

**RIESGO DE MODELO EN SWAPTIONS BERMUDA:  
REVERSION A LA MEDIA DEL HULL&WHITE**

**Guillermo Serna Calderón**

Trabajo de investigación 016/018

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Directores

Alberto Fernández  
Álvaro Montealeagre

Universidad del País Vasco

Universidad de Castilla-La Mancha

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

[www.finanzasquantitativas.es](http://www.finanzasquantitativas.es)

# Riesgo de Modelo en swaptions bermuda: reversión a la media del Hull & White

Guillermo Serna Calderón\*

Máster en banca y finanzas cuantitativas  
Universidad del País Vasco

Tutores: Dr. Alberto Fernández Muñoz de Morales  
Dr. Álvaro Montealegre Moyano

13 de octubre de 2016

---

\*A mis tutores, Alberto Fernández y Alvaro Montealegre, por la magnífica ayuda y apoyo que me han brindado a la hora de realizar este trabajo. A mis padres y a mi hermano, por todo.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Definiciones preliminares</b>	<b>6</b>
<b>3. Modelo Hull &amp; White</b>	<b>13</b>
3.1. Bonos Hull & White bajo la medida cuenta corriente . . . . .	14
3.2. Bonos Hull & White bajo la medida terminal . . . . .	14
3.3. Opción sobre bono Hull & White . . . . .	15
3.4. Opción sobre cesta de bonos Hull & White . . . . .	15
3.5. Swaption Hull & White . . . . .	16
<b>4. Árbol multinomial en Hull &amp; White</b>	<b>18</b>
4.1. Implementación del árbol . . . . .	19
4.2. Valoración del swaption bermuda . . . . .	20
<b>5. Calibración del modelo Hull &amp; White</b>	<b>22</b>
5.1. Calibración de la reversión a la media . . . . .	23
5.2. Calibración de la Volatilidad . . . . .	27
<b>6. Resultados</b>	<b>30</b>
6.1. Impacto de la reversión en el precio de swaptions bermuda . . . . .	30
6.2. Resultados de calibración de la reversión a la media . . . . .	44
6.3. Estimación de los AVAs . . . . .	47
<b>7. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>8. Anexo I: Desarrollo Hull &amp; White</b>	<b>56</b>
<b>9. Anexo II: Bonos Hull &amp; White bajo medida terminal</b>	<b>59</b>
<b>10. Anexo III: Valoración de Swaption con Black Shifted</b>	<b>60</b>
<b>11. Anexo IV: Herramienta de valoración</b>	<b>61</b>
<b>12. Anexo V: Ejemplo de volatilidades calibradas</b>	<b>66</b>

# 1. Introducción

Este trabajo pretende estudiar el riesgo de modelo procedente del parámetro de reversión a la media en la valoración de swaptions bermuda bajo el modelo Hull & White de tipos de interés.

Un swaption europeo es un producto financiero que proporciona al comprador la opción, pero no la obligación, de entrar en un swap o permuta financiera en una fecha futura predeterminada. Un swaption bermuda, sin embargo, proporciona al comprador más de una fecha para tomar la decisión.

Los swaptions bermuda son uno de los derivados con más volumen dentro de los mercados Over The Counter<sup>1</sup> (OTC), por lo que resulta de gran importancia la correcta valoración de los mismos. Los swaptions bermuda son usados frecuentemente por empresas y entidades públicas para reestructurar su deuda emitida, ya que proporcionan cierta flexibilidad a la hora de elegir convenientemente el momento en que llevar a cabo la reestructuración.

Existen varios modelos de tipos de interés que permiten valorar un swaption bermuda. Entre los más comunes se encuentran Black-Derman-Toy, Hull & White o Libor Market Model. Como hemos mencionado anteriormente, en este trabajo nos centraremos en el modelo Hull & White para valorar swaptions bermuda, marco que ha ganado gran popularidad principalmente por dos motivos:

- Dispone de fórmulas cerradas para instrumentos sencillos, algo de gran utilidad a la hora de calibrar el modelo.
- Permite tipos de interés negativos, lo que le otorga una gran ventaja frente a los otros modelos debido a la existencia desde 2013 de fijaciones de tipos de interés negativos para divisa euro. Curiosamente, hasta ese momento esta característica del modelo suponía la mayor fuente de críticas para el Hull & White, ya que tradicionalmente se ha considerado a los tipos de interés como una variable necesariamente positiva.

---

<sup>1</sup>También llamados mercados paralelos o extrabursátiles, se trata de mercados libres no reglados o de carácter privado; mercados fuera de la bolsa; mercados internacionales o nacionales no reglados sin ubicación física, es decir, en los que las transacciones se realizan por medio de mensajes a través de los diferentes medios de comunicación, incluyendo el cierre de transacciones por ordenador.

Para una correcta valoración de los swaptions bermuda es necesario calibrar el modelo a ciertos productos de mercado. En nuestro caso, los parámetros a calibrar serán la volatilidad y la reversión a la media. Mientras que el proceso de calibración de la volatilidad es más o menos sencillo, la obtención de la reversión a la media es en cierto modo problemática, generando inestabilidades en la calibración que dificultan la valoración de los swaptions bermuda. Hay varios trabajos como [4] o [5] que presentan ejemplos de su calibración. En líneas generales, existen tres grandes metodologías para la obtención de este parámetro: la fijación del parámetro mediante criterio experto, la calibración como una función *piecewise constant* o *piecewise linear*, la calibración como una constante mediante ratios de varianza (ver [2]). En todos los casos mencionados la volatilidad se calibra como una función *piecewise constant* o *piecewise linear*.

En este trabajo estudiaremos el impacto del parámetro de reversión a la media de Hull & White en la valoración de swaptions bermuda. Para ello, llevaremos a cabo el siguiente proceso de calibración:

- Fijaremos la reversión a la media como una constante mediante ratios de varianza de swaptions europeos de mercado o por medio de criterio experto.
- Una vez fijada la reversión a la media, obtendremos valores de volatilidad consistentes con swaptions europeos de mercado.

Esta metodología nos permitirá evaluar el impacto de la calibración del parámetro de reversión en la valoración de un swaption bermuda, siendo en todo momento consistentes con los mismos productos europeos de mercado.

En resumen, a partir de nuestra metodología de calibración dispondremos de rangos de precios de swaption bermuda en función del parámetro de reversión a la media. Estos precios nos permitirán estimar el orden de magnitud del riesgo de modelo incurrido por la incertidumbre en la estimación del parámetro de reversión en un producto tan extendido entre las entidades financieras como es el swaption bermuda.

La estimación del riesgo de modelo será calculada mediante ajustes de valoración adicionales, conocidos como AVAs (*Additional Valuation Adjustment*), que fueron propuestos por la *European Banking Authority* (EBA) en un paper de Julio 2013,

ver [12]. En este paper se presentan dos metodologías para el cálculo de los AVAs, un método simplificado y un método general que usaremos en este trabajo.

En el método general, el valor prudencial de la posición estará vinculado a un intervalo de valores plausibles y un nivel de confianza objetivo del 90 %. En términos prácticos, esto significa que se requiere calcular el valor prudencial utilizando los datos de mercado y un nivel de confianza objetivo para la incertidumbre de los precios de mercado. En nuestro caso, utilizaremos el nivel de confianza objetivo del 90 % sobre el parámetro de la reversión a la media.

## 2. Definiciones preliminares

En este capítulo vamos a describir los conceptos necesarios para la construcción del modelo y la valoración de swaptions bermuda mediante el modelo Hull & White.

### Bono Cupón cero

Un bono cupón cero con vencimiento en  $T$  es un instrumento financiero que garantiza el pago de una unidad monetaria en tiempo  $T$ . El valor de este instrumento en tiempo  $t < T$  se define como:

$$B(t, T) = E_t^Q \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \right]$$

donde  $Q$  es la medida neutral al riesgo, y  $r_s$  es el tipo de interés libre de riesgo instantáneo. Evidentemente,  $B(T, T) = 1$ .

### Tipo libor

Los depósitos interbancarios son los instrumentos OTC más frecuentemente utilizados por los bancos para el préstamo de dinero a corto plazo (máximo 12 meses).

Se denominan tipos libor, euribor en el caso del euro, a los tipos de interés que se aplican en estos depósitos interbancarios. Se trata de tipos simples.

El tipo libor visto en tiempo  $t$  que fija en  $T$  y paga en  $U$  se define como:

$$L(t, T, U) = \frac{1}{\tau_{T,U}} \left( \frac{B(t, T)}{B(t, U)} - 1 \right)$$

donde  $\tau_{T,U}$  es el periodo, medido en fracción de año, entre los instantes de tiempo  $T$  y  $U$ .

### Fixing del euribor

Es crucial disponer de un tipo libor de referencia ya que los derivados de tipos de interés, como los futuros, los forwards y los swaps, liquidan en base a cierta referencia.

El procedimiento que utiliza el *European Money Markets Institute* para fijar los tipos euribor, empleados en numerosos productos como referencia, consiste en

preguntar, todos los días laborables antes de las 11 am a un grupo de unos 23 bancos (los más activos del mercado interbancario de depósitos) a qué tipo estiman que dos grandes entidades financieras se prestan entre sí a diferentes plazos. Para determinar el fixing oficial se calcula una media de las cotizaciones que han dado estos bancos quitando los  $n$  más altos y los  $n$  más bajos.

## Forward rate agreement FRA

Un forward rate agreement (FRA) o forward de tipo de interés es un contrato entre dos partes en el que se fija un periodo que comienza en el futuro. Al final de todo este periodo de tiempo una de las partes paga el tipo libor, fijado al comienzo del periodo, y la otra parte paga un tipo fijo  $K$  predeterminado.

El FRA puede replicarse estáticamente, por lo tanto, su precio debe coincidir con el coste de su replicación.

De esta manera, si queremos valorar el FRA en tiempo  $t$  de valoración, donde se recibe variable, con strike  $K$  para el periodo  $(T, U)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{FRA}(t, T, U, K) &= B(0, U) E_t^{Q_U} \left[ \frac{\tau_{T,U}(L(T, T, U) - K)}{B(U, U)} \right] \\ &= B(0, U) \tau_{T,U} (L(t, T, U) - K) \end{aligned}$$

donde  $Q_U$  es la medida en tiempo  $U$ .

## Swap

Un swap es un contrato por el cual dos partes se comprometen a intercambiar una serie de cantidades de dinero en fechas futuras. Normalmente los intercambios de dinero futuros están referenciados a tipos de interés, llamándose Interest Rate Swap, IRS, aunque de forma más genérica se puede considerar un swap cualquier intercambio futuro de bienes o servicios (entre ellos de dinero) referenciado a cualquier variable observable.

A continuación vamos a describir un swap de tipo de interés donde se intercambia un tipo variable libor por un tipo fijo mediante bonos cupón cero.

Primero vamos a definir la pata fija del swap. Para ello definimos un conjunto de fechas de pago,  $S_1, \dots, S_N$ , un tipo fijo que llamamos  $R$  y  $\tau_i$  el periodo de devengo



entre las fechas de pago  $S_{i-1}, S_i$ . Por lo tanto tenemos:

$$Pata\ Fija(t) = R \sum_{i=1}^N \tau_i B(t, S_i)$$

donde  $B(t, S_i)$  es el bono cupón cero visto en  $t$  con vencimiento en  $S_i$ .

Para la pata variable definimos también un conjunto de fechas de pago,  $T_1, \dots, T_M$ , el tipo libor en  $t$ ,  $L_j(t) = \frac{1}{\eta_j} \left( \frac{B(t, T_{j-1})}{B(t, T_j)} - 1 \right)$ , y  $\eta_j$  el periodo de devengo entre las fechas de pago  $T_{i-1}, T_i$ . Notar que  $S_0 = T_0$  y  $S_N = T_M$ , por lo tanto tenemos:

$$Pata\ Variable(t) = \sum_{i=1}^M L_j(t) \eta_j B(t, T_j) = B(t, T_0) - B(t, T_M) = B(t, S_0) - B(t, S_N)$$

De esta forma podemos escribir un swap como una cartera de bonos cupón cero de la siguiente manera:

$$Swap(t) = \omega \left( R \sum_{i=1}^N \tau_i B(t, S_i) - B(t, S_0) + B(t, S_N) \right) \quad (1)$$

Donde  $\omega \in \{-1, 1\}$ , siendo 1 si es *receiver* y  $-1$  si es *payer*.

*Payer* y *Receiver* hacen referencia a la pata fija del swap. El primer término indica que el comprador del swap paga la pata fija y el segundo que este recibe la pata fija.

### Tipo par swap

El tipo par swap en  $t$  es el tipo  $R$  que hace que contratar un swap cueste cero:

$$ParSwap(t) = \frac{B(t, S_0) - B(t, S_N)}{A(t)}$$

Así que recibir tipo variable y recibir el tipo  $ParSwap(t)$  son equivalentes. Notar que  $A(t)$  es la anualidad en  $t$  y viene definida por:

$$A(t) = \sum_{i=1}^N \tau_i B(t, S_i)$$

## Swap multicurva

Tras el advenimiento de la crisis financiera en 2007-2008, la extracción de tipos de interés implícitos a partir de instrumentos de mercado se hizo dependiente de la frecuencia de pago de dichos instrumentos. Así, actualmente pueden extraerse tantas curvas de tipos de interés como tenors diferentes cotizan en mercado. Por ello, vamos a diferenciar dos tipos de bonos cupón cero, los bonos que usaremos para el descuento de los flujos, que denotamos por  $B^d(t, T)$ , y los bonos que usaremos para la fijación de los libores  $B^e(t, T)$ . Por lo tanto la fórmula de un swap con multicurva viene dada por:

$$Swap(t) = \omega \left( R \sum_{i=1}^N \tau_i B^d(t, S_i) - B^d(t, T_0) \alpha_1^* + B^d(t, T_M) - \sum_{j=1}^{M-1} B^d(t, T_j) (\alpha_{j+1}^* - 1) \right)$$

con  $\alpha_j^* = \frac{B^e(t, T_{j-1}) B^d(t, T_j)}{B^d(t, T_{j-1}) B^e(t, T_j)}$ . Esta teoría de multicurva es usada desde principios de 2008, ver [3].

## Tipo par swap multicurva

El tipo par swap con multicurva viene dado por:

$$ParSwap(t) = \frac{B^d(t, T_0) \alpha_1^* - B^d(t, T_M) + \sum_{j=1}^{M-1} B^d(t, T_j) (\alpha_{j+1}^* - 1)}{A(t)} \quad (2)$$

con  $A(t) = \sum_{i=1}^N \tau_i B^d(t, S_i)$ .

## Opción sobre bono cupón cero

Una opción sobre un bono es un instrumento financiero que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender un bono a un precio predeterminado, strike, en una fecha concreta, vencimiento.

Para obtener la fórmula de la opción sobre un bono  $B(t, S)$  que vence en  $T$  se toma como numerario el precio del bono  $B(t, T)$ , y bajo la medida  $T$ -forward se tiene que:

$$E^{Q_T} \left[ \frac{B(T, S)}{B(T, T)} \middle| F_t \right] = \frac{B(t, S)}{B(t, T)}$$

donde  $F_t$  es la filtración en tiempo  $t$ . Notar que  $B(t, S)$  es martingala bajo la medida  $T$ -forward.

Si el bono se distribuye como una lognormal con media  $\frac{B(t, S)}{B(t, T)}$  y varianza  $\sigma_T^2$  se puede usar un marco Black de valoración y utilizar la fórmula de Black76 para la valoración de opciones sobre bono cupón cero, esta fórmula fue presentada por Fischer Black en 1976 [10].

Por lo tanto, el valor de un opción en  $t$  con vencimiento en  $T$  sobre un bono cupón cero que vence en  $S$  y tiene strike  $K$  viene dado por:

$$ZCO(t, T, S, K, \omega) = B(t, T) \text{Black76} \left( \frac{B(t, S)}{B(t, T)}, K, \sigma_T, 1, \omega \right)$$

con  $\omega = 1$  si es una call y  $\omega = -1$  si es una put. Una call da el derecho de comprar el bono y una put da el derecho de vender el bono.

Notemos que la fórmula de Black76 viene definida por:

$$\text{Black76}(F, K, \sigma, T, \omega) = \omega [F\Phi(\omega d_1) - K\Phi(\omega d_2)]$$

con

$$d_{1,2} = \frac{\log(F/K)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

y  $\Phi$  la función de distribución normal acumulada.

## Swaption

Un swaption es instrumento financiero que da al comprador del mismo el derecho, pero no la obligación, de entrar en un swap, normalmente un IRS, en una fecha predeterminada a futuro. Hay dos tipos de swaption:

- Un swaption *payer* da el derecho, pero no la obligación, al comprador de la opción, de entrar en un swap donde se paga un tipo de interés fijo y se recibe un tipo de interés variable. El vendedor de la opción tiene la obligación de entrar en el swap si el comprador decide ejecutar su derecho.
- Un swaption *receiver* da el derecho, pero no la obligación, al comprador de la opción de entrar en un swap donde se paga un tipo de interés variable y se

recibe un tipo de interés fijo. El vendedor de la opción tiene la obligación de entrar en el swap si el comprador decide ejecutar su derecho.

Por lo tanto, a vencimiento, tenemos que el pago final del swaption es:

$$Swaption(T) = \text{máx}(Swap(T), 0) = [Swap(T)]^+$$

Además si usamos la fórmula (1) vista para el swap tenemos que:

$$Swaption(T) = \left[ \omega \left\{ R \sum_{i=1}^N \tau_i B^d(t, S_i) - B^d(t, T_0) \alpha_1^* + B^d(t, T_M) - \sum_{j=1}^{M-1} B^d(t, T_j) (\alpha_{j+1}^* - 1) \right\} \right]^+ = \left[ \omega \sum_{k \in K} a_k B^d(T, T_k) \right]^+$$

Con  $K = I \cup J \cup \{0\} \cup \{N\}$ , con  $I = \{1, \dots, N-1\}$ ,  $J = \{1, \dots, M-1\}$ . Además  $a_0 = -\alpha_1^*$ ,  $a_k = R\tau_k$  si  $k \in I$ ,  $a_k = 1 - \alpha_{k+1}^*$  si  $k \in J$ ,  $a_N = R\tau_k + 1$  y  $M = N$ .

### Valoración de un swaption entorno Black

Se puede calcular el valor de un swaption con Black76. Para poder aplicar la fórmula de Black76 tenemos que suponer que el tipo forward swap sigue una distribución lognormal.

El principal problema de esta suposición es que actualmente existen tipos negativos y para poder hacer este supuesto debemos introducir un desplazamiento,  $\Delta$ , en la distribución puesto que la distribución lognormal no acepta tipos negativos.

De esta manera tenemos que usar un entorno Black con *shifted* lognormal, cuya fórmula para un swaption en  $t$  viene dada por:

$$Swaption(t) = \omega A(t) [(ParSwap(t) - \Delta)\Phi(d_+) - (K - \Delta)\Phi(d_-)]$$

donde  $K$  es el tipo fijo del swap subyacente. Podemos ver todo el desarrollo de la fórmula para Black con *shifted* lognormal en el Anexo III.

## Swaption bermuda

Un swaption bermuda es una opción tipo bermuda sobre un swap. Una opción bermuda consiste en algo intermedio entre una opción europea y una americana<sup>2</sup>, esto quiere decir que puede ser ejercida en varios momentos desde la firma del contrato hasta la fecha de vencimiento. Por ejemplo, podría ser una opción que puede ser ejercida al final de cada trimestre.

Al final un swaption bermuda da el derecho, pero no la obligación, de entrar en un swap de tipo de interés normalmente en las fechas de pago del swap subyacente con menor frecuencia. Es decir, si eres el comprador de un swaption bermuda tendrías, a final de cada año, por poner un ejemplo concreto, el derecho a intercambiar los futuros intereses que percibes en tipo variable por un tipo de interés a tipo fijo. Por lo tanto, en cada fecha  $T$  de opcionalidad, el pago del swaption bermuda vendrá dado por:

$$SwaptionBermuda(T) = \text{máx}(Swap(T), V(T))$$

donde  $V(T)$  es el valor de continuación del swaption bermuda, es decir, es el valor esperado de continuar y no ejercer el swaption bermuda en  $T$ .

Como sabemos este tipo de derivado no permite réplica estática ya que no depende sólo de un tipo forward swap, sino de todos los tipos forward swaps que estén en las diferentes fechas de ejercicio. Por lo tanto, para la valoración de los mismos necesitamos un modelo de tipo de interés. En nuestro caso hemos elegido el Hull & White que presentaremos y describiremos con detalle en el siguiente apartado.

---

<sup>2</sup>Las opciones bermuda reciben este nombre dado que las Islas Bermudas se sitúan entre Estados Unidos y Europa

### 3. Modelo Hull & White

En este capítulo vamos a ver el modelo Hull & White (en adelante HW). El modelo fue descrito por John C. Hull y Alan White en 1990, ver [7].

El modelo HW es un modelo exógeno consistente con la estructura temporal de tipo de interés (*etti*) observada y cuya variable modelada es el tipo de interés instantáneo. El modelo HW combina el enfoque de exogeneidad de la *etti* con la especificación de reversión a la media. HW extiende los modelos de Vasicek y CIR mediante parámetros variables en el tiempo y demuestra que ambas extensiones son consistentes con los tipos de interés observados y con las volatilidades observadas en dichos tipos de interés.

