

CÁLCULO DE CVA EN PRESENCIA DE CORRELACIÓN ENTRE LOS IMPAGOS DE LAS CONTRAPARTIDAS

Marcos de Castro Riesco

Trabajo de investigación 012/014

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Federico Platania

Dr. Manuel Moreno

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

www.finanzasquantitativas.com

Cálculo de CVA en presencia de correlación entre los impagos de las contrapartidas

TRABAJO FIN DE MÁSTER. QFB 2014

Marcos de Castro Riesco *

mdecastror@gmail.com

Resumen

El presente trabajo analiza distintas soluciones para el cálculo de CVA entre dos contrapartidas incorporando correlación entre los procesos de impago de ambas. En primer lugar se propone una extensión del modelo habitual de intensidad de impago consistente en incorporar correlación mediante una cópula gaussiana. Los resultados obtenidos son bastante cuestionables y se deben al efecto de la aplicación de la función de cópula. Posteriormente se analizan los resultados bajo un esquema más sofisticado, consistente en aplicar el modelo estocástico de intensidad de impago CIR++. Esta alternativa parece comportarse mejor pero no evita la aparición de resultados inverosímiles además de otra serie de limitaciones. Finalmente se propone un modelo discreto de árboles basado en el modelo de valoración de derivados de crédito de Jarrow-Turnbull (1995) [6] el cual se comporta de manera satisfactoria en los escenarios donde los anteriores modelos no funcionan.

*Agradecimientos a Federico Platania y Manuel Moreno por sus observaciones, comentarios y orientación. Agradecimientos a José Luis Fernández Pérez y María Rodríguez Nogueiras por su dedicación y motivación.

Índice

1. Introducción	3
2. Definiciones Preliminares	3
3. Punto de partida: Modelo de intensidad de impago y cópula Gaussiana	5
3.1. Modelo para el tiempo hasta el impago	5
3.2. Incorporación de la correlación	8
3.3. Resultados	9
3.4. Análisis de la correlación con cópula	13
3.5. Limitaciones	19
4. El modelo CIR++	19
4.1. Calibración al mercado de CDSs	20
4.2. Correlación en los procesos de impago	20
4.3. Simulación de los procesos de intensidad	21
4.4. Resultados	22
4.5. Limitaciones	23
5. Modelo propuesto	24
5.1. Esquema de evolución del proceso de solvencia	24
5.2. Valoración	26
5.3. Correlación entre impagos	27
5.4. Resultados	31
6. Conclusiones	33

1. Introducción

El **CVA** o *Credit Value Adjustment* es la diferencia entre el valor neutral al riesgo de un derivado y su valor real, incorporando su riesgo de contraparte. Si se supone que no existe intercambio monetario en el caso de un impago conjunto, entonces el valor de dicho ajuste debería disminuir a medida que la correlación entre los procesos de crédito de ambas contrapartes aumenta. Puesto que en general es bastante razonable asumir la hipótesis de que existe una cierta correlación, quizás sistemática, entre los procesos de crédito de dos contrapartidas dadas, no incluir el efecto que dicha correlación tiene sobre el cálculo del CVA supone en la práctica sobrevalorar dicho ajuste.

En el presente trabajo se analiza el cálculo de CVA en presencia de correlación entre los eventos de crédito de ambas entidades.

Como primera alternativa se parte del modelo determinístico de intensidad de impago presentado por Collin-Dufresne *et al.* (2002) [8] y se incorpora la correlación mediante una función de cópula gaussiana. Se observa en el análisis de esta solución resultados inverosímiles y, tras analizarlos, se concluye que éstos son debidos al efecto de la aplicación de la función de cópula.

Brigo and Chourdakis (2008) [2] analizan el cálculo de CVA con *Wrong Way Risk* en *Credit Default Swaps* y atribuyen un fenómeno parecido a la no existencia de aleatoriedad en el modelo de intensidad de impago. Para solventar este problema, estos autores definen un modelo estocástico de intensidad de impago, llamado CIR++, basado en el modelo unifactorial del tipo instantáneo propuesto en Cox *et al.* (1985) [7]. Sin embargo, nuestro análisis mostrará que la aplicación del modelo **CIR++** presenta serias limitaciones además de no evitar la aparición de los mismos escenarios inverosímiles que aparecían anteriormente.

Como alternativa a estos modelos, este trabajo propone un nuevo modelo basado en el modelo de valoración de derivados de crédito propuesto por Jarrow and Turnbull (1995) [6] y que será implementado en un esquema bidimensional. Dentro de la construcción de este nuevo modelo, se analiza la manera más eficiente de incorporar la correlación entre los eventos de crédito y se propone finalmente incorporarla mediante la alteración de las probabilidades de transición a través de una función de cópula gaussiana.

2. Definiciones Preliminares

De manera simplificada, suponemos a) independencia entre la *exposición* de una contrapartida A (el valor positivo del derivado para la misma en caso de impago) y la calidad crediticia de la otra contrapartida B y b) **riesgo unilateral** (es decir, se supone únicamente riesgo de crédito en una de las contrapartidas, B en este caso). Entonces, el CVA desde el punto de vista de A se define como

$$CVA_A = Lgd_B \int_0^T E[V_A^+(t) \times FD(0, t)]dPD_B(0, t) \quad (1)$$

donde

- Lgd_B (*Lost Given Default*) es la tasa de pérdida de la contrapartida B en caso de impago.
- $V_A^+(t)$ (*Exposición*) es el valor positivo del derivado para la contrapartida A en el instante t .
- $dPD_B(0, t)$ es la probabilidad neutral al riesgo de impago de la contrapartida B .
- $FD(0, t)$ es el factor de descuento hasta el instante t .

La definición de CVA unilateral se puede escribir a su vez en función de un subyacente *habitual* en la modelización del crédito: *el tiempo hasta el impago*. Las fórmulas generales de CVA unilateral de A y B en función del tiempo hasta el impago son

$$CVA_A(t) = E [1_{\{t < \tau_B < T\}} FD(t, \tau_B) Lgd_B V_A(\tau_B)^+] \quad (2)$$

$$CVA_B(t) = E [1_{\{t < \tau_A < T\}} FD(t, \tau_A) Lgd_A V_B(\tau_A)^+] \quad (3)$$

donde τ_i , $i = A, B$ indica el tiempo hasta el impago de la contrapartida $i = A, B$.

Alternativamente, se puede suponer **riesgo bilateral** (es decir, riesgo de crédito en ambas contrapartidas). Entonces, además de CVA (el ajuste al valor de mercado del derivado que hace una contrapartida A por suponer riesgo de contraparte con la otra B) se debe contemplar el **DVA** o *Debit Value Adjustment* (el ajuste al valor de mercado del derivado que se debe hacer por el hecho de que la contrapartida contraria, B , supone riesgo de contraparte con la contrapartida A). En estos términos además, se define la fórmula del CVA bilateral introduciendo el matiz de que el impago de la contrapartida a la que se le está cobrando el CVA se produzca antes del impago propio. Así, con riesgo bilateral las fórmulas del CVA de A y B son

$$CVA_A(t) = E [1_{\{t < \tau_B < T, \tau_B < \tau_A\}} FD(t, \tau_B) Lgd_B V_A(\tau_B)^+] \quad (4)$$

$$CVA_B(t) = E [1_{\{t < \tau_A < T, \tau_A < \tau_B\}} FD(t, \tau_A) Lgd_A V_B(\tau_A)^+] \quad (5)$$

En la práctica se supone que el tiempo de observación no es continuo sino discreto a intervalos. Si además se supone independencia entre la exposición de una contrapartida, la calidad crediticia de la otra contrapartida y los factores de descuento, las fórmulas anteriores pueden reducirse a las siguientes:

$$CVA_A(t) = \sum_{i=1} Lgd_B FD(t, t_i) E[V_A^+(t_i)] P(t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1}, \tau_B \leq \tau_A) \quad (6)$$

$$CVA_B(t) = \sum_{i=1} Lgd_A FD(t, t_i) E[V_B^+(t_i)] P(t_i \leq \tau_A \leq t_{i+1}, \tau_B \leq \tau_A) \quad (7)$$

Sin embargo, estas expresiones no tienen en cuenta la posible correlación existente entre los procesos de crédito de las contrapartes A y B .

3. Punto de partida: Modelo de intensidad de impago y cópula Gaussiana

Como punto de partida se analiza la solución presentada por Collin-Dufresne *et al.* (2002) [8] consistente en modelizar el *Tiempo hasta el impago* imponiendo un modelo de intensidad de impago determinístico de tal manera que permita estimar las probabilidades:

$$P(t_i \leq \tau_A \leq t_{i+1}, \tau_A \leq \tau_B) \quad (8)$$

y

$$P(t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1}, \tau_B \leq \tau_A) \quad (9)$$

Una vez definido el modelo de *Tiempo hasta el impago*, éste se extiende incorporando correlación entre los tiempos a impagos de ambas entidades utilizando la función de cópula gaussiana.

Veremos que, en algunos casos, será necesario aproximar las ecuaciones 8 y 9 por

$$P(t_i \leq \tau_A \leq t_{i+1} \leq \tau_B) \quad (10)$$

y

$$P(t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1} \leq \tau_A) \quad (11)$$

De tal manera que la estimación de CVA para la empresa A y B definida por las fórmulas 6 y 7 se aproximará por:

$$CVA_A(t) \approx \sum_{i=1} Lgd_B FD(t, t_i) E[V_A^+(t_i)] P(t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1} \leq \tau_A) \quad (12)$$

$$CVA_B(t) \approx \sum_{i=1} Lgd_A FD(t, t_i) E[V_B^+(t_i)] P(t_i \leq \tau_A \leq t_{i+1} \leq \tau_B) \quad (13)$$

3.1. Modelo para el tiempo hasta el impago

Con el objetivo de modelizar el *tiempo hasta el impago*, se define un proceso determinístico que asocia a cada instante de tiempo un parámetro estrictamente positivo llamado *intensidad (hazard rate)*:

$$t \mapsto \lambda_t \quad (14)$$

La *intensidad acumulada (hazard function)* viene dada por el proceso

$$\Lambda_t =: t \mapsto \int_0^t \lambda_s ds \quad (15)$$

En la práctica el proceso definido en (14) no es continuo sino discreto en función de la curva de CDSs cotizada en el mercado. Por tanto, el proceso de *intensidad acumulada* (15) vendrá especificado por una suma.

