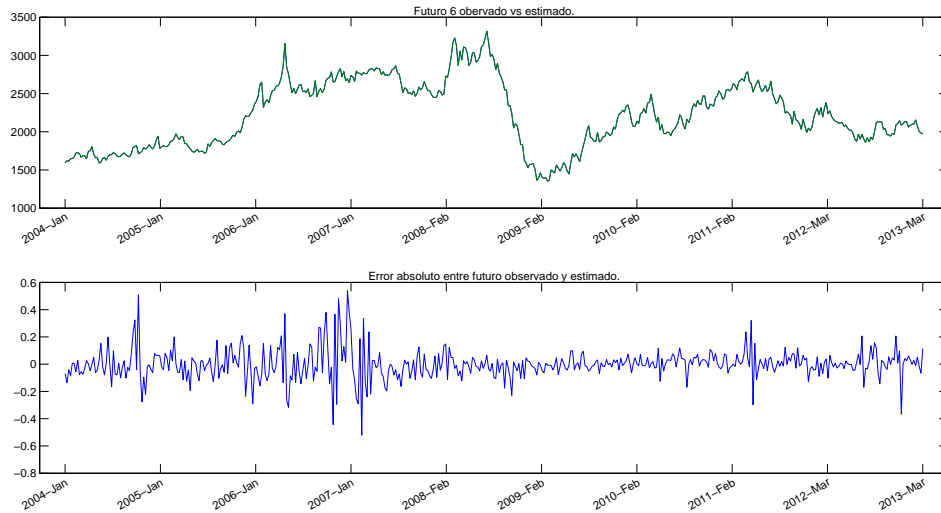


Figura 17: Futuro y estimación para el sexto futuro del aluminio en la imagen de arriba y en la imagen de abajo la diferencia absoluta entre estos dos

Tabla 7: Parámetros estimados para el 12º futuro del aluminio

Par.	Modelo 1,1 $n_1=1$	Modelo 1,2 $n_1=1, n_2=8$	Modelo 2	Modelo 3,1 $n_1=1$	Modelo 3,2 $n_1=1, n_2=17$
$\hat{\alpha}$	4.501(0.009)	5.098(0.009)	0.007(1.215)	-	-
$\hat{\kappa}$	0.095(0.001)	0.094(0.001)	0.695(3.126)	2.215(0.013)	2.205(0.000)
$\hat{\sigma}_s$	0.794(0.007)	0.706(0.006)	1.236(5.582)	3.094(0.007)	7.870(0.004)
$\hat{\sigma}_\delta$	-	-	0.078(5.546)	0.140(0.008)	0.140(0.001)
$\hat{\rho}$	-	-	0.880(2.321)	0.230(0.042)	0.713(0.003)
$\hat{\lambda}$	-	-	0.129(9.421)	0.205(0.029)	0.933(0.000)
\hat{A}_0	-	-	-	0.041(0.007)	0.044(0.000)
\hat{A}_{x,n_1}	-0.60(0.027)	-0.56(0.013)	-	0.061(0.013)	0.031(0.001)
\hat{A}_{y,n_1}	0.181(0.045)	0.278(0.011)	-	0.004(0.001)	-0.04(0.007)
\hat{A}_{x,n_2}	-	-0.52(0.021)	-	-	0.070(0.001)
\hat{A}_{y,n_2}	-	-0.22(0.041)	-	-	0.000(0.000)
$\hat{\omega}$	0.413(0.008)	0.395(0.001)	-	0.428(0.014)	0.598(0.005)
\hat{h}	-	-	0.000(0.000)	0.000(0.000)	0.000(0.000)
$\sum \hat{u} $	8.766	8.185	0.072	0.022	0.013
$\sum \hat{u}^2$	0.249	0.216	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-6}$

Parámetros estimados para el duodécimo futuro a más cercano vencimiento para el aluminio,
 $\hat{u}_t = \ln(F_t(S_t, t, T)) - \ln(\widehat{F}_t(S_t, t, T))$

