

# **MODELIZACIÓN DE SEGUNDOS MOMENTOS EN EL ESCENARIO ACTUAL DE DIVISAS: TRADICIONALES-BITCOIN**

**David Maldonado Sánchez**

Trabajo de investigación 006/016

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutor: Dr. Miguel Ángel Martínez Sedano

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

[www.finanzascuantitativas.com](http://www.finanzascuantitativas.com)

**Modelización de segundos momentos  
en el escenario actual de divisas: Tradicionales-Bitcoin**

**David Maldonado Sánchez**

**Trabajo de investigación**

**dirigido por Miguel Ángel Martínez Sedano**

**Máster Universitario en Banca y Finanzas Cuantitativas**

**Universidad Complutense de Madrid  
Universidad del País Vasco  
Universidad de Valencia  
Universidad de Castilla-La Mancha**

**Madrid  
2016**

**Modelización de segundos momentos  
en el escenario actual de divisas: Tradicionales-Bitcoin**

**David Maldonado Sánchez**

*Resumen*

## Índice.

	Pág.
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Panorámica del Bitcoin</b>	<b>3</b>
<b>3. Material.</b>	<b>4</b>
<b>4. Metodología.</b>	<b>8</b>
<b>5. Resultados.</b>	<b>12</b>
<b>6. Conclusiones y discusión.</b>	<b>22</b>
<b>7. Bibliografía.</b>	<b>25</b>
<b>Anexo: Resultados de las modelizaciones.</b>	

## 1. Introducción.

Resulta innegable afirmar que la época presente sea el máximo exponente histórico de la era tecnológica y de la información. Los avances informáticos han revolucionado de forma íntegra prácticamente cualquier entorno. Claro exponente es el campo financiero, donde el progreso digital ha posibilitado la creación de cada uno de los elementos que a día de hoy lo forman, como la producción de toda clase de derivados con los cuales satisfacer casi cualquier estructura de pagos deseada. Con el paso de los años los investigadores han ido centrando su dedicación al estudio de cada uno de esos nuevos activos, este trabajo busca hacer lo propio con el Bitcoin.

El Bitcoin (BTC), la cryptomoneda por excelencia en la actualidad, nació en marzo de 2009, pasando parcialmente desapercibida por la comunidad financiera prácticamente hasta finales de 2012, donde su tipo de cambio ya alcanzaba los 10 dólares por unidad de Bitcoin. Desde entonces, su elevada volatilidad, alcanzando picos en su precio de  $\pm 300$  BTC/USD en 10 días, ha logrado atraer y cautivar el interés mundial. La modelización de su comportamiento es el principal objetivo de esta investigación empírica ya que su correcta determinación resulta básica para realizar, entre otras cosas, predicción o toma de decisiones sobre su incorporación en carteras con tal de mejorar, si resultase, la gestión del riesgo.

Cierto es que el movimiento en el mercado de divisas es uno de los factores de riesgo más a tener en cuenta por cualquier inversor internacional. Es por ello que con el paso de las décadas son varios los estudios que han tratado esta temática sobre las que aquí se denominan monedas tradicionales, aquellas respaldadas por una economía real. El rango de especificaciones empleadas en su modelización resulta muy amplio, desde toda clase de GARCH's univariantes para estimar la volatilidad condicional hasta modelos multivariantes para caracterizar la covarianza. Entre ellos, simétricos o no, los aquí empleados.

A pesar del corto recorrido histórico que tiene el Bitcoin es extensa la bibliografía escrita sobre la cryptomoneda. Gran parte de ella se centra en apartados técnicos como la creación y el uso de software o apartados informativos dónde se tratan aspectos de legalidad, regulación y seguridad. En contraparte, los estudios empíricos son de naturaleza escasa.

Buchholz, Delaney y Warren (2012) publicaron "*Bits and Bets. Information, Price Volatility and Demand for Bitcoin*" donde se analiza la asimetría en la volatilidad en el retorno

del precio del Bitcoin encontrando diferencias significativas pre-post máximo junio de 2011 (17.77 BTC/USD), concluyendo que había explotado la burbuja Bitcoin. Casi tres años más tarde el tipo de cambio llegó a los 1242 dólares por Bitcoin. Bouoiyour y Selmi (2014) analizan económicamente el comportamiento del Bitcoin, bajo variables como las búsquedas en Google, la velocidad de circulación, índices bursátiles y precio de materias primas. Estos autores llegaron a la conclusión que, para el marco temporal del estudio, difieren de la definición de Bitcoin como moneda y lo agrupan más hacia un concepto de activo de inversión especulativa, aunque se muestran cautos frente a qué podría ocurrir en un futuro dadas las características estructurales de la cryptomoneda y la creciente aceptación que estaba teniendo entre usuarios y comercios.

Tomando las conclusiones que extraen Bouoiyour y Selmi sobre la concordancia del comportamiento del precio con un activo especulativo se cree adecuado en este estudio la inclusión de un componente de salto en la especificación del rendimiento con tal de comprobar si su incorporación mejora la estimación y cuantificar su intensidad y probabilidad de ocurrencia. Un componente de salto recurrente y elevado podría confirmar las conclusiones de los autores citados ya que se trata de un elemento común en activos inestables o poco maduros, es decir, muy sensibles frente a cualquier shock. La determinación que se emplea de este componente es la propuesta por Chan y Maheu en "*Conditional Jump Dynamics in Stock Market Returns*" (2002).

Por otro lado, la cautela a la hora de hacer predicción de los autores resultó muy conveniente ya que a partir del año 2015 el spread de volatilidad entre el Bitcoin y las divisas tradicionales se ha reducido debido a un descenso, y relativa estabilización, de la volatilidad del precio del Bitcoin y un ligero aumento en la volatilidad de las divisas tradicionales.

Con este pretexto este estudio nace de la motivación de alcanzar los objetivos de, mediante las diversas especificaciones utilizadas, modelizar el comportamiento de la cryptomoneda Bitcoin y realizar en todo momento el símil con las divisas tradicionales con tal de establecer si el Bitcoin se puede continuar considerando activo puramente especulativo o si éste ha madurado hacia una divisa más a tener en cuenta.

Con tal de contextualizar el proyecto se cree conveniente realizar una panorámica del funcionamiento del Bitcoin, muy escueta ya que la descripción detallada no es la finalidad de esta investigación. Ésta se situará justo a continuación, en la sección 2. El resto del trabajo quedará estructurado de la siguiente manera: Presentación y análisis descriptivo de los datos

en la sección 3, metodología empleada en la sección 4, los resultados se muestran en la sección 5, la sección 6 recoge y discute las conclusiones extraídas y, finalmente, se citan los recursos bibliográficos empleados.

## 2. Panorámica del Bitcoin.

De igual manera que en el mundo físico un país o una comunidad de ellos tiene su propia moneda en circulación, en Internet también es así. En el mundo virtual existen infinidad de monedas digitales. Dentro del subgrupo de las cryptomonedas, denominadas de tal manera por el empleo de técnicas de cifrado, se encuentra como máximo exponente la llamada Bitcoin. Por definición el Bitcoin es dinero: es unidad de cuenta, es decir, es portador de valor y éste se rige por las leyes de oferta y demanda; es medio de intercambio, al igual que Microsoft o Dell, miles son las personas y empresas que lo aceptan como medio de pago por sus bienes o servicios; es depósito de valor, su retención en el tiempo no resta su tasación, aunque sí puede hacerlo su elevada volatilidad de tipo de cambio, la referencia es no ser un producto perecedero.