Se define el *tiempo hasta el impago* como la inversa del proceso de *intensidad acumulada* sobre una variable aleatoria con distribución exponencial ξ , de media 1 e independiente de λ

$$\tau = \Lambda^{-1}(\xi)$$

Por tanto, la probabilidad de solvencia en tiempo t viene dada por

$$P(\tau > t) = P(\Lambda^{-1}(\xi) > t) = P(\xi > \Lambda(t))$$

Puesto que ξ sigue una distribución exponencial, se tiene

$$P(\tau > t) = e^{-\Lambda(t)} = e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \quad (16)$$

Observación 3.1. Si se reemplaza el proceso λ por un proceso r de tipos de interés, el resultado de (16) representa exactamente el valor de un bono cupón cero.

Observación 3.2. El resultado de (16) determina una estructura temporal exponencial para la probabilidad de solvencia.

Ejemplo 3.1. En esta situación valoramos un bono cupón-cero con riesgo de crédito de vencimiento T . Suponemos que el proceso que define la evolución del tipo de interés instantáneo r_t es independiente de ξ . El precio del bono con riesgo será denotado por $\bar{P}(0, T)$ y viene definido por

$$\begin{aligned} \bar{P}(0, T) &= E [FD(0, T)1_{\{\tau > T\}}] = E \left[e^{\int_0^T r_s ds} 1_{\{\Lambda^{-1}(\xi) > T\}} \right] \\ &= E \left[E \left[e^{\int_0^T r_s ds} 1_{\{\xi > \Lambda(T)\}} \mid \lambda, r \right] \right] = E \left[e^{\int_0^T r_s ds} E [1_{\{\xi > \Lambda(T)\}} \mid \lambda, r] \right] \\ &= E \left[e^{\int_0^T r_s ds} P(\xi > \Lambda(T)) \right] = E \left[e^{\int_0^T r_s ds} e^{-\Lambda(T)} \right] \\ &= E \left[e^{-\int_0^T r_s ds} e^{-\int_0^T \lambda_s ds} \right] = E \left[e^{-\int_0^T r_s + \lambda_s ds} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Por tanto, el precio de un bono cupón-cero con riesgo se puede interpretar como el precio de un bono libre de riesgo donde el proceso del tipo instantáneo viene dado por r_t más un spread determinado por λ .

Sea λ_t^k , $k = A, B$ el proceso de intensidad para la contrapartida k . Con esta especificación del tiempo hasta el impago, podemos calcular para el intervalo temporal $[t_i, t_{i+1}]$:

$$P(t_i < \tau_k < t_{i+1}) = e^{-\int_0^{t_i} \lambda_s^k ds} - e^{-\int_0^{t_{i+1}} \lambda_s^k ds} \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_s^k ds, \quad k = A, B$$

donde la aproximación funciona sólo para valores pequeños de los exponentes.

Teorema 3.1. Sea $k = A, B$. Si $\lambda_t^k = \lambda_k$ es un valor constante, entonces τ_k sigue una distribución exponencial de parámetro λ_k .

Demostración.

$$\begin{aligned} P(\tau_k > t) &= P(\Lambda_k^{-1}(\xi) > t) = P(\xi > \Lambda_k(t)) = P(\xi > \int_0^t \lambda_k ds) \\ &= P(\xi > \lambda_k t) = e^{-\lambda_k t}, \quad k = A, B \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2. Si, además, suponemos que no existe correlación entre τ_A y τ_B entonces

$$P(t_i < \tau_A < t_{i+1}, \tau_A < \tau_B) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \left[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_{i+1}} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_i} \right]$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(t_i < \tau_A < t_{i+1}, \tau_A < \tau_B) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_y^{\infty} \lambda_B e^{-\lambda_B x} \lambda_A e^{-\lambda_A y} dx dy \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_A e^{-\lambda_A y} e^{-\lambda_B y} dy = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \left[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_{i+1}} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_i} \right] \end{aligned}$$

□

De la misma manera podemos obtener el siguiente resultado:

Corolario 3.3. Sea $P_{Solvk}(t)$, $k = A, B$ la función que devuelve la probabilidad de solvencia en el instante t de la contrapartida k . Entonces se tiene que

$$P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B) = [P_{SolvA}(t_{i+1}) - P_{SolvA}(t_i)] P_{SolvB}(t_{i+1})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} &P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B) \\ &= P(t_i < \tau_A < t_{i+1}, \tau_B > t_{i+1}) \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{\infty} \lambda_B e^{-\lambda_B x} \lambda_A e^{-\lambda_A y} dx dy = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_A e^{-\lambda_A y} e^{-\lambda_B t_{i+1}} dy \\ &= e^{-\lambda_B t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_A e^{-\lambda_A y} dy = e^{-\lambda_B t_{i+1}} \left[e^{-\lambda_A t_{i+1}} - e^{-\lambda_A t_i} \right] \end{aligned}$$

Por otro lado

$$P_{Solvk}(t)(t) = P(\tau_k > t) = e^{-\lambda_k t}, \quad k = A, B$$

lo que completa la demostración. □

Observación 3.3. En la práctica, los procesos λ_t^k , $k = A, B$ no son constantes pero sí son constantes a intervalos. En estas condiciones el Teorema 3.3 sigue siendo válido.

Con estas especificaciones, bajo ausencia de correlación entre los tiempos hasta impago de A y B y suponiendo que $\lambda_t^k = \lambda_k$, $k = A, B$ son constantes, el CVA de A viene dado por

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1} Lgd_B FD(t, t_i) E[V_A^+(t_i)] P(t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1}, \tau_B \leq \tau_A) \\ &= \sum_{i=1} Lgd_B FD(t, t_i) E[V_A^+(t_i)] \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \left[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_{i+1}} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_i} \right] \end{aligned} \tag{18}$$

De manera similar, se obtiene

$$CVA_B(t) = \sum_{i=1} Lgd_A FD(t, t_i) E[V_B^+(t_i)] \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \left[e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_{i+1}} - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t_i} \right] \quad (19)$$

Si se relaja la hipótesis de constancia en λ_t^k , $k = A, B$ y se supone constancia a intervalos, el valor del CVA de A puede aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1} Lgd_B FD(t, t_i) E[V_A^+(t_i)] P(t_i \leq \tau_B \leq t_{i+1} \leq \tau_A) \\ = & \sum_{i=1} Lgd_B FD(t, t_i) E[V_A^+(t_i)] [P_{SolvB}(t_{i+1}) - P_{SolvB}(t_i)] P_{SolvA}(t_{i+1}) \end{aligned} \quad (20)$$

De manera similar, $CVA_B(t)$ viene aproximado por

$$\sum_{i=1} Lgd_A FD(t, t_i) E[V_B^+(t_i)] [P_{SolvA}(t_{i+1}) - P_{SolvA}(t_i)] P_{SolvB}(t_{i+1}) \quad (21)$$

3.2. Incorporación de la correlación

Esta Subsección considera la correlación entre los tiempos hasta el impago utilizando la función de cópula Gaussiana.

Se tienen los procesos de tiempos hasta el impago τ_k , $k = A, B$ cuyas funciones de distribución vienen definidas por $G_{\tau_k}(x)$, $k = A, B$ de modo que

$$P(\tau_k < x) = G_{\tau_k}(x), \quad k = A, B$$

El objetivo es calcular la probabilidad conjunta $P(\tau_A < x, \tau_B < y)$ incorporando una correlación ρ .

Sea la variable $Y_k = G_{\tau_k}(\tau_k)$, $k = A, B$ cuya distribución es uniforme en el intervalo $[0, 1]$, esto es, $Y_k \sim U[0, 1]$, $k = A, B$.

Sea $F_{N(0,1)}(x)$ la función de distribución de una variable normal estándar. Definimos las variables $Z_k = F_{N(0,1)}^{-1}(Y_k) \sim N(0, 1)$, $k = A, B$

La variable bidimensional (Z_A, Z_B) sigue una distribución normal bivariente cuya función de distribución dada una correlación ρ es

$$P(Z_A < x, Z_B < y; \rho) = \Phi_\rho(x, y)$$

Entonces, la distribución conjunta de los tiempos hasta impago con correlación ρ viene dada por la función de cópula Gaussiana con correlación ρ que denotamos por $c(x, y; \rho)$ y tal que

$$\begin{aligned} c(x, y; \rho) &= P(\tau_A < x, \tau_B < y; \rho) = P(Y_A < G_{\tau_A}(x), Y_B < G_{\tau_B}(y); \rho) \\ &= P(Z_A < F_{N(0,1)}^{-1}(G_{\tau_A}(x)), Z_B < F_{N(0,1)}^{-1}(G_{\tau_B}(y)); \rho) \\ &= \Phi_\rho(F_{N(0,1)}^{-1}(G_{\tau_A}(x)), F_{N(0,1)}^{-1}(G_{\tau_B}(y))) \end{aligned} \quad (22)$$

Suponiendo la aproximación ya comentada

$$P(t_i < \tau_A < t_{i+1}, \tau_A < \tau_B) \approx P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B)$$

se puede realizar el cálculo incorporando correlación ρ :

$$P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B; \rho)$$

El cálculo de esta probabilidad se realiza integrando la función de densidad sobre el área definida en la Figura 1.

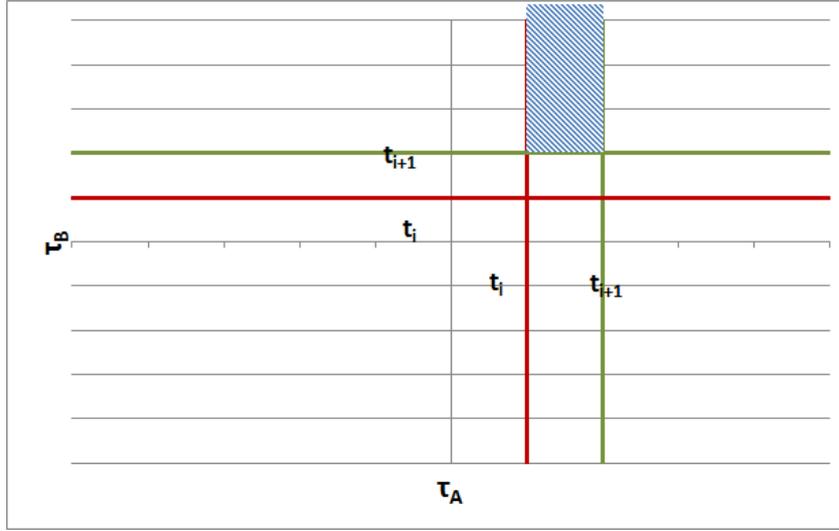


Figura 1: Área de integración para calcular $P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B)$.