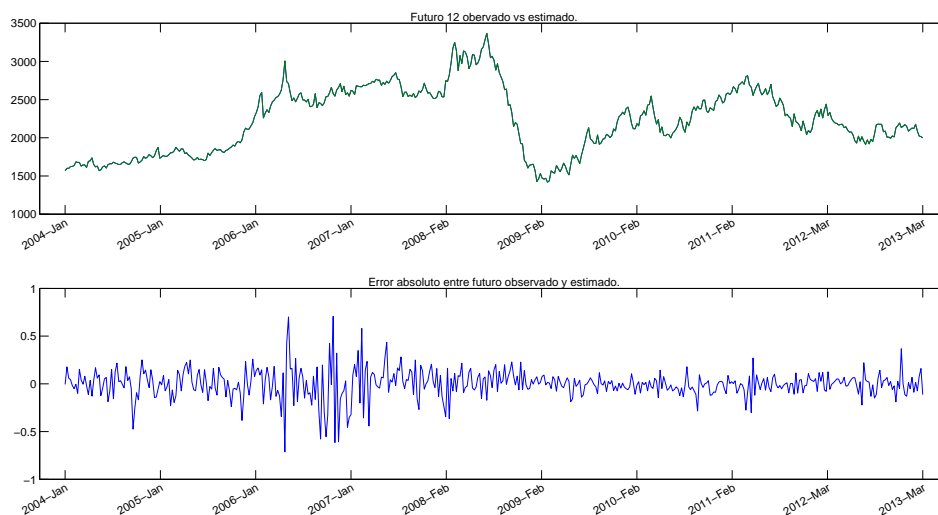


Figura 18: Futuro y estimación para el duodécimo futuro del aluminio en la imagen de arriba y en la imagen de abajo la diferencia absoluta entre estos dos

Como en el caso anterior, los mayores errores de ajuste se dan en el periodo en

el que más cambia el precio del aluminio como era de esperar pues son cambios más bruscos que los modelos tienen mayor dificultad para recoger.

En lo que respecta a los parámetros, observamos que $\hat{\omega}$ es de entorno a 0.45 tanto para el precio, que es la que estima el Modelo 1 como para el rendimiento por conveniencia que es la que estima el Modelo 3. Como en el caso anterior, esto nos confirma que tanto el rendimiento por conveniencia como el precio tienen una frecuencia de entre 13 y 15 años que guía tanto el precio como el rendimiento por conveniencia en el caso del aluminio. Como antes, era esperable un comportamiento parecido tanto en el precio como en el rendimiento por conveniencia, y éso es precisamente lo que acabamos de comprobar. El múltiplo de la frecuencia fundamental es de en torno a 16, lo que quiere decir que como segunda frecuencia que guíe tanto el precio de los futuros como el rendimiento por conveniencia, se presenta la anual.

En este caso, aunque no fuera el más esperable, el incorporar la media de reversión sí que supone una gran ventaja a la hora de explicar el precio del futuro. De hecho para el sexto futuro el incorporar el Modelo 3.1 reduce en un 52% la suma de errores absoluta sobre el Modelo 2, es decir, a menos de la mitad, y el Modelo 3.2 la reduce un 75%. Para el duodécimo futuro esta mejora es incluso mayor, donde el Modelo 3.1 reduce un 69% y el Modelo 3.2 en casi un 82%.

Agrícola (Café)

Por último contraponemos el rendimiento por conveniencia tanto con el Modelo 2 como con Modelo 3.1, para cada uno de los futuros que analizamos en el caso del café.

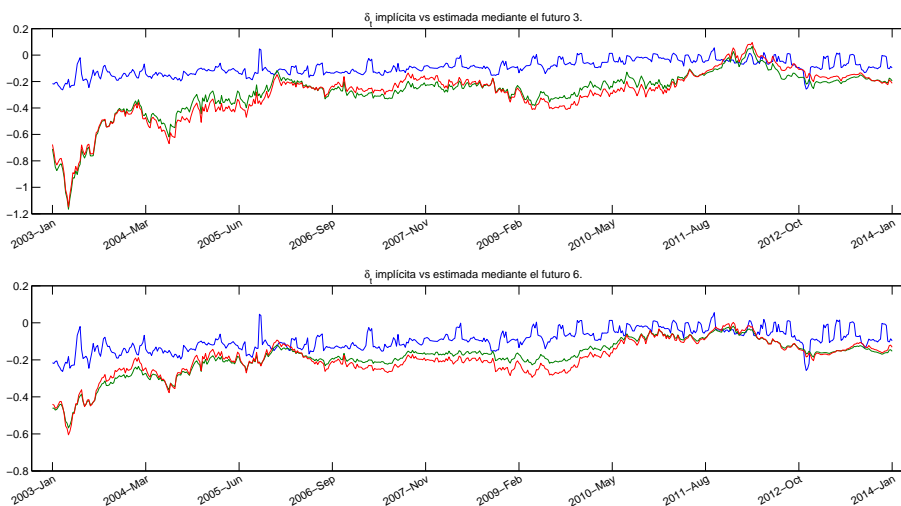


Figura 19: Rendimiento por conveniencia estimados e implícito para el café

Línea azul: $\hat{\delta}_t^{imp}$

Línea verde: $\hat{\delta}_t$ estimada con el Modelo 2

Línea roja: $\hat{\delta}_t$ estimada con el Modelo 3.1

Pese a que “*a priori*” hubiéramos pensado que este era el que mejor resultado debía dar, debido a comportamiento cíclico producido por las épocas de cosechas y el clima en las mercancías agrícolas, no hemos obtenido semejantes resultados.