Probablemente la mayor diferencia apreciable con las monedas tradicionales es que el Bitcoin no está regulado por ningún tipo de organismo, su funcionamiento se basa en las matemáticas. Bitcoin es una moneda creable, aunque no arbitrariamente, cuyo proceso se conoce como *minería*, por su semejanza con la obtención de materias primas. Desde su aparición en 2009 aproximadamente cada 10 minutos un nuevo *bloque* aparece en el sistema. *Minar el bloque* equivale a resolver una ecuación compleja, cuya dificultad se autorregula, mediante un algoritmo *hash* que implica un gran consumo computacional y eléctrico. El primer minero, o la primera *pool* (agrupación de mineros), que consigue resolver el problema matemático recibe una compensación en unidades de Bitcoin. Esta recompensa se ve reducida a la mitad cada 210.000 bloques minados, siendo en la actualidad de 25 BTC por bloque que pasarán a 12.5 BTC por bloque el 10 de julio de 2016. De esta manera el número máximo de Bitcoins en circulación tiene una cota superior de 21 millones, que se alcanzará en el año 2140, prefijando la masa monetaria y evitando así los problemas derivados de las decisiones de políticas monetarias, inflación-deflación provocadas, que sí ejercen los bancos centrales.

La esencia de Bitcoin es su sistema *peer-to-peer*, un gran libro público de contabilidad, llamado *blockchain*, que registra cada una de las transacciones que se efectúan entre dos

partes y las transmite a todos los usuarios de su *software* libre, propio y gratuito, de forma instantánea y sin intermediarios. La información está, a la vez, en millones de ordenadores alrededor del mundo y es leída constantemente creando una red de seguridad perfecta. Son muchas las empresas que se han interesado en ofrecer servicios financieros sobre el mercado Bitcoin, desde simples órdenes de compra/venta hasta la creación de derivados sobre éstos. Clara evidencia de la repercusión que el Bitcoin ha tenido sobre la sociedad financiera es que, en septiembre de 2015, la *Commodity Futures Trading Commission* (CFTC) declaró oficialmente el Bitcoin como una materia prima y, por tanto, en Estados Unidos la regulación de sus futuros es semejante a la del oro, gas o petróleo.

### 3. Material.

Las series financieras utilizadas en este proyecto constan de valores para el intervalo 14/11/2012 a 16/05/2016. Éstas se construyen a partir de los cierres de cotización diarios del mercado de divisas tradicional, datos extraídos de *Datastream* para las 0:00 horas de lunes a viernes, y, con los mismos cierres, para la divisa BTC/USD. Se procede a la elección del Dólar como moneda de referencia debido a que es este tipo de cambio el de mayor recurrencia, aproximadamente recoge el 50% de la compra/venta de Bitcoins. Además, los precios a cierre hacen referencia a la casa *Bitfinex*, la cual abarca casi el 75% del total de intercambios con la moneda estadounidense.

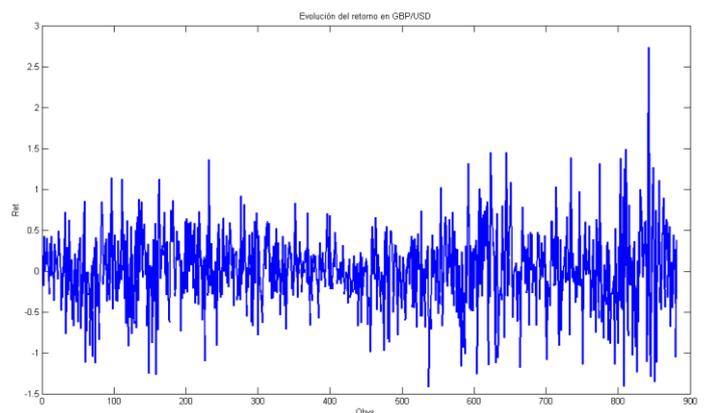
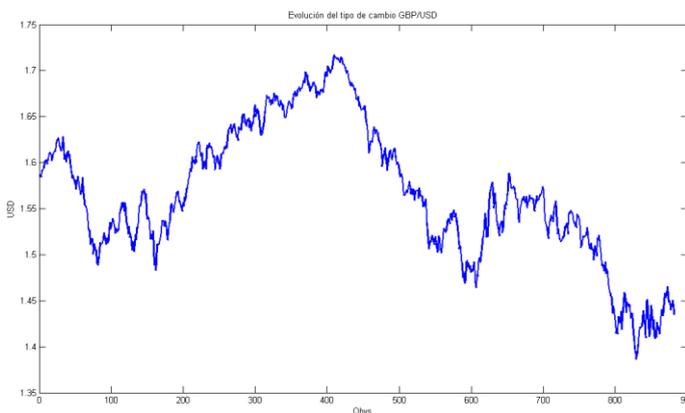
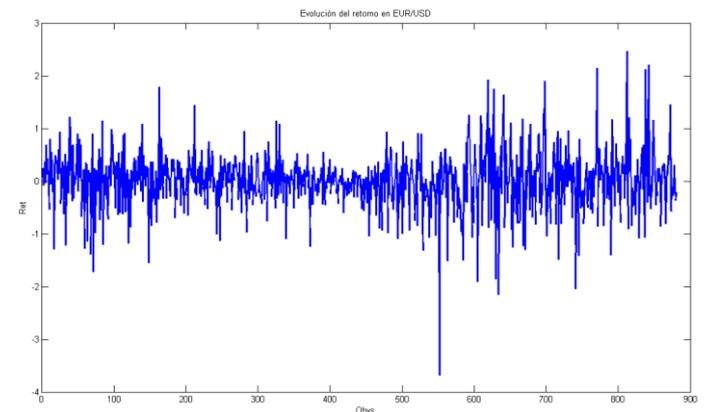
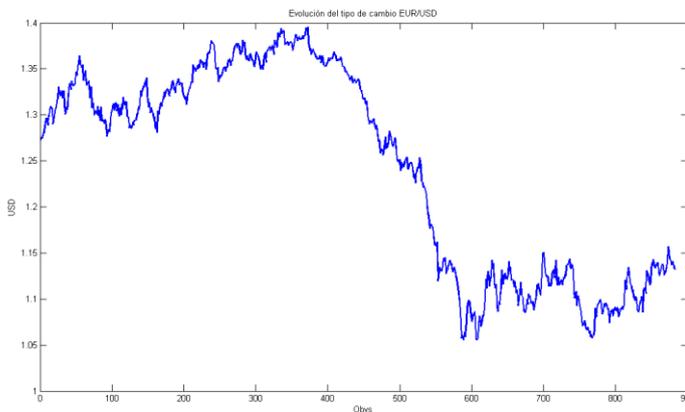
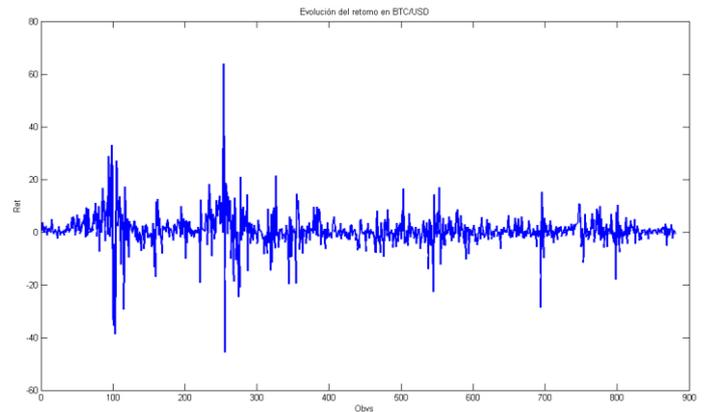
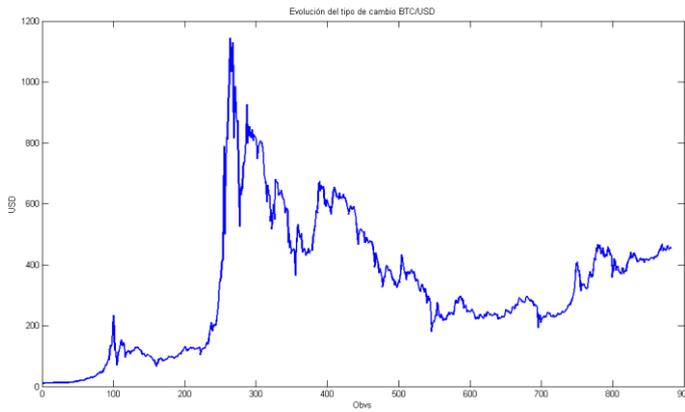


**Figura 1:** Gráfico del precio de mercado histórico en dólares por unidad de Bitcoin. Extraído de <https://blockchain.info>.