El modelo supone una distribución normal para el tipo de interés instantáneo a corto plazo. Además como veremos en este capítulo permite tratabilidad analítica para bonos cupón cero y para opciones sobre estos. La distribución Gaussiana de tipos continuos permite la derivación de formulas analíticas y la construcción de procedimientos numéricos para una gran variedad de derivados. Por otro lado, la posibilidad de incluir tipos de interés negativos está dando mucha importancia al modelo por la situación actual de tipos europeos. Podemos ver más sobre la teoría de este y otros modelos en [6].

HW asume que el proceso del tipo de interés instantáneo,  $dr_t$ , bajo la medida neutral al riesgo evoluciona como:

$$dr_t = (\theta_t - a_t r_t)dt + \sigma_t dW_t \quad (3)$$

donde

- $a_t$  es la reversión a la media,  $\theta_t$  es la tendencia y  $\sigma_t$  es la volatilidad.
- $\theta_t$ ,  $a_t$  y  $\sigma_t$  son funciones determinadas por el tiempo.
- $W_t$  es un proceso de Wiener que sigue una distribución normal con media cero y varianza  $t$ .

Además la ecuación integrada del tipo de interés instantáneo viene dada por:

$$r_t = \mu_t + b_t \int_0^t f_s dW_s$$

con  $\mu_t = r_0 b_t + b_t \int_0^t g_s ds$ ,  $b_t = e^{-\int_0^t a_s ds}$ , y  $f_t = \frac{\sigma_t}{b_t}$ .

### 3.1. Bonos Hull & White bajo la medida cuenta corriente

Aplicando un poco de álgebra en la ecuación (3), llegamos a que el factor de descuento estocástico del modelo,  $e^{-\int_T^U r_s ds}$ , bajo la medida cuenta corriente viene dado por:

$$\begin{aligned}
 e^{-\int_T^U r_s ds} &= \frac{B(0, U)}{B(0, T)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \int_0^T \left( \frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s \right) f_s^2 ds \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s - \int_T^U (\beta_U - \beta_s) f_s dW_s \right\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Notar que  $B(0, T)$  y  $B(0, U)$  son los bonos cupón cero de mercado que vencen en tiempo  $T$  y  $U$ , con  $T < U$  y  $\beta_s = \int_0^t b_s ds$ .

Una vez que hemos calculado el factor de descuento estocástico podemos presentar la fórmula para el bono cupón cero que fija en  $T$  y vence en  $U$  del modelo HW bajo la medida cuenta corriente:

$$\begin{aligned}
 B(T, U) &= B(T, U, X_T) \\
 &= \frac{B(0, U)}{B(0, T)} \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \left( X_T + \int_0^T \left( \frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s \right) f_s^2 ds \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

con  $X_T = \int_0^T f_s dW_s$ . Se puede ver el desarrollo completo de estos cálculos en el Anexo I.

### 3.2. Bonos Hull & White bajo la medida terminal

El método numérico que hemos usado para la valoración de swaptions Bermuda con el modelo HW es un árbol multinomial como veremos con más detalle en el siguiente capítulo. Si nos fijamos en la ecuación del factor de descuento estocástico en la ecuación (4) vemos que hay dos variables estocásticas:  $\int_0^T f_s dW_s$  y  $\int_T^U \beta_s f_s dW_s$ . Por lo tanto, si usamos la medida de cuenta corriente tendríamos que crear dos árboles multinomiales correlados, uno para cada variable. Sin embargo, si usamos la medida  $T$ -forward, es decir, el precio del bono terminal como numerario, este

problema desaparece ya que tanto el bono HW como el numerario son funciones de una única variable estocástica.

Bajo el bono terminal  $B(T, T_n)$ , donde  $T_n$  es el vencimiento del derivado que se va a valorar, denotamos la medida  $T$ -forward equivalente por  $\mathbb{T}_n$  y el precio del bono HW bajo esta medida viene dado por:

$$B(T, U) = \frac{B(0, U)}{B(0, T)} \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \left[ \left( \frac{\beta_T + \beta_U}{2} - \beta_{T_n} \right) \int_0^T f_s^2 ds + X_T^{\mathbb{T}_n} \right] \right\}$$

$$\text{Con } X_T^{\mathbb{T}_n} = \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{T}_n}.$$

La expresión para el numerario  $B(T, T_n)$  se obtiene sustituyendo  $U$  por  $T_n$  en la ecuación anterior. Podemos ver el desarrollo completo del álgebra en el Anexo II.

### 3.3. Opción sobre bono Hull & White

En el capítulo anterior ya hemos visto que  $B(t, S)$  es martingala bajo la medida  $T$ -forward, y en el caso del bono HW también sabemos que se distribuye como una lognormal con media  $\frac{B(t, S)}{B(t, T)}$  y varianza  $(\beta_S - \beta_T)^2 \int_t^T f_s^2 ds$ .

Por lo tanto, como vimos en el capítulo anterior, podemos usar un marco Black de valoración y la expresión de una opción sobre un bono HW,  $B(T, S)$ , que vence en  $T$  vista en tiempo  $t$  viene dada por:

$$ZCO(t, T, S, K, \omega) = B(t, T) \text{Black76} \left( \frac{B(t, S)}{B(t, T)}, K, (\beta_S - \beta_T)^2 \int_t^T f_s^2 ds, \omega \right)$$

donde  $K$  es el strike de la opción,  $\omega = 1$  si es una call y  $\omega = -1$  si es una put.

### 3.4. Opción sobre cesta de bonos Hull & White

Acabamos de ver en la ecuación (5) que podemos dar el precio de un bono cupón cero HW en  $T$  con vencimiento en  $S$  como  $B(T, S, X^T)$ , con  $X^T = \int_0^T f_s dW_s$ . Por tanto el precio de una cesta de bonos viene dado por:

$$CB(T, \mathcal{S}, A) = \sum_{i=0}^N a_i B(T, S_i, X^T)$$



con los diferentes cupones dados por  $A = [a_0, \dots, a_n]$ , los vencimientos  $\mathcal{S} = [S_0, \dots, S_N]$  y con  $T \leq S_0$ .

De esta manera tenemos que una opción europea (en el siguiente caso una put) sobre una cesta de bonos con strike  $K$  tiene el siguiente payoff a vencimiento  $T$ :

$$[K - CB(T, \mathcal{S}, A)]^+ = \left[ K - \sum_{i=0}^N a_i B(T, S_i, X^T) \right]^+ \quad (6)$$

Jamshidian en 1989, ver [8] y [1], planteó un método para convertir la parte positiva de esta suma en la suma de partes positivas. El método se basa en encontrar el  $X_*^T$  que cumpla la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=0}^N a_i B(T, S_i, X_*^T) = K$$

de esta manera podemos reescribir la ecuación (6) como:

$$\left[ \sum_{i=0}^N a_i (B(T, S_i, X_*^T) - B(T, S_i, X^T)) \right]^+$$

y, gracias el método de Jamshidian, la parta positiva de esta suma es igual a la suma de partes positivas:

$$\sum_{i=0}^N a_i [B(T, S_i, X_*^T) - B(T, S_i, X^T)]^+$$

### 3.5. Swaption Hull & White

Ya hemos visto anteriormente que podemos ver el payoff de un Swaption a vencimiento,  $T$ , como una opción sobre una cesta de bonos:

$$\begin{aligned} Swaption(T) = & \left[ \omega \left\{ R \sum_{i=1}^N \tau_i B^d(t, S_i) - B^d(t, T_0) \alpha_1^* + B^d(t, T_M) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{j=1}^{M-1} B^d(t, T_j) (\alpha_{j+1}^* - 1) \right\} \right]^+ = \left[ \omega \sum_{k \in K} a_k B^d(T, T_k) \right]^+ \quad (7) \end{aligned}$$

De este modo, usando la generalización de Jamshidian descrita en el apartado anterior, se puede escribir la ecuación (7) como una suma de opciones (con vencimiento en  $T$ ) sobre bonos cupón cero con vencimiento en  $\mathcal{S} = [S_0, \dots, S_N]$  y strike  $\mathcal{K} = 0$  ( $\mathcal{K} = \sum_{k \in K} a_k B(T, S_i, X_*^T)$ ):

$$Swaption(t, T, \mathcal{S}, \mathcal{K}, \omega) = \sum_{k \in K} a_k Black76 \left( \frac{B(t, S_i)}{B(t, T)}, K_k, (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T f_t^2 dt, \omega \right)$$

con  $K_k = B(T, S_k, X_*^T)$ .

## 4. Árbol multinomial en Hull & White

En este capítulo vamos a comentar cómo se pueden valorar swaptions bermuda mediante un árbol multinomial con HW.

Anteriormente hemos explicado la definición de un swaption bermuda y hemos visto que es un derivado con más de una fecha de opcionalidad. Sabemos que para valorar este tipo de derivados necesitamos un modelo de tipo de interés ya que no permiten replica estática. En nuestro caso el modelo elegido ha sido el HW.

Una vez que ya tenemos nuestro modelo el siguiente paso es ver cómo vamos a valorar los swaptions bermuda. Existen dos formas de valorar la opción de cancelación de un producto:

- Mediante simulación de montecarlo y mínimos cuadrados. Esta técnica fue introducida por primera vez por Longstaff y Schwartz en [9].
- Mediante un árbol, que es el método que hemos elegido y vamos a describir a continuación.

Un árbol es un método numérico que nos permite observar la distribución discretizada de las variables subyacentes a través del tiempo, que también es discretizado. Mediante estos métodos podemos representar las diferentes posibles trayectorias seguidas por el subyacente durante la vida del derivado.

Los árboles son frecuentemente usados para la valoración de opciones americanas y bermudas, siendo el más conocido el árbol binomial que fue introducido por Cox y Rubinstein en 1979, ver [11].

En un árbol binomial o trinomial el subyacente sólo puede evolucionar en dos o tres posibles estados desde cada nodo, mientras que el árbol multinomial puede evolucionar en  $N$  estados. De esta manera, estamos ante una mejora de implementación permitiendo que el subyacente evolucione en  $N - 2$  estados más, en comparación con el caso binomial, o  $N - 3$ , en comparación con en el caso trinomial. Por consiguiente, al permitir más estados de evolución del subyacente estaremos dando una mejor aproximación al precio del derivado.

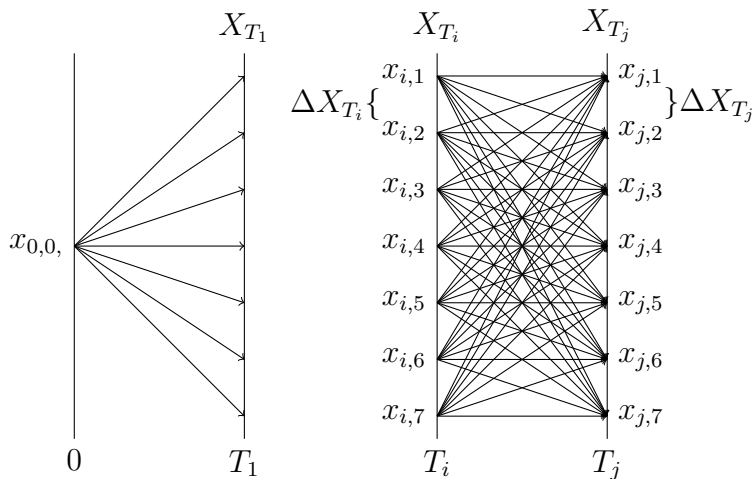


Figura 1: Ejemplo de la distribución de los nodos en el árbol multinomial

#### 4.1. Implementación del árbol

El árbol se implementa bajo la medida terminal del bono HW que hemos definido en el capítulo anterior, ver ecuación (3.2).

El árbol multinomial es un árbol N-nomial recombinado que representa la variable estocástica  $X_T^{\mathbb{T}^n} = \int_0^T f_s dW^{\mathbb{T}^n}$  que tiene media cero y varianza  $\alpha_T = \int_0^T f_s^2 ds$ , como ya conocemos.

Esta implementación multinomial se basa en la construcción de un *grid* prefijado de valores para esta variable estocástica para un rango de desviaciones típicas centradas en cero.

Para construir el *grid* de integración del árbol se busca una constante incremental  $\delta x$  tal que multiplicada por el número de nodos  $N$ , da el número total de desviaciones típicas de  $X_T^{\mathbb{T}^n}$ . Si  $m$  es el número total de desviaciones típicas, se tiene que  $\Delta X_T = 2m\sqrt{\alpha_T}(N - 1)$ .

En el otro eje del *grid* se consideran las fechas relevantes del swaption bermuda,  $\{T_1, \dots, T_n\}$ , fechas de ejercicio del swaption, fechas de fijación de los libores y las fechas de pago del swap. Por lo tanto, sin incluir el primer paso del árbol, se tienen un  $Nn$  para calcular el valor de swaption bermuda. Podemos ver un ejemplo de esto en la figura 1.

## 4.2. Valoración del swaption bermuda

Ya hemos visto anteriormente cómo se calcula el valor del swaption bermuda en cada fecha de opcionalidad.

De este modo, vamos a denotar por  $S(t)$  el valor del swap subyacente en  $t$ ,  $V_C(t)$  el valor de continuación del swaption bermuda en  $t$  y  $V(t)$  el valor del swaption bermuda en  $t$ . Para calcular  $V_C(t)$  y  $S(t)$  vamos a ir haciendo una valoración de adelante hacia atrás, es decir, vamos a empezar calculando el swap y el valor de continuación en  $T_n$  y de ahí vamos a ir llevando la valoración hacia atrás hasta obtener  $S(t)$  y  $V_C(t)$ .

Por ejemplo si  $T_i$  y  $T_j$  son dos tiempos consecutivos en el árbol con  $T_i < T_j$ , se tiene que:

- El valor del swap en cada nodo  $x_{iu}$  de  $T_i$  viene dado por:

$$\begin{aligned} S(T_i)(x_{i,u}) &= B(T_i, T_n) E^{\mathbb{T}_n} \left[ \frac{S(T_j)}{B(T_j, T_n)} \middle| \mathcal{F}_{T_i}, X_{T_i} = x_{i,u} \right] \\ &= B(T_i, T_n) \int_{\mathbb{R}} \frac{S(T_j)}{B(T_j, T_n)}(X_{T_j}) g(X_{T_j} | X_{T_i} = x_{i,u}) dX_{T_j} \end{aligned}$$

para  $i, j = 0, \dots, n$   $T_i < T_j$  y  $u = 1, \dots, N$ . La expresión  $S(T_i)(x_{i,u})$  representa el valor de  $S(T_i)$  en el nodo  $x_{i,u}$ . La función  $g(X_{T_j} | X_{T_i})$  representa la función de densidad de  $X_{T_j}$  dado  $X_{T_i}$ . La función  $g(X_{T_j} | X_{T_i} = x_{i,u})$  es una función de distribución gaussiana con media  $x_{i,u}$  y varianza  $\alpha_{T_j} - \alpha_{T_i}$ :

$$g(X_{T_j} | X_{T_i}) = \Phi(X_{T_j}, X_{T_i}, \alpha_{T_j} - \alpha_{T_i})$$

donde  $\Phi(x, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\nu}\right\}$ .

- El valor de continuación del swaption bermuda en cada nodo  $x_{iu}$  de  $T_i$  viene dado por:

$$\begin{aligned} V_C(T_i)(x_{i,u}) &= B(T_i, T_n) E^{\mathbb{T}_n} \left[ \frac{V_C(T_j)}{B(T_j, T_n)} \middle| \mathcal{F}_{T_i}, X_{T_i} = x_{i,u} \right] \\ &= B(T_i, T_n) \int_{\mathbb{R}} \frac{V_C(T_j)}{B(T_j, T_n)}(X_{T_j}) g(X_{T_j} | X_{T_i} = x_{i,u}) dX_{T_j} \end{aligned}$$

Además, en caso de ser  $T_i$  una fecha de opcionalidad el valor de swaption bermuda vendrá dado por:

$$V(T_i) = \text{máx}(S(T_i)(x_{i,u}), V_C(T_i)(x_{i,u}))$$

y en caso de ser una fecha sin opcionalidad:

$$V(T_i) = V_C(T_i)$$

Por último notar que las integrales para el cálculo de la esperanza han sido resueltas numéricamente a través de la regla del trapecio como indicamos a continuación:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{V_C(T_j)}{B(T_j, T_n)}(X_{T_j})g(X_{T_j}|X_{T_i} = x_{i,u})dX_{T_j} = \sum_{l=1}^N \frac{V_C(T_j)}{B(T_j, T_n)}(x_{j,l})\Phi(x_{j,l}, x_{i,u}, \alpha_{T_j} - \alpha_{T_i})\Delta X_{T_j}$$

## 5. Calibración del modelo Hull & White

En este capítulo del documento se tratará de definir con claridad el proceso de calibración seguido para el modelo HW que hemos descrito anteriormente.

Como hemos comentado el modelo HW trata de explicar el comportamiento instantáneo del tipo de interés utilizando una dinámica estocástica. Esta dinámica depende de la volatilidad y la reversión a la media,  $f_t$  y  $a_t$  respectivamente. Por lo tanto, el proceso de calibración consiste en obtener el valor de estos parámetros para poder recuperar precios de productos de mercado (caps, floors, swaptions...).

A continuación vamos a describir algunas estrategias posibles de calibración del modelo:

- Fijar la reversión a la media constante por *expertise* de mercado y, una vez fijada, calibrar la volatilidad.
- Calibrar la volatilidad y la reversión a la media como funciones en el tiempo. Este proceso puede provocar inestabilidad y problemas a la hora de la calibración.
- Calibrar la reversión a la media como una constante mediante ratios de varianza y, a continuación, calibrar la volatilidad. Nosotros hemos optado por implementar este caso.

Como vamos a calibrar constante la reversión a la media, nuestro modelo depende solo de los parámetros  $a$  y  $f_t$ . Notemos que para calibrar tanto la reversión como las volatilidades necesitamos de precios cotizados de mercado. Se puede calibrar el modelo mediante caps y floors o mediante swaptions europeos. En este trabajo se ha elegido calibrar mediante swaptions europeos porque nuestro objetivo es valorar swaptions bermuda y la diferencia entre estos y los swaptions bermuda es el número de fechas de opcionalidad, teniendo estos últimos más de una fecha. Además la cobertura sobre swaptions bermuda suele hacerse con swaptions europeos de mercado.

Estos precios de mercado, de swaptions europeos, cotizan en forma de volatilidad en convención Black Normal o Black Shifted. Nosotros hemos usado Black Shifted (podemos ver la formulación del mismo en el Anexo III) para obtener los precios de mercado. El *shift* que hemos usado para los precios de mercado es de 1,5% que es el *best practice* de mercado.

Ahora que ya sabemos cómo obtener los precios de mercado vamos a comentar los supuestos que hacemos en los parámetros del modelo para la calibración del mismo:

- **Reversión a la media**, se calibra como una constante con el fin de garantizar el calibrado.
- **La volatilidad**, la suponemos *piecewise constant*. En matemáticas estas funciones se conocen como funciones escalonadas y son aquellas funciones definidas a trozos, en nuestro caso  $[0, T]$ , con un número finito de discontinuidades,  $0 < t_1 \dots < t_n$ , y en cada intervalo abierto,  $(t_i, t_{i+1})$ , es constante teniendo discontinuidades de salto en los puntos  $t_i$ .

Ahora vamos a detallar tanto la calibración de la reversión como la calibración de la volatilidad.

## 5.1. Calibración de la reversión a la media

Para calibrar la reversión a la media, tenemos que encontrar una ecuación que solo dependa de este parámetro (ver [2]). A continuación, con la ayuda del álgebra, veremos como se calcula.

En la ecuación (2), hemos llegado a una expresión del tipo par swap en función de bonos, en nuestro caso los bonos HW. Estos bonos, a su vez, son aleatorios puesto que dependen de  $X_t$ , con  $X_t = \int_0^t f_s dW_s$ .

Además, sabemos que bajo la medida anualidad el tipo par swap es martingala. De modo que aplicando el lema de Itô a la ecuación (2), a partir de la dinámica de  $X_t$ , se tienen que

$$dParSwap(t, X_t) = q(t, X_t) f_t dW_t^A \quad (8)$$

con

$$q(t, X_t) = \frac{1}{A(t, X_t)} \left[ \sum_{j=1}^M \alpha_j^* B^d(t, T_{j-1}) G(t, T_{j-1}) - B^d(t, T_j) G(t, T_j) \right] - \frac{ParSwap(t, X_t)}{A(t, X_t)} \left[ \sum_{i=1}^N \tau_i B^d(t, S_i) G(t, S_i) \right] \quad (9)$$



donde  $G(t, T) = \beta_t - \beta_T$ .

El siguiente paso es usar la técnica del *initial freeze* para aproximar la ecuación (9). Esta técnica consiste en sustituir el valor de los bonos por los que tenían al inicio, es decir,  $B^d(t, S_i) \approx B^d(0, S_i)$ .

Usando esta aproximación, en la ecuación (8), podemos dar precio a un swaption europeo usando la fórmula de Black Normal (Bachiller). Por lo tanto, tenemos que:

$$Swaption(0) = A(0)[\omega(ParSwap(0) - K)]\Phi(\omega d) + \sqrt{v_{T,m}}\phi(d)$$

con

$$d = \frac{ParSwap(0) - K}{\sqrt{v_{T,m}}} \quad y \quad v_{T,m} = \int_0^T \hat{q}_{s,m}^2 f_s^2 ds$$

donde  $\phi$  es la función de densidad de la distribución normal estándar,  $T$  es el vencimiento del swaption,  $m$  es el tenor del swap subyacente,  $v_{T,m}$  es la varianza del swaption y  $\hat{q}$  es la ecuación (9) aproximada por el *freeze*.