Comparando el rendimiento por conveniencia implícito y el del modelo 2 y el Modelo 3, estos dos últimos, están dando un precio muy por debajo del que da la implícita. Y si nos fijamos en los parámetros estimados, y en los errores de ajuste,

Tabla 8: Parámetros estimados para el 3^{er} futuro del café

Par.	Modelo 1,1 $n_1=1$	Modelo 1,2 $n_1=1, n_2=10$	Modelo 2	Modelo 3,1 $n_1=1$	Modelo 3,2 $n_1=1, n_2=6$
$\hat{\alpha}$	0.012(0.001)	-0.33(0.273)	-0.32(1.685)	-	-
$\hat{\kappa}$	0.322(0.004)	0.313(0.002)	2.018(0.079)	2.091(0.342)	3.518(0.184)
$\hat{\sigma}_S$	1.947(0.013)	1.983(0.044)	8.424(0.056)	8.759(0.066)	1.364(0.038)
$\hat{\sigma}_\delta$	-	-	0.253(0.008)	0.258(0.047)	0.346(0.020)
$\hat{\rho}$	-	-	0.999(0.023)	0.998(0.180)	0.977(0.002)
$\hat{\lambda}$	-	-	1.329(0.005)	1.435(0.114)	-2.00(0.056)
\hat{A}_0	-	-	-	-0.32(0.041)	-0.71(0.017)
\hat{A}_{x,n_1}	0.159(0.017)	0.192(0.007)	-	-0.04(0.035)	-0.05(0.017)
\hat{A}_{y,n_1}	-0.07(0.017)	-0.03(0.008)	-	0.023(0.042)	0.018(0.022)
\hat{A}_{x,n_2}	-	-0.07(0.013)	-	-	-0.03(0.032)
\hat{A}_{y,n_2}	-	0.054(0.013)	-	-	-0.00(0.000)
$\hat{\omega}$	0.738(0.006)	0.759(0.002)	-	1.211(0.127)	1.148(0.024)
\hat{h}	-	-	0.000(0.000)	0.000(0.000)	0.000(0.000)
$\sum \hat{u} $	15.82	15.73	4.880	4.864	4.764
$\sum \hat{u}^2$	0.758	0.746	0.076	0.074	0.070

Parámetros estimados para el tercer futuro a más cercano vencimiento para el café,
 $\hat{u}_t = \ln(F_t(S_t, t, T)) - \ln(\widehat{F_t}(S_t, t, T))$

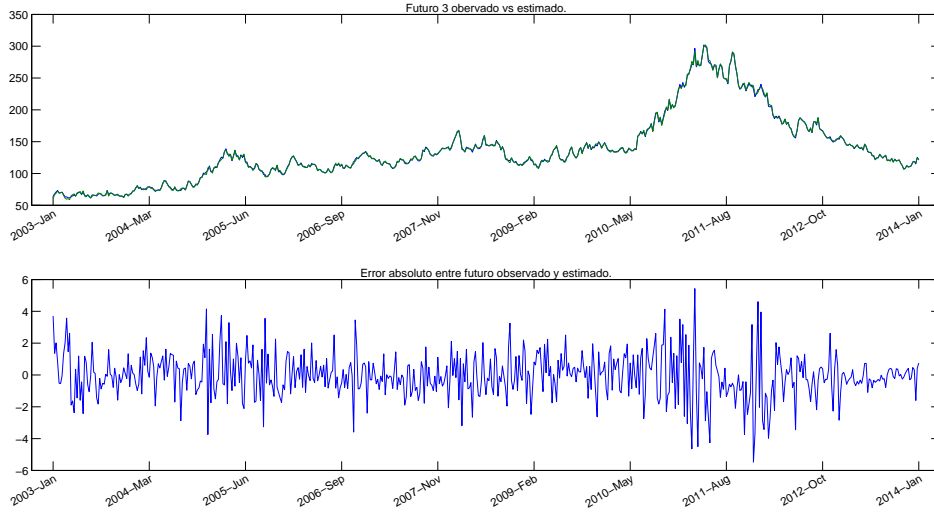


Figura 20: Futuro y estimación para el tercer futuro del café en la imagen de arriba y en la imagen de abajo la diferencia absoluta entre estos dos