Por tanto

$$\begin{aligned} P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B; \rho) &= P(t_i < \tau_A < t_{i+1}, \tau_B > t_{i+1}; \rho) \\ &= P(\tau_A < t_{i+1}, \tau_B > t_{i+1}; \rho) - P(\tau_A < t_i, \tau_B > t_{i+1}; \rho) \\ &= P(\tau_A < t_{i+1}, \tau_B < \text{inf}; \rho) - P(\tau_A < t_{i+1}, \tau_B < t_{i+1}; \rho) \\ &\quad - (P(\tau_A < t_i, \tau_B < \text{inf}; \rho) - P(\tau_A < t_i, \tau_B < t_{i+1}; \rho)) \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (22), esta expresión se escribe con la función de cópula como

$$P(t_i < \tau_A < t_{i+1} < \tau_B; \rho) = c(t_{i+1}, \infty; \rho) - c(t_{i+1}, t_{i+1}; \rho) - (c(t_i, \infty; \rho) - c(t_i, t_{i+1}; \rho))$$

3.3. Resultados

A continuación se analizan resultados en el caso de un swap de tipos de interés (Interest Rate Swap, IRS) de nominal 1 firmado entre las contrapartidas A y B en el que A paga un tipo de interés fijo y recibe un tipo de interés variable. La Figura 2 incluye las exposiciones de A y B .

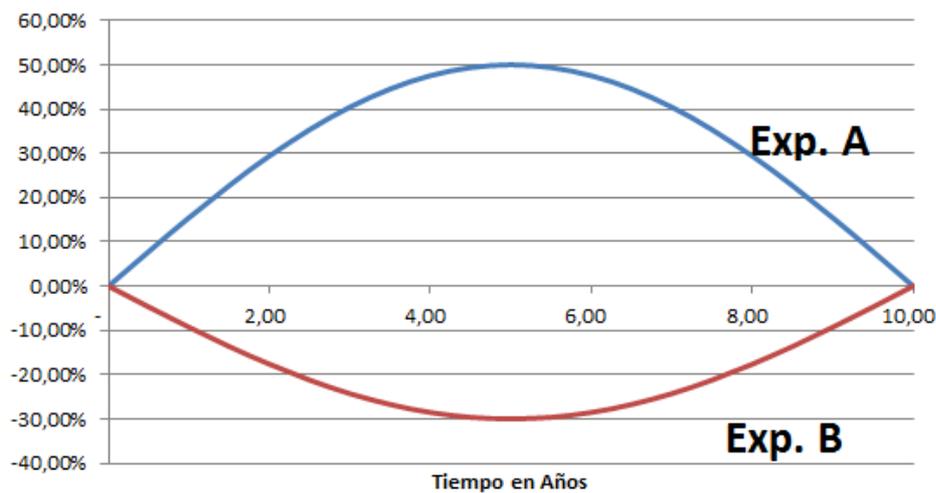


Figura 2: Exposiciones de A y B en un IRS de nominal 1

En los siguientes ejemplos se supone una tasa de recuperación del 30 %, es decir, $(Lgd) = 70\%$. Además, se supone que los procesos de *intensidad* de A y B son constantes, es decir, $\lambda_t^k = \lambda_k$, $k = A, B$.

1. **CASO 1: λ_A y λ_B tienen valores similares**

Supongamos inicialmente que $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$. La Figura 3 incluye los valores de CVA_k , $k = A, B$, es decir, el CVA que debe cargar la contrapartida k a la otra contrapartida.

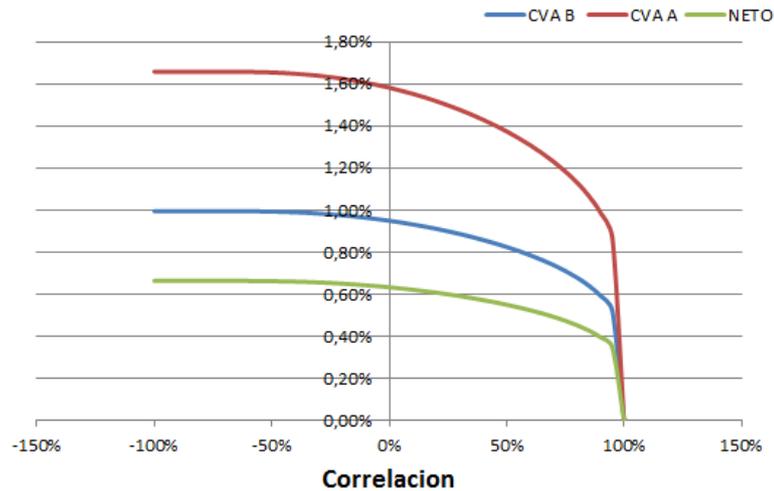


Figura 3: CVA_A vs. CVA_B con $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$

Las dos conclusiones más relevantes de este gráfico son las siguientes:

- a) Tanto CVA_A como CVA_B son decrecientes al aumentar la correlación. Se está suponiendo que no existe liquidación de compensación en caso de impago conjunto. Por tanto, al aumentar la correlación, se está concentrando la probabilidad en el escenario de impago conjunto donde no existe pago de ninguna de las dos partes.
- b) El valor neto $CVA_A - CVA_B$ también decrece con la correlación.

2. CASO 2: λ_A y λ_B tienen valores diferentes

Supongamos ahora que $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$. Si se observa la Figura 4 se puede ver que $CVA_A - CVA_B$ es función decreciente para valores bajos de la correlación pero empieza a crecer a partir de un cierto valor de correlación. Este comportamiento no resulta razonable ya que, según se está asumiendo, el escenario de impago conjunto es un escenario donde no se realiza ningún intercambio monetario y, por tanto, se esperaría un ajuste nulo al valor del derivado.

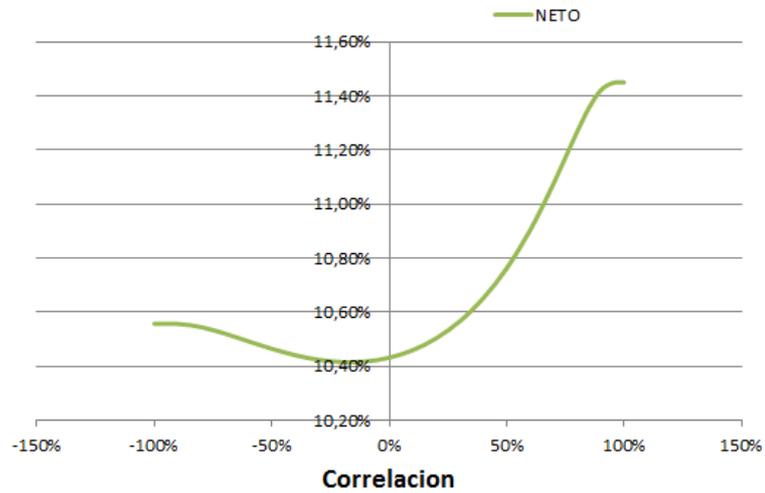


Figura 4: Neto $CVA_A - CVA_B$ con $\lambda_A = 1\%$; $\lambda_B = 10\%$

Analizando los CVAs individuales, la Figura 5 muestra que, en el caso de CVA_B , se obtiene el comportamiento esperado, es decir, la función es decreciente con la correlación. Este hecho es debido a que, al aumentar la correlación, la probabilidad se concentra en el escenario de impago conjunto donde no se produce ningún pago.

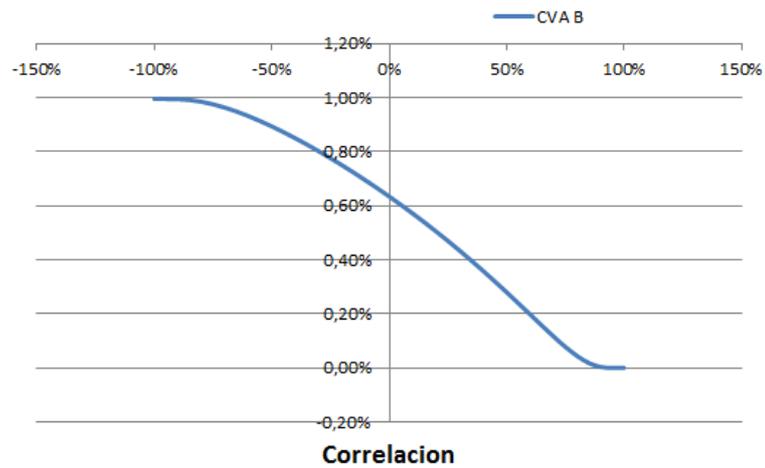


Figura 5: CVA_B con $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$

En cambio, la Figura 6 muestra que CVA_A decrece para valores bajos de la correlación pero esta relación cambia de signo a partir de cierto valor ($\rho \approx 40\%$) pasando a ser un valor creciente con la correlación.

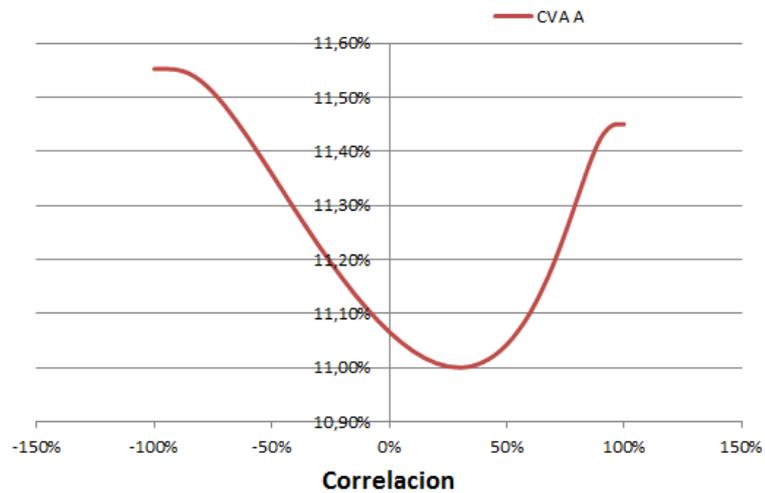


Figura 6: CVA_A con $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$

En la siguiente sección se analizará este fenómeno más detalladamente.

3.4. Análisis de la correlación con cópula

La explicación de los resultados previos cuando la diferencia entre las intensidades del impago son grandes, como se verá a continuación, se encuentra en el efecto de la aplicación de la función de cópula.

En la Figura 7 se puede observar cómo varía $P(\tau_B < \tau_A)$ en función de la correlación. Esta variable es la que explica el comportamiento de CVA_A .