Tal y como se aprecia en la Figura 1, la evolución del precio Bitcoin ha pasado por varias etapas. En la primera de ellas, desde su creación hasta finales de 2012, el tipo de cambio de la criptomoneda tuvo un crecimiento paulatino pero constante caracterizado por el desconocimiento y la reducida aparición en los medios. Los problemas de seguridad en los principales *brokers* del mercado crean fuertes desconfianzas e interrumpen en varias ocasiones las esperanzas de consolidación y crecimiento. A finales de 2012 el sistema parece madurar, se crea una revista especializada en la criptomoneda y el portal web *WordPress* anuncia la aceptación de pago mediante Bitcoins con tal de quebrar las restricciones geográficas impuestas por *Paypal* y otras compañías de tarjetas de crédito. Esta noticia provocó un incremento en el BTC/USD del 10% en menos de 10 días y abrió *la caja de Pandora* situando el Bitcoin, por primera vez, en noticiarios económicos. La modelización efectuada en este trabajo se realiza a partir de este evento. Este auge pronto se controló principalmente por tres factores: un error en el *software*, corregido a las pocas horas; la saturación de Mt.Gox, la mayor web del momento de tipo de cambio Bitcoin, debido a una inesperada y masiva demanda de la moneda provocada por el anuncio del rescate en Chipre y los ataques constantes de prensa negativa sobre qué actividades se beneficiaban del sistema Bitcoin. La explosión en el precio BTC no tardó en llegar, de marzo a noviembre de 2013 el tipo de cambio pasó de 100 a más de 1000 BTC/USD. En diciembre de ese mismo año llegó la noticia más influyente de la historia del Bitcoin, el gobierno chino anunció la prohibición de su uso por parte de los bancos y el precio pasó a prácticamente la mitad. Pasadas las grandes fluctuaciones de los primeros meses, la volatilidad en el precio del Bitcoin ha ido poco a poco reduciéndose, acentuando este efecto a partir de la aceptación como medio de pago en el gigante *Microsoft* a finales de 2014. Es a partir de ese instante, y hasta el día de hoy, dónde la criptomoneda vuelve a generar más confianza, que se ve reflejada en su precio.

Se comprueba de esta manera que el precio del Bitcoin se ha mantenido sensible, de más a menos, al transcurso y recepción de noticias. Este hecho da validez al razonamiento de inclusión del componente de salto, detallado en la sección de modelización.

Con tal de realizar la comparativa de comportamiento, las divisas tradicionales escogidas son el euro (EUR en adelante) y la libra esterlina (GBP en adelante). Se ilustran las series de precios junto con sus rendimientos creados para reflejar variación porcentual, es decir, tomados como cien veces la diferencia logarítmica en precios.



**Figura 2:** Gráficos de precios a cierre de mercado en dólares por unidad de BTC, EUR y GBP y sus respectivos retornos. 14/11/2012 – 16/05/2016.

Vista la Figura 2 se establece una relación, que ya resultaba obvia, de comportamiento parejo entre las divisas tradicionales: mismo patrón en la evolución del precio y rango de retornos semejantes, sin *clusters* de volatilidad claramente definidos. Como se anticipaba, el precio del Bitcoin sigue su propia norma tendencial además de una volatilidad relativamente

mayor con claras agrupaciones después de las noticias más influyentes comentadas. Las siguientes tablas recogen los estadísticos descriptivos de cada serie.

	Media	Desviación Estándar	Asimetría	Curtosis	Máximo	Mínimo	Normalidad	Raíz Unitaria
<b>Series en Precios</b>								
<b>EUR</b>	1,2429	0,1118	-0.2994	1.4143	1.3930	1.0480	105.22 (0.00)	-2.08 (0.55)
<b>GBP</b>	1,5659	0,0748	-0.0459	2.4023	1.7169	1.3862	13.39 (0.00)	-1.69 (0.75)
<b>BTC</b>	327,88	218,27	0.7440	3.4470	1147.24	10.95	88.41 (0.00)	-1.93 (0.63)
<b>Series en Retornos</b>								
<b>EUR</b>	-0,0133	0,5545	-0.2320	7.0186	2.4664	-3.6820	600.71 (0.00)	-9.13 (0.00)
<b>GBP</b>	-0,0108	0,4759	0.1491	4.6259	2.7355	-1.4196	100.31 (0.00)	-11.08 (0.00)
<b>BTC</b>	0,4223	6.4340	0.1972	22.3772	63.926	-45.613	13788.86 (0.00)	-6.57 (0.00)

**Figura 3:** Tabla de estadísticos descriptivos para las series en precios en dólares por unidad de BTC, EUR y GBP y sus respectivos retornos. 14/11/2012 – 16/05/2016. Test de Jarque-Bera para el contraste de Normalidad y ADF test bajo criterio de Akaike (intercepto y tendencia para precios e intercepto para retornos) para la existencia de raíces unitarias. P-valores entre paréntesis.

Los estadísticos descriptivos analizados sobre las series en precios vuelven a mostrar la similitud en la conducta de las divisas tradicionales vs el Bitcoin: desviación estándar relativamente baja vs elevada; asimetría negativa típica en series financieras que refleja la mayor volatilidad que provoca un shock negativo vs asimetría positiva que refleja gran optimismo por parte de los inversores con las buenas noticias; curtosis moderada no normalidad y posesión de una raíz unitaria en los tres casos, como se intuye si se visualiza el correlograma y también queda reflejado en el test para retornos. Dado que los modelos de estimación propuestos requieren de estacionariedad, como mínimo en media, para asegurar consistencia en los parámetros estimados se decide trabajar, como es común en finanzas, sobre los retornos construidos, ya que, como se demuestra en los contrastes *ADF* realizados, éstos sí son estacionarios en media. En la modelización se deberá tener en cuenta una media significativamente diferente de cero, por lo menos para el caso Bitcoin, y la no normalidad en los residuos provocada, en parte, por la aparición de pesadas colas.

	EURRet	GBPRet	BTCRet
EURRet	1	0.3276	0.0026
GBPRet	-	1	-0.0154
BTCRet	-	-	1

**Figura 4:** Matriz de correlaciones incondicionales entre las series de variaciones porcentuales de las series de tipo de cambio utilizando el dólar como moneda de referencia. 15/11/2012 – 16/05/2016.