Por último, podemos aproximar el ratio de las varianzas de dos swaptions con el mismo vencimiento,  $T$ , pero distinto tenor,  $m$  y  $n$ , como:

$$\frac{v_{T,m}}{v_{T,n}} = \frac{\int_0^T \hat{q}_{s,m}^2 f_s^2 ds}{\int_0^T \hat{q}_{s,n}^2 f_s^2 ds} \approx \frac{\int_0^T \hat{q}_{s,m}^2(a) ds}{\int_0^T \hat{q}_{s,n}^2(a) ds}$$

De esta manera, hemos llegado a una expresión que solo depende de la reversión a la media y estamos en disposición de plantear el siguiente problema de optimización que depende únicamente de la reversión a la media,  $\hat{a}$ :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{\int_0^{T_i} \hat{q}_{s,m}^2(\hat{a}) ds}{\int_0^{T_i} \hat{q}_{s,n}^2(\hat{a}) ds} - \frac{\text{Var}(MarketSwaption_m(T_i))}{\text{Var}(MarketSwaption_n(T_i))} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

Para la calibración, las fechas  $T_i$  que usaremos serán las  $N - 1$  fechas de opcionalidad del swaption bermuda que queramos valorar,  $\{T_1, T_2, \dots, T_{N-1}\}$ . El  $n$  será el tenor del swap subyacente y el  $m$  será un tenor con menos periodos que  $n$ .

Además, en la ecuación anterior, necesitamos las varianzas de mercado Black Normal. Por lo tanto, tenemos que transformar las volatilidades de mercado Black Shifted a varianzas Black Normal. Esta transformación consiste en calcular primero el precio del swaption de mercado con Black Shifted, y una vez calculado, obtener numéricamente la varianza Black Normal que recupera este precio.

El algoritmo de calibración se describe de la siguiente forma:

- Obtener las varianzas de mercado, de swaptions europeos, mediante Black Normal,  $\text{Var}(\text{MarketSwaption}(t, T_j))$ , para cada tiempo  $T_i$  en los tenors  $m$  y  $n$ .
- Generar un valor guess de reversión a la media,  $\hat{a}$ .
- Obtener las varianzas mediante HW para cada  $T_i$ ,  $\int_0^{T_i} \hat{q}_{s,n}^2(\hat{a}) ds$ .
- Comprobar si la ecuación descrita en (10) se produce:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{\int_0^{T_i} \hat{q}_{s,m}^2(\hat{a}) ds}{\int_0^{T_i} \hat{q}_{s,n}^2(\hat{a}) ds} - \frac{\text{Var}(\text{MarketSwaption}_m(T_i))}{\text{Var}(\text{MarketSwaption}_n(T_i))} \right)^2 = 0$$

- Si la ecuación anterior es cierta, ya hemos obtenido la reversión a la media  $\hat{a}$ . De no producirse la ecuación, utilizaremos otra reversión guess en base al método numérico *Trust-Region Dogleg* usado por la función de Matlab *fsolve*.

Se puede ver este proceso, en pseudocódigo, en el algoritmo 1.

La figura 2 muestra el movimiento de la reversión la media según diferentes strikes para un swaption bermuda valorado a fecha 30/06/2016 que comienza el 30/06/2017 y vence el 30/06/2028, con pago fijo anual y pago variable semestral.

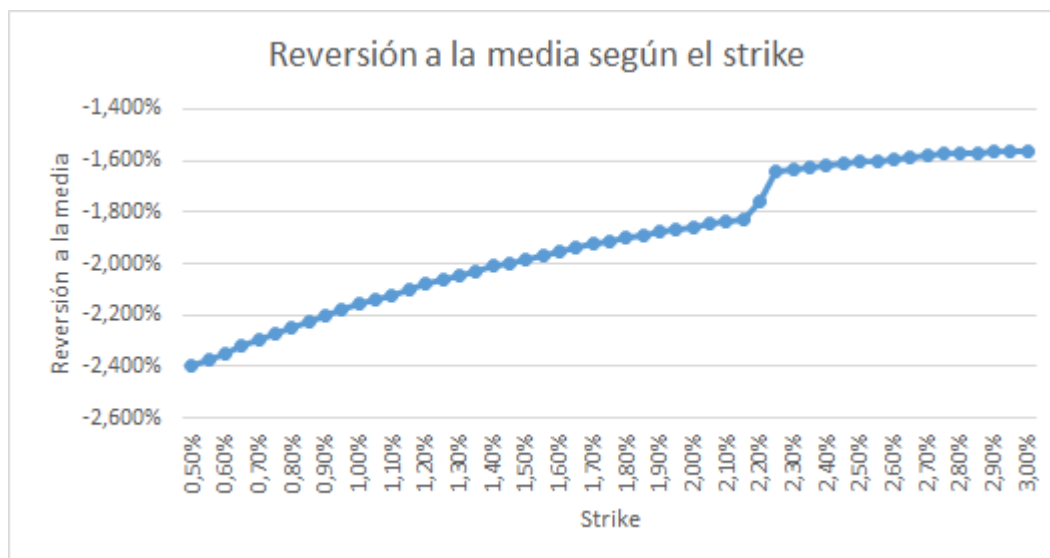


Figura 2: Reversión a la media según el strike

---

**Algorithm 1** Calibración de la reversión a la media

---

**Require:** Vector de fechas del calibrado  $\{T_1, T_2, \dots, T_{N-1}\}$ , tenor  $n$ , tenor  $m$ .

**Ensure:** Reversión a la media  $a$ .

- 1:  $\hat{a}$  = suponer una  $a$  inicial.
  - 2: **for**  $i = 1$  hasta  $N - 1$  **do**
  - 3:  $VarMSwpt_{n,i}$  = Varianza de mercado del swaption con vencimiento en  $T_i$  y tenor  $n$ .
  - 4:  $VarMSwpt_{m,i}$  = Varianza de mercado del swaption con vencimiento en  $T_i$  y tenor  $m$ .
  - 5:  $VarHWSwpt_{n,i}$  = Varianza HW del swaption con vencimiento en  $T_i$  y tenor  $n$ .
  - 6:  $VarHWSwpt_{m,i}$  = Varianza HW del swaption con vencimiento en  $T_i$  y tenor  $m$ .
  - 7: **end for**
  - 8:  $SolOptimizacion$  = Devuelve el valor de la ecuación (10)
  - 9: **while**  $SolOptimizacion \neq 0$  **do**
  - 10:  $\hat{a}$  = calcular una  $a$  en base al método numérico *Trust-Region Dogleg*.
  - 11: **for**  $i = 1$  hasta  $N - 1$  **do**
  - 12:  $VarHWSwpt_{m,i}$  = Varianza HW del swaption con vencimiento en  $T_i$  y tenor  $m$ .
  - 13:  $VarHWSwpt_{n,i}$  = Varianza HW del swaption con vencimiento en  $T_i$  y tenor  $m$ .
  - 14: **end for**
  - 15:  $SolOptimizacion$  = Devuelve el valor de la ecuación (10)
  - 16: **end while**
  - 17: **return**  $\hat{a}$
-

## 5.2. Calibración de la Volatilidad

Como hemos visto anteriormente la valoración de un swaption con vencimiento en  $T$ , mediante HW, requiere haber obtenido la volatilidad en ese vencimiento. Como sabemos que la volatilidad es constante a trozos tenemos que:

$$\sigma_T = (\beta_S - \beta_T)^2 \int_0^T f_t^2 dt \approx \sum_{j=1}^N (\beta_S - \beta_T)^2 f_{t_j}^2 (t_j - t_{j-1}).$$

Por lo tanto, se puede observar fácilmente que para obtener la volatilidad en el vencimiento  $T$  es necesario haber obtenido previamente  $f_1, f_2, \dots, f_{T-1}$ .

Como hemos comentado antes vamos a utilizar el precio de los swaptions europeos de mercado para calibrar las volatilidades del modelo, ver [4] y [5]. De esta manera vamos a obtener las mismas volatilidades constantes que vencimientos de los swaptions utilicemos en el calibrado.

Como queremos valorar swaptions bermuda vamos a usar los swaptions coterminales con la estructura de las fechas de opcionalidad del swaption bermuda que queramos valorar, es decir, si vamos a valorar un swaption bermuda con fechas de opcionalidad  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  los swaptions usados para el calibrado tendrán los vencimientos coterminales  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ . Notar que estas fechas de opcionalidad coincidirán con la pata de menor frecuencia del swap subyacente.

Con la información anterior y conociendo la valoración de los swaptions mediante HW, visto anteriormente, podemos plantear un problema de optimización matemático que debe resolver la siguiente ecuación:

$$Swaption(t, T_i, \mathcal{R}, [f_1, f_2, \dots, f_{T_j}], \mathcal{K}, \omega) - MarketSwaption(t, T_j) = 0, \quad \forall j \in [1, 2, \dots, N]$$

El algoritmo se describe de la siguiente forma:

- Obtener los precios de mercado, de swaptions europeos, mediante Black76 shifted,  $MarketSwaption(t, T_j)$ , para el tiempo  $T_j$ .
- Generar un valor guess de la volatilidad para el vencimiento  $T_j$ ,  $\hat{f}_{T_j}$ .
- Obtener el precio del Swaption mediante HW con la volatilidad del paso anterior,  $\hat{f}$ .

- Comprobar si la ecuación descrita anteriormente se produce:

$$Swaption(t, T_i, \mathcal{R}, [f_1, f_2, \dots, \hat{f}_{T_j}], \mathcal{K}, \omega) - MarketSwaption(t, T_j) = 0$$

- Si la ecuación anterior es cierta pasamos a obtener la siguiente volatilidad  $f_{T_{j+1}}$ . De no producirse la ecuación, utilizaremos otra volatilidad en base al método numérico *Trust-Region Dogleg* usado por la función de Matlab *fsolve*.

Se puede ver este proceso, en pseudocódigo, en el algoritmo 2.

---

**Algorithm 2** Calibración de la volatilidad

---

**Require:** Vector de fechas del calibrado  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ .

**Ensure:** Vector de volatilidades HW  $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ .

```

1: for  $i = 1$  hasta  $N$  do
2:    $MSwpt =$  Precio de mercado del swaption con vencimiento en  $T_i$ 
3:    $\hat{f}_i =$  suponer una  $f$  inicial.
4:    $HWSwpt =$  Precio del swaption HW con vencimiento en  $T_i$  y volatilidad  $f_i$ 
5:   while  $HWSwpt \neq MSwpt$  do
6:      $\hat{f}_i =$  calcular una  $f$  en base al método numérico Trust-Region Dogleg.
7:      $HWSwpt =$  Precio del swaption HW con vencimiento en  $T_i$  y volatilidad
            $f_i$ 
8:   end while
9:    $i = i + 1$ 
10: end for
11: return  $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ 

```

---

En el Anexo V se muestran las volatilidades calibradas para un swaption bermuda y un vector de reversiones a la media.

En la gráfica 3 se muestra el resultado de calibrar las volatilidades y fijar la reversión a la media por *expertise* de mercado al 1%. Por otro lado, en la gráfica 4 se muestra el resultado de calibrar la reversión y las volatilidades, obteniendo una reversión de  $-2,40\%$ . Estas gráficas han sido construidas con el swaption bermuda del Anexo V.

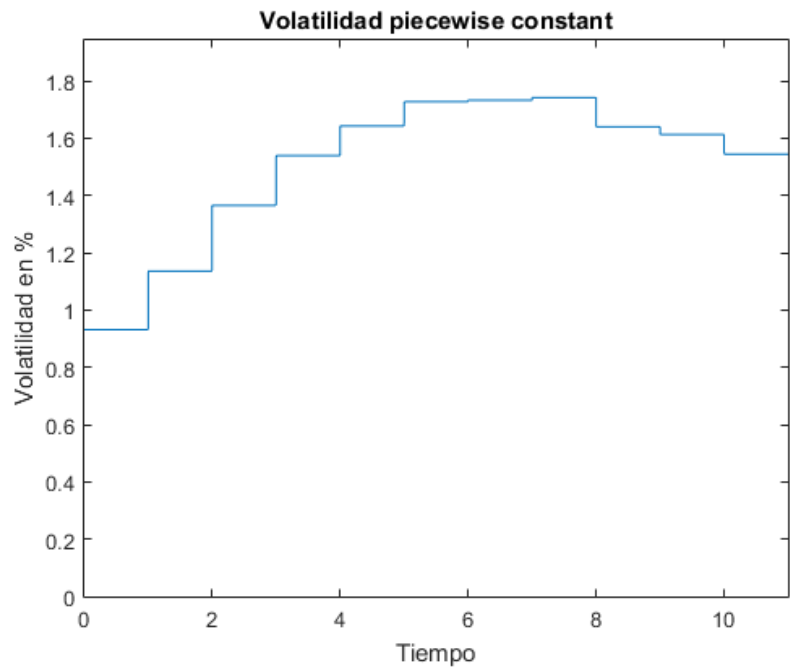


Figura 3: Volatilidades HW con reversión del 1 %

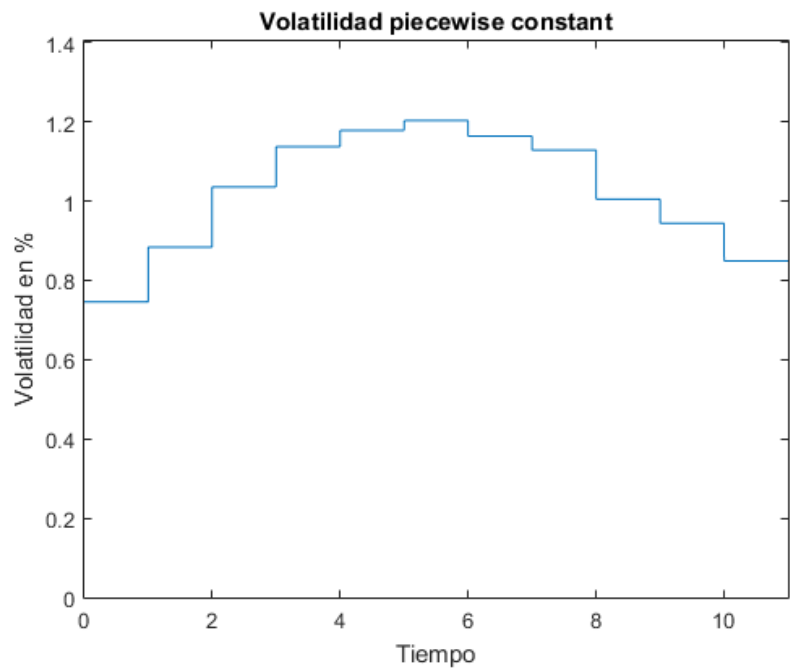


Figura 4: Volatilidades HW con reversión calibrada

## 6. Resultados

En esta sección vamos a presentar un estudio completo del riesgo de modelo procedente de la reversión a la media del HW en la valoración de swaptions bermuda. Para ello hemos dividido el estudio en las siguientes partes:

- Impacto de la reversión a la media en el precio de swaptions bermuda.
- Resultados de calibración de la reversión para distintos swaptions bermuda.
- Estimación de los AVAs de swaptions bermuda.

### 6.1. Impacto de la reversión en el precio de swaptions bermuda

En este apartado vamos a mostrar el impacto de la reversión a la media en la valoración de swaptions bermuda con diferentes strikes, tenors y vencimientos mediante dos metodologías para el cálculo de la reversión:

- La primera metodología, consiste en fijar la reversión a la media mediante criterio experto en 0,01 % y obtener la valoración del swaption bermuda. Sobre esta valoración base obtendremos las variaciones porcentuales en valor relativo de los precios de los swaptions bermuda moviendo la reversión  $\pm 2,5$  % en intervalos de 0,1 %. Definimos las variaciones en valor relativo como:

$$Variaciones = \frac{|ValoracionBase - Valoracion|}{Nominal}$$

- La segunda metodología es similar a la anterior pero tomando como valoración base la resultante de calibrar la reversión a la media con ratios de varianza, como se explica en el capítulo 5.

Para ver este impacto hemos dividido el estudio en swaptions bermuda con mismo vencimiento y distinto tenor, y en swaptions bermuda con misma fecha de inicio pero distinto vencimiento. Las características comunes de todos los swaptions bermuda valorados son las siguientes:

- Fecha valor: 30/06/2016.

- Frecuencia pago fijo: anual.
- Frecuencia pago variable: semestral.
- Curva fijación: Euribor6M.
- Curva descuento: Eonia.

Además hemos usado tres strikes distintos, 0,5 %, 1 % y 2 %, con opciones *payer* y *receiver* para cada strike. La estructura de fechas de los swaptions bermuda valorados viene dada por  $rYsY$ , donde  $r$  hace referencia a los años entre la fecha valor y el inicio del swap subyacente (que coincide con la primera fecha de opcionalidad del swaption bermuda), y  $s$  indica el tenor del swap, es decir, el swaption bermuda 3Y9Y tiene inicio del swap 30/06/2019 y tenor 9 años.

### Distintos tenors y mismo vencimiento

A continuación vamos a mostrar las variaciones porcentuales en valor relativo de precios de los swaptions bermuda con mismo vencimiento pero distintos tenors. El vencimiento común a todos ellos es el 30/06/2028, y el inicio va variando anualmente empezando el 30/06/2017 y finalizando el 30/06/2026.

En las figuras 5, 6 y 7 podemos observar este impacto para swaptions bermuda *receiver* con strikes 0,5 %, 1 % y 2 % mediante las dos metodologías descritas anteriormente. Por otro lado, podemos ver en las figuras 8, 9 y 10 este mismo impacto para los swaptions bermuda *payer*.

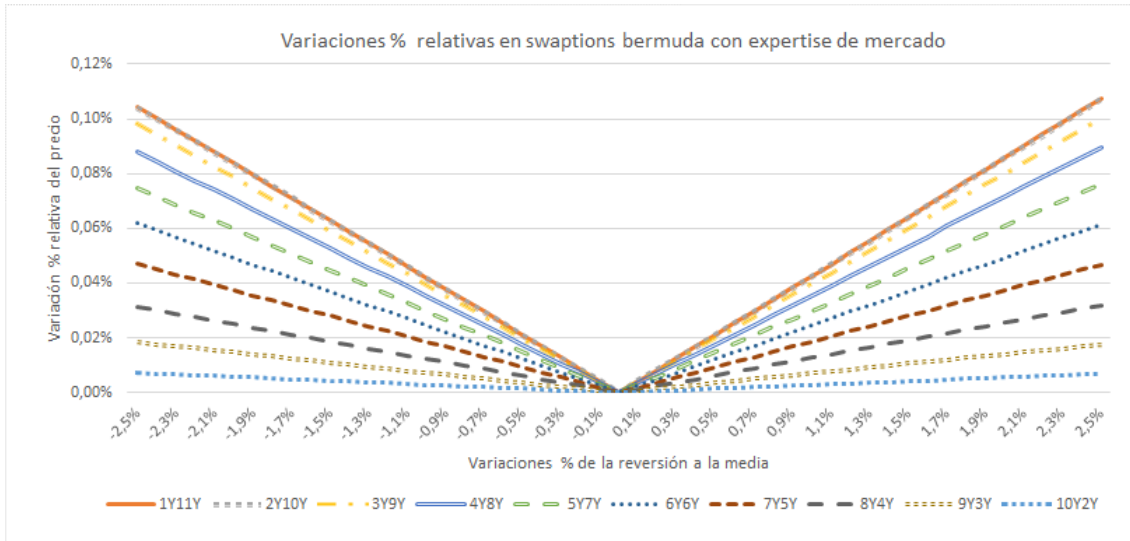
En estos resultados se puede observar que los impactos que se producen calibrando la reversión por ratios de volatilidad y los que se producen fijando esta por criterio experto son muy similares. Si comparamos las dos metodologías vemos que estos impactos no difieren entre si en más de 0,013 % en ninguno de los casos.

También podemos observar que los impactos son más pequeños cuanto menor es el tenor, esto se debe a que hay menos fechas de opcionalidad y, por lo tanto, la reversión a la media impacta en menor medida en el precio.

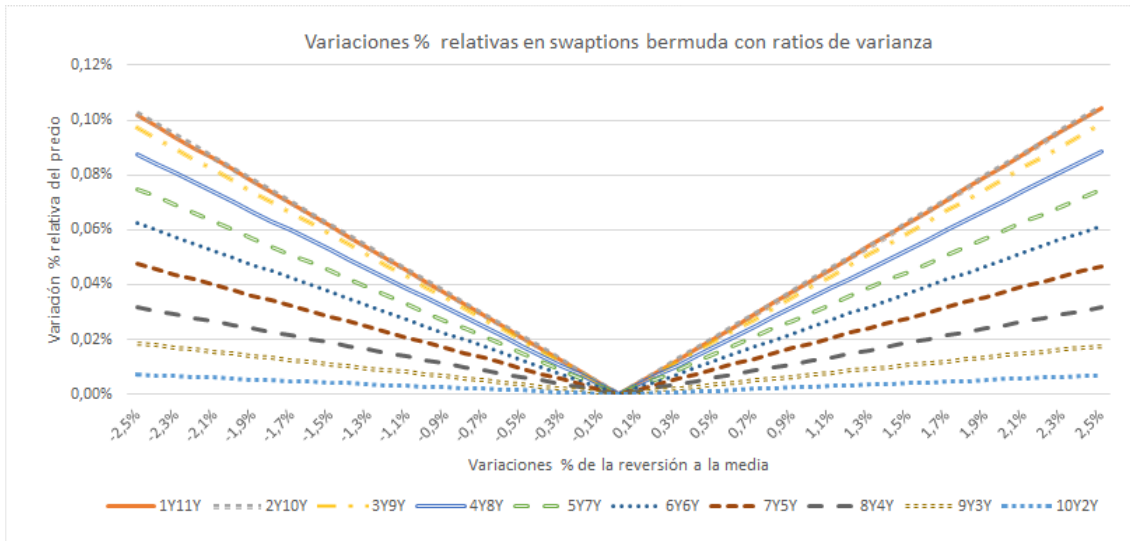
Además se puede observar que a medida que aumenta el strike de los swaptions bermuda los impactos se van haciendo cada vez más pequeños, esto pasa tanto para los *payer* como los *receiver*.