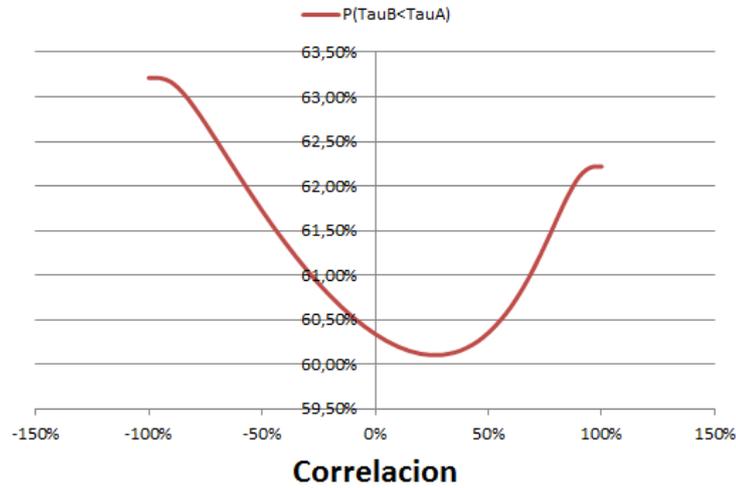


Figura 7: $P(\tau_B < \tau_A)$ con $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$

Para entender el comportamiento de $P(\tau_B < \tau_A)$ se estudia el comportamiento de una variable aproximada $P(t_i < \tau_B < t_{i+1}, t_{i+1} < \tau_A)$ en el periodo temporal medido en años $[t_i = 1, t_{i+1} = 5]$.

1. **CASO 1: λ_A y λ_B tienen valores similares**

Supongamos inicialmente que $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$. Tras realizar las transformaciones que permiten llevar el espacio de probabilidad al espacio de la distribución normal bivalente, la región de integración de dicha distribución se observa en la Figura 8. En el gráfico se representa τ_A en el eje vertical y τ_B en el eje horizontal.

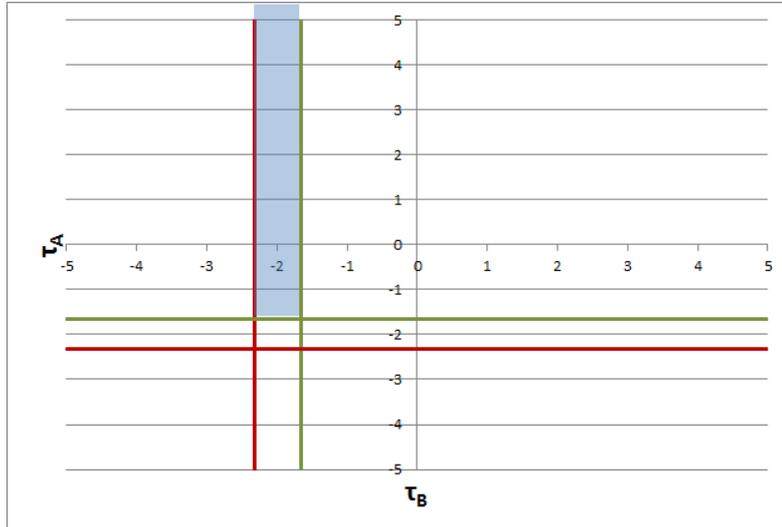


Figura 8: Región de integración con $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$

El efecto que tiene la correlación de la normal bivalente al integrar en el área señalada se puede observar en la Figura 9. Al aumentar la correlación la masa de probabilidad de esta variable se dispersa para posteriormente cambiar de pendiente y volver a concentrarse en la diagonal con pendiente 1. Este movimiento hace que la región señalada vaya perdiendo masa de probabilidad hasta que ésta se anula.

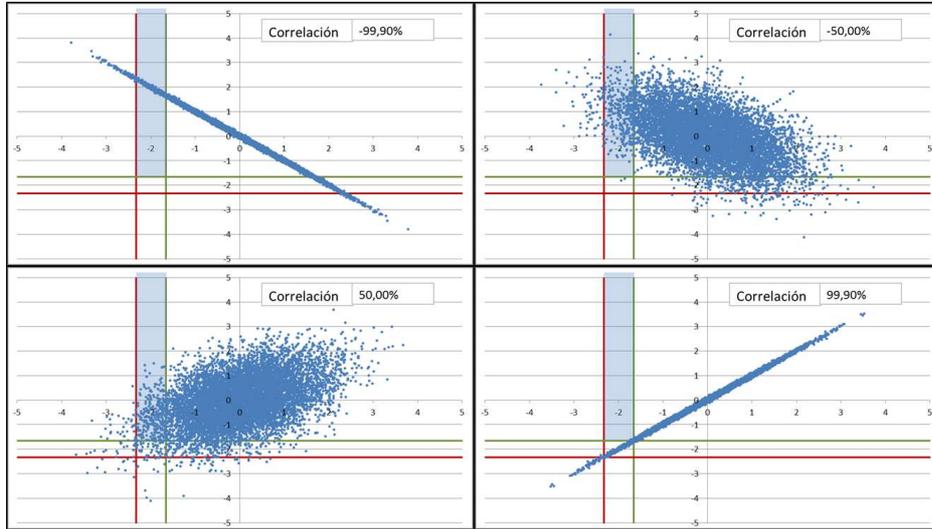


Figura 9: Efecto de la correlación con $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$

Por tanto, tal como muestra la Figura 10, una subida en la correlación hace que el valor de la variable $P(t_i < \tau_B < t_{i+1}, t_{i+1} < \tau_A)$ vaya bajando hasta anularse.

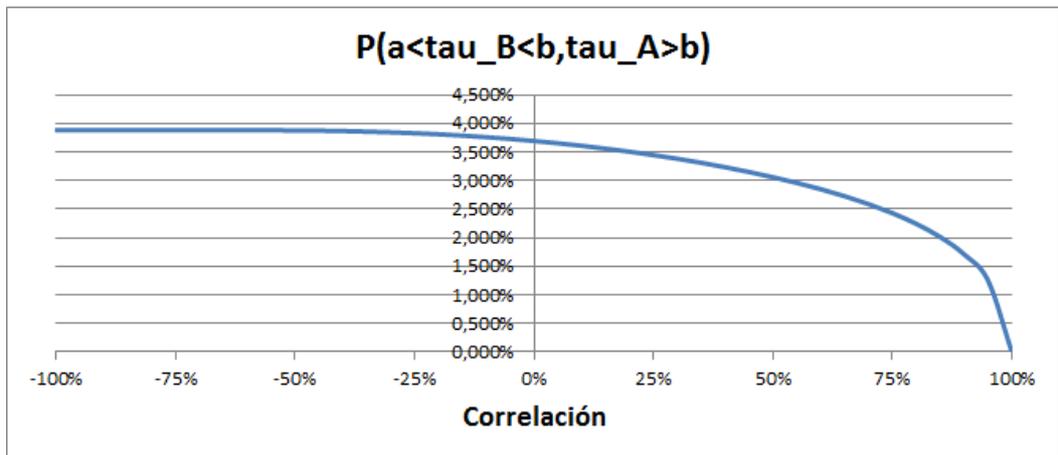


Figura 10: $P(t_i < \tau_B < t_{i+1}, t_{i+1} < \tau_A)$ con $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$

2. CASO 2: λ_A y λ_B tienen valores diferentes

Supongamos ahora que $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$. Tras realizar las transformaciones que permiten llevar el espacio de probabilidad al espacio de la distribución normal bivalente, la región de integración de dicha distribución se observa en la Figura 11. Como antes, τ_A y τ_B se indican en los ejes vertical y horizontal, respectivamente.

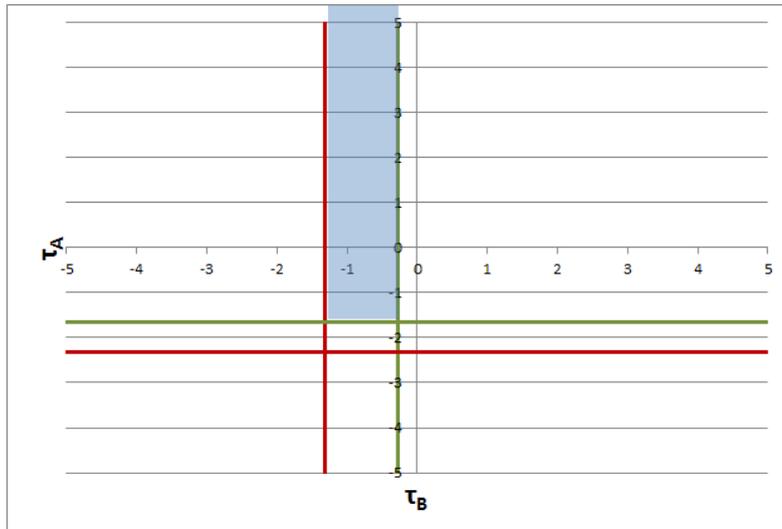


Figura 11: Región de integración con $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$

Comparado con el caso anterior, se observa que la columna que representa la región de integración se ha desplazado a la derecha sin ganar altura. En este caso, el efecto de la correlación de la variable normal bivalente al integrar en el área señalada es distinto. Una subida en la correlación hace que la masa de probabilidad de esta variable se disperse y, por tanto, se pierda probabilidad en el área señalada. Sin embargo, al cambiar de pendiente y volverse a concentrar en la diagonal con pendiente 1, el área de integración vuelve a ganar masa de probabilidad. Este efecto se observa en la Figura 12.

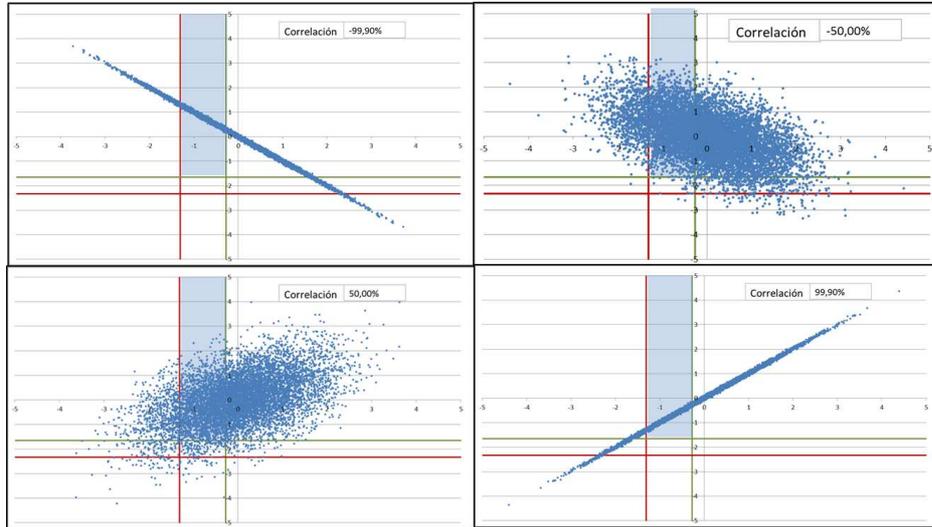


Figura 12: Efecto de la correlación con $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$

Al considerar correlaciones crecientes, el valor de la variable $P(t_i < \tau_B < t_{i+1}, t_{i+1} < \tau_A)$ es inicialmente decreciente y crece a partir de un cierto valor de la correlación, como se muestra en la Figura 13.