Tabla 9: Parámetros estimados para el 6º futuro del café

Par.	Modelo 1,1 $n_1=1$	Modelo 1,2 $n_1=1, n_2=4$	Modelo 2	Modelo 3,1 $n_1=1$	Modelo 3,2 $n_1=1, n_2=4$
$\hat{\alpha}$	0.877(0.000)	4.906(0.783)	-0.18(0.009)	-	-
$\hat{\kappa}$	0.195(0.001)	0.104(0.001)	0.973(0.001)	1.120(0.001)	2.555(0.010)
$\hat{\sigma}_S$	1.421(0.003)	1.802(0.057)	2.736(0.009)	5.417(0.001)	5.386(0.004)
$\hat{\sigma}_\delta$	-	-	0.118(0.007)	0.127(0.000)	0.226(0.013)
$\hat{\rho}$	-	-	0.617(0.027)	0.712(0.018)	0.667(0.011)
$\hat{\lambda}$	-	-	-0.02(0.000)	0.243(0.031)	-0.50(0.009)
\hat{A}_0	-	-	-	-0.19(0.003)	-0.54(0.014)
\hat{A}_{x,n_1}	-0.29(0.007)	-97.7(3.905)	-	-0.04(0.023)	-0.04(0.020)
\hat{A}_{y,n_1}	-0.09(0.013)	-88.6(3.481)	-	0.058(0.019)	0.039(0.016)
\hat{A}_{x,n_2}	-	-1.45(0.078)	-	-	0.015(0.014)
\hat{A}_{y,n_2}	-	-0.20(0.050)	-	-	-0.00(0.001)
$\hat{\omega}$	3.746(0.005)	0.118(0.001)	-	1.218(0.010)	1.155(0.002)
\hat{h}	-	-	0.000(0.000)	0.000(0.000)	0.000(0.000)
$\sum \hat{u} $	14.59	14.19	4.730	4.690	4.663
$\sum \hat{u}^2$	0.632	0.539	0.071	0.069	0.066

Parámetros estimados para el sexto futuro a más cercano vencimiento para el café,
 $\hat{u}_t = \ln(F_t(S_t, t, T)) - \ln(\widehat{F}_t(S_t, t, T))$

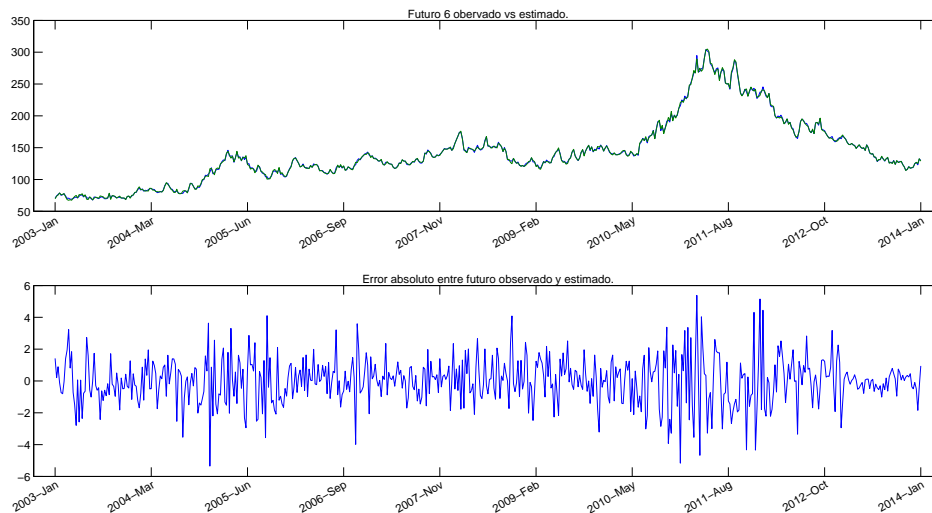


Figura 21: Futuro y estimación para el sexto futuro del café en la imagen de arriba y en la imagen de abajo la diferencia absoluta entre estos dos

En este caso no observamos esa armonía entre el $\hat{\omega}$ que estimamos para los precios y para el rendimiento por conveniencia. Si tenemos en cuenta el del rendimiento por conveniencia, podemos decir que $\hat{\omega}$ es de entorno a 1.2, lo que nos estaría diciendo que el rendimiento por conveniencia tiene una frecuencia de unos 5 años que guía la dinámica de este. En este caso también esperábamos un comportamiento similar en para los dos casos, pero no hemos obtenido un resultado satisfactorio. Para la rentabilidad por conveniencia, el múltiplo de la frecuencia fundamental es de en torno a 5, lo que quiere decir que como segunda frecuencia se presenta en este caso también, la anual.

Vemos que los parámetros estimados por medio del Modelo 2 van en concordancia con los del Modelos 3. Pero, para este caso, como en el primero, el incorporar la media de largo plazo cíclica no supone una gran ventaja a la hora de explicar el precio del futuro. De hecho para el tercer futuro el incorporar el Modelo 3.1 reduce en un 0.3% la suma de errores absoluta sobre el Modelo 2, y el Modelo 3.2 sólo la reduce en un 3.5%. El caso del duodécimo futuro es aun mas escueto ya que el Modelo 3.1 reduce en sólo un 0.9% y el Modelo 3.2 en un 1.5%.

7. Conclusiones

En este trabajo hemos introducido un modelo en tiempo continuo de dos factores para el precio de mercancías (*commodities*). El modelo, es una extensión del presentado por Schwartz (1997) y trata de proporcionar una mayor flexibilidad para modelizar el rendimiento por conveniencia (*convenience yield*) de las mercancías.

Hemos presentado un modelo que ofrece cierta tratabilidad analítica ya que hemos obtenido fórmulas cerradas para valorar futuros y opciones europeas sobre las mercancías.