Por último, vemos que para algunas reversiones y algunos swaptions bermuda obtenemos impactos por encima de 0,05%, que consideramos una cantidad elevada.

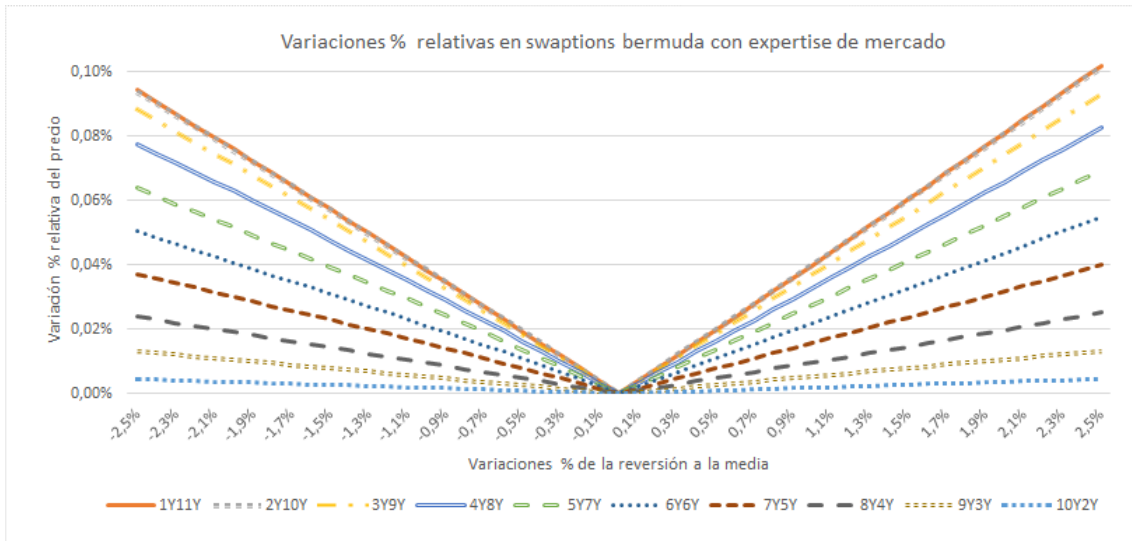


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

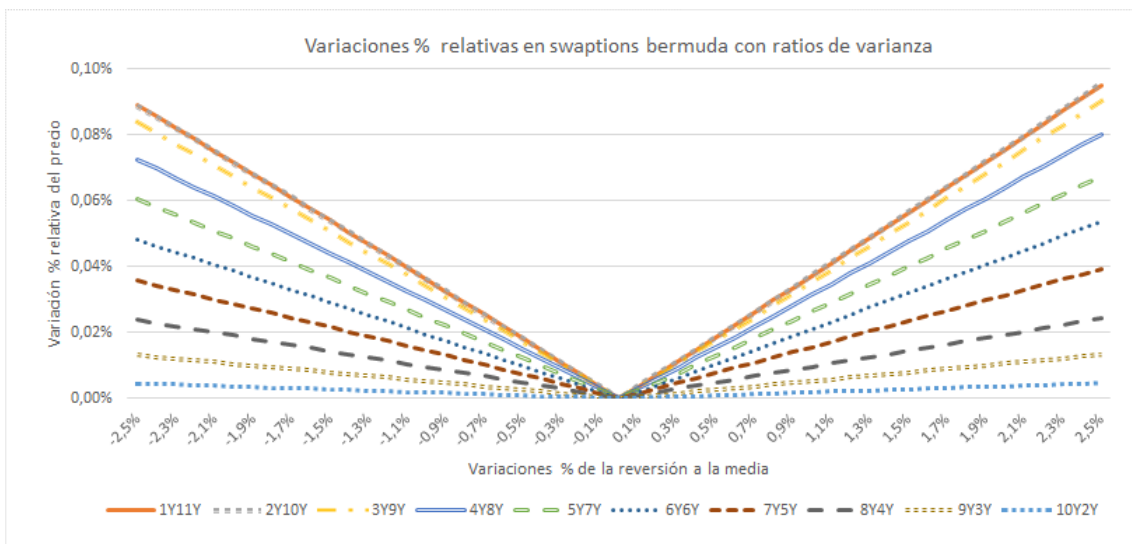


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 5: Impactos % realivos en el precio de swaptions bermuda *receiver* con strike 0,5% y misma fecha de vencimiento, 30/06/2028

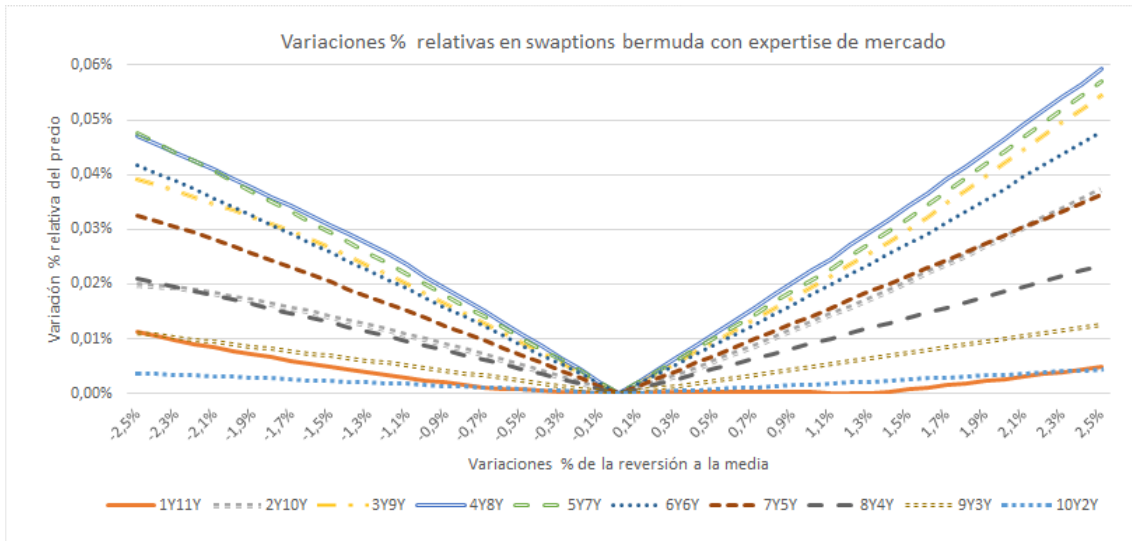


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

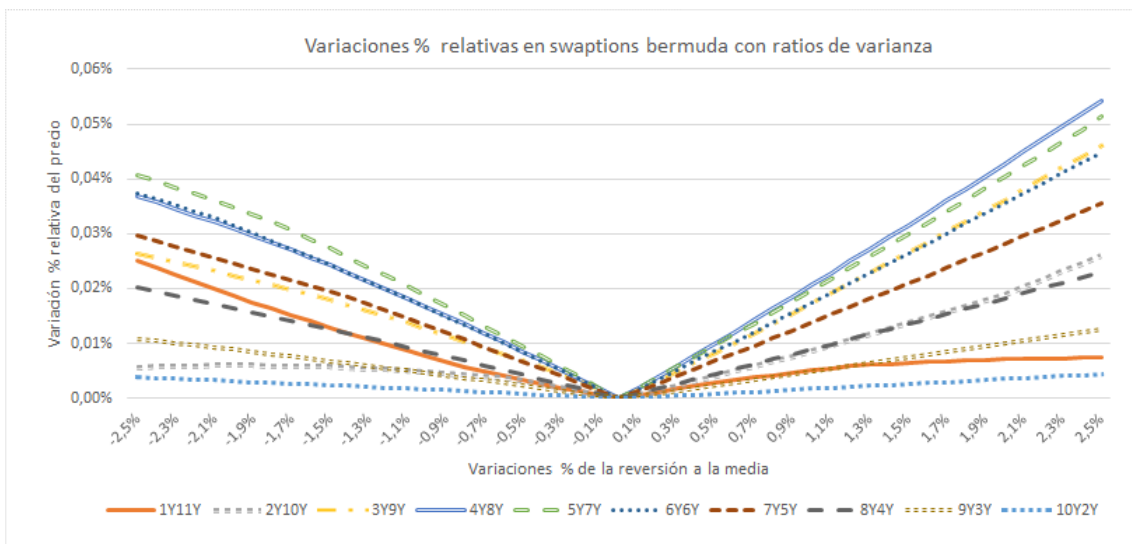


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 6: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *receiver* con strike 1% y misma fecha de vencimiento, 30/06/2028

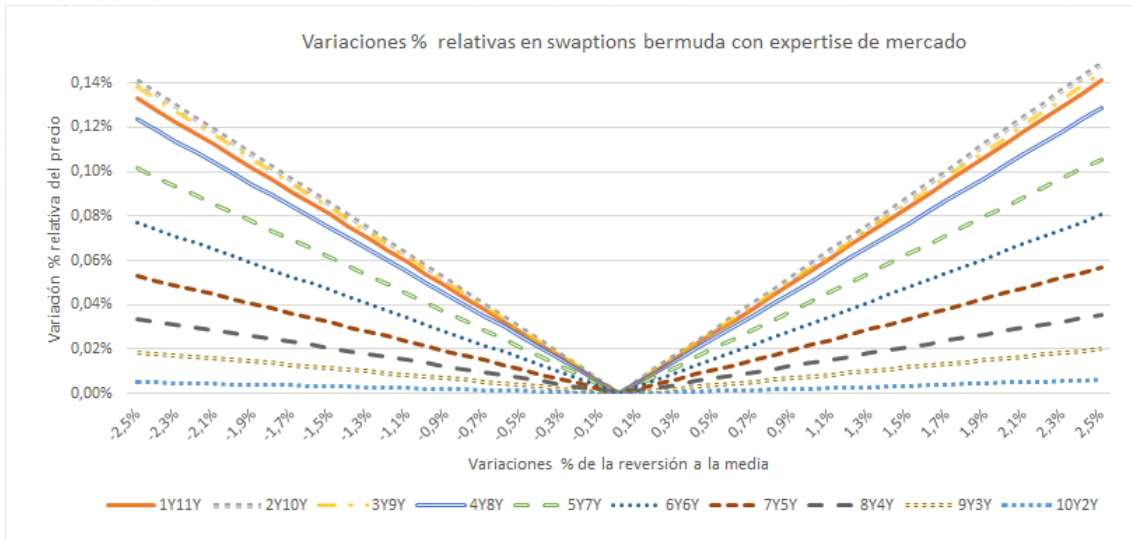


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

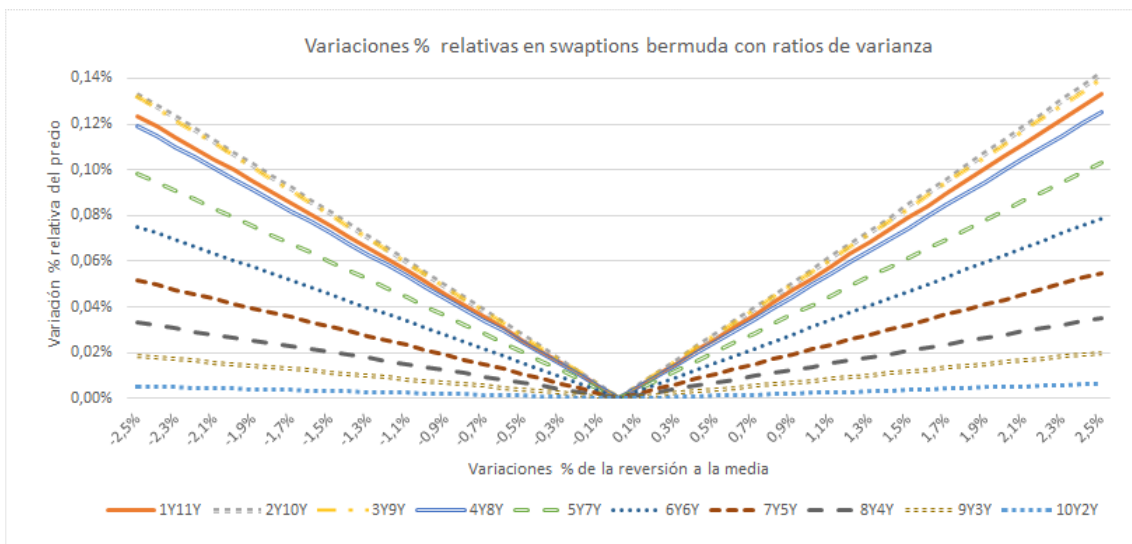


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 7: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *receiver* con strike 2% y misma fecha de vencimiento, 30/06/2028

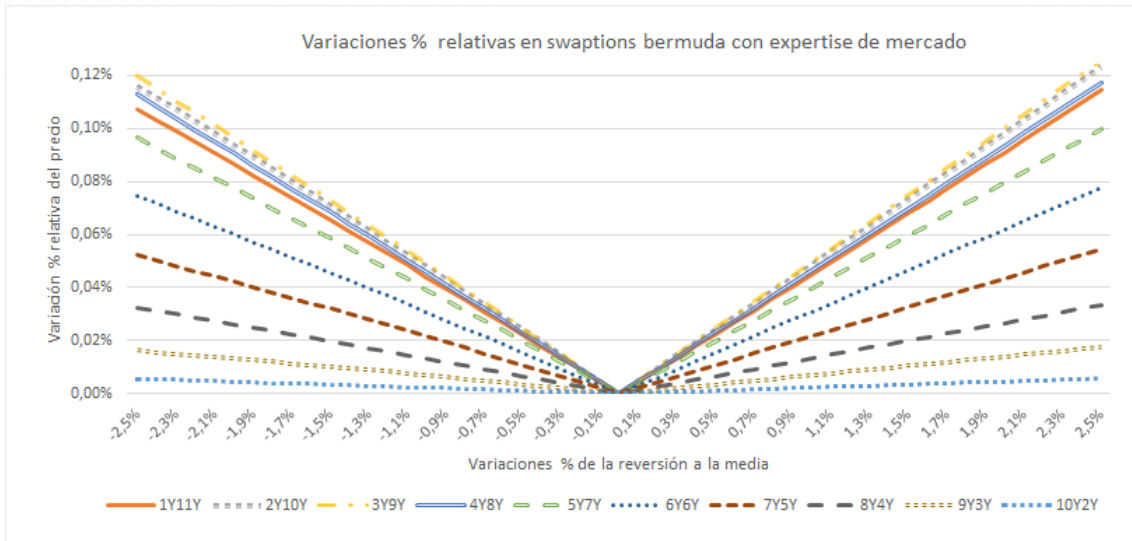


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

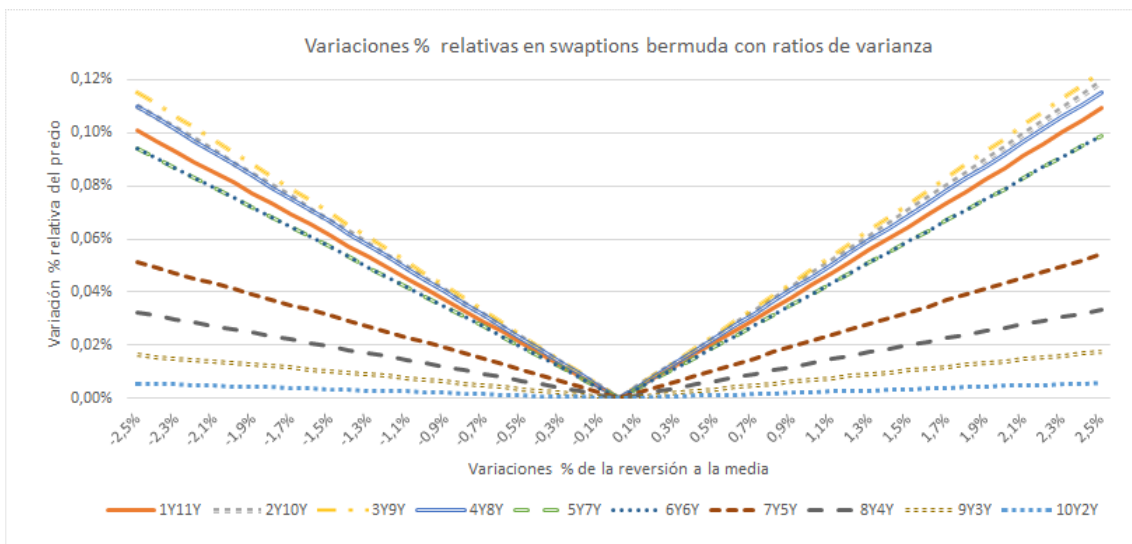


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 8: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *payer* con strike 0,5 % y misma fecha de vencimiento, 30/06/2028

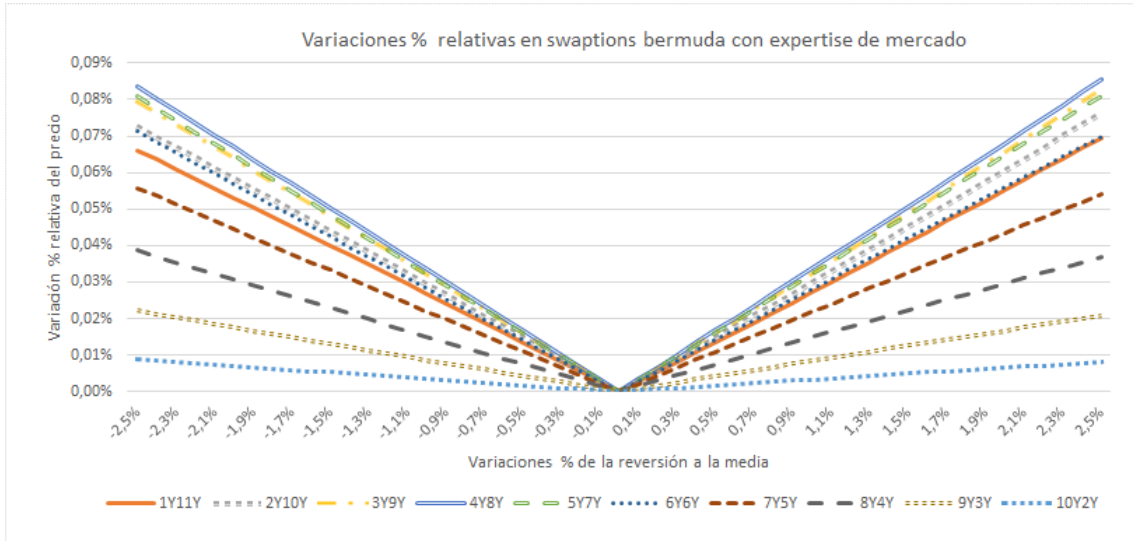


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

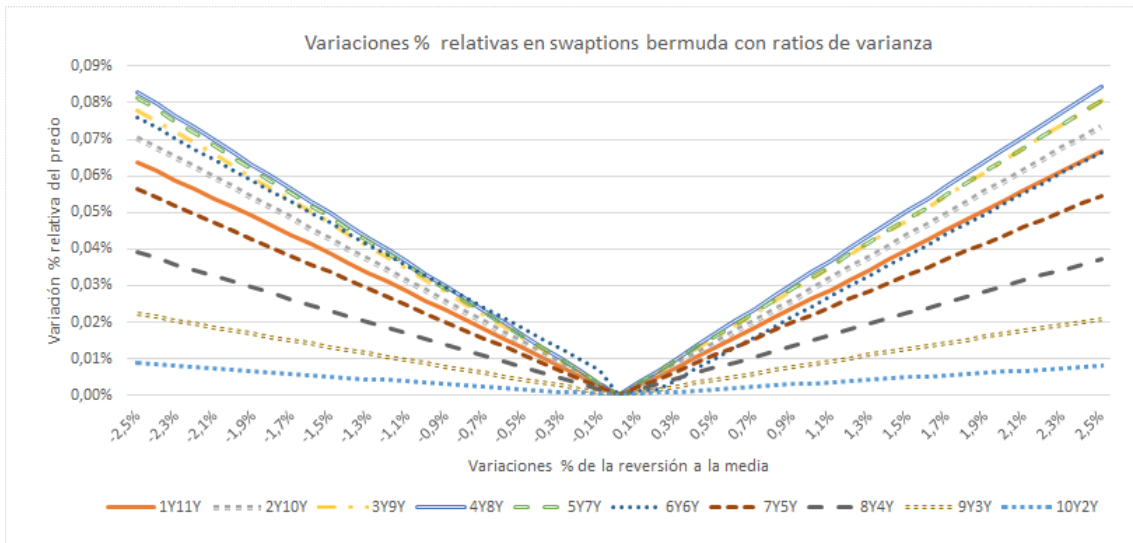


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 9: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *payer* con strike 1% y misma fecha de vencimiento, 30/06/2028



(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto



(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 10: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *payer* con strike 2% y misma fecha de vencimiento, 30/06/2028

## Distintos tenors y mismo inicio

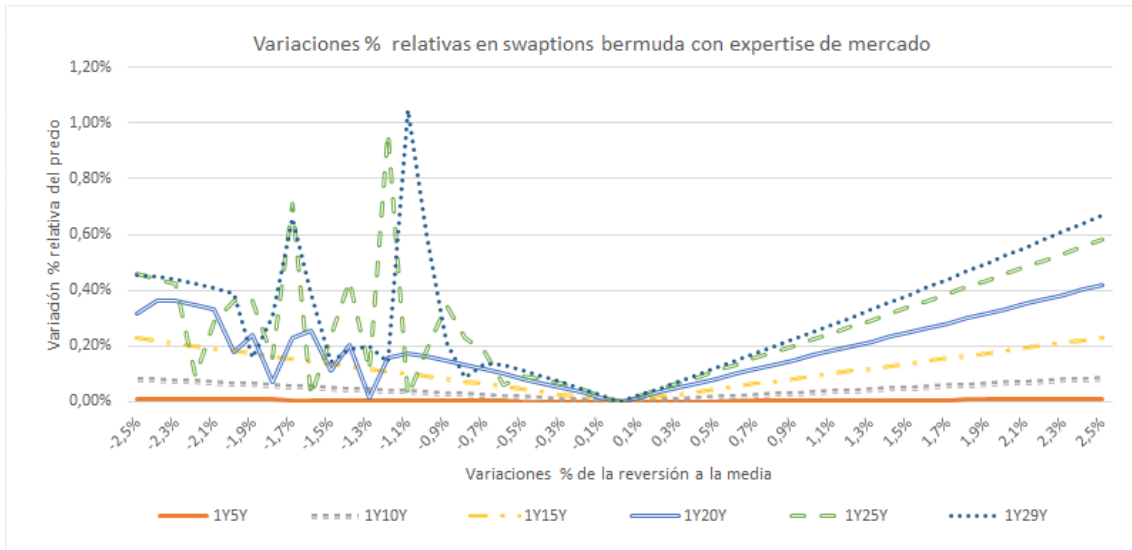
En esta sección vamos a mostrar las variaciones porcentuales en valor relativo de precios de los swaptions bermuda con el mismo inicio pero distintos tenors. El inicio común a todos ellos es el 30/06/2017, y los distintos vencimientos son 30/06/2022, 30/06/2027, 30/06/2032, 30/06/2037, 30/06/2042 y 30/06/2046.