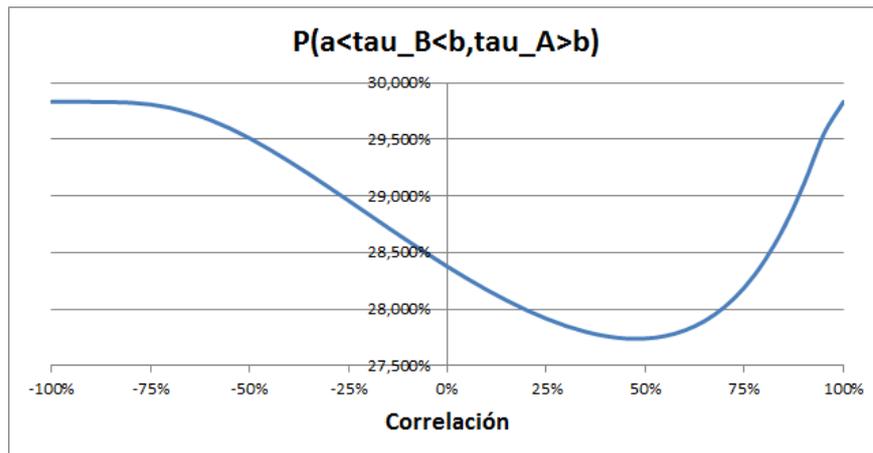


Figura 13: $P(t_i < \tau_B < t_{i+1}, t_{i+1} < \tau_A)$ con $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$

3.5. Limitaciones

Como se ha constatado previamente, el punto de partida considerado constituye una alternativa habitual pero genera resultados poco razonables cuando las diferencias entre las probabilidades de impago de ambas contrapartidas son grandes y la correlación es elevada.

Con el objetivo de solventar estas limitaciones se propone un modelo donde el proceso de intensidad de impago sigue una evolución estocástica.

4. El modelo CIR++

En estas condiciones la función de distribución del tiempo hasta el impago $P(\tau > T)$ viene dada por

$$\begin{aligned} P(\tau > T) &= E [1_{\{\tau > T\}}] = E [1_{\{\Lambda^{-1}(\xi) > T\}}] \\ &= E [1_{\{\xi > \Lambda(T)\}}] = E [e^{-\Lambda(T)}] = E \left[e^{-\int_0^T \lambda_s ds} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

Como ya se comentó tras la ecuación (17), el proceso de intensidad $\lambda(t)$ puede entenderse como el proceso del tipo instantáneo con la restricción de tener que ser estrictamente positivo. En este caso, la expresión 23 representa el precio de un bono cupón-cero de vencimiento T .

Cox *et al.* (1985) proponen un modelo de difusión para el tipo de interés instantáneo que garantiza a) un valor estrictamente positivo para dicho tipo instantáneo y b) fórmulas cerradas para el precio del bono cupón-cero con las consiguientes ventajas para la calibración de dicho modelo.

En este contexto, Brigo and Chourdakis (2008) [2] proponen el modelo CIR++ que supone una evolución estocástica para el proceso de intensidad de impago.

En concreto, el proceso de intensidad de impago definido en (14) viene dado por la expresión

$$\lambda_j(t) = y_j(t) + \psi_j(t, \beta_j), \quad t \geq 0, \quad j = A, B \quad (24)$$

donde ψ es una función determinística que depende del vector de parámetros β , integrable en intervalos cerrados y que se utilizará para calibrar el modelo utilizando la curva de probabilidades de solvencia implícita en la cotización de CDSs.

El proceso estocástico y debe ser estrictamente positivo. Entonces, una alternativa es la propuesta en Cox *et al.* (1985):

$$dy_j(t) = k_j(\mu_j - y_j(t))dt + \nu_j \sqrt{y_j(t)} dZ_j, \quad j = A, B \quad (25)$$

donde el vector de parámetros $\beta_j = (k_j, \mu_j, \nu_j, y_j(0))$, $j = A, B$ incluye constantes positivas y Z_j son movimientos Brownianos estándar independientes entre sí que, bajo la medida neutral al riesgo, determinan la evolución estocástica del proceso.^{1,2}

¹El proceso y_j es positivo si se cumple la restricción $2k\mu > \nu^2$.

²Brigo and El-Bachir (2010) [4] introducen una variación a este modelo añadiendo un proceso de *saltos* a la evolución de $y(t)$.

Se introduce la siguiente notación para los procesos acumulados:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds, \quad Y(t) = \int_0^t y(s) ds, \quad \Psi(t, \beta) = \int_0^t \psi(s, \beta) ds$$

4.1. Calibración al mercado de CDSs

Este tipo de modelos y su calibración al mercado de CDS ha sido investigado en detalle en Brigo and Alfonsi (2005) [1].

Del mercado de CDSs se puede extraer la curva de probabilidades (neutrales al riesgo) de solvencia asociada a un emisor mediante un procedimiento de *stripping*. Si estas probabilidades de solvencia se asocian a un proceso de intensidad (*hazard function*) de mercado $\Gamma^{Mkt}(t)$, la calibración del modelo CIR++ solo requiere imponer que dicho modelo sea coherente con $\Gamma^{Mkt}(t)$, es decir,

$$\exp(-\Gamma^{Mkt}(t)) = P(\tau > t) = \exp(-\Psi(t, \beta)) E \left[e^{-\int_0^t y(s) ds} \right] \quad (26)$$

Nótese que $E \left[e^{-\int_0^t y(s) ds} \right]$ es el precio del bono cupón-cero de vencimiento t donde el tipo de interés instantáneo $y(s)$ sigue el modelo CIR. En este caso, este precio tiene fórmula analítica, la cual se denota por $P^y(0, t, y_0; \beta)$.

Por tanto, el modelo CIR++ se calibra al proceso de intensidad de mercado $\Gamma^{Mkt}(t)$ definiendo

$$\Psi(t, \beta) := \Gamma^{Mkt}(t) + \ln(P^y(0, t, y_0; \beta)) \quad (27)$$

Observése que esta especificación de $\Psi(t, \beta)$ es válida para cualquier especificación de los parámetros β que garantice que ψ es positiva.³

4.2. Correlación en los procesos de impago

Una solución inicial para incorporar correlación en los procesos de impago es introducir correlación entre los movimientos Brownianos de $y_j(t)$, $j = A, B$ y Z_j , $j = A, B$. Sin embargo Brigo and Chourdakis (2008) [2] citan en su trabajo que ésta alternativa tiene un escaso impacto en la correlación entre los impagos.

Como alternativa se supondrá que los movimientos Brownianos Z_j , $j = A, B$ son independientes y se introducirá la correlación mediante la función de cópula Gaussiana, tal y como se hizo anteriormente.

Se tiene la siguiente información para $j = A, B$:

- Modelos de intensidad de impago:

$$dy_j(t) = k_j(\mu_j - y_j(t))dt + \nu_j \sqrt{y_j(t)} dZ_j$$

- Intensidades acumuladas estocásticas definidas por:

$$\Lambda_j(t) = \int_0^t \lambda_j(s) ds$$

³La especificación de los valores de β acordes con el mercado requiere utilizar cotizaciones de opciones sobre CDS, un mercado muy poco líquido actualmente.

- Tiempos hasta el impago a partir de dos valores (*triggers*) con distribución exponencial de media ψ_j y correlacionados mediante una cópula Gaussiana con correlación ρ :

$$\tau_j = \Lambda_j^{-1}(\psi_j)$$

El siguiente gráfico muestra el esquema mediante el cual se introduce la correlación:

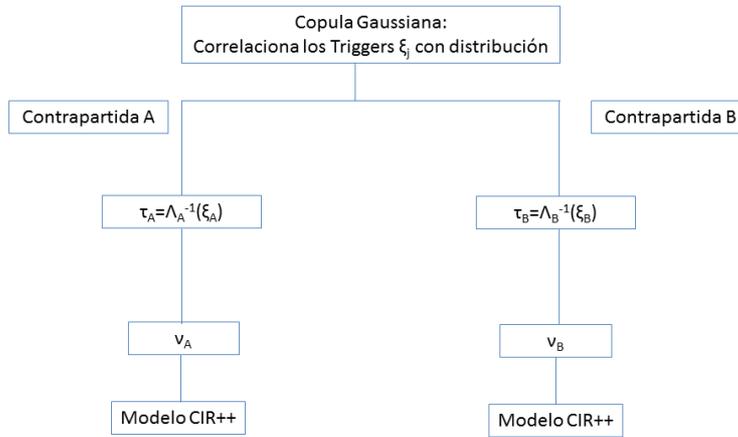


Figura 14: Esquema de introducción de correlación

4.3. Simulación de los procesos de intensidad

La ecuación (26) proporcionó una expresión analítica para la función de distribución de los tiempos hasta el impago. Sin embargo, no se obtienen expresiones cerradas al hacer las transformaciones necesarias para aplicar la función de cópula incluida en (22). Por tanto, la implementación de la función de cópula requiere simular los procesos $\Lambda_j(t)$, $j = A, B$.

La simulación de estos procesos mediante los esquemas de discretización habituales (como el esquema de Euler) es muy inestable y requiere dar pasos temporales de simulación muy pequeños para asegurar que la simulación no proporciona valores negativos. Por tanto, la simulación es muy costosa en términos computacionales.

Shao (2012) [5] analiza en detalle el problema de simular procesos CIR y propone un método eficiente que se resume a continuación.