Por medio de la realización de un estudio empírico del modelo, hemos comprobado la efectividad con la que el modelo aproxima el precio de los futuros sobre las mercancías y la hemos comparado al modelo que le precede. Obtenemos datos muy buenos para el caso de metales industriales, más precisamente para el aluminio, que hemos tenido como objeto de estudio y ha mostrado resultados extraordinariamente buenos a la hora de aproximar el precio de los futuros mediante el modelo que proponemos. Por el contrario nuestro modelo ha mostrado un resultado escueto con mercancías energéticas y contrariamente a lo que podíamos esperar ha mostrado una mejora casi inexistente para la mercancía de la que más esperábamos. La que está ligada a la agricultura, el café en este caso, ya que esperábamos que en este el componente climático permitiera una gran mejora en la aproximación del precio de los futuros de mercancías de este tipo.

Mostramos que el rendimiento por conveniencia tiene una frecuencia corta que guía el comportamiento de esta, muy similar al que tienen los precios de los futuros del petróleo y el aluminio cercano a 10 y 15 años respectivamente. Por el contrario, no hemos encontrado ese mismo patrón para el café, donde sí que podemos decir, que el rendimiento por conveniencia tiene una frecuencia corta que guía el comportamiento de esta, de entorno a 5 años.

A través del análisis realizado hemos mostrado las discrepancias que pueden encontrarse entre el rendimiento por conveniencia implícito y el estimado a través de un modelo estocástico y la aplicación del filtro de Kalman

Referencias

- [1] Fisher Black and Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, 1973.
- [2] Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz, *Evaluating Natural Resource Investments*. The Journal of Business, 1985.
- [3] Gibson, R., and E. S. Schwartz, *Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims*. Journal of Finance, 1990.
- [4] Eduardo S. Schwartz, *The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging*. The Journal of Finance, Vol.52, No. 3, 1997.
- [5] Eduardo S. Schwartz, Julio J. Lucia, *Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange*. Review of Derivatives Research, 2002.
- [6] Moreno, M., and Platanía, F., *Valuation of derivative assets under cyclical mean-reversion processes for spot prices*. Phd. Thesis, 2013.
- [7] Steven L. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. The Review of Financial Studies, 1993.
- [8] Delphine Lautier, *The Kalman Filter in Finance: An Application to Term Structure Models of Commodity Prices and a Comparison between the Simple and the Extended Filters*. 06/12/02, working paper.
- [9] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*. Springer-Verlag, 2004.
- [10] John C. Hull, *Options, Futures And Other Derivatives. Eighth Edition*. Pearson.
- [11] Hélyette Geman, *Commodities and Commodity Derivatives. Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy*. John Wiley & Sons, Ltd.

Apéndice

A. Demostraciones

Proposición 1. El proceso es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck por lo que se resuelve de la misma forma que los procesos de esta familia. Definimos el proceso $Q_t = e^{\kappa t} \delta_t$ y le aplicamos el lema de Itô, lo que nos da,

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t} \delta_t) &= dQ_t = \kappa e^{\kappa t} \delta_t dt + e^{\kappa t} d\delta_t = \\ &= \kappa e^{\kappa t} \delta_t dt + \kappa e^{\kappa t} (\alpha + g(t) - \delta_t) dt + e^{\kappa t} \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 = \\ &= \kappa e^{\kappa t} (\alpha + g(t)) dt + e^{\kappa t} \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 \end{aligned}$$

integrando la expresión anterior,

$$\begin{aligned} e^{\kappa T} \delta_T - e^{\kappa t} \delta_t &= \kappa \alpha \int_t^T e^{\kappa u} du + \kappa \int_t^T e^{\kappa u} g(u) du + \sigma_2 \int_t^T e^{\kappa u} d\widetilde{W}_u^2 = \\ &= \alpha (e^{\kappa T} - e^{\kappa t}) + \kappa \int_t^T e^{\kappa u} g(u) du + \sigma_2 \int_t^T e^{\kappa u} d\widetilde{W}_u^2 \end{aligned}$$

y calculando el segundo término que es una integral de Riemann, y sabiendo que la integral de una serie de Fourier es la integral término a término, que es una condición necesaria para poder intercambiar el sumatorio y la integral,

$$\begin{aligned} \int_t^T e^{\kappa u} g(u) du &= \int_t^T e^{\kappa u} \sum_{n=1}^{\infty} \Re(A_n e^{in\omega u}) du = \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(A_n \int_t^T e^{(in\omega + \kappa)u} du\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega + \kappa)T} - e^{(in\omega + \kappa)t})\right) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} e^{\kappa T} \delta_T - e^{\kappa t} \delta_t &= \alpha (e^{\kappa T} - e^{\kappa t}) + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega + \kappa)T} - e^{(in\omega + \kappa)t})\right) + \\ &\quad + \sigma_2 \int_t^T e^{\kappa u} d\widetilde{W}_u^2 \end{aligned}$$

y reorganizando los términos,

$$\begin{aligned} \delta_T &= e^{-\kappa(T-t)} \delta_t + \alpha (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \\ &\quad + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)})\right) + \sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 \end{aligned}$$

la reescribiremos para darla de una forma equivalente que luego usaremos en la demostración de la proposición 4

$$\begin{aligned}
\delta_T - \delta_t &= (e^{-\kappa(T-t)} - 1) \delta_t + \alpha (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \\
&\quad + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) + \sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 = \\
&= (\alpha - \delta_t) (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) + \\
&\quad + \sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2
\end{aligned}$$