La Figura 4 muestra las correlaciones incondicionales en las series de retornos. A gran escala se observa que mientras la correlación incondicional entre monedas tradicionales es considerable, esta se vuelve prácticamente cero cuando se cruza divisa tradicional con Bitcoin. Adquiere especial interés en ajuste de estrategias de cobertura cómo la correlación condicional ha evolucionado en el tiempo, su perfil de estimación, junto con aquella para la volatilidad condicional, se muestran a continuación.

#### 4. Metodología.

Con tal de realizar las estimaciones pertinentes, el análisis se llevará a cabo preliminarmente con modelos univariantes para posteriormente realizar inferencia con los multivariantes. En esta sección se presenta el modelo multivariante más complejo, los restantes empleados no dejan de ser más que individualismos o simplificaciones de éste.

Como previamente se ha comentado, la metodología aplicada es una combinación entre modelos GARCH multivariantes, BEKK en su versión simétrica y asimétrica, con un componente de salto en la ecuación de la media, apropiado para captar la leptocurtosis de los retornos. De esta manera, tal y como Chan y Maheu (2002) definen,

$$r_t = 100 \cdot \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \mu + \sqrt{h_t} \cdot z_t + J_t$$

donde  $r_t$  es el vector de retornos,  $\mu$  es el vector de constantes introducido para considerar, si así lo fuese, una media diferente de cero,  $z_t \sim NIID(0,1)$ ,  $h_t$  es la varianza del término de error cuya ecuación se definirá más adelante y  $J_t$  es el componente de salto.

Para cada uno de los períodos a estudio, la serie de retornos puede padecer un número determinado de saltos,  $n_{jt}$ , que depende de la cuantía e impacto de las noticias

percibidas entre  $t - 1$  y  $t$ . Cada uno de estos saltos adquiere presencia mediante una variable aleatoria,  $Y_i$ , que representa el tamaño de cada salto y sigue una distribución normal donde la media y la varianza varía para cada serie de retornos estimada. De tal manera se define el sumatorio,

$$\sum_{i=1}^{n_{jt}} Y_{jt,i} \text{ con } \begin{cases} j = 1, 2, \dots, N \\ t = 1, 2, \dots, T \end{cases} \text{ y donde } \begin{cases} Y_{jt,i} \sim N(\theta_j, \delta_j^2) \\ \text{Corr}[Y_{jt}, Y_{kt}] = \rho_{jk} \text{ para } j \neq k \\ \text{Corr}[Y_{jt}, Y_{ks}] = 0 \text{ para } t \neq s \end{cases}$$

Puesto que la incorporación del componente de salto dentro de cada una de las ecuaciones de la media debe tener un valor esperado igual a cero, el vector queda tal que así,

$$J_t = \sum_{i=1}^{n_t} Y_i - E \left[ \sum_{i=1}^{n_t} Y_i | \Phi_{t-1} \right]$$

donde  $J_t$  resultaría seguir una distribución multivariante con vector de medias igual a cero y siendo  $\Delta_t$  su matriz de varianzas y covarianzas.

Para este caso bivalente, se tienen dos variables que establecen la cuantía de saltos por período,  $n_{1,t}$  y  $n_{2,t}$ . Cada una de ellas tiene un componente propio,  $n_{1,t}^*$  y  $n_{2,t}^*$ , pero también las constituye una variable extra con tal de reflejar posibles saltos conjuntos,  $n_{3,t}^*$ . De tal forma que,

$$n_{1,t} = n_{1,t}^* + n_{3,t}^* \quad \text{y} \quad n_{2,t} = n_{2,t}^* + n_{3,t}^*$$

Estas nuevas tres variables, independientes entre sí, siguen cada una de ellas un proceso de Poisson, por lo que sus funciones de densidad individual son:

$$P(n_{i,t}^* = j | \Phi_{t-1}) = \frac{\exp(-\lambda_i) \cdot \lambda_i^j}{j!}$$

que, por las propiedades de un proceso de Poisson,  $E[n_{i,t}^*] = \lambda_i$ , es decir, el número de saltos esperados y cuya varianza también es  $\lambda_i$ . Por construcción, la función de densidad conjunta entre  $n_{1,t}$  y  $n_{2,t}$  es:

$$P(n_{1,t} = i, n_{2,t} = j | \Phi_{t-1}) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \exp(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \cdot \frac{\lambda_1^{i-k} \cdot \lambda_2^{j-k} \cdot \lambda_3^k}{(i-k)! \cdot (j-k)! \cdot k!}$$

por lo que,

$$E[n_{i,t}] = \lambda_i + \lambda_3$$

$$Cov[n_{1,t}, n_{2,t}] = \lambda_3 \rightarrow Corr[n_{1,t}, n_{2,t}] = \frac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3) \cdot (\lambda_2 + \lambda_3)}}$$

A partir de aquí el modelo puede bifurcarse según el supuesto que se realice sobre los valores en los parámetros de intensidad de salto, que, como se acaba de comprobar, tiene un efecto directo en la correlación. En este proyecto se van a considerar dos situaciones. En el primer escenario la correlación será homogénea para todo el período, por lo que se impondrá constancia en los valores de  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ . En el segundo escenario se permitirá que ésta varíe asignando una estructura a las intensidades de salto dependiente del valor previo de los retornos, tal que,

$$\lambda_{i,t} = \lambda_i + \eta_i^2 \cdot r_{i,t-1}^2 \text{ para } i = 1, 2.$$

$$\lambda_{3,t} = \lambda_3 + \eta_3^2 \cdot r_{1,t-1}^2 + \eta_4^2 \cdot r_{2,t-1}^2$$

Transcurridos  $i$  y  $j$  saltos en el primer y segundo retorno respectivamente, se define el nuevo término de error como,

$$u_{ij,t} = r_t - \mu - J_{ij,t} = \begin{bmatrix} r_{1,t} - \mu_1 - i \cdot \theta_1 + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot \theta_1 \\ r_{2,t} - \mu_2 - j \cdot \theta_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot \theta_2 \end{bmatrix}$$

resultando una función de densidad de probabilidad para los retornos,

$$f(r_t | n_{1,t} = i, n_{2,t} = j, \Phi_{t-1}) = \frac{1}{2\pi^{N/2}} \cdot |H_{ij,t}|^{-1/2} \cdot \exp(-u'_{ij,t} \cdot H_{ij,t}^{-1} \cdot u_{ij,t})$$

de donde en la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos,  $H_{ij,t}$ , pueden identificarse dos componentes, por un lado aquél que viene del término de error con distribución normal, el que aparece en cualquier modelo GARCH multivariante y que se establece aquí como  $\hat{H}_t$ , y el componente inducido por el salto, definido anteriormente como  $\Delta_t$ .

Concretando  $\hat{H}_t$  en su especificación BEKK asimétrica, ésta quedaría definida tal que,

$$\hat{H}_t = C' C + A' u_{t-1} u'_{t-1} A + B' \hat{H}_{t-1} B + G' \eta_{t-1} \eta'_{t-1} G$$

con C (triangular positiva), A, B y G matrices de parámetros que se deberán estimar y

$$\Delta_{ij,t} = \begin{bmatrix} i \cdot \delta_1^2 & \rho_{12} \cdot \sqrt{i \cdot j} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \\ \rho_{12} \cdot \sqrt{i \cdot j} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 & j \cdot \delta_2^2 \end{bmatrix}$$

Llegados aquí, se define la función de densidad condicional de los retornos como,

$$P(r_t | \Phi_{t-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(r_t | n_{1,t} = i, n_{2,t} = j, \Phi_{t-1}) \cdot P(n_{t,1} = i, n_{t,2} = j | \Phi_{t-1})$$

donde, puesto que en la estimación se debe limitar el número máximos de saltos posibles a considerar con tal de asegurar la convergencia, se sigue la recomendación de Chan (2002) y se establece en 5. El logaritmo de la función de máxima verosimilitud queda finalmente definido,

$$\ln L = \sum_{i=1}^N \ln P(r_t | \Phi_{t-1})$$

Como resulta habitual en la modelización de segundos momentos, debido a la linealidad en los parámetros que se estiman en esta función, se emplea el método de cuasi-máxima verosimilitud. Tal y como demuestran Bollerslev y Wooldridge (1992) la estimación simultánea del conjunto de parámetros que optimiza la ecuación anterior es consistente bajo el supuesto de que los términos de error sigan una distribución normal bivariante aún y en el caso de que esa no sea la verdadera distribución.