En las figuras 11, 12 y 13 podemos observar este impacto para swaptions bermuda *receiver* con strikes 0,5%, 1% y 2% mediante las dos metodologías descritas anteriormente. Por otro lado, podemos ver en las figuras 14, 15 y 16 este mismo impacto para los swaptions bermuda *payer*.

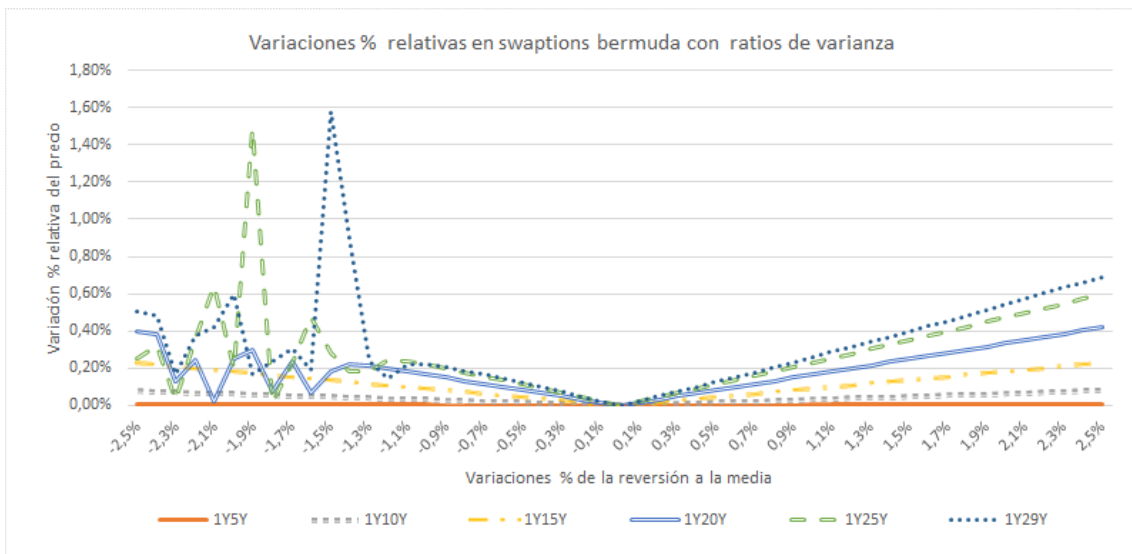
En estos resultados podemos ver que los impactos que se producen cuando fijamos la reversión mediante criterio experto son mayores que cuando calibramos la reversión. Además, a medida que aumenta el tenor aumentan los impactos, puesto que hay más fechas de opcionalidad en el swaption bermuda donde afecta la reversión a la media. Esto se puede observar claramente si comparamos el impacto del 1Y5Y con el 1Y15Y, ya que siempre está por encima este último.

Por otro lado, vemos que para los swaptions bermuda 1Y20Y, 1Y25Y y 1Y29Y se obtienen impactos muy elevados, llegando en algunos casos a estar por encima del 1%.

Por último, a medida que vamos aumentando el tenor de los swaptions bermuda y disminuyendo la reversión vamos obteniendo algunos errores de calibración en las volatilidades, este efecto es debido a que bajo ciertos escenarios el modelo no es capaz de recuperar los precios de mercado de los swaptions europeos. Esto se puede observar por los cambios bruscos de pendiente que se producen. Estos errores de calibración se producen más tarde cuando calibramos la reversión por ratios de varianza que cuando la fijamos por criterio experto.



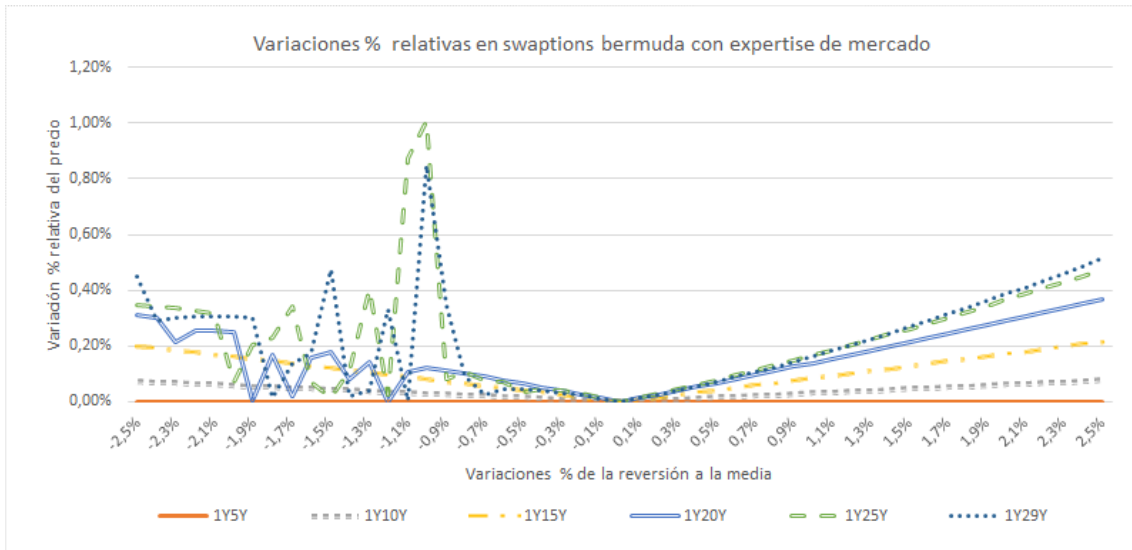
(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto



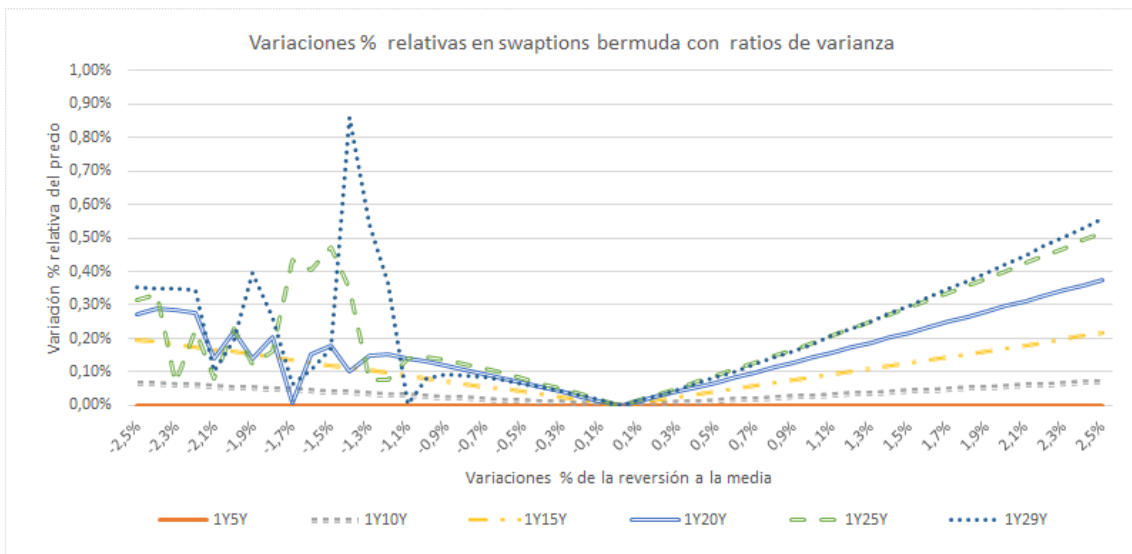
(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 11: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *receiver* con strike 0,5 % y misma fecha de inicio, 30/06/2017



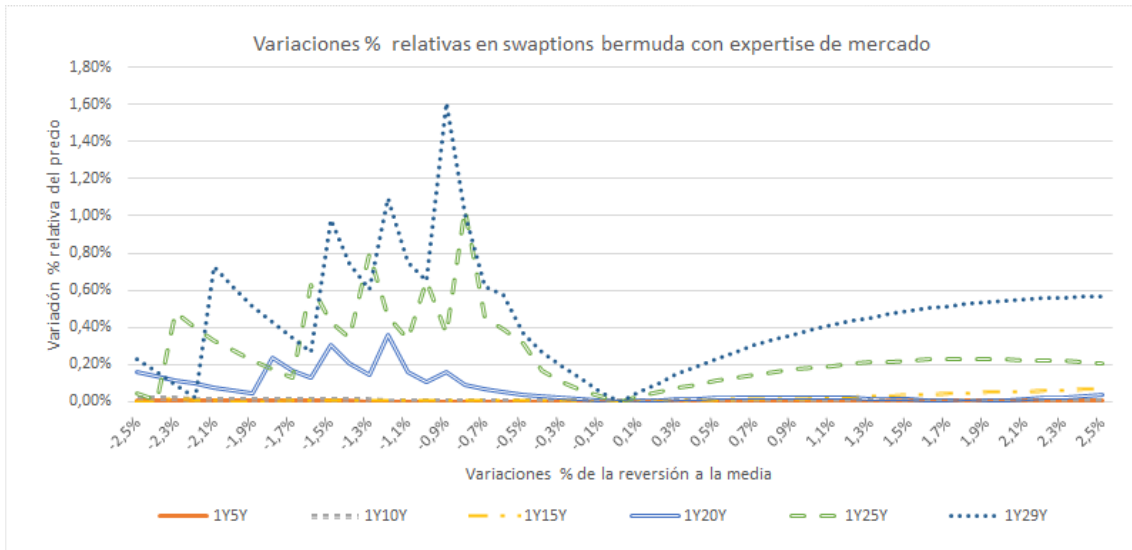


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

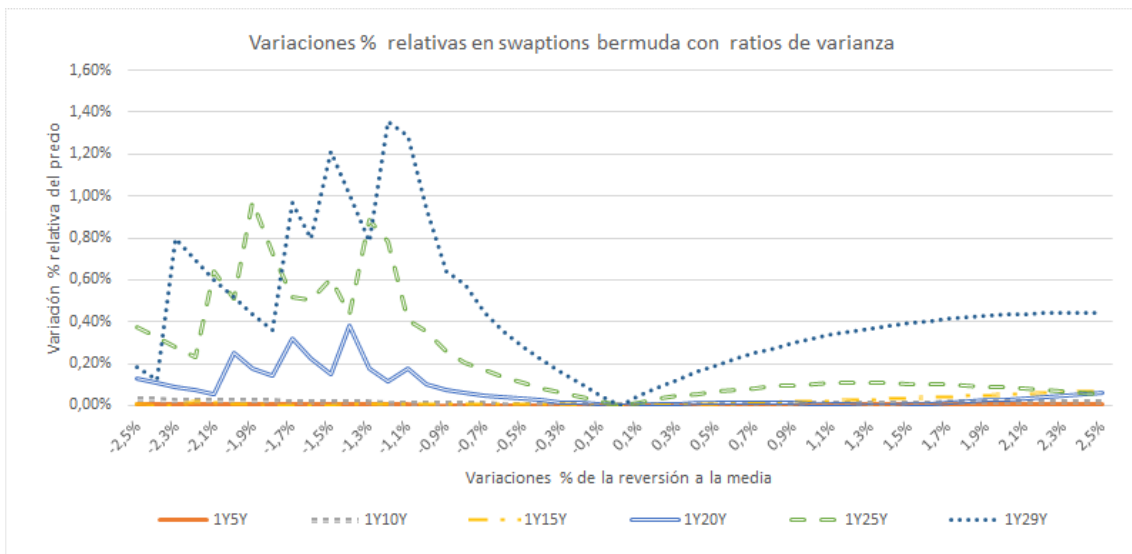


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 12: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *receiver* con strike 1% y misma fecha de inicio, 30/06/2017

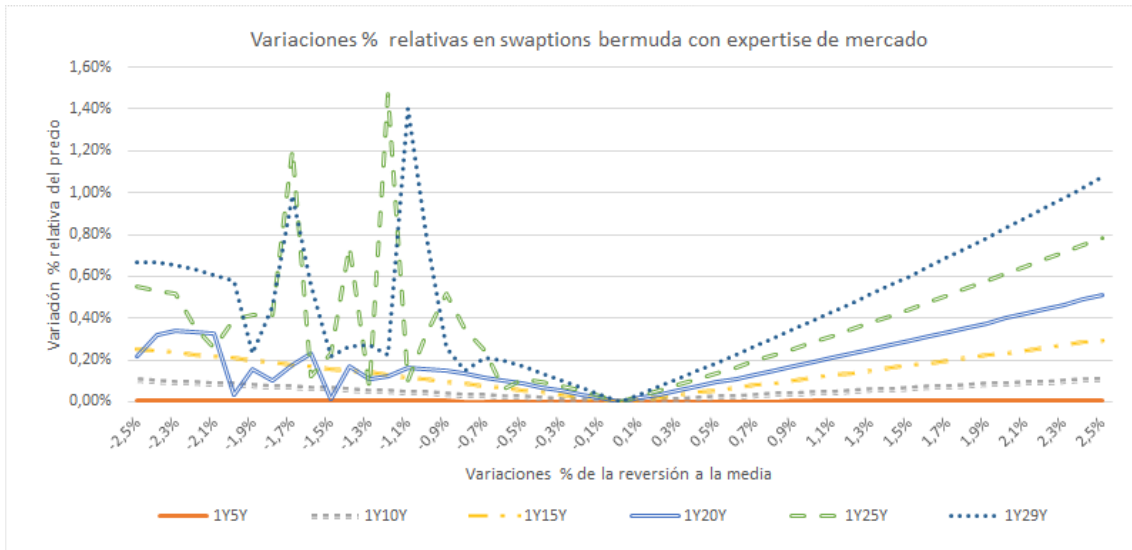


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

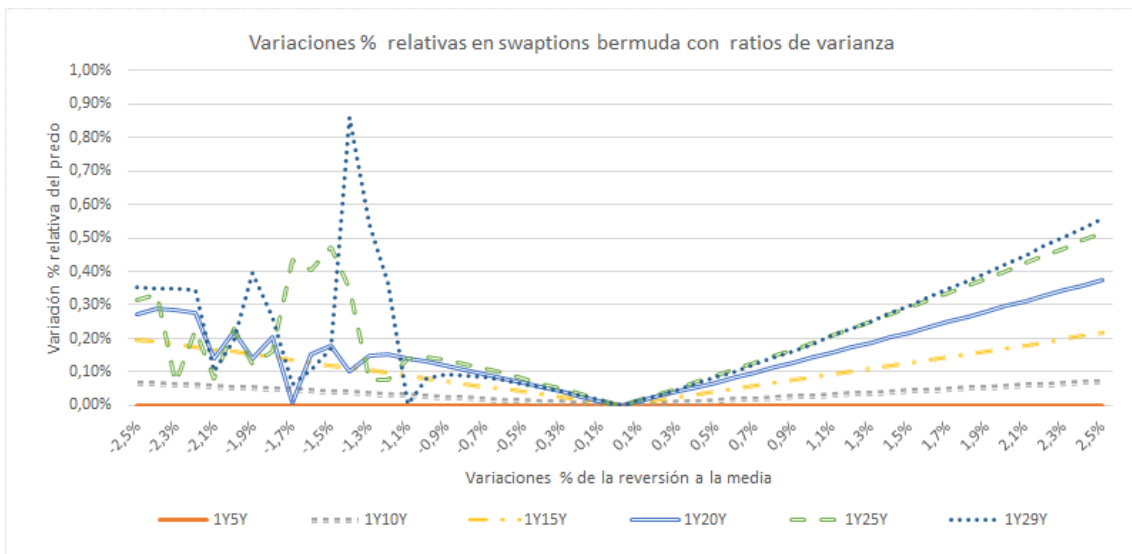


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 13: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *receiver* con strike 2% y misma fecha de inicio, 30/06/2017

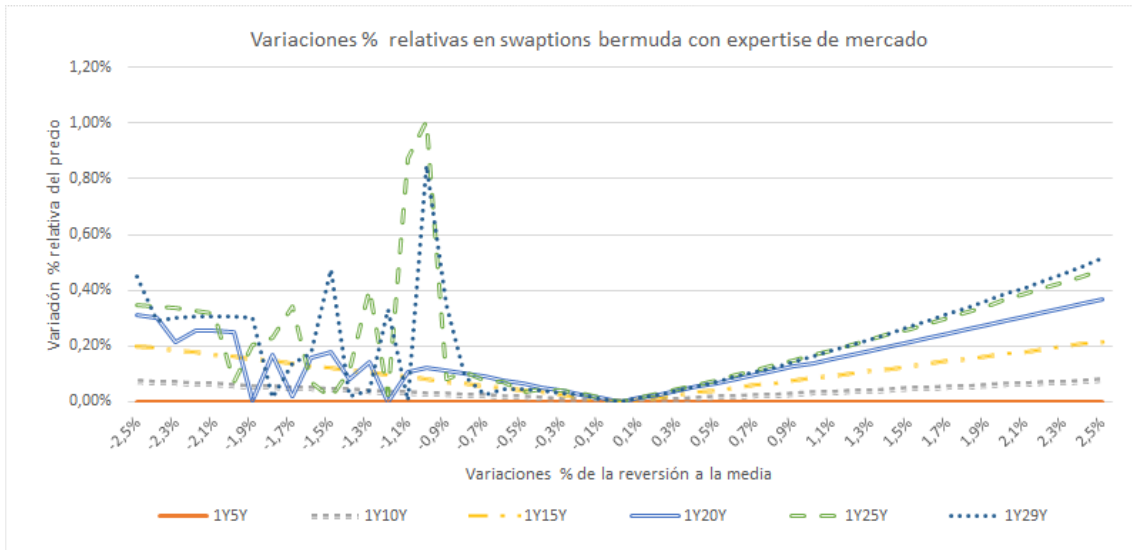


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

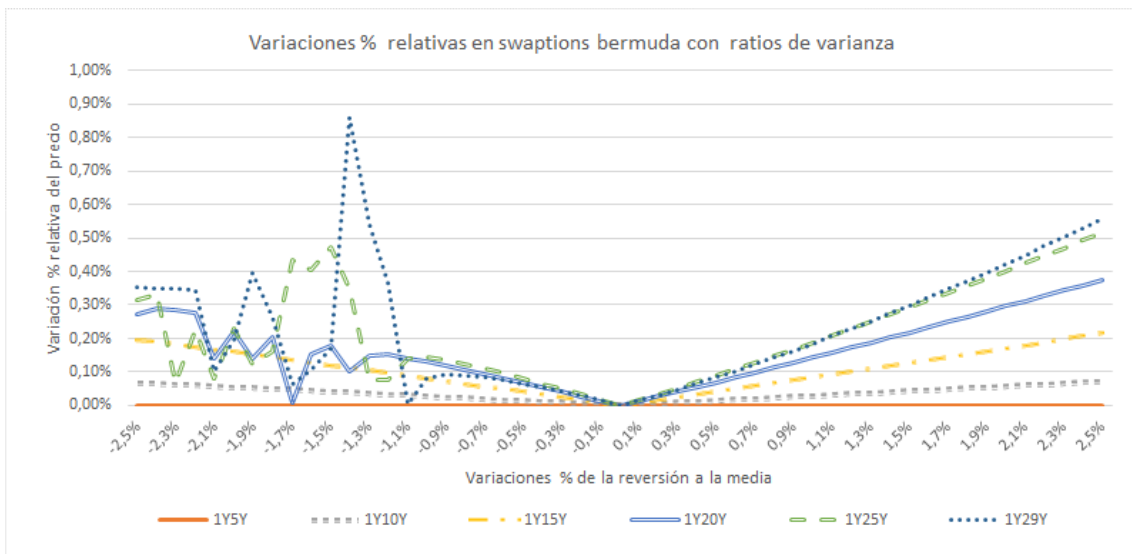


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 14: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *payer* con strike 0,5% y misma fecha de inicio, 30/06/2017