□

Proposición 2. Por el primer resultado del Apéndice B δ_T está distribuido de forma normal, con media y varianza que se detallan a continuación,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}[\delta_T | \mathcal{F}_t] &= \widetilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\kappa(T-t)} \delta_t + \alpha (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 \right] = \\
&= e^{-\kappa(T-t)} \delta_t + \alpha (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \\
&\quad + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) + \\
&\quad + \widetilde{\mathbb{E}} \left[\sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 \right] = \\
&= e^{-\kappa(T-t)} \delta_t + \alpha (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \\
&\quad + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right)
\end{aligned}$$

$$\Sigma^2 = \widetilde{Var}[\delta_T | \mathcal{F}_t] = \widetilde{\mathbb{E}} \left[\left(\delta_T - \widetilde{\mathbb{E}}[\delta_T | \mathcal{F}_t] \right)^2 | \mathcal{F}_t \right] = \widetilde{\mathbb{E}} \left[\left(\sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 \right)^2 \right]$$

utilizando la propiedad de isometría de Itô

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 &= \widetilde{\mathbb{E}} \left[\left(\sigma_2 \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 \right)^2 \right] = \widetilde{\mathbb{E}} \left[\sigma_2^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-u)} du \right] = \\
&= \sigma_2^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-u)} du = \frac{\sigma_2^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})
\end{aligned}$$

□

Lema 1. Integramos el proceso que sigue la conveniencia yield,

$$\int_t^T d\delta_u = \kappa \int_t^T (\alpha + g(u) - \delta_u) du + \int_t^T \sigma_2 d\widetilde{W}_u^2$$

por lo que tenemos

$$\delta_T - \delta_t = \kappa\alpha(T - t) + \kappa \int_t^T g(u)du - \kappa \int_t^T \delta_u du + \int_t^T \sigma_2 d\widetilde{W}_u^2$$

calculamos el segundo término que es una integral de Riemann, y sabiendo que la integral de una serie de Fourier es la integral término a término, que es una condición necesaria para poder intercambiar el sumatorio y la integral,

$$\begin{aligned} \int_t^T g(u)du &= \int_t^T \sum_{n=1}^{\infty} \Re(A_n e^{in\omega u}) du = \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(A_n \int_t^T e^{in\omega u} du\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{iA_n}{n\omega} (e^{in\omega t} - e^{in\omega T})\right) \end{aligned}$$

introduciendo este término que hemos calculado y reorganizando los términos obtenemos la ecuación que buscábamos

$$\int_t^T \delta_u du = \frac{\delta_t - \delta_T}{\kappa} + \alpha(T - t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{iA_n}{n\omega} (e^{in\omega t} - e^{in\omega T})\right) + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2$$

□

Proposición 3. En primer lugar definimos $X_t = \ln(S_t)$ y le aplicamos el lema de Itô

$$\begin{aligned} X_t = \ln(S_t) &\Rightarrow dX_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow dX_t = (r - \delta_t)dt + \sigma_1 d\widetilde{W}_t^1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow dX_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2 - \delta_t\right) dt + \sigma_1 d\widetilde{W}_t^1 \end{aligned}$$

e integrando entre t y T esta ecuación diferencial estocástica

$$X_T - X_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2\right) (T - t) - \int_t^T \delta_u du + \sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1$$

introduciendo el término de la convenience yield acumulada del lema 1

$$X_T - X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) (T - t) + \frac{\delta_T - \delta_t}{\kappa} - \alpha(T - t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{iA_n}{n\omega} (e^{in\omega t} - e^{in\omega T}) \right) - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2 + \sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1$$

sustituyendo $\delta_T - \delta_t$ que hemos mostrado en la demostración de la proposición 3,

$$X_T - X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) (T - t) + (\alpha - \delta_t) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 - \alpha(T - t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{iA_n}{n\omega} (e^{in\omega t} - e^{in\omega T}) \right) - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2 + \sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1$$

y reorganizando la ecuación

$$X_T - X_t = \left(r - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \right) (T - t) + (\alpha - \delta_t) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t}) \right) + \sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1 + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2$$