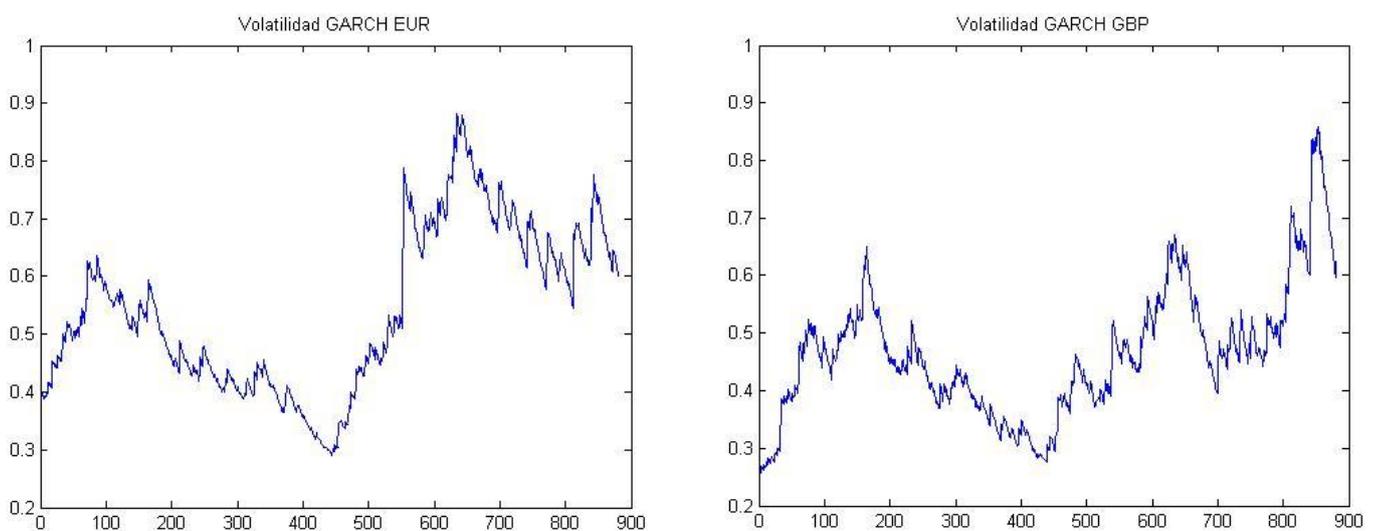
Además, a pesar de que el número de saltos resulta inobservable, se puede construir de forma *expost* un filtro, siguiendo la regla de Bayes, con tal de identificar su probabilidad de ocurrencia:

$$P(n_{t,1} = i, n_{t,2} = j | \Phi_t) = \frac{f(r_t | n_{1,t}=i, n_{2,t}=j, \Phi_{t-1})}{P(r_t | \Phi_{t-1})} \cdot P(n_{t,1} = i, n_{t,2} = j | \Phi_{t-1})$$

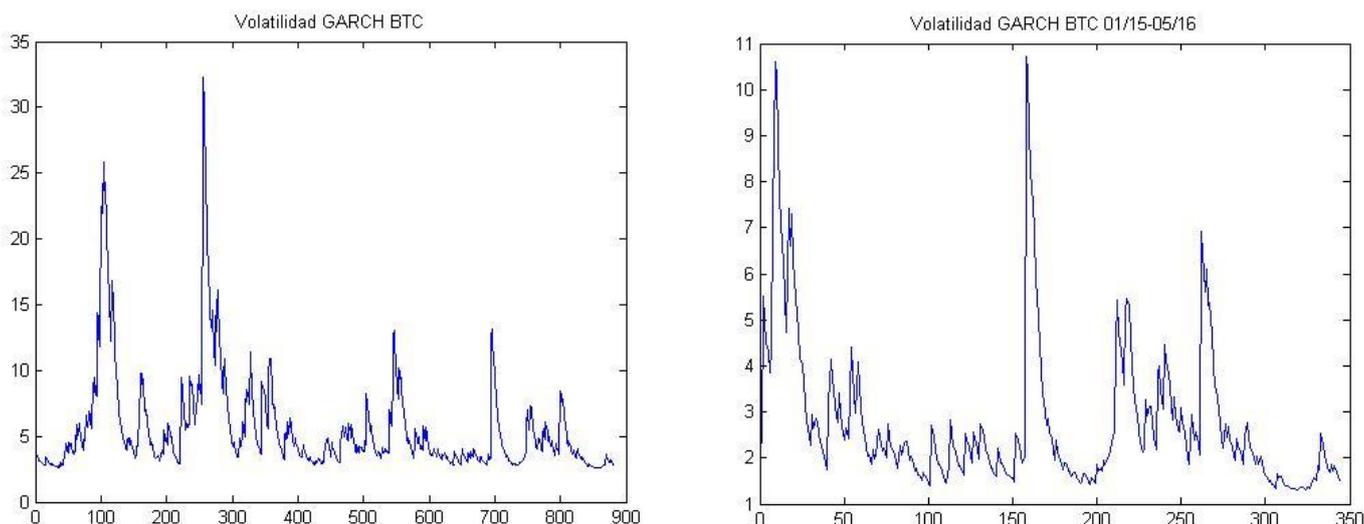
## 5. Resultados.

Los resultados de cada una de las modelizaciones, tanto univariantes como multivariantes, se adjuntan en el *Anexo*.

Focalizando la atención únicamente en el comportamiento individual de cada una de las series de retornos se observan diversas diferencias entre la divisa Bitcoin y las tradicionales. Como se avanzaba en el análisis preliminar de los datos, el parámetro estimado para reflejar una media distinta de cero resulta positivo y significativo únicamente en el caso de la cryptodivisa. En la estimación de las tres varianzas condicionales se mantiene la estructura GARCH y su elevado grado de persistencia tanto con la inclusión de asimetría como con el componente de salto, aunque éste último provoca una reducción a prácticamente la mitad de la constante de la ecuación. Se aprecian diferencias en cuanto a un menor nivel de repercusión del valor de la anterior estimación de la volatilidad, reflejado en el parámetro  $\beta$ , para la serie de retornos del Bitcoin. Siendo la volatilidad del Bitcoin estructuralmente elevada, su nivel pierde peso en la estimación de ésta para el siguiente periodo, siempre en comparación con las divisas tradicionales. En cuanto a la asimetría, como se reflejaba en el análisis previo, se observa un parámetro negativo en las divisas tradicionales, típico en series financieras. Por el contrario, para el cómputo global del intervalo temporal, éste es positivo en el Bitcoin.



**Figura 5:** Gráficos de las volatilidades condicionales de las series de retornos para las divisas tradicionales utilizando el dólar como moneda de referencia. 15/11/2012 – 16/05/2016.