Considérese el proceso CIR dado por⁴

$$\begin{aligned} dX(t) &= \alpha(b - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}W(t), \quad \alpha > 0, b > 0, \sigma > 0 \\ X(0) &= x_0 > 0 \end{aligned}$$

Dado $X(u)$, se comprueba que $X(t)$, $t > u$ sigue una distribución chi-cuadrado no centrada tal que

$$X(t)|X(u) \rightarrow c \times \chi_d^2(\lambda)$$

donde

$$c = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-u)})}{4\alpha}, \quad d = \frac{4b\alpha}{\sigma^2}, \quad \lambda = \frac{4\alpha e^{-\sigma(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha(t-u)})}X(u)$$

Por tanto, la simulación de un proceso CIR se reduce a simular eficientemente una distribución chi-cuadrado no centrada. Shao (2012) [5] muestra el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *Una distribución chi-cuadrado no centrada $\chi_d^2(\lambda)$ puede expresarse como*

$$\chi_d^2(\lambda) = \chi_d^2(0) + Y(\lambda, Z, \hat{Z}, U)$$

donde $\chi_d^2(0)$ sigue una distribución gamma $\Gamma(d/2, 2)$, U sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y Z y \hat{Z} son variables normales estándar. Estas cuatro variables son independientes entre sí. La función Y se define como

$$Y(\lambda, Z, \hat{Z}, U) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda + 2 \ln(U) \leq 0 \\ Z + \sqrt{\lambda + 2 \ln(U)} + \hat{Z}^2 & \text{si } \lambda + 2 \ln(U) > 0 \end{cases}$$

4.4. Resultados

Se analizan los resultados generados para distintos escenarios de correlación y de volatilidad ν de los modelos CIR++ de A y B . Supondremos que $\nu_A = \nu_B = \nu$. Los valores iniciales $y_j(0)$, $j = A, B$ y los niveles de reversión $\mu_j(0)$, $j = A, B$ son $y_A(0) = \mu_A = 1\%$, $y_B(0) = \mu_B = 10\%$.

Para cada valor de ν se calculan los parámetros de velocidad de reversión del modelo k_j , $j = A, B$ de modo que se asegure la condición de positividad del modelo CIR.

La Figura 15 muestra los resultados obtenidos con 4000 simulaciones.

⁴La restricción $2\alpha b \geq \sigma^2$ garantiza que nunca se alcanzará el origen y, por tanto, $X(t)$ será siempre positivo.

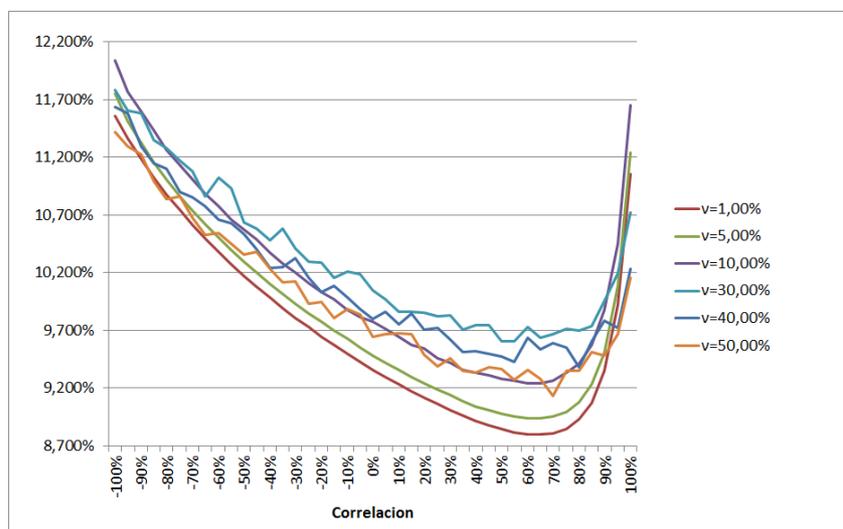


Figura 15: CVA/DVA con modelo CIR++ para distintos valores de la volatilidad

Se observa que, a medida que aumenta la volatilidad de los modelos CIR, el valor de la correlación que minimiza CVA_A se retrasa. Este hecho se cumple siempre pues existe, para cada valor de ν , un valor de la correlación ρ donde este efecto se reproduce.

4.5. Limitaciones

A pesar de ser una alternativa que proporciona resultados más razonables, el modelo CIR++ presenta una serie de limitaciones importantes en su implementación. Las principales son las siguientes:

1. En primer lugar, para asegurar la positividad del proceso CIR se debe cumplir, con la notación de 25, que $2k\mu > \nu^2$. Sin embargo, esta condición sumada a la imposición de valores positivos para la función ψ (necesaria para asegurar intensidades de impago positivas) limita la volatilidad implícita de los CDS generada por el modelo.⁵
2. Como se ha mencionado anteriormente, la especificación de los valores de β acordes con el mercado requiere utilizar cotizaciones de opciones sobre CDS, un mercado que es muy poco líquido en la actualidad. Por tanto, no es posible calibrar el proceso (estocástico) de intensidad de impago.
3. A pesar de los resultados del Teorema 4.1, el tratamiento del modelo de cara al cálculo de CVA/DVA sigue requiriendo la implementación de métodos de simulación Monte Carlo, lo que supone un coste computacional elevado.

⁵Brigo and Cousot (2006) [3] examinan los patrones de volatilidad implícita de CDSs asociados con el modelo.

4. Finalmente, como se observa en la Figura 15, los resultados obtenidos son poco razonables.

5. Modelo propuesto

Se propone un modelo alternativo para calcular CVA / DVA correlacionando los procesos del crédito de las dos contrapartidas. Este modelo está basado en el modelo de Jarrow-Turnbull (xxxx) y será implementado en un árbol bidimensional. Al contrario que en las secciones anteriores donde se modelizaba como subyacente el tiempo hasta el impago τ de las contrapartes, ahora el subyacente a modelizar es el estado de solvencia / insolvencia de la entidad.

A continuación se detallará cómo construir un esquema discreto de evolución bidimensional que contemple el proceso de solvencia/insolvencia conjunto de las dos entidades y sobre el que se pueden valorar derivados de crédito. Posteriormente se describirá el procedimiento para valorar el derivado de crédito que representa el CVA/DVA sobre el esquema de evolución especificado. Por último se especificará cómo incorporar la correlación entre los dos procesos de solvencia.

5.1. Esquema de evolución del proceso de solvencia

Se define el proceso de solvencia / insolvencia de la entidad como un proceso de Markov discreto donde, en cada instante, se contemplan dos estados: el estado de solvencia y el estado de insolvencia. De esta manera, para un paso de discretización dt , el proceso de solvencia / insolvencia de la entidad es una sucesión de variables $X(n)$ que indica el estado de solvencia en el que se encuentra la entidad en el instante $n \times dt$. Los valores de X_n son

$$X(n) = \begin{cases} 1 & \text{si no ha habido impago hasta el instante } n \times dt \\ 0 & \text{si ha habido impago antes del instante } n \times dt \end{cases}$$

Las probabilidades asociadas a las variables $X(n)$ son la probabilidad de solvencia de la entidad en el instante $n \times dt$ ($P(n) = P(X(n) = 1)$) y la probabilidad de impago antes del instante $n \times dt$ ($1 - P(n) = P(X(n) = 0)$). Las probabilidades de transición entre la variable $X(n-1)$ y la variable $X(n)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \pi(n) &= P(X(n) = 1 | X(n-1) = 1) \\ 1 - \pi(n) &= P(X(n) = 0 | X(n-1) = 1) \end{aligned}$$

Se supone además que el estado de insolvencia es un estado absorbente del proceso, es decir,

$$\begin{aligned} P(X(n) = 1 | X(n-1) = 0) &= 0 \\ P(X(n) = 0 | X(n-1) = 0) &= 1 \end{aligned}$$

La Figura 16 incluye el esquema de evolución del proceso de solvencia de la entidad desde el instante $(n-1) \times dt$ hasta el instante $n \times dt$.

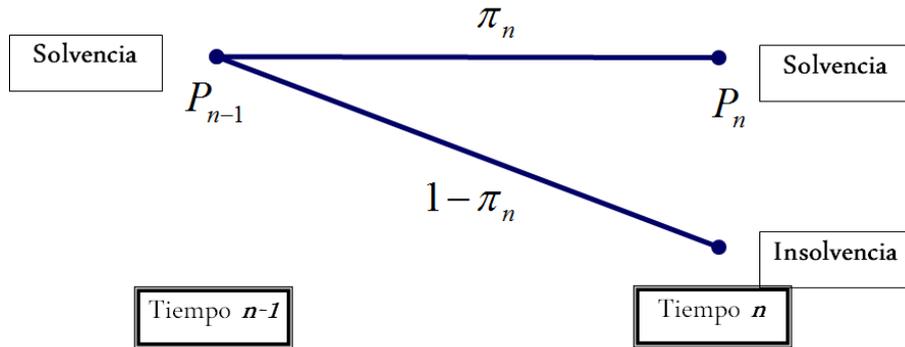


Figura 16: Esquema de evolución del proceso de solvencia

La siguiente figura indica el esquema de evolución del proceso de solvencia para dos periodos.

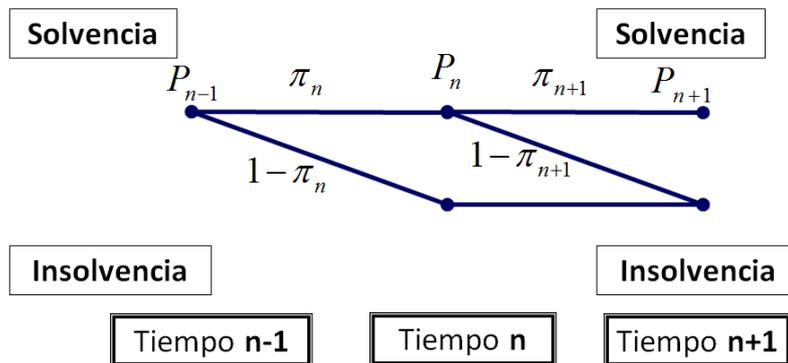


Figura 17: Esquema de evolución del proceso de solvencia en dos periodos

Este esquema de evolución permite valorar cualquier derivado de crédito mediante el procedimiento de asignar flujos a los nodos del árbol de evolución. Estos flujos son descontados mediante los factores correspondientes y ponderados utilizando las probabilidades de transición

En este contexto, el CVA/DVA se entiende como un derivado de crédito cuyo valor depende de los procesos de crédito conjuntos de ambas contrapartes y cuyos flujos vienen definidos por las exposiciones ponderadas por *Lgd*. Para poder valorar este derivado de crédito se construye un árbol de dos dimensiones simulando ambos procesos de solvencia/insolvencia. De este modo, en cada instante de tiempo n , existen cuatro nodos:

Cuadro 1: Nodos del árbol de dos dimensiones

	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	$Nodo_1(n)$	$Nodo_2(n)$
<i>Insolv. B</i>	$Nodo_3(n)$	$Nodo_4(n)$

Podemos indicar los siguientes hechos:

- Los nodos $Nodo_4(\cdot)$ son nodos absorbentes del proceso.
- Los nodos $Nodo_2(\cdot)$ son nodos absorbentes en la dimensión de A .
- Los nodos $Nodo_3(\cdot)$ son nodos absorbentes en la dimensión de B .