□

Proposición 4. Para esta demostración, nos basamos también en el resultado del Apéndice B, por tanto, $X_T | \mathcal{F}_t$ está distribuido de forma normal, con media y varianza que se detallan a continuación,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}[X_T|\mathcal{F}_t] &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\left(r - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t) + (\alpha - \delta_t) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \right. \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)})\right) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t})\right) + \\
&\quad \left. + \sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1 + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2\right] = \\
&= \left(r - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t) + (\alpha - \delta_t) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)})\right) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t})\right) + \\
&\quad + \tilde{\mathbb{E}}\left[\sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1\right] + \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2\right] - \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2\right] = \\
&= \left(r - \alpha - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(T-t) + (\alpha - \delta_t) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega + \kappa} (e^{(in\omega)T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)})\right) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \Re\left(\frac{A_n}{in\omega} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 &= \widetilde{Var}[\delta_T|\mathcal{F}_t] = \tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\delta_T - \tilde{\mathbb{E}}[\delta_T|\mathcal{F}_t]\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1 + \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2\right)^2\right] = \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2\right)^2 \right. \\
&\quad - 2\frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2 d\widetilde{W}_u^1 + 2\frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 d\widetilde{W}_u^1 \\
&\quad \left. - 2\frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} (d\widetilde{W}_u^2)^2\right]
\end{aligned}$$

utilizando la propiedad de isometría de Itô

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\sigma_1 \int_t^T d\widetilde{W}_u^1 \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2 \right)^2 \right. \\
&\quad - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa} \int_t^T d\widetilde{W}_u^2 d\widetilde{W}_u^1 + 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u^2 d\widetilde{W}_u^1 \\
&\quad \left. - 2 \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} \left(d\widetilde{W}_u^2 \right)^2 \right] \\
&= \sigma_1^2 \int_t^T du + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \int_t^T e^{-2\kappa(T-u)} du + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \int_t^T du - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} \int_t^T du \\
&\quad + 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} du - 2 \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} du \\
&= \left(\sigma_1^2 - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) (T-t) + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \int_t^T e^{-2\kappa(T-u)} du \\
&\quad + \left(\frac{2\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} - \frac{2\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} du \\
&= \left(\sigma_1^2 - 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) (T-t) + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \\
&\quad + \left(\frac{2\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} - \frac{2\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)})
\end{aligned}$$

□

Proposición 5. El precio futuro de la mercancía, no es más que,

$$F(S_t, t, T) = \tilde{\mathbb{E}} [S_T | \mathcal{F}_t]$$

y como conocemos que la distribución condicional del precio es lognormal, es decir, $S_T | \mathcal{F}_t \sim \text{logn}(E, \Sigma^2)$, su esperanza no es más que

$$\tilde{\mathbb{E}} [S_T | \mathcal{F}_t] = e^{E + \frac{\Sigma^2}{2}}$$

y sustituyendo las expresiones de la demostración anterior en esta expresión obtenemos

el precio de futuro de la mercancía.

$$\begin{aligned}
F(S_t, t, T) = S_t \exp \left\{ \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) (T - t) \right. \\
+ \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \left(\alpha - \delta_t + \frac{1}{\kappa} \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} \right) \\
+ \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n + \kappa} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t - \kappa(T-t)}) \right) \\
\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \Re \left(\frac{A_n}{i\omega n} (e^{in\omega T} - e^{in\omega t}) \right) \right\}
\end{aligned}$$

□

Proposición 6. Tenemos que calcular,

$$c(S_t; t, T, K) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [\text{máx}(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t]$$

entonces,

$$\tilde{\mathbb{E}} [(S_T - K, 0)^+ | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - K, 0)^+ \rho(E, \Sigma^2) dx$$

donde $\rho(E, \Sigma^2)$, denota la función de densidad normal con media E y varianza Σ^2 . Ahora si $e^x > K \Rightarrow x > \ln(K)$

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - K, 0)^+ \rho(E, \Sigma^2) dx &= e^{-r(T-t)} \int_{\ln(K)}^{\infty} (e^x - K) \frac{e^{-\frac{(x-E)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} dx = \\
&= e^{-r(T-t)} \left(\int_{\ln(K)}^{\infty} e^x \frac{e^{-\frac{(x-E)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} dx - K \int_{\ln(K)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-E)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} dx \right)
\end{aligned}$$

definiendo

$$\begin{aligned}
w = \frac{x - E - \Sigma^2}{\Sigma} &\Rightarrow dw = \frac{dx}{\Sigma}; & -d1 &= \frac{\ln(K) - E - \Sigma^2}{\Sigma} \\
y = \frac{x - E}{\Sigma} &\Rightarrow dy = \frac{dx}{\Sigma}; & -d2 &= \frac{\ln(K) - E}{\Sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)} \left(\int_{\ln(K)}^{\infty} e^x \frac{e^{-\frac{(x-E)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} dx - K \int_{\ln(K)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-E)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} dx \right) &= \\
&= e^{-r(T-t)} \left(e^{E+\frac{\Sigma^2}{2}} \int_{-d1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dw - K \int_{-d2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} c(S_t, \delta_t; t, T, K) &= \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left(e^{E + \frac{\Sigma^2}{2}} \Phi(d_1) - \Phi(d_1 - \Sigma) \right) \end{aligned}$$

donde, $d_1 = \frac{E + \Sigma^2 - \log(K)}{\Sigma}$ y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la normal estándar. \square