**Figura 6:** Gráfico de la volatilidad condicional de la serie de retornos para las cryptodivisa Bitcoin utilizando el dólar como moneda de referencia. 15/11/2012 – 16/05/2016 y 02/01/2015 – 16/05/2016.

Las Figuras 5 y 6 muestran las estimaciones para la volatilidad condicional de las tres series a estudio utilizando un modelo GARCH. Éstas sirven para mostrar y aclarar diversas ideas. Se identifica un claro patrón en su comportamiento para las divisas tradicionales con niveles bajos y estables de volatilidad. En la estimación de la volatilidad condicional del Bitcoin se confirma su elevado nivel y la aparición de recurrentes picos, así como la identificación de posteriores *volatility clusters*. Este comportamiento fortalece la idea de correcta inclusión de componentes de salto en la modelización. Cierto es que se aprecia un decremento temporal en el tamaño de dichos picos, además de una considerable disminución de ésta en el rango final de la serie, llegando a mínimos históricos.

En un primer contacto con el componente de salto, el análisis más detallado se realizará en los modelos multivariantes, se perciben diferencias y similitudes entre la modelización del Bitcoin y la de las divisas tradicionales. En media, cuando se produce un salto en una de las divisas tradicionales éste es positivo, con un tamaño entorno a 0.05 ( $\theta_i$ ) para ambas. Además, tal componente entra en la ecuación de medias con una reducida desviación muy pareja también para las dos divisas ( $\delta_i \approx 0.1$  en todos los modelos). Para los retornos del Bitcoin, aunque el tamaño medio de sus saltos es ligeramente superior al de las divisas tradicionales, éste es negativo y tiene una desviación relativamente grande ( $\theta_{BTC} = [-0.04, -0.07]$  y  $\delta_{BTC} = [5.5, 5.75]$  dependiendo del modelo considerado). Mostrados los valores reducidos para los tamaños promedios y elevados para sus desviaciones, relativo a la desviación de cada serie, se deduce que éstos pueden considerar todo tipo de saltos, tanto

positivos como negativos. En cuanto a la intensidad de salto, es decir, el número esperado de saltos que afectan a cada una de las series de retornos en cada período ( $\lambda_i$ ), éste no resulta muy dispar entre las tres divisas: 0.19 para el Bitcoin y 0.23 para el Euro y la Libra esterlina, en promedio de los cuatro modelos considerados.

La principal y más remarcable diferencia que se encuentra en la modelización individual de las series aparece en los modelos de intensidad de salto variante en el tiempo. Para el Bitcoin se establece una variabilidad temporal real de  $\lambda$ , recogida en la significatividad del parámetro  $\eta$  y en la selección de dicha especificación respecto de las demás consideradas por los criterios de Akaike y Schwarz (situados en las tablas del *Anexo 1*) y los test de razón de verosimilitud (situados en la Figura 7). Por el contrario, en las divisas tradicionales este parámetro resulta claramente no significativo y, por los criterios recién nombrados, se considera preferido el modelo con intensidad de salto constante en el tiempo. La posible explicación de este resultado se justifica en el apartado de conclusiones y discusión.

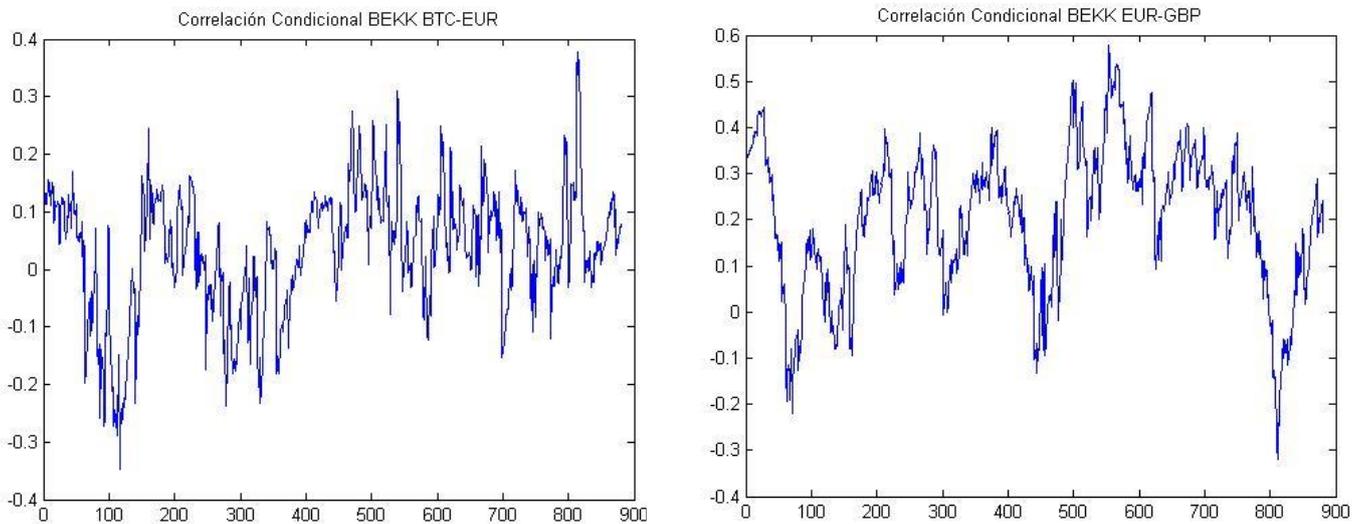
<b><i>Likelihood ratio test</i></b>	<b><i>TGARCH – CJTGARCH</i></b>	<b><i>TVJI – CJTGARCH</i></b>
<b><i>BTC</i></b>	300.66 (0.00)	37.66 (0.00)
<b><i>EUR</i></b>	111.36 (0.00)	0.04 (0.84)
<b><i>GBP</i></b>	21.76 (0.00)	0.70 (0.40)

**Figura 7:** Tabla contenedora de los estadísticos resultantes de los test de razón de verosimilitud acompañados, entre paréntesis, de su pvalores.

Haciendo inferencia en las modelizaciones multivariantes se observan resultados totalmente paralelos para los parámetros que sí aparecían, por separado, en las modelizaciones individuales de la varianza condicional. Por ello, se omite por comentario reiterativo los niveles y significación de  $\mu_i$ ,  $c_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  y  $g_i$  en los seis modelos para BTC junto con EUR y en los seis restantes para EUR y GBP. Las disparidades entre las modelizaciones BTC-EUR y EUR-GBP aparecen en los parámetros restantes de la matriz de varianzas y covarianzas, los términos cruzados. Mientras en la modelización multivariante BTC-EUR todos estos parámetros resultan no significativos estos sí lo son, en su mayoría, en la EUR-GBP. Este suceso refuerza la idea de existencia de *spillovers* en volatilidad entre las divisas tradicionales y la falta de transmisión entre la divisa digital y el euro.