Por tanto, la relación entre los nodos correspondientes a dos instantes de tiempo consecutivos es la siguiente:

- El nodo $Nodo_1(n-1)$ se relaciona con todos los nodos de n .
- El nodo $Nodo_2(n-1)$ se relaciona con los nodos $Nodo_2(n)$ y $Nodo_4(n)$ pues A ha realizado impago.
- El nodo $Nodo_3(n-1)$ se relaciona con los nodos $Nodo_3(n)$ y $Nodo_4(n)$ pues B ha realizado impago.
- El nodo $Nodo_4(n-1)$ se relaciona con el nodo $Nodo_4(n)$ pues tanto A como B han realizado impago.

Supongamos que las probabilidades $\pi_k(n) = P(X_k(n) = 1 | X_k(n-1) = 1)$, $k = A, B$ son conocidas. En caso de independencia, las probabilidades de transición del instante $(n-1)dt$ al instante ndt asociadas a este esquema de evolución bidimensional vienen dadas en la siguiente Tabla.

$Nodo_1(n-1)$	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	$\pi_A(n) \pi_B(n)$	$(1 - \pi_A(n)) \pi_B(n)$
<i>Insolv. B</i>	$\pi_A(n)(1 - \pi_B(n))$	$(1 - \pi_A(n))(1 - \pi_B(n))$
$Nodo_2(n-1)$	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	0	$\pi_B(n)$
<i>Insolv. B</i>	0	$1 - \pi_B(n)$
$Nodo_3(n-1)$	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	0	0
<i>Insolv. B</i>	$\pi_A(n)$	$1 - \pi_A(n)$
$Nodo_4(n-1)$	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	0	0
<i>Insolv. B</i>	0	1

5.2. Valoración

La valoración en este esquema de evolución requiere asignar los flujos correspondientes en los sucesivos nodos del árbol. Comenzando por los nodos del último instante temporal, tenemos lo siguiente:

- Si se va a calcular el CVA que A debe cargar a B ($CV A_A$), el nodo 3 incluye un valor igual a la exposición que tiene A en ese momento multiplicada por la tasa de pérdida de B (Lgd).
- De modo similar, si se va a calcular $CV A_B$, el nodo 2 incluirá un valor dado por la exposición de B en ese momento multiplicada por la tasa de pérdida de A (Lgd).

En los instantes anteriores, los valores de los nodos serán:

- Nodo 1: el derivado que representa el CVA no vence pues no se ha producido ningún impago. Por tanto, el valor en este nodo es el valor medio del instante siguiente actualizado al instante de valoración. Es decir, este valor será la suma de los valores de los cuatro nodos del siguiente instante ponderados por las probabilidades de transición y multiplicada por el factor de descuento implícito en ese periodo de tiempo.
- Nodos 2 y 3: el derivado que representa el CVA ha vencido pues en ambos nodos se produce impago. El valor será su pay-off, el cual es:
 - Si se va a calcular el CVA que A debe cargar a B ($CV A_A$), el nodo 3 incluye un valor igual a la exposición que tiene A en ese momento multiplicada por la tasa de pérdida de B (Lgd).
 - De modo similar, si se va a calcular $CV A_B$, el nodo 2 incluirá un valor dado por la exposición de B en ese momento multiplicada por la tasa de pérdida de A (Lgd).
- Nodo 4: el derivado que representa el CVA ha vencido pues se ha producido impago. Por tanto, su valor coincide con su pay-off el cual es nulo si se supone que no se liquidan posiciones o igual a la diferencia entre las pérdidas si se supone liquidación de posiciones.

A continuación, se describe cómo incorporar adecuadamente la correlación entre los eventos de crédito.

5.3. Correlación entre impagos

El planteamiento para introducir la correlación en el árbol bidimensional es modificar las probabilidades de transición de modo que se preserven las distribuciones marginales. De hecho, sólo se alterarán las probabilidades de transición del $Nodo_1$ pues son las únicas que intervienen en el procedimiento de valoración.

Se parte de las probabilidades de transición asociadas al $Nodo_1(\cdot)$ en el caso de independencia.

	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	$\pi_A \pi_B$	$(1 - \pi_A)\pi_B$
<i>Insolv. B</i>	$\pi_A(1 - \pi_B)$	$(1 - \pi_A)(1 - \pi_B)$

Estas probabilidades se alteran incorporando una cantidad ε a la probabilidad asociada al escenario de (*Solv. A*, *Solv. B*). La única manera de preservar las distribuciones marginales es la siguiente:

	Solv. A	Insolv. A
Solv. B	$\pi_A \pi_B + \varepsilon$	$(1 - \pi_A)\pi_B - \varepsilon$
Insolv. B	$\pi_A(1 - \pi_B) - \varepsilon$	$(1 - \pi_A)(1 - \pi_B) + \varepsilon$

Teorema 5.1. El valor que debe de tener ε para que la correlación sea ρ viene dado por

$$\varepsilon = \rho \sqrt{\pi_A(1 - \pi_A)\pi_B(1 - \pi_B)}$$

Demostración. Sea el proceso

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \pi_j \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \pi_j \end{cases}, \quad j = A, B$$

La media y varianza de este proceso son

$$E[X_j] = \pi_j, \quad Var[X_j] = \pi_j(1 - \pi_j), \quad j = A, B \quad (28)$$

La siguiente Tabla incluye la probabilidad conjunta del par X_A, X_B

	$X_A = 1$	$X_A = 0$
$X_B = 1$	$\pi_A \pi_B + \varepsilon$	$(1 - \pi_A)\pi_B - \varepsilon$
$X_B = 0$	$\pi_A(1 - \pi_B) - \varepsilon$	$(1 - \pi_A)(1 - \pi_B) + \varepsilon$

Sea el proceso bidimensional $Z = X_A X_B$. Este proceso vale 1 si y sólo si $X_A = X_B = 1$. Su media es

$$E[Z] = E[X_A X_B] = \pi_A \pi_B + \varepsilon \quad (29)$$

Utilizando (28) y (29), se obtiene que la correlación entre X_A y X_B es

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi_A(1 - \pi_A)\pi_B(1 - \pi_B)}}$$

□

Obsérvese que, para que el resultado de este Teorema tenga sentido y no genere probabilidades de transición negativas, se debe cumplir

$$\max(-(1 - \pi_A)(1 - \pi_B), -\pi_A \pi_B) < \rho < \frac{\min(\pi_A(1 - \pi_B), \pi_B(1 - \pi_A))}{\sqrt{\pi_A(1 - \pi_A)\pi_B(1 - \pi_B)}}$$

Por tanto, si π_A y π_B son similares, se puede obtener cualquier correlación positiva pero las correlaciones negativas estarán limitadas. En cambio, si π_A y π_B son diferentes existirán límites también para las correlaciones positivas.⁶ La explicación de estos resultados es el propio significado de la correlación cuando las probabilidades de ocurrencia son muy diferentes. En más detalle, no tienen sentido correlaciones altas (que obligarían a generar resultados similares) en variables que, por definición, son diferentes al tener probabilidades de ocurrencia distintas.

Por tanto, en este caso, se debe considerar el significado de la correlación en el sentido de esperar que la estructura de probabilidades de

⁶Por ejemplo, si $\pi_A = 99\%$, $\pi_B = 90\%$ la correlación máxima que se puede obtener es del orden de 30%.

transición maximice / minimice la probabilidad en los escenarios conjuntos (solventía conjunta e impago conjunto) en el caso de correlación máxima / mínima, preservando siempre las distribuciones marginales.

La siguiente Tabla indica la estructura de probabilidades conjuntas que preserva las distribuciones marginales.

	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	q_1	$\pi_B - q_1$
<i>Insolv. B</i>	$\pi_A - q_1$	$q_1 + 1 - \pi_A - \pi_B$

Todas las probabilidades incluídas en esta Tabla deben de ser positivas y menores que 1. Estas restricciones se resumen en

$$\text{máx}(0, \pi_A + \pi_B - 1) < q_1 < \text{mín}(\pi_A, \pi_B)$$

Teorema 5.2. *La estructura de probabilidades que maximiza la probabilidad en los escenarios conjuntos (asociada, por tanto, a una correlación máxima) se alcanza cuando*

$$q_1 = \text{mín}(\pi_A, \pi_B)$$

La estructura de probabilidades que minimiza la probabilidad en los escenarios conjuntos (asociada, por tanto, a una correlación mínima) se alcanza cuando

$$q_1 = \text{máx}(\pi_A + \pi_B - 1, 0)$$

Demostración. El resultado se alcanza maximizando (minimizando) las probabilidades de escenarios conjuntos en la estructura de probabilidades definida en la Tabla anterior. La función a maximizar (minimizar) es

$$f(q_1) = q_1 + q_1 + 1 - \pi_A - \pi_B = 2q_1 + 1 - \pi_A - \pi_B$$

Por tanto, esta función es monótona en q_1 y alcanza su máximo en $\text{mín}(\pi_A, \pi_B)$ y su mínimo en $\text{máx}(0, \pi_A + \pi_B - 1)$. \square

Partiendo de los escenarios de correlación máxima / mínima y de la estructura de probabilidades asociada al escenario de independecia (que también es conocida), se plantea una primera estructura de probabilidades dada una correlación ρ :

Cuadro 2: Probabilidades de transición en modelo de árboles

	<i>Solv. A</i>	<i>Insolv. A</i>
<i>Solv. B</i>	$q_1(\rho)$	$\pi_B - q_1$
<i>Insolv. B</i>	$\pi_A - q_1$	$1 - \pi_A - \pi_B + q_1$

donde $q_1(\rho)$ viene dada por

$$(1 - |\rho|)\pi_A\pi_B + \text{máx}(\rho, 0)\text{mín}(\pi_A, \pi_B) - \text{mín}(\rho, 0)\text{máx}(0, \pi_A + \pi_B - 1)$$

La Figura 18 muestra el CVA de A en función de la correlación bajo las condiciones indicadas en la Subsección 3.3 para $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$. Se puede observar un comportamiento lineal y una singularidad en el caso de correlación nula.