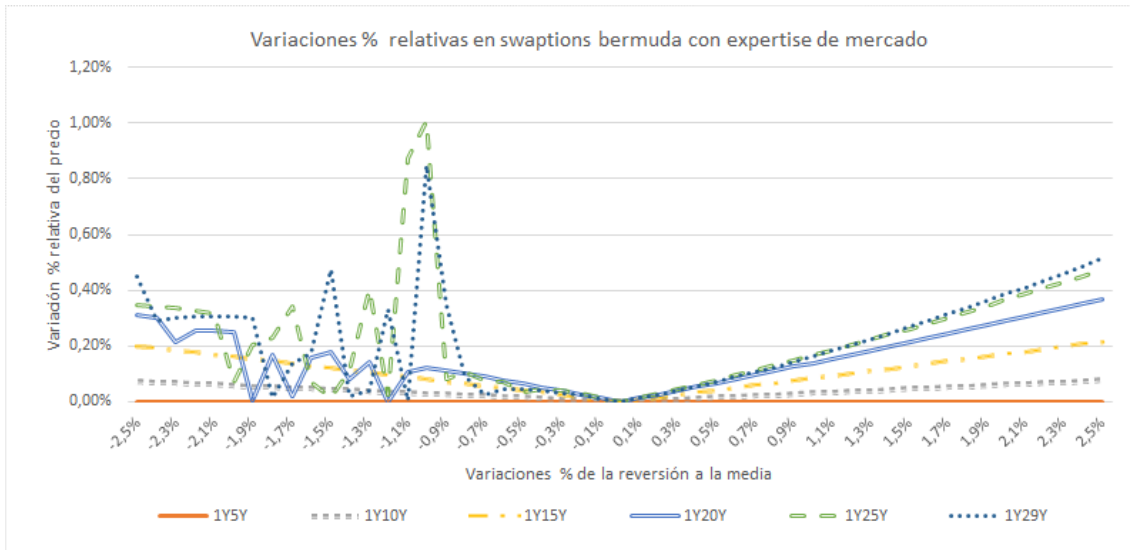


(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto

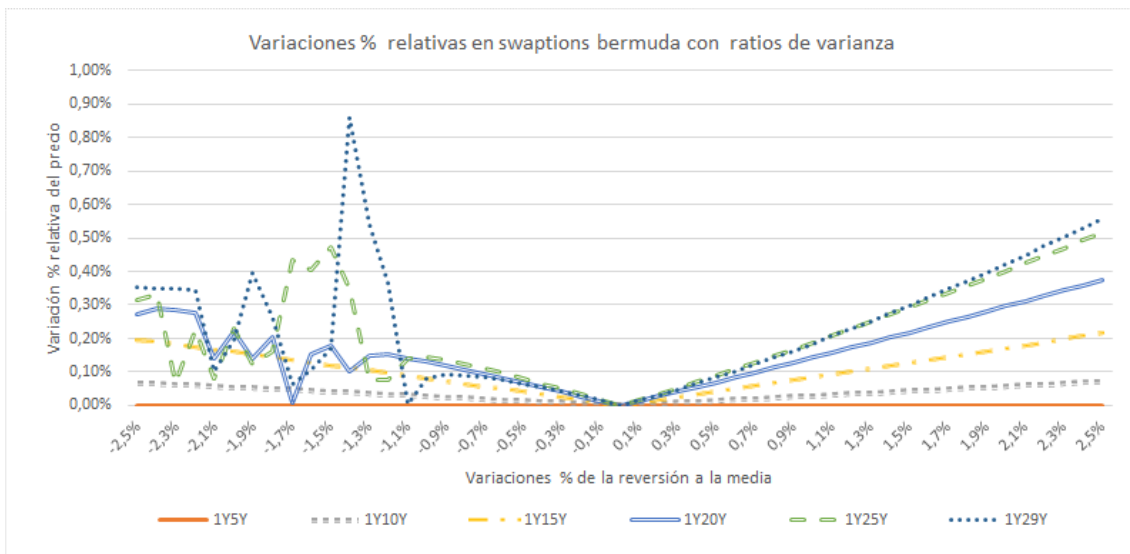


(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 15: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *payer* con strike 1% y misma fecha de inicio, 30/06/2017



(a) Impacto estimado con la reversión fijada por criterio experto



(b) Impacto estimado con la reversión calibrada

Figura 16: Impactos % relativos en el precio de swaptions bermuda *payer* con strike 2% y misma fecha de inicio, 30/06/2017

## 6.2. Resultados de calibración de la reversión a la media

En esta sección vamos a mostrar distintos resultados de calibración de la reversión a la media mediante ratios de varianza. Para ello hemos dividido el estudio en tres

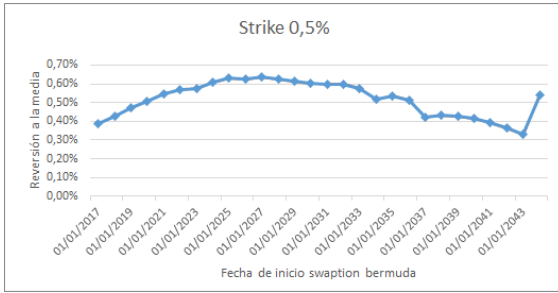
partes:

- En la primera mostraremos los resultados de calibrar la reversión a la media para un vencimiento fijo y distintos strikes.
- En la segunda fijaremos el inicio del swaption bermuda y cambiando el vencimiento calibraremos la reversión a la media en los mismos strikes que antes.
- En la última calibraremos la reversión moviendo el strike para un mismo swaption bermuda.

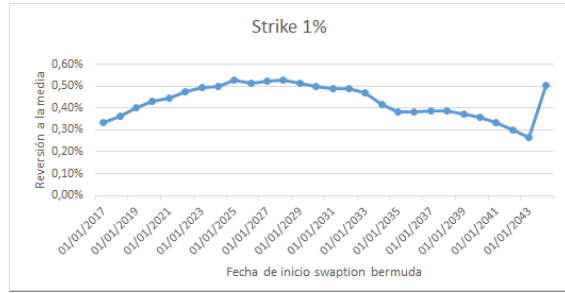
### **Distintos tenors y mismo vencimiento**

En este apartado vamos a mostrar el resultado de calibración de la reversión a la media para swaptions bermuda con mismo vencimiento pero distintos tenors. El vencimiento común a todos ellos es el 30/06/2046, y el inicio va variando anualmente empezando el 30/06/2017 y finalizando el 30/06/2044.

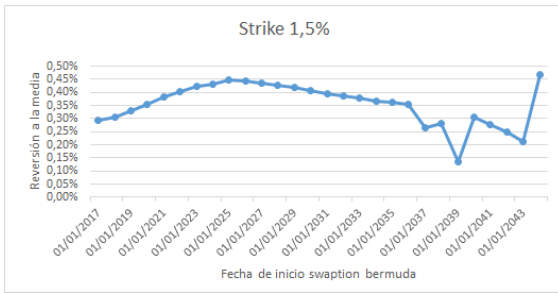
En la figura 17 se puede observar este resultado de calibración para los strikes 0,5%, 1%, 1,5% y 2%. Como se puede observar, hemos unido los puntos de calibración obteniendo una función más o menos suave hasta el año 2036, y a partir de ese año empiezan a producirse mayores cambios de pendiente siendo estos más grandes en los strikes 1,5% y 2%. Por otro lado, vemos que todas las reversiones calibradas son positivas.



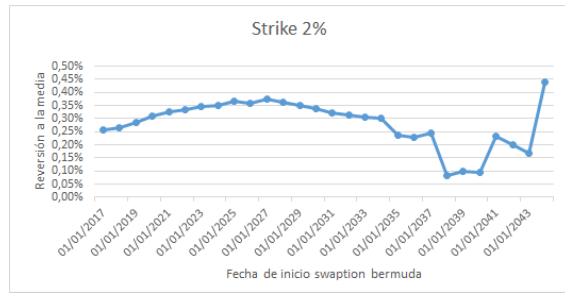
(a) Reversión a la media para strike 0,5 %



(b) Reversión a la media para strike 1 %



(c) Reversión a la media para strike 1,5 %



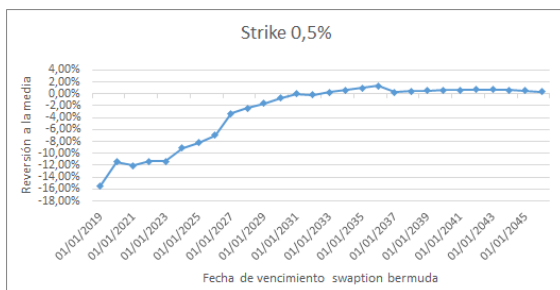
(d) Reversión a la media para strike 2 %

Figura 17: Resultados de calibración de la reversión a la media para la misma fecha de vencimiento, 30/06/2046

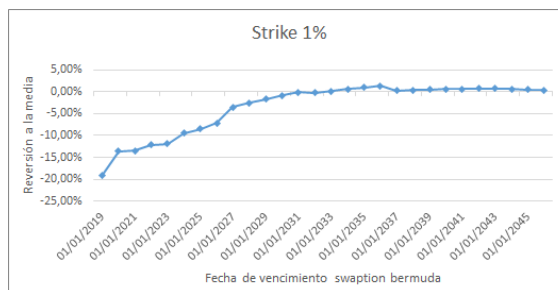
### Distintos tenors y mismo inicio

Ahora vamos a mostrar el resultado de calibrar la reversión a la media en swaptions bermuda con el mismo inicio pero con distintos tenors. El inicio común a todos ellos es el 30/06/2017, y el vencimiento va variando anualmente empezando el 30/06/2019 y finalizando el 30/06/2046.

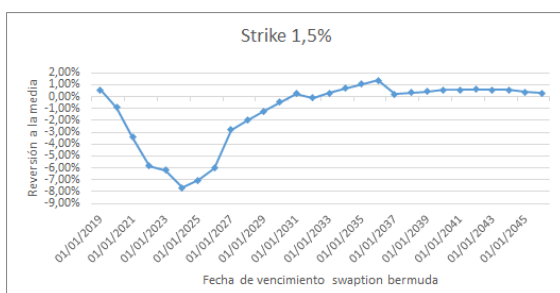
En la figura 18 se puede observar este resultado de calibración para los strikes 0,5 %, 1 %, 1,5 % y 2 %. Se puede observar que se obtienen reversiones a la media negativas en los tenors bajos y reversiones positivas en los tenor altos. Además, la función que se obtiene al unir los puntos tiene cambios más o menos bruscos de pendiente hasta el año 2037, produciéndose cambios de pendiente mayores cuanto mayor es el tenor.



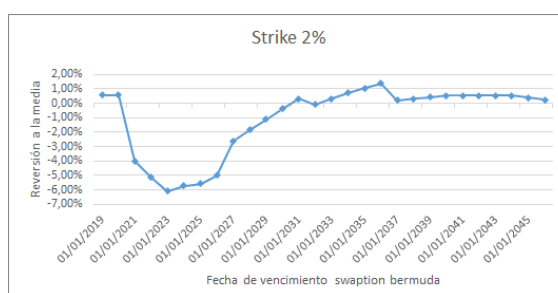
(a) Reversión a la media para strike 0,5 %



(b) Reversión a la media para strike 1 %



(c) Reversión a la media para strike 1,5 %



(d) Reversión a la media para strike 2 %

Figura 18: Resultados de calibración de la reversión a la media para la misma fecha de inicio, 30/06/2017.

### Distintos strikes y mismo swaption bermuda

En este último caso hemos calibrado la reversión a la media para distintos strikes de un mismo swaption bermuda con inicio 30/06/2017 y vencimiento 30/06/2028. Los strikes que se han tomado varían desde el 0,5 % hasta el 3 % con un incremento del 0,1 %.

En la figura 2 del apartado 5.1 podemos ver este resultado, y como observamos las reversiones obtenidas son negativas y la función resultante de unir las reversiones es suave exceptuando entre los strikes 2,2 % y 2,3 % que se produce un pequeño cambio de pendiente.

### 6.3. Estimación de los AVAs

Básicamente el AVA es un ajuste que recoge los riesgos y costes asociados a la valoración y liquidación de una determinada posición que no estarían incluidos en su valoración a precio justo o *fair value*. Existen dos metodologías para el cálculo



del AVA:

- El método simplificado que puede ser usado por las entidades de menor tamaño y consiste en un 0,1 % de la suma del valor absoluto de los activos y pasivos valorados.
- El método general que implica añadir un ajuste en la valoración tal que la valoración resultante se considere prudente, es decir, correspondiente al percentil 90 del intervalo de confianza relativo al peor escenario de valoración para cada categoría/factor de riesgo.

En nuestro caso se ha elegido el método general y la reversión a la media como factor de riesgo. A continuación mostramos el procedimiento seguido:

- Se calibra la reversión a la media por criterio experto o por ratios de varianza.
- Se calcula una serie de escenarios de valoración del swaption bermuda mediante un vector de reversiones a las media de  $\pm 2,5\%$  en intervalos de 0,1 %.
- Por último, se calcula el percentil 90 % de las diferencias de valoración entre los escenarios y el valor del swaption bermuda del primer punto. Este percentil del 90 % será el AVA del swaption bermuda.

En los cuadros 1 y 2 se pueden observar los AVAs, calculados en tanto por ciento, para los swaptions bermuda *receiver* con la reversión fijada por criterio experto y calibrada por ratios de varianza. Por otro lado, los cuadros 3 y 4 muestran esta misma información pero con swaptions bermuda *payer*.

Como podemos observar los AVAs calculados son más altos cuanto mayor tenor y vencimiento tiene el swaption bermuda. Por ejemplo, podemos observar que en los swaptions bermuda con inicio 1Y a medida que se va aumentando el tenor va aumentando el AVA calculado. Además, también se puede observar que con el mismo tenor el AVA es mayor cuanto mayor es el vencimiento, esto se puede observar comparando el swaption bermuda 1Y5Y con el 4Y8Y siendo el AVA de este último más elevado al tener mayor vencimiento y, por lo tanto, mayor incertidumbre. Por último, no vemos demasiadas diferencias entre los AVAs de los swaptions bermuda *payer* y *receiver*.

Swaption Bermuda Receiver/Strike	0,50 %	1,00 %	2,00 %
1Y5Y	0,008 %	0,001 %	0,005 %
1Y10Y	0,067 %	0,061 %	0,013 %
1Y11Y	0,086 %	0,081 %	0,008 %
1Y15Y	0,184 %	0,172 %	0,053 %
1Y20Y	0,333 %	0,291 %	0,164 %
1Y25Y	0,507 %	0,408 %	0,459 %
1Y29Y	0,602 %	0,436 %	0,741 %
2Y10Y	0,085 %	0,081 %	0,029 %
3Y9Y	0,080 %	0,074 %	0,042 %
4Y8Y	0,072 %	0,066 %	0,047 %
5Y7Y	0,061 %	0,055 %	0,044 %
6Y6Y	0,049 %	0,044 %	0,037 %
7Y5Y	0,037 %	0,032 %	0,029 %
8Y4Y	0,026 %	0,020 %	0,019 %
9Y3Y	0,014 %	0,011 %	0,010 %
10Y2Y	0,006 %	0,004 %	0,003 %

Cuadro 1: AVAs calculados para swaption bermuda *receiver* y reversión por criterio experto

Swaption Bermuda Receiver/Strike	0,50 %	1,00 %	2,00 %
1Y5Y	0,007 %	0,001 %	0,006 %
1Y10Y	0,064 %	0,057 %	0,023 %
1Y11Y	0,083 %	0,076 %	0,019 %
1Y15Y	0,184 %	0,171 %	0,051 %
1Y20Y	0,335 %	0,296 %	0,176 %
1Y25Y	0,522 %	0,434 %	0,607 %
1Y29Y	0,602 %	0,475 %	0,942 %
2Y10Y	0,084 %	0,076 %	0,019 %
3Y9Y	0,079 %	0,072 %	0,036 %
4Y8Y	0,071 %	0,064 %	0,043 %
5Y7Y	0,060 %	0,054 %	5,641 %
6Y6Y	0,049 %	0,043 %	0,036 %
7Y5Y	0,037 %	0,031 %	0,028 %
8Y4Y	0,025 %	0,019 %	0,018 %
9Y3Y	0,014 %	0,011 %	0,010 %
10Y2Y	0,005 %	0,004 %	0,004 %

Cuadro 2: AVAs calculados para swaption bermuda *receiver* y reversión calibrada por ratios de varianza

Swaption Bermuda Payer/Strike	0,50 %	1,00 %	2,00 %
<b>1Y5Y</b>	0,007 %	0,004 %	0,000 %
<b>1Y10Y</b>	0,086 %	0,068 %	0,038 %
<b>1Y11Y</b>	0,112 %	0,091 %	0,055 %
<b>1Y15Y</b>	0,234 %	0,209 %	0,162 %
<b>1Y20Y</b>	0,399 %	0,402 %	0,411 %
<b>1Y25Y</b>	0,714 %	0,731 %	0,801 %
<b>1Y29Y</b>	0,928 %	1,016 %	1,200 %
<b>2Y10Y</b>	0,118 %	0,098 %	0,061 %
<b>3Y9Y</b>	0,115 %	0,100 %	0,066 %
<b>4Y8Y</b>	0,103 %	0,094 %	0,068 %
<b>5Y7Y</b>	0,084 %	0,080 %	-0,013 %
<b>6Y6Y</b>	0,064 %	0,062 %	0,056 %
<b>7Y5Y</b>	0,045 %	0,044 %	0,043 %
<b>8Y4Y</b>	0,028 %	0,027 %	0,030 %
<b>9Y3Y</b>	0,016 %	0,014 %	0,017 %
<b>10Y2Y</b>	0,005 %	0,005 %	0,007 %

Cuadro 3: AVAs calculados para swaption bermuda *payer* y reversión por criterio experto

Swaption Bermuda Payer/Strike	0,50 %	1,00 %	2,00 %
1Y5Y	0,006 %	0,003 %	0,036 %
1Y10Y	0,080 %	0,064 %	0,036 %
1Y11Y	0,106 %	0,087 %	0,053 %
1Y15Y	0,231 %	0,207 %	0,162 %
1Y20Y	0,410 %	0,408 %	0,411 %
1Y25Y	0,733 %	0,718 %	0,804 %
1Y29Y	0,973 %	1,030 %	1,208 %
2Y10Y	0,113 %	0,095 %	0,059 %
3Y9Y	0,111 %	0,098 %	0,064 %
4Y8Y	0,100 %	0,092 %	0,067 %
5Y7Y	0,082 %	0,079 %	1,317 %
6Y6Y	0,063 %	0,079 %	0,052 %
7Y5Y	0,043 %	0,043 %	0,044 %
8Y4Y	0,028 %	0,027 %	0,030 %
9Y3Y	0,016 %	0,014 %	0,017 %
10Y2Y	0,005 %	0,005 %	0,006 %

Cuadro 4: AVAs calculados para swaption bermuda *payer* y reversión calibrada por ratios de varianza

## 7. Conclusiones

El riesgo de modelo representa una de las grandes preocupaciones para los organismos reguladores y las entidades financieras. A diario éstas han de ajustar las posiciones de su cartera de negociación a valor de mercado, viéndose obligadas a realizar marcajes de productos no observables como, por ejemplo, los swaptions bermuda. En estas situaciones las posiciones se ajustan al valor implícito que arroje un modelo debidamente calibrado como el Hull & White. Sin embargo, en la propia calibración a menudo existen parámetros cuya fijación en sí misma es problemática, originando una fuente de incertidumbre: el riesgo de modelo.

En este trabajo se ha estudiado el riesgo de modelo procedente del parámetro de reversión a la media en la valoración de swaptions bermuda bajo el modelo Hull & White de tipos de interés. Una estimación inapropiada de la reversión a la media implicaría una incorrecta valoración en productos tan extendidos entre las entidades financieras como los swaptions bermuda.

El estudio realizado ha consistido en una serie de pruebas que comentaremos a continuación:

- Se ha calculado el impacto en precio producido por la reversión a la media en swaptions bermuda. Para ello se han estimado impactos de valoración mediante dos metodologías distintas para el cálculo de la reversión. La primera metodología consiste en fijar la reversión a la media por criterio experto en 0,01 % y obtener la valoración del swaption bermuda, sobre esta valoración calculamos las variaciones porcentuales en valor relativo de los precios que se obtienen moviendo la reversión  $\pm 2,5\%$  en intervalos de 0,1 %. La segunda metodología es similar a la primera pero calibrando la reversión por ratios de varianza.