En la Figura 8 se muestran la series de correlaciones condicionales extraídas de los modelos multivariante *BEKK*. En ésta se observa como dicha correlación, en concordancia con la correlación incondicional, es relativamente más baja en el caso BTC-EUR ya que deambula

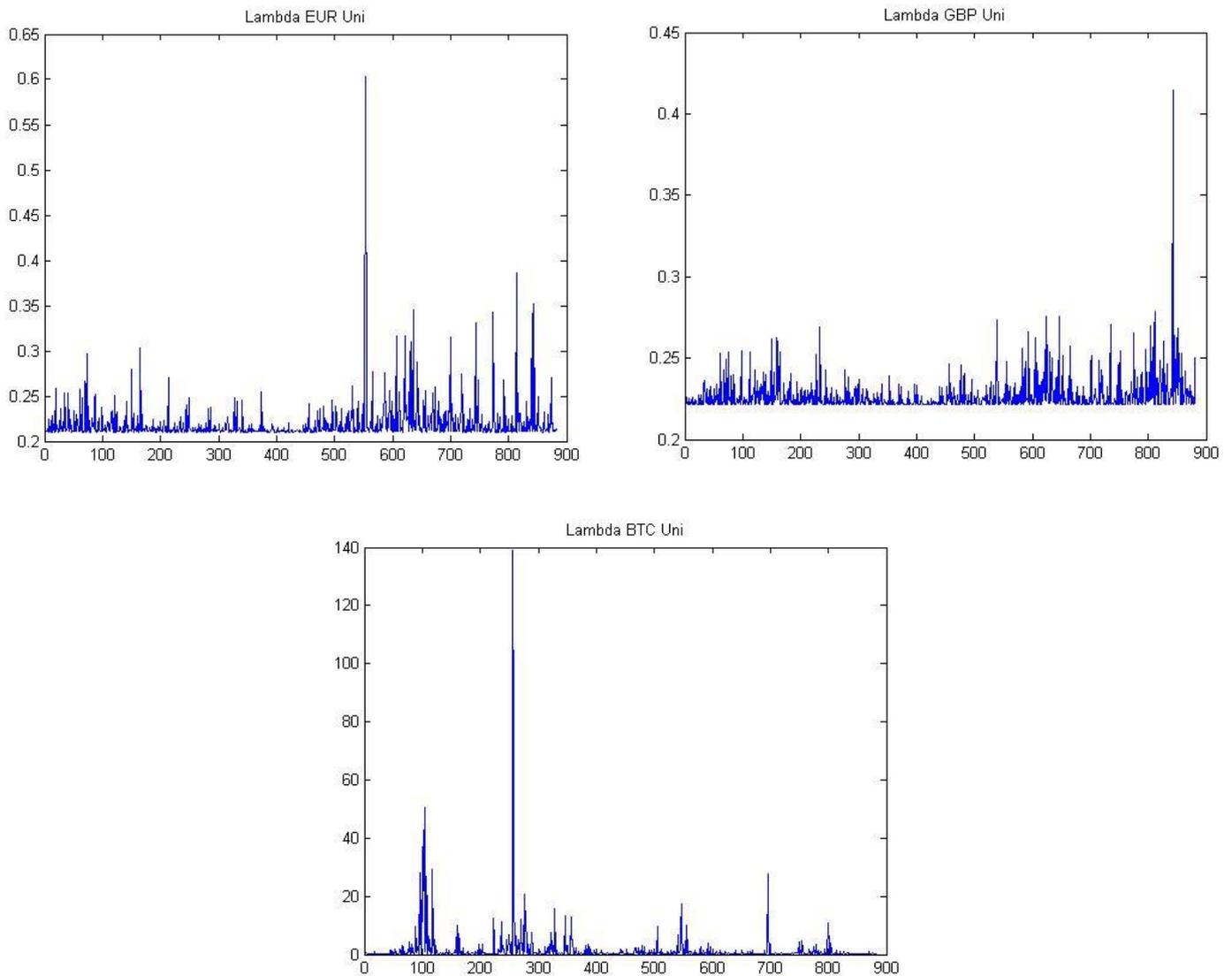
en torno del cero y su distancia respecto a él es reducida y, en cambio, para el caso de las divisas tradicionales sí se exhibe una mayor correlación.



**Figura 8:** Gráfico de las correlaciones condicionales entre las serie de retornos en las divisas BTC-EUR y EUR-GBP utilizando el dólar como moneda de referencia. 15/11/2012 – 16/05/2016.

Retornando al comportamiento de los componentes de salto, esta vez para analizarlos más en profundidad, se muestra como el tamaño y la varianza de éstos no varían significativamente con los obtenidos en las estimaciones univariantes. También se muestra como la intensidad de salto, el valor esperado en el número de saltos entre  $t-1$  y  $t$ , se mantiene en el traspaso de modelización univariante a multivariante. Se recuerda que para el caso univariante ésta venía dada por  $E[n_{i,t}] = \lambda_i$  y para el caso bivariante  $E[n_{i,t}] = \lambda_i + \lambda_3$ . Ambos eventos ponen de manifiesto la consistencia entre las estimaciones.

En la Figura 9 se muestran los valores en los modelos individuales con intensidad de salto variante en el tiempo. Se aprecia una variabilidad muy reducida en los parámetros de las divisas tradicionales, como bien reflejaban los criterios de selección y el test de razón de verosimilitudes esta reducida variabilidad conlleva el descarte de este modelo en favor de aquellos con intensidad de salto constante. En cambio, la variabilidad sí es notable en la cryptodivisa y, por tanto, se ratifican las conclusiones extraídas en la selección del modelo más adecuado.



**Figura 9:** Gráficos para las tres divisas consideradas de las series temporales de los parámetros de intensidad de salto variantes. 15/11/2012 – 16/05/2016.

En el caso bivalente BTC-EUR se obtiene un valor para el parámetro  $\lambda_3$  prácticamente nulo y claramente no significativo. Se refleja de esta manera la no aparición de saltos conjuntos en ambas series. El parámetro estimado  $\rho = [-0.06, -0.11]$  reporta una correlación contemporánea muy reducida en el tamaño de los saltos, debida en parte a la alta desviación para los componentes que se incorporan en la serie de retornos del Bitcoin. Además si se considera la especificación de comportamiento temporal en la intensidad de salto, el efecto del alto nivel que tiene  $r_{BTC,t}^2$  sobre  $\lambda_{EUR,t}$ , que se ve afectada puesto que  $\lambda_{EUR,t} = \lambda_{EUR} + \lambda_{3,t}$  con  $\lambda_{3,t} = \lambda_3 + \eta_3^2 \cdot r_{BTC,t-1}^2 + \eta_4^2 \cdot r_{EUR,t-1}^2$ , desvirtúa totalmente dicho comportamiento provocando una modelización de menor calidad en favor de la selección del modelo con intensidades constantes. En este caso en particular, dada la estructura de saltos conjuntos

ulos, alta variabilidad en la intensidad de uno de los componentes de salto, baja en el otro y niveles muy dispares en los retornos, se cree oportuno establecer un modelo mixto, de forma extraordinaria para el intervalo temporal considerado, tal que se consideren la serie de aspectos recién enumerados. Ésta nueva especificación es:

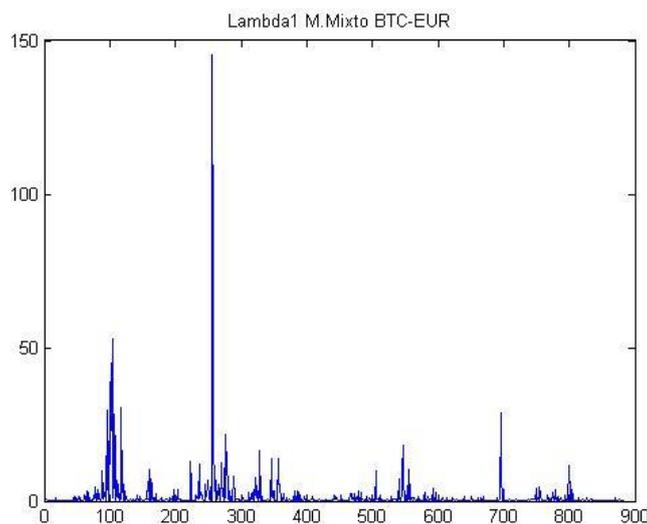
$$\lambda_{BTC,t} = \lambda_{BTC} + \eta_{BTC}^2 \cdot r_{BTC,t-1}^2$$

$$\lambda_{EUR,t} = \lambda_{EUR}$$

y los parámetros estimados para los componentes de salto se recogen en la Figura 10. Esto resultados resultan sorprendentemente acertados ya que recogen los componentes de salto individuales de manera apropiada, sin distorsiones y sin perder la esencia del resto de modelos presentados. En la Figura 11 se traza el parámetro  $\lambda_{BTC,t}$  cambiante en el tiempo. Realizando la comparación directa con el estimado para el modelo univariante se observa una similitud clara, en éste caso con un ligero aumento de la dependencia de la situación del mercado, evidenciada en un estimación  $\eta_1$  ligeramente superior.