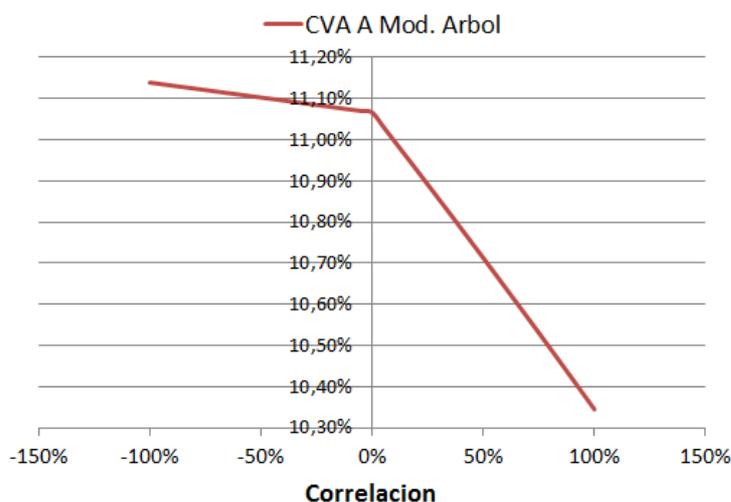


Figura 18: CVA en modelo árbol

Una manera alternativa de introducir la correlación y que proporciona resultados más razonables es mediante la función de cópula Gaussiana. En este caso, si $\pi_A(n)$ y $\pi_B(n)$ son las probabilidades condicionadas de solvencia para el instante n , la probabilidad de solvencia conjunta condicionada es

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\text{Solv}_A, \text{Solv}_B; \rho) &= c(\pi_A(n), \pi_B(n); \rho) \\ &= \Phi_\rho(F_{N(0,1)}^{-1}(\pi_A(n)), F_{N(0,1)}^{-1}(\pi_B(n)); \rho) \end{aligned}$$

que indica el valor de $q_1(\rho)$ (véase el Cuadro 2). La Figura 19) muestra los resultados obtenidos e ilustra que, ahora, se obtiene una función de CVA vs. correlación más suavizada.

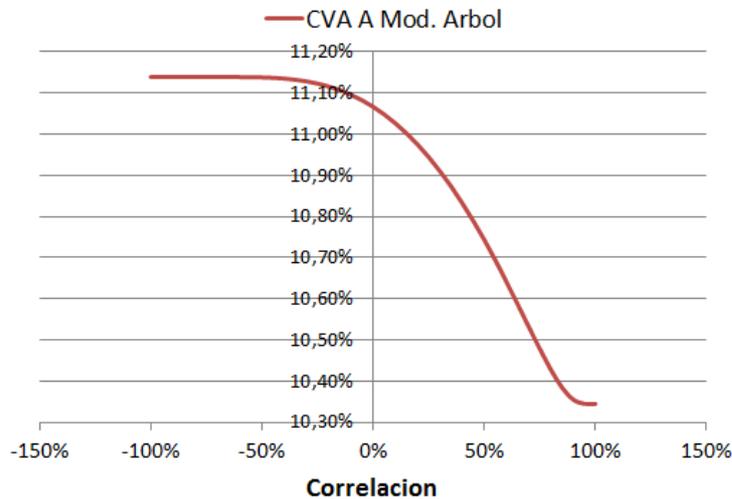


Figura 19: CVA en modelo árbol con correlación a través de la función de cópula

5.4. Resultados

A continuación se analizan los resultados obtenidos mediante el modelo propuesto y se comparan con el modelo propuesto en la Sección 3, es decir, el modelo de intensidad de impago y cópula Gaussiana. Se utilizan los mismos datos que en la Subsección 3.3 y se consideran dos escenarios correspondientes, respectivamente a intensidades de impago similares y diferentes. El modelo de árbol se basa en la propuesta de correlación con cópula Gaussiana.

1. CASO 1: λ_A y λ_B tienen valores similares

Supongamos inicialmente que $\lambda_A = \lambda_B = 1\%$. La Figura 20 muestra que, en los escenarios de correlación negativa, el modelo previamente presentado en la Sección 3 sobrevalora el CVA con respecto al nuevo modelo propuesto.

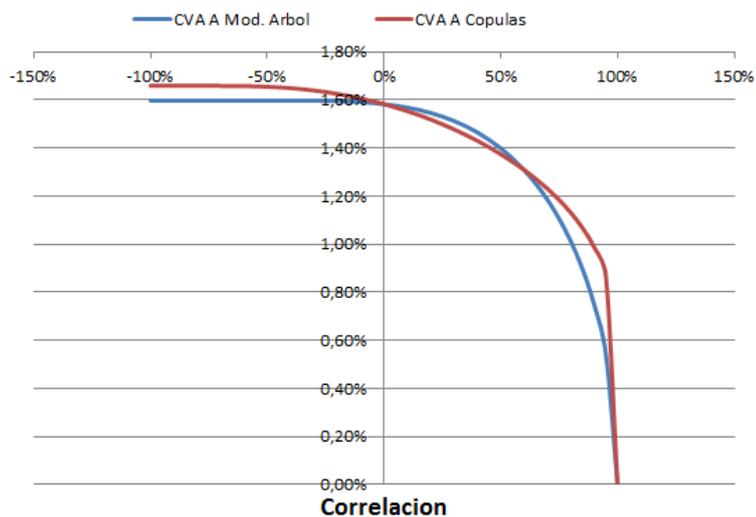


Figura 20: CVA/DVA en modelo árbol con λ 's similares

2. CASO 2: λ_A y λ_B tienen valores diferentes

Supongamos $\lambda_A = 1\%$, $\lambda_B = 10\%$. La **Figura 21** ilustra que, al analizar el caso conflictivo del CVA de A , el modelo propuesto no genera los escenarios inverosímiles de cambio de pendiente en el CVA en función de la correlación. Adicionalmente, en todos los escenarios con alta probabilidad de impago de la contrapartida, el modelo presentado en la Sección 3 tiende a sobrevalorar el CVA con respecto al modelo de árboles.

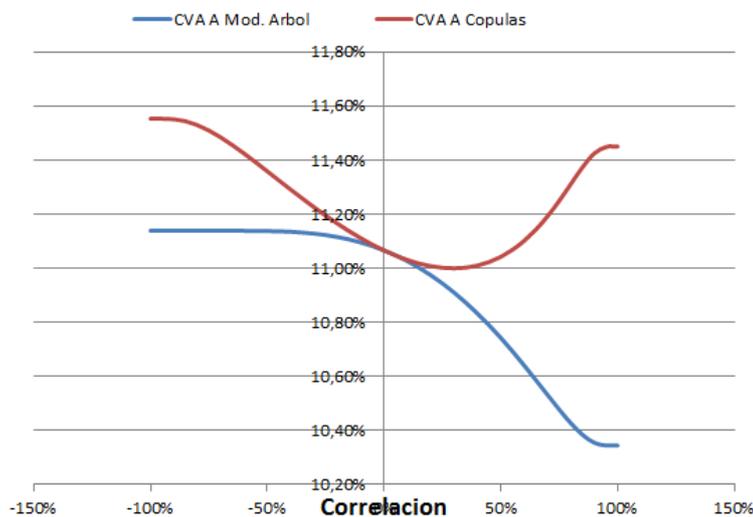


Figura 21: CVA/DVA en modelo árbol con λ 's diferentes

6. Conclusiones

Trás de la aplicación del modelo tradicional de intensidad de impago y correlación mediante cópula gaussiana, se observan resultados inverosímiles en la relación entre el ajuste CVA y la correlación. Después de analizar estos resultados se demuestra en el presente trabajo que son debidos al efecto que la función de cópula tiene en el cálculo.

Adicionalmente se analiza la propuesta alternativa de aplicar el modelo CIR++ al proceso de intensidad de impago, y se observa que, a pesar de mejorar los resultados, sin embargo se siguen obteniendo la misma relación inverosímil entre el ajuste CVA y la correlación para determinados valores de volatilidad del modelo. Además, la aplicación del modelo CIR++ presenta limitaciones importantes, la más relevantes son:

1. Restricciones en la estructura de volatilidad implícita de los CDS generada por el modelo por el hecho de exigir positividad al proceso de intensidad
2. Imposibilidad de calibración de la estructura estocástica del modelo debido a la escasa liquidez en el mercado de opciones sobre CDS

Por otro lado, a pesar de que en este trabajo se propone una manera eficiente de simular el proceso CIR++, sin embargo la implementación de dicho proceso sigue incorporando un elevado coste computacional.

El modelo propuesto de estimación de CVA con riesgo bilateral, basado en un esquema de árbol bidimensional, soluciona de manera eficiente los problemas encontrados. En su definición se analizan distintas propuestas

para incorporar la correlación alterando las probabilidades de transición y se concluye, tras analizarlas, que la propuesta que genera resultados más razonables es realizarlo mediante la aplicación de una función de cópula gaussiana.

Sin embargo, el modelo propuesto supone independencia entre la exposición de las contrapartidas y los procesos de default de ambas. Una extensión a dicho modelo sería estudiar su aplicación en presencia de dicha correlación entre los procesos de solvencia y las exposiciones, para incorporar en la estimación de CVA el *riesgo de correlación adversa* ó *Wrong-Way-Risk*.

Referencias

- [1] Brigo, D. and Alfonsi, A. (2005). Credit Default Swap Calibration and Derivatives Pricing with SSRD Stochastic Intensity Model. *Finance and Stochastic*, 9, 1, 563-585.
- [2] Brigo, D. and Chourdakis, K. (2008). Counterparty Risk For Credit Default Swaps: Impact of Spread volatility and default correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12, 1007-1026
- [3] Brigo, D. and Cousot, L. (2006). A Comparison between the SSRD Model and the Market Model for CDS Options Pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 9,3
- [4] Brigo, D. and El-Bachir, N. (2010). An Exact Formula for Default Swaptions Pricing in the SSRJD Stochastic Intensity Model. *Mathematical Finance*, 20, 3, 365-382.
- [5] Shao, A (2012). A Fast and Exact Simulation for CIR Process. *University of florida*.
- [6] Jarrow, R. and Turnbull, S. (1995). Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *The Journal Of Finance*, 1, 1.
- [7] Cox, J.C, Ingersoll, J.E. and S.A. Ross (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, 2, 385-408.
- [8] Collin-Dufresne, P., Goldstein, R. and Hudonier, J.(2002). A General Formula For Valuing Defaultable Securities. *Econometrica*, 73, 5, 1377-1407.