Además hemos dividido este estudio en dos partes. En la primera parte se ha calculado el impacto de valoración en swaptions bermuda con el mismo vencimiento pero distintos tenors, y como se puede observar en algunos casos se obtienen impactos por encima del 0,05 % que consideramos elevado. Notemos también que los impactos que se producen para las dos metodologías son bastante similares ya que no difieren entre si en más de 0,013 % en ninguno de los casos. También observamos que cuanto menor es el tenor menor es el impacto

que se produce ya que hay menos fechas de opcionalidad en las que afecta la reversión a la media. Por último, vemos que a medida que aumenta el strike de los swaptions bermuda los impactos van disminuyendo, esto pasa tanto para los *payer* como para los *receiver*.

Para la segunda parte se han estimado impactos en swaptions bermuda con el mismo inicio pero con distintos tenors. Podemos observar que cuanto mayor es el tenor mayor es el impacto que se produce, debido a que la reversión afecta en un número mayor de fechas de opcionalidad. Esto se aprecia cuando comparamos, por ejemplo, el 1Y10Y con el 1Y15Y siendo siempre más elevado el impacto en este último. También podemos ver que en este caso los impactos que se producen cuando fijamos la reversión son mayores que cuando calibramos la misma. Además apreciamos que en los swaptions bermuda 1Y20Y, 1Y25Y y 1Y29Y se producen impactos por encima de 100 puntos básicos, siendo muy elevados. Adicionalmente, cuanto mayor es el vencimiento y mayor es el tenor se pueden producir algunos errores de calibración al mover negativamente la reversión a la media. Este efecto es debido a que bajo ciertos escenarios el modelo no es capaz de recuperar los precios de mercado de los swaptions europeos. Notar que estos errores de calibración se producen antes con un valor de reversión fijado por criterio experto que cuando se emplea una metodología de calibración alternativa basada en ratios de varianza.

- Se han realizado pruebas de calibración de la reversión a la media mediante ratios de varianza. Para ello se han calibrado reversiones para swaptions bermuda con mismo vencimiento pero distintos tenors, con mismo inicio pero distintos tenors, y con diferentes strikes. Como observamos se han obtenido reversiones tanto positivas como negativas. Las reversiones negativas se dan en los vencimientos cercanos y tenors pequeños, mientras que las positivas se dan con vencimientos lejanos. Este resultado contradice la elección de la reversión a la media por criterio experto, que tradicionalmente ha considerado la reversión a la media como una variable necesariamente positiva.

De manera adicional, los perfiles de valores de reversión a la media obtenidas mediante la metodología de ratios de varianza son en general suaves, si bien muestran de manera puntual ciertos cambios de pendiente bruscos.

- Finalmente, para la estimación de riesgo de modelo se han calculado las AVAs de los swaptions bermuda según el strike, el inicio, el tenor y el tipo de opción. Se ha observado que en los swaptions bermuda con la misma fecha de inicio el AVA va aumentando a medida que aumenta el tenor de los mismos, llegando a alcanzar valores en torno a los 100 puntos básicos en algunos casos. Esto es debido al incremento del grado de incertidumbre que conlleva un mayor tenor. Por esta misma razón, también se puede observar que con el mismo tenor el AVA es mayor cuanto mayor es el vencimiento. Además vemos que en la mayoría de los casos el AVA disminuye cuando aumenta el strike.

Como conclusión final, se recomienda a las entidades financieras con swaptions bermuda valorados con Hull & White realizar el cálculo de su *fair value* estimando la reversión a la media mediante alguna metodología anclada en productos de mercado (como la empleada en este trabajo mediante ratios de varianza). Sin embargo, de cara a mitigar posibles errores de calibración en el modelo, así como para cálculos regulatorios, se recomienda seguir una metodología de cálculo de valor prudente basada en AVAs como la aquí expuesta. Como ha quedado demostrado, el grado de incertidumbre en la valoración de ciertos swaptions bermuda, especialmente los de mayor tenor y vencimiento, está lejos de poder ser despreciado.



## 8. Anexo I: Desarrollo Hull & White

En el modelo del HW la evolución de la variable de estado viene dada por:

$$dr(t) = (\theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma_t dW_t$$

Si definimos  $x_t = r_t e^{\int_0^t a_s ds}$  y aplicamos Itô a  $x$  tenemos que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} (dr)^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial r} (\theta_t - a_t) r_t + \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial x}{\partial r} \sigma_t dW_t \end{aligned} \quad (11)$$

El siguiente paso es calcular las derivadas parciales de  $x$  como

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r_t a_t e^{\int_0^t a_s ds} = a_t x_t \quad \frac{\partial x}{\partial r} = e^{\int_0^t a_s ds} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$$

Ahora sustituyendo en (11) obtenemos

$$\begin{aligned} dx_t &= \left( a_t x_t + (\theta_t - a_t r_t) e^{\int_0^t a_s ds} \right) dt + \sigma_t e^{\int_0^t a_s ds} dW_t \\ &= \theta_t e^{\int_0^t a_s ds} dt + \sigma_t e^{\int_0^t a_s ds} dW_t \end{aligned} \quad (12)$$

Si definimos  $b_t = e^{-\int_0^t a_s ds}$ ,  $g_t = \frac{\theta_t}{b_t}$ ,  $f_t = \frac{\sigma_t}{b_t}$  y sustituimos en (12) llegamos a que

$$dx_t = g_t dt + f_t dW_t$$

e integrando la ecuación anterior entre 0 y  $t$  tenemos que

$$x_t = x_0 + \int_0^t g_s ds + \int_0^t f_s dW_s$$

Como  $x_t = \frac{r_t}{b_t}$  podemos obtener la expresión de  $r_t$  como

$$r_t = \mu_t + b_t \int_0^t f_s dW_s \quad (13)$$

con  $\mu_t = r_0 b_t + b_t \int_0^t g_s ds$ . Ahora si integramos con respecto a  $t$  entre  $T$  y  $U$  la ecuación (13) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_T^U r_t dt &= \int_T^U \mu_t dt + \int_T^U b_t \int_0^t f_s dW_s dt \\
&= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U b_t \int_0^t f_s dW_s dt - \int_0^T b_t \int_0^t f_s dW_s dt \\
&= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U f_s \int_s^U b_t dt dW_s - \int_0^T f_s \int_s^T b_t dt dW_s \quad (14)
\end{aligned}$$

Si definimos  $\beta_t = \int_0^t b_s ds$  y lo aplicamos en (14) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_T^U r_t dt &= \int_T^U \mu_t dt + \int_0^U f_s (\beta_U - \beta_s) dW_s - \int_0^T f_s (\beta_t - \beta_s) dW_s \\
&= \int_T^U \mu_t dt + (\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s + \int_T^U f_s (\beta_U - \beta_s) dW_s
\end{aligned}$$

Una vez obtenida esta información podemos calcular el precio de un bono cupón cero como  $B(0, U) = E^{\mathbb{P}}[e^{-\int_0^U r_s ds} | F_0]$ , asumiendo la medida cuenta corriente  $\mathbb{P}$ . De esta manera tenemos

$$B(0, U) = E^{\mathbb{P}} \left[ \exp \left\{ - \int_0^U \mu_t dt - \int_0^U f_s (\beta_U - \beta_s) dW_s \right\} \right]$$

Si  $X = - \int_0^U \mu_t dt - \int_0^U f_s (\beta_U - \beta_s) dW_s$ , podemos decir que  $X$  se comporta como una normal de media  $- \int_0^U \mu_t dt$  y varianza  $\int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds$ . De esta manera se tiene

$$B(0, U) = \exp \left\{ - \int_0^U \mu_t dt + \frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds \right\}$$

Como  $B(0, U)$  son los bonos de mercado podemos despejar  $e^{-\int_0^U \mu_t dt}$  de forma que

$$e^{-\int_0^U \mu_t dt} = B(0, U) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds \right\} \quad (15)$$

Ahora vamos a calcular el precio del bono cupón cero que empieza en  $T$  y vence en  $U$ ,  $B(T, U) = E^{\mathbb{P}} \left[ e^{-\int_T^U r_s ds} | F_T \right]$ , como

$$B(T, U) = e^{-(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s} E^{\mathbb{P}} \left[ \exp \left\{ - \int_T^U \mu_t dt - \int_T^U f_s (\beta_U - \beta_s) ds \right\} \right]$$

De esta manera aplicando el mismo álgebra que antes se tiene que

$$B(T, U) = e^{-(\beta_U - \beta_t) \int_0^T f_s dW_s} \exp \left\{ - \int_T^U \mu_t dt + \frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds \right\}$$

Ahora usamos (15) para calcular  $e^{-\int_T^U \mu_t dt}$ ,

$$\begin{aligned} e^{-\int_T^U \mu_t dt} &= \frac{B(0, U) e^{-\frac{1}{2} \int_0^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds}}{B(0, T) e^{-\frac{1}{2} \int_0^T f_s^2 (\beta_t - \beta_s)^2 ds}} \\ &= \frac{B(0, U)}{B(0, T)} e^{-\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds - (\beta_U - \beta_t) \int_0^T \left( \frac{\beta_U - \beta_t}{2} - \beta_s \right) f_s^2 ds} \end{aligned}$$

Como acabamos de calcular el valor de  $e^{-\int_T^U \mu_t dt}$  tenemos también el valor de los bonos  $B(T, U)$  y de los factores de descuento estocásticos  $e^{-\int_T^U r_s ds}$ .

$$\begin{aligned} e^{-\int_T^U r_s ds} &= \frac{B(0, U)}{B(0, T)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_T^U f_s^2 (\beta_U - \beta_s)^2 ds \right\} \\ &\quad \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \int_0^T \left( \frac{\beta_U + \beta_t}{2} - \beta_s \right) f_s^2 ds \right\} \\ &\quad \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s - \int_T^U (\beta_U - \beta_s) f_s dW_s \right\} \end{aligned}$$

$$B(T, U) = \frac{B(0, U)}{B(0, T)} \exp \left\{ -(\beta_U - \beta_T) \left( \int_0^T f_s dW_s + \int_0^T \left( \frac{\beta_U + \beta_T}{2} - \beta_s \right) f_s^2 ds \right) \right\}$$

## 9. Anexo II: Bonos Hull & White bajo medida terminal

En este anexo vamos a obtener la fórmula de los bonos HW bajo la medida terminal.

Bajo la medida terminal  $B(T, T_n)$  donde  $T_n$  es el vencimiento del producto, tenemos que bajo la teoría de valoración el bono  $B(T, U)$  viene dado por:

$$B(T, U) = A(T, U)e^{-(\beta_U - \beta_T) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{T}_n}} \quad (16)$$

Para calcular el valor de  $A(T, U)$  definimos las siguientes ecuaciones imponiendo libre arbitraje:

$$B(0, T) = B(0, T_n)E^{\mathbb{T}_n} \left[ \frac{B(T, T)}{B(T, T_n)} \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

$$B(0, U) = B(0, T_n)E^{\mathbb{T}_n} \left[ \frac{B(T, U)}{B(T, T_n)} \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

Por lo tanto sustituyendo (16) en las dos ecuaciones anteriores tenemos que:

$$B(0, T) = B(0, T_n)E^{\mathbb{T}_n} \left[ \frac{1}{A(T, T_n)} e^{-(\beta_T - \beta_{T_n}) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{T}_n}} \right] \quad (17)$$

$$B(0, U) = B(0, T_n)E^{\mathbb{T}_n} \left[ \frac{A(T, U)e^{-(\beta_T - \beta_U) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{T}_n}}}{A(T, T_n)e^{-(\beta_T - \beta_{T_n}) \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{T}_n}}} \right] \quad (18)$$

Si aplicamos que  $E[e^X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$  cuando  $X = N(\mu, \sigma)$  y despejando  $A(T, T_n)$  en (17) se tiene que:

$$A(T, T_n) = \frac{B(0, T_n)}{B(0, T)} e^{\frac{(\beta_T - \beta_{T_n})^2}{2} \int_0^T f_s^2 ds}$$

Entonces despejando  $A(T, U)$  en (18) llegamos a que

$$A(T, U) = \frac{B(0, U)}{B(0, T)} e^{-(\beta_U - \beta_T) \left[ \left( \frac{\beta_T + \beta_U}{2} - \beta_{T_n} \right) \int_0^T f_s^2 ds \right]}$$

Y ya podemos calcular el bono HW  $B(T, U)$  bajo la medida terminal:

$$B(T, U) = \frac{B(0, U)}{B(0, T)} e^{-(\beta_U - \beta_T) \left[ \left( \frac{\beta_T + \beta_U}{2} - \beta_{T_n} \right) \int_0^T f_s^2 ds + \int_0^T f_s dW_s^{\mathbb{T}_n} \right]}$$

## 10. Anexo III: Valoración de Swaption con Black Shifted

En este apartado vamos a explicar cómo se calcula el precio del Swaption en el entorno Black con Shifted Lognormal.

Notar que para la valoración del Swaption vamos a tomar como numerario la anualidad,  $A$ , que paga 1 por año repartido en las fechas desde  $t_1$  hasta  $t_n$  cuyo valor en tiempo  $t$  viene dado por:

$$A(t) = \sum_{j=1}^n B^d(t, t_j)(t_j - t_{j-1})$$

De esta manera podemos afirmar que el tipo Swap desplazado en  $t$ ,  $Swap(t) - \Delta$ , es martingala bajo la medida anualidad,  $Q^{A(t)}$ . Además notemos que  $Swap(t) - \delta$  sigue una evolución lognormal:

$$dSwap(t) = (Swap(t) - \Delta)\sigma dW_t$$

por lo tanto la fórmula de valoración resulta:

$$Swaption(t) = A(t)[(Swap(t) - \Delta)\Phi(d_+) - (K - \Delta)\Phi(d_-)]$$

donde

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{Swap(t) - \Delta}{K - \Delta}\right)}{\sigma\sqrt{t_n - t}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t_n - t}$$

EONIA		EURIBOR1M		EURIBOR3M		EURIBOR6M		EURIBOR12M	
30/06/2016	1,000000	30/06/2016	1,000000	30/06/2016	1,000000	30/06/2016	1,000000	30/06/2016	1,000000
01/07/2016	1,000009	01/07/2016	1,000010	01/07/2016	1,000008	01/07/2016	1,000005	01/07/2016	1,000004
11/07/2016	1,000102	11/07/2016	1,000111	11/07/2016	1,000088	11/07/2016	1,000053	11/07/2016	1,000040
18/07/2016	1,000167	18/07/2016	1,000182	18/07/2016	1,000144	18/07/2016	1,000086	18/07/2016	1,000065
04/08/2016	1,000328	04/08/2016	1,000354	04/08/2016	1,000280	04/08/2016	1,000168	04/08/2016	1,000126
04/10/2016	1,000950	04/10/2016	1,000997	04/10/2016	1,000763	04/10/2016	1,000468	04/10/2016	1,000309
04/01/2017	1,002024	04/01/2017	1,002079	04/01/2017	1,001580	04/01/2017	1,000935	04/01/2017	1,000492
04/04/2017	1,003191	04/04/2017	1,003255	04/04/2017	1,002447	04/04/2017	1,001463	04/04/2017	1,000565
04/07/2017	1,004437	04/07/2017	1,004510	04/07/2017	1,003353	04/07/2017	1,002028	04/07/2017	1,000532
04/10/2017	1,005738	04/10/2017	1,005770	04/10/2017	1,004302	04/10/2017	1,002593	04/10/2017	1,000741
04/01/2018	1,007074	04/01/2018	1,007085	04/01/2018	1,005248	04/01/2018	1,003182	04/01/2018	1,000908
04/04/2018	1,008413	04/04/2018	1,008423	04/04/2018	1,006201	04/04/2018	1,003749	04/04/2018	1,001077
04/07/2018	1,009778	04/07/2018	1,009830	04/07/2018	1,007193	04/07/2018	1,004335	04/07/2018	1,001255
04/10/2019	1,015025	04/10/2019	1,015097	04/10/2019	1,010809	04/10/2019	1,006260	04/10/2019	1,001487
06/07/2020	1,019205	06/07/2020	1,019218	06/07/2020	1,013173	06/07/2020	1,006795	06/07/2020	1,000349
05/07/2021	1,021134	05/07/2021	1,020991	05/07/2021	1,013286	05/07/2021	1,005133	05/07/2021	0,997110
04/07/2022	1,020547	04/07/2022	1,020322	04/07/2022	1,011070	04/07/2022	1,001299	04/07/2022	0,991850
04/07/2023	1,016833	04/07/2023	1,016531	04/07/2023	1,005898	04/07/2023	0,994888	04/07/2023	0,984300
04/07/2024	1,010579	04/07/2024	1,010192	04/07/2024	0,998253	04/07/2024	0,986300	04/07/2024	0,974874
04/07/2025	1,002073	04/07/2025	1,001599	04/07/2025	0,988480	04/07/2025	0,975893	04/07/2025	0,963807
06/07/2026	0,992134	06/07/2026	0,991656	06/07/2026	0,977385	06/07/2026	0,964399	06/07/2026	0,951913
04/07/2028	0,969563	04/07/2028	0,968825	04/07/2028	0,952731	04/07/2028	0,939432	04/07/2028	0,926699
04/07/2031	0,934734	04/07/2031	0,934082	04/07/2031	0,915891	04/07/2031	0,902621	04/07/2031	0,889857
04/07/2036	0,886908	04/07/2036	0,885720	04/07/2036	0,865659	04/07/2036	0,852841	04/07/2036	0,839614

Figura 19: Pestaña Curvas de la herramienta de valoración.

## 11. Anexo IV: Herramienta de valoración

En este anexo se muestra la herramienta de valoración montada para el estudio de la reversión a la media en los swaptions bermuda. La herramienta consiste en una interfaz en Excel con el motor de cálculo en Matlab.

La herramienta consta de tres pestañas con inputs de mercado y una cuarta con los datos del swaption bermuda. A continuación vamos a describir las pestañas que conforman los inputs de mercado:

- Curvas.** En esta pestaña se introducen las curvas interbancarias, que en nuestro caso son las del Euro. Los datos de las curvas se introducen como factores de descuento, es decir, la primera columna de cada curva está formada por fechas y la segunda columna esta formada por factores de descuento en las fecha. Podemos ver esta pestaña en la figura 19 y las curvas usadas en 20.
- Volatilidades Black.** En esta pestaña están las diferentes superficies de volatilidades swaption a los distintos tenor (vencimiento del swap subyacente). Cada superficie se muestra en una matriz donde el tenor es constante, las filas son a strike constante y las columnas a vencimiento del swaption también constantes. Podemos ver el ejemplo de esta pestaña con una superficie con

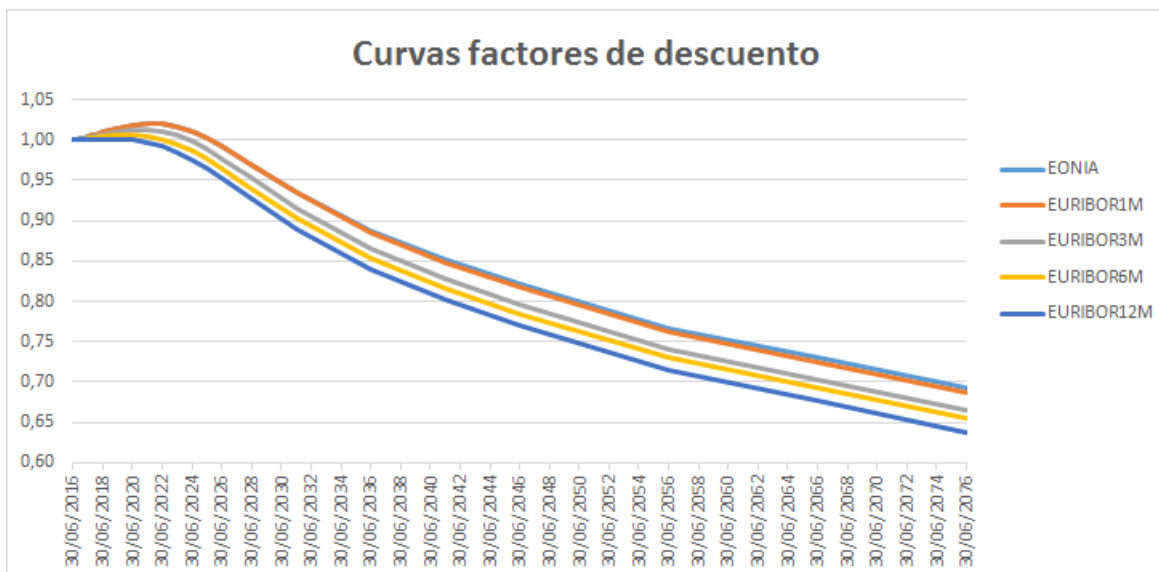


Figura 20: Curvas de la herramienta de valoración.

tenor 5y en la figura 21 y la superficie graficada en 22

- Volatilidades HW.** En esta pestaña están las volatilidades HW. Estas volatilidades se introducen poniendo en la primera columna el tiempo a vencimiento y en la segunda la volatilidad. Además, sólo se podrán utilizar, si hemos introducido una sola reversión a la media en la pestaña **Swaption Bermuda**. Estas volatilidades se usarán si el usuario no quiere calibrar las volatilidades HW, y quiere usar las introducidas por él.