Proposición 7. En primer lugar demostramos que $\tilde{\mathbb{E}}[e^{-rt}c(S_t; t, T, K)|\mathcal{F}_s]$ es martingala, para ello,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}[e^{-rt}c(S_t; t, T, K)|\mathcal{F}_s] &= \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-rt} \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s \right] = \\ &= \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-rt} e^{-r(T-t)} (S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_s \right] = \\ &= e^{-rs} \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-r(T-s)} (S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_s \right] = \\ &= e^{-rs} c(S_t; s, T, K) \end{aligned}$$

En realidad, $c(S_t; s, T, K) \equiv c(S_t, \delta_t; s, T, K)$. Ahora, le aplicamos el lema de Itô al proceso que sigue la call descontado

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}c(S, \delta; t, T, K)) &= \\ &= e^{-rt} \left(-rcdt + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\partial c}{\partial \delta} d\delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dS^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \delta^2} d\delta^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \delta} dS d\delta \right) = \\ &= e^{-rt} \left(-rcdt + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} \left((r - \delta)Sdt + \sigma_1 S d\widetilde{W}_t^1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial c}{\partial \delta} \left(\kappa(\alpha + g - \delta)dt + \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma_1^2 S^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \delta^2} \sigma_2^2 dt + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \delta} S \sigma_1 \sigma_2 \rho dt \right) = \\ &= e^{-rt} \left(-rc + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} (r - \delta)S + \frac{\partial c}{\partial \delta} \kappa(\alpha + g - \delta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \delta^2} \sigma_2^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \delta} S \sigma_1 \sigma_2 \rho \right) dt + \\ &\quad + \frac{\partial c}{\partial S} \sigma_1 S d\widetilde{W}_t^1 + \frac{\partial c}{\partial \delta} \sigma_2 d\widetilde{W}_t^2 \end{aligned}$$

pero hemos visto que es martingala por lo que el término de deriva ha de ser cero, de donde obtenemos nuestra EDP

$$0 = -rc + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S} (r - \delta)S + \frac{\partial c}{\partial \delta} \kappa(\alpha + g - \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial \delta^2} \sigma_2^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \delta} S \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

de forma que

$$-rc = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S}(r - \delta)S + \frac{\partial c}{\partial \delta}\kappa(\alpha + g - \delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial \delta^2}\sigma_2^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial \delta}S\sigma_1\sigma_2\rho$$

□

B. Resultados matemáticos relevantes

Presentamos algunos resultados que hemos utilizado durante el presente trabajo sin centrarnos en su demostración.

Fórmula de Itô bidimensional

Teorema (Fórmula bidimensional de Itô-Doebelin). *Sea $f(t, x, y)$ una función de clase \mathcal{C}^2 . Sean X_t e Y_t procesos de Itô*

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu_1(t)dt + \sigma_1(t)dW_t^1 \\ dY_t &= \mu_2(t)dt + \sigma_2(t)dW_t^2 \end{aligned}$$

donde, $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$. Entonces,

$$df(t, X_t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dY_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dX_t dY_t$$

Regla del producto de Itô

Corolario (Regla del producto de Itô). *Sean X_t e Y_t procesos de Itô. Entonces,*

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

Propiedad de isometría de Itô

Teorema (Isometría de Iô). *La integral definida como,*

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW_u$$

cumple la siguiente propiedad,

$$\mathbb{E} [I^2(t)] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Delta^2(u) du \right]$$

Distribución de una integral de Itô con integrando determinista

Teorema (Distribución de una integral de Itô con integrando determinista). Sean un movimiento Browniano, W_s , $s > 0$, y $h(s)$ una función no aleatoria dependiente del tiempo. Definimos,

$$I(t) = \int_0^t h(s) dW_s$$

Entonces,

$$\forall t > 0, \quad I(t) \sim N\left(0, \int_0^t h^2(s) ds\right)$$

Teorema de Girsanov bidimensional

Teorema (Girsanov bidimensional). Sean T un instante de tiempo positivo fijado de antemano y $\Theta(t) = (\Theta_1(t), \Theta_2(t))$ un proceso bidimensional adaptado. Definimos

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Theta(u)\|^2 du\right\}$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u) du$$

y asumimos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Theta(u)\|^2 Z^2(u) du\right] < \infty$$

Entonces, bajo la medida de probabilidad $\widetilde{\mathbb{P}}$ dada por

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

el proceso \widetilde{W} es un movimiento browniano bidimensional.