A continuación vamos a describir la pestaña **Swaption Bermuda**. En esta pestaña el usuario introducirá la fecha de valoración, el *shifted* de la distribución lognormal, la elección de calibrar la reversión, un vector de reversiones en caso de no calibrar la misma, la elección de calibrar la volatilidad (pudiendo elegir calibrar a swaptions *at the money*), los datos del swap y del swaption bermuda. Podemos ver un ejemplo de esto en la figura 23.

Una vez introducidos todos los inputs, el usuario pulsará el botón *Valoración* y la herramienta obtendrá los resultados que mostrará en la misma pestaña **Swaption Bermuda**. Los resultados obtenidos son el precio del swap, del swaption, del swaption bermuda y las volatilidades HW para cada una de las reversiones a la media obtenidas. Se puede ver un ejemplo de esto en la figura 24.

20y	30/07/2016	30/09/2016	30/12/2016	30/03/2017	30/06/2017	30/12/2017	30/06/2018	30/06/2019	30/06/2020	30/06/2021	30/06/2023	30/06/2026	30/06/2031
-0.4	45,36	42,57	41,85	41,55	41,25	40,70	40,15	40,15	39,99	39,30	37,68	36,55	35,18
-0.2	39,50	38,15	37,96	38,07	38,18	37,80	37,43	37,50	37,39	36,76	35,21	34,12	32,74
0	35,59	35,05	35,18	35,53	35,88	35,59	35,30	35,39	35,31	34,72	33,23	32,17	30,79
0.2	33,78	33,15	33,37	33,79	34,20	33,91	33,62	33,69	33,60	33,04	31,61	30,57	29,18
0.4	33,69	32,26	32,35	32,68	33,01	32,65	32,29	32,30	32,19	31,64	30,25	29,24	27,84
0.6	34,57	32,10	31,92	32,06	32,20	31,71	31,23	31,16	31,01	30,45	29,09	28,10	26,68
0.8	35,87	32,38	31,89	31,78	31,68	31,03	30,39	30,22	30,01	29,44	28,11	27,13	25,69
1	37,31	32,91	32,12	31,74	31,37	30,55	29,73	29,43	29,16	28,56	27,26	26,29	24,82
1.2	38,76	33,56	32,48	31,85	31,21	30,21	29,21	28,79	28,43	27,80	26,52	25,56	24,06
1.4	40,16	34,27	32,94	32,05	31,17	29,99	28,81	28,24	27,81	27,14	25,87	24,92	23,39
1.6	41,50	34,99	33,43	32,32	31,21	29,85	28,50	27,79	27,28	26,56	25,30	24,35	22,79
1.8	42,76	35,70	33,93	32,62	31,30	29,77	28,26	27,42	26,82	26,06	24,80	23,85	22,25
2	43,95	36,40	34,44	32,93	31,43	29,75	28,07	27,11	26,42	25,61	24,36	23,41	21,77
2.2	45,06	37,07	34,95	33,26	31,58	29,76	27,94	26,85	26,07	25,21	23,97	23,01	21,34
2.4	46,11	37,71	35,44	33,59	31,75	29,79	27,84	26,63	25,77	24,86	23,62	22,66	20,95
2.6	47,09	38,33	35,92	33,92	31,93	29,85	27,77	26,45	25,51	24,55	23,31	22,34	20,60
2.8	48,02	38,92	36,38	34,25	32,12	29,92	27,72	26,29	25,28	24,28	23,04	22,06	20,28
3	48,89	39,48	36,82	34,57	32,31	30,00	27,70	26,17	25,08	24,03	22,79	21,80	19,99
3.2	49,71	40,01	37,24	34,87	32,51	30,09	27,69	26,06	24,90	23,81	22,57	21,57	19,72
3.4	50,49	40,52	37,65	35,18	32,70	30,19	27,69	25,98	24,75	23,61	22,37	21,36	19,48
3.6	51,22	41,01	38,05	35,47	32,89	30,29	27,70	25,90	24,61	23,43	22,19	21,18	19,26
3.8	51,92	41,48	38,42	35,75	33,07	30,39	27,72	25,85	24,49	23,27	22,02	21,01	19,06
4	52,58	41,92	38,79	36,02	33,25	30,50	27,75	25,80	24,39	23,12	21,87	20,85	18,87
4.2	53,21	42,35	39,13	36,29	33,43	30,60	27,78	25,76	24,29	22,99	21,74	20,71	18,70
4.4	53,81	42,75	39,47	36,54	33,61	30,71	27,82	25,73	24,21	22,87	21,62	20,58	18,54
4.6	54,38	43,14	39,79	36,79	33,78	30,81	27,85	25,71	24,14	22,77	21,51	20,46	18,40

Figura 21: Pestaña Volatilidades Black.

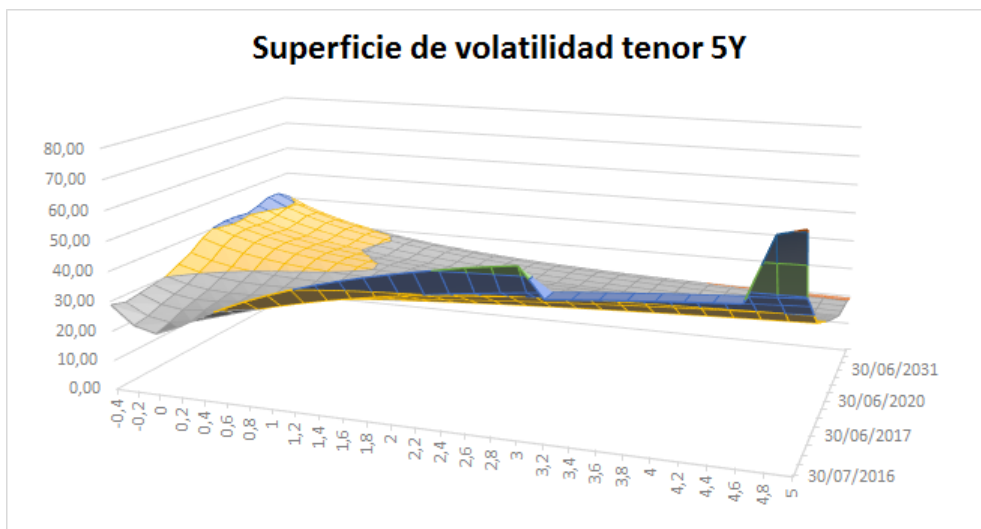


Figura 22: Superficie de volatilidad con tenor 5y.





Por último vamos a describir el proceso de cálculo de la herramienta:

- Una vez que se reciben los datos desde excel estos se tratan convenientemente para poder realizar todos los cálculos.
- Se realiza el calibrado de la reversión a la media, descrito anteriormente. En caso de no ser necesario se pasa al siguiente paso.
- Se realiza el calibrado de la volatilidad HW, descrito anteriormente. En caso de no ser necesario se pasa al siguiente paso.
- Se implementa el árbol multinomial para la valoración del swaption bermuda, descrito en detalle en el capítulo anterior.

## 12. Anexo V: Ejemplo de volatilidades calibradas

En este anexo vamos a ver los resultados obtenidos en la calibración de la volatilidad para un swaption bermuda con las siguientes especificaciones:

- Fecha valor: 30/06/2016.
- Fecha inicio Swap: 30/06/2017.
- Fecha vencimiento Swap: 30/06/2028.
- Tipo fijo: 0,5 %.
- Curva fijación: Euribor6M.
- Curva descuento: Eonia.
- Strike Swaption: 0,5 %.
- Tipo opción: Receiver.
- Nominal: 10 mil euros.

Hemos introducido en nuestra herramienta de valoración, descrita con detalle en el Anexo IV, un vector de reversiones a la media desde  $-5\%$  a  $5\%$  con un incremento de  $0,2\%$ <sup>3</sup>.

Podemos observar los resultados obtenidos en los cuadros 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

---

<sup>3</sup>No se ha tenido en cuenta el valor del  $0\%$  en las reversiones porque obtendríamos una indeterminación del tipo  $1/0$ .

Tiempo/Reversión	-5,00 %	-4,80 %	-4,60 %	-4,40 %	-4,20 %	-4,00 %	-3,80 %
0,00	0,62 %	0,63 %	0,64 %	0,65 %	0,66 %	0,67 %	0,68 %
1,00	0,62 %	0,63 %	0,64 %	0,65 %	0,66 %	0,67 %	0,68 %
2,00	0,73 %	0,74 %	0,75 %	0,76 %	0,77 %	0,78 %	0,79 %
3,00	0,83 %	0,85 %	0,86 %	0,88 %	0,89 %	0,91 %	0,92 %
4,00	0,90 %	0,92 %	0,93 %	0,95 %	0,97 %	0,98 %	1,00 %
5,00	0,91 %	0,93 %	0,95 %	0,97 %	0,99 %	1,01 %	1,03 %
6,00	0,91 %	0,93 %	0,95 %	0,97 %	0,99 %	1,01 %	1,03 %
7,00	0,85 %	0,87 %	0,89 %	0,92 %	0,94 %	0,96 %	0,98 %
8,00	0,80 %	0,82 %	0,84 %	0,87 %	0,89 %	0,91 %	0,94 %
9,00	0,67 %	0,69 %	0,72 %	0,74 %	0,76 %	0,79 %	0,81 %
10,00	0,60 %	0,62 %	0,64 %	0,67 %	0,69 %	0,72 %	0,74 %
11,00	0,49 %	0,51 %	0,54 %	0,56 %	0,59 %	0,61 %	0,64 %

Cuadro 5: Volatilidades HW entre  $-5\%$  y  $-3,8\%$ .

Tiempo/Reversión	-3,60 %	-3,40 %	-3,20 %	-3,00 %	-2,80 %	-2,60 %	-2,40 %
0,00	0,69 %	0,70 %	0,71 %	0,72 %	0,73 %	0,74 %	0,75 %
1,00	0,69 %	0,70 %	0,71 %	0,72 %	0,73 %	0,74 %	0,75 %
2,00	0,81 %	0,82 %	0,83 %	0,84 %	0,86 %	0,87 %	0,88 %
3,00	0,94 %	0,95 %	0,97 %	0,99 %	1,00 %	1,02 %	1,04 %
4,00	1,02 %	1,04 %	1,06 %	1,08 %	1,10 %	1,12 %	1,14 %
5,00	1,05 %	1,07 %	1,09 %	1,11 %	1,13 %	1,16 %	1,18 %
6,00	1,06 %	1,08 %	1,10 %	1,13 %	1,15 %	1,18 %	1,20 %
7,00	1,01 %	1,03 %	1,06 %	1,08 %	1,11 %	1,14 %	1,16 %
8,00	0,96 %	0,99 %	1,02 %	1,04 %	1,07 %	1,10 %	1,13 %
9,00	0,84 %	0,86 %	0,89 %	0,92 %	0,95 %	0,98 %	1,01 %
10,00	0,77 %	0,80 %	0,82 %	0,85 %	0,88 %	0,91 %	0,94 %
11,00	0,67 %	0,70 %	0,73 %	0,76 %	0,79 %	0,82 %	0,85 %

Cuadro 6: Volatilidades HW entre  $-3,6\%$  y  $-2,4\%$ .

Tiempo/Reversión	-2,20 %	-2,00 %	-1,80 %	-1,60 %	-1,40 %	-1,20 %	-1,00 %
0,00	0,76 %	0,77 %	0,78 %	0,79 %	0,80 %	0,81 %	0,82 %
1,00	0,76 %	0,77 %	0,78 %	0,79 %	0,80 %	0,81 %	0,82 %
2,00	0,90 %	0,91 %	0,92 %	0,94 %	0,95 %	0,97 %	0,98 %
3,00	1,05 %	1,07 %	1,09 %	1,11 %	1,12 %	1,14 %	1,16 %
4,00	1,16 %	1,18 %	1,20 %	1,22 %	1,24 %	1,27 %	1,29 %
5,00	1,20 %	1,23 %	1,25 %	1,27 %	1,30 %	1,33 %	1,35 %
6,00	1,23 %	1,26 %	1,28 %	1,31 %	1,34 %	1,37 %	1,40 %
7,00	1,19 %	1,22 %	1,25 %	1,28 %	1,31 %	1,34 %	1,37 %
8,00	1,16 %	1,19 %	1,22 %	1,25 %	1,28 %	1,32 %	1,35 %
9,00	1,04 %	1,07 %	1,10 %	1,13 %	1,17 %	1,20 %	1,23 %
10,00	0,98 %	1,01 %	1,04 %	1,08 %	1,11 %	1,15 %	1,18 %
11,00	0,88 %	0,92 %	0,95 %	0,99 %	1,02 %	1,06 %	1,10 %

Cuadro 7: Volatilidades HW entre  $-2,2\%$  y  $-1\%$ .

Tiempo/Reversión	-0,80 %	-0,60 %	-0,40 %	-0,20 %	0,20 %	0,20 %	0,40 %
0,00	0,83 %	0,84 %	0,85 %	0,86 %	0,89 %	0,89 %	0,90 %
1,00	0,83 %	0,84 %	0,85 %	0,86 %	0,89 %	0,89 %	0,90 %
2,00	1,00 %	1,01 %	1,03 %	1,04 %	1,07 %	1,07 %	1,09 %
3,00	1,18 %	1,20 %	1,22 %	1,24 %	1,28 %	1,28 %	1,30 %
4,00	1,31 %	1,34 %	1,36 %	1,38 %	1,43 %	1,43 %	1,46 %
5,00	1,38 %	1,41 %	1,43 %	1,46 %	1,52 %	1,52 %	1,55 %
6,00	1,43 %	1,46 %	1,49 %	1,52 %	1,59 %	1,59 %	1,62 %
7,00	1,41 %	1,44 %	1,47 %	1,51 %	1,58 %	1,58 %	1,62 %
8,00	1,39 %	1,42 %	1,46 %	1,50 %	1,58 %	1,58 %	1,62 %
9,00	1,27 %	1,31 %	1,35 %	1,38 %	1,47 %	1,47 %	1,51 %
10,00	1,22 %	1,26 %	1,30 %	1,34 %	1,43 %	1,43 %	1,47 %
11,00	1,14 %	1,18 %	1,22 %	1,26 %	1,35 %	1,35 %	1,40 %

Cuadro 8: Volatilidades HW entre  $-0,8\%$  y  $0,4\%$ .

Tiempo/Reversión	0,60 %	0,80 %	1,00 %	1,20 %	1,40 %	1,60 %	1,80 %
0,00	0,91 %	0,92 %	0,93 %	0,94 %	0,96 %	0,97 %	0,98 %
1,00	0,91 %	0,92 %	0,93 %	0,94 %	0,96 %	0,97 %	0,98 %
2,00	1,10 %	1,12 %	1,14 %	1,15 %	1,17 %	1,19 %	1,20 %
3,00	1,32 %	1,34 %	1,37 %	1,39 %	1,41 %	1,43 %	1,46 %
4,00	1,49 %	1,51 %	1,54 %	1,57 %	1,59 %	1,62 %	1,65 %
5,00	1,58 %	1,61 %	1,64 %	1,67 %	1,71 %	1,74 %	1,77 %
6,00	1,66 %	1,69 %	1,73 %	1,76 %	1,80 %	1,84 %	1,88 %
7,00	1,65 %	1,69 %	1,73 %	1,77 %	1,81 %	1,86 %	1,90 %
8,00	1,66 %	1,70 %	1,74 %	1,79 %	1,83 %	1,88 %	1,92 %
9,00	1,55 %	1,59 %	1,64 %	1,69 %	1,73 %	1,78 %	1,83 %
10,00	1,52 %	1,56 %	1,61 %	1,66 %	1,71 %	1,76 %	1,82 %
11,00	1,45 %	1,49 %	1,54 %	1,60 %	1,65 %	1,70 %	1,76 %

Cuadro 9: Volatilidades HW entre 0,6 % y 1,8 %.

Tiempo/Reversión	2,00 %	2,20 %	2,40 %	2,60 %	2,80 %	3,00 %	3,20 %
0,00	0,99 %	1,01 %	1,02 %	1,03 %	1,04 %	1,06 %	1,07 %
1,00	0,99 %	1,01 %	1,02 %	1,03 %	1,04 %	1,06 %	1,07 %
2,00	1,22 %	1,24 %	1,26 %	1,27 %	1,29 %	1,31 %	1,33 %
3,00	1,48 %	1,50 %	1,53 %	1,55 %	1,58 %	1,60 %	1,63 %
4,00	1,68 %	1,71 %	1,74 %	1,77 %	1,80 %	1,83 %	1,87 %
5,00	1,81 %	1,84 %	1,88 %	1,92 %	1,95 %	1,99 %	2,03 %
6,00	1,92 %	1,96 %	2,00 %	2,04 %	2,09 %	2,13 %	2,18 %
7,00	1,94 %	1,99 %	2,03 %	2,08 %	2,13 %	2,18 %	2,23 %
8,00	1,97 %	2,02 %	2,07 %	2,12 %	2,18 %	2,23 %	2,29 %
9,00	1,88 %	1,93 %	1,99 %	2,04 %	2,10 %	2,16 %	2,22 %
10,00	1,87 %	1,93 %	1,98 %	2,04 %	2,10 %	2,17 %	2,23 %
11,00	1,82 %	1,88 %	1,94 %	2,00 %	2,06 %	2,13 %	2,19 %

Cuadro 10: Volatilidades HW entre 2 % y 3,2 %.

Tiempo/Reversión	3,40 %	3,60 %	3,80 %	4,00 %	4,20 %	4,40 %	4,60 %
0,00	1,08 %	1,10 %	1,11 %	1,12 %	1,14 %	1,15 %	1,16 %
1,00	1,08 %	1,10 %	1,11 %	1,12 %	1,14 %	1,15 %	1,16 %
2,00	1,35 %	1,37 %	1,39 %	1,41 %	1,43 %	1,45 %	1,47 %
3,00	1,65 %	1,68 %	1,70 %	1,73 %	1,76 %	1,79 %	1,81 %
4,00	1,90 %	1,93 %	1,97 %	2,00 %	2,04 %	2,07 %	2,11 %
5,00	2,07 %	2,11 %	2,15 %	2,19 %	2,23 %	2,28 %	2,32 %
6,00	2,22 %	2,27 %	2,31 %	2,36 %	2,41 %	2,46 %	2,51 %
7,00	2,28 %	2,33 %	2,39 %	2,44 %	2,50 %	2,55 %	2,61 %
8,00	2,34 %	2,40 %	2,46 %	2,52 %	2,58 %	2,65 %	2,71 %
9,00	2,28 %	2,34 %	2,40 %	2,47 %	2,53 %	2,60 %	2,67 %
10,00	2,29 %	2,36 %	2,43 %	2,50 %	2,57 %	2,65 %	2,72 %
11,00	2,26 %	2,33 %	2,41 %	2,48 %	2,56 %	2,64 %	2,72 %

Cuadro 11: Volatilidades HW entre 3,4 % y 4,6 %.

Tiempo/Reversión	4,80 %	5,00 %
0,00	1,18 %	1,19 %
1,00	1,18 %	1,19 %
2,00	1,49 %	1,51 %
3,00	1,84 %	1,87 %
4,00	2,14 %	2,18 %
5,00	2,36 %	2,41 %
6,00	2,57 %	2,62 %
7,00	2,67 %	2,73 %
8,00	2,78 %	2,85 %
9,00	2,74 %	2,82 %
10,00	2,80 %	2,88 %
11,00	2,80 %	2,89 %

Cuadro 12: Volatilidades HW entre 4,8 % y 5 %.

## Referencias

- [1] D. BRIGO y F. MERCURIO, *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer Finance, 2007.
- [2] L. ANDERSEN y V. PITERBARG, *Interest Rate Modelling Volume II: Term Structure Models*”, Atlantic Financial Press, 2010.
- [3] M. HENRARD, *Interest Rate Modelling in the Multi-curve Framework*, Palgrave Macmillan, 2014.
- [4] S. GURRIERI, M. NAKABAYASHI y T. WONG, *Calibration Methods of Hull-White Model*, SSRN Electronic Journal, 2009.
- [5] S. SCHLENKRICH, *Evaluating Sensitivities of Bermudan Swaptions*, Christ Church College, 2011.
- [6] M. MORENO, *Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: valoración de activos derivados y comportamiento*, Revista Española de financiación y contabilidad, Vol XXIX nº104, 2000.
- [7] J. HULL y A. WHITE, *Pricing interest-rate derivative securities*, The Review of Financial Studies, Vol 3, nº4 pp. 573-592, 1990.
- [8] F. JAMSHIDIAN, *An exact bond option formula*, The Journal of Finance, 44(1), 205-209, 1989.
- [9] F. LONGSTAFF y E. S. SCHWARTZ, *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, 2001.
- [10] F. BLACK, *The pricing of commodity contracts*, Journal of Financial Economics, 3, 167-179, 1976.
- [11] J. C. COX, S. A. ROSS y M. RUBINSTEIN, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics 7, 1979.
- [12] J. C. COX, S. A. ROSS y M. RUBINSTEIN, *On prudent valuation under Article 105(14) of Regulation (EU)*, 575/2013.



- [13] *New volatility conventions in negative interest environment*, D-fine, 2012.  
[http://www.d-fine.com/fileadmin/d-fine/hochgeladen/Fachartikel/  
WhitePaper\\_Vols\\_NegIR\\_V1\\_1\\_en.pdf](http://www.d-fine.com/fileadmin/d-fine/hochgeladen/Fachartikel/WhitePaper_Vols_NegIR_V1_1_en.pdf)