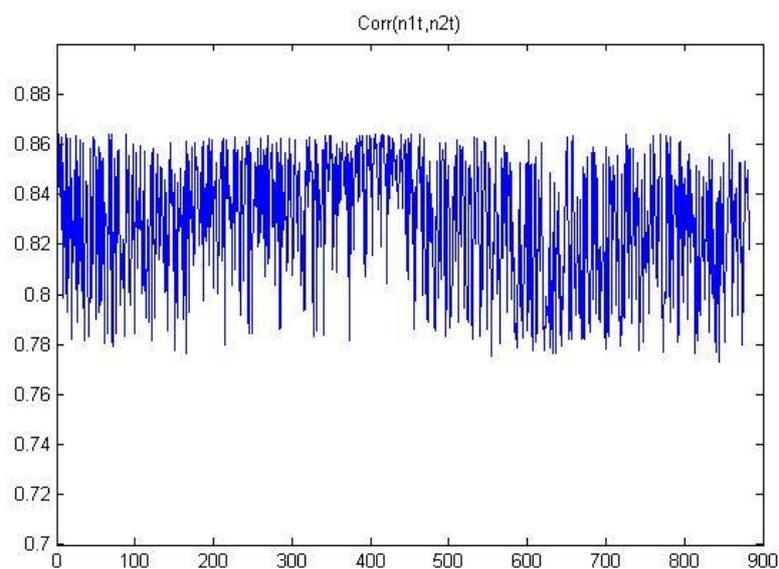
M. Mixto de intensidades de salto. 1 = BTC , 2 = EUR										
$\theta_1$	$\theta_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\eta_1$	$\rho$	LogL	AIC	SBIC
-0.0767 (0.0610)	0.0036 (0.0152)	5.5684 (2.2219)	0.0620 (0.0234)	0.1982 (0.1107)	0.2114 (0.1853)	0.1885 (0.1262)	-0.0793 (0.1729)	-2812.7	6.4331	6.5470

**Figura 10:** Tabla de resultados en la estimación de los parámetros de salto dada la especificación mixta. BTC-EUR, 15/11/2012 – 16/05/2016.



**Figura 11:** Serie temporal del parámetro de intensidad de salto variante en el modelo mixto para la criptomoneda Bitcoin. 15/11/2012 – 16/05/2016.

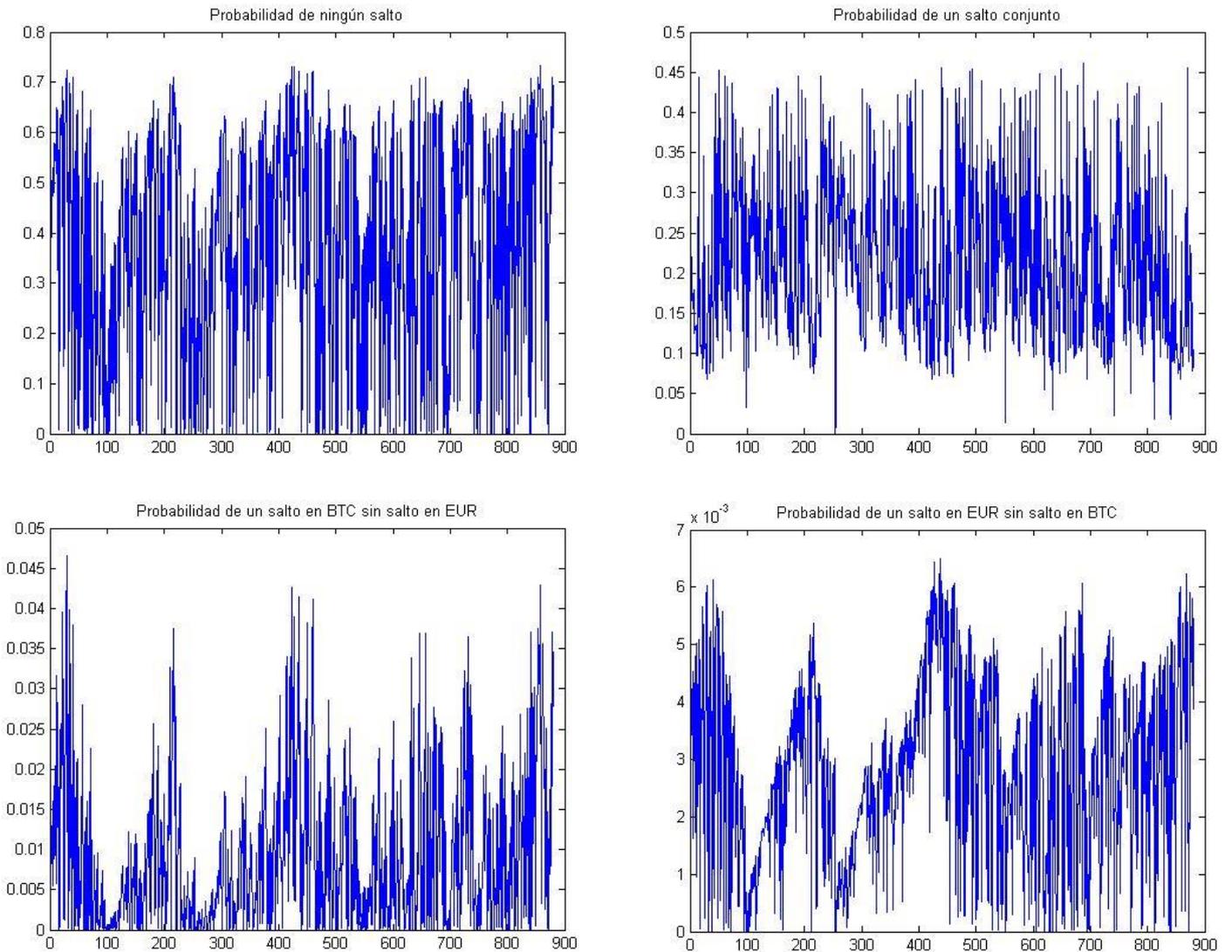
En un caso totalmente distinto se sitúa la modelización bivalente de las divisas tradicionales, aquí las intensidades de salto individuales dejan paso a  $\lambda_3$  que proyecta entre el 75-93% del total de saltos en las variables. Probando así la elevada correlación entre estas divisas. De igual manera que para los casos individuales, tanto los criterios de información como el test de ratio de verosimilitud realizado para las especificaciones asimétricas de intensidad constante vs. variable en el tiempo, con estadístico 3.34 y pvalor=0.50, resuelven que la modelización con intensidades constantes es más adecuada. Puesto que está decisión es consecuencia de la no significatividad en los parámetros referentes a las intensidades de salto individuales,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , pero la función de máxima-verosimilitud resulta mayor y  $\lambda_3$ ,  $\eta_3$  y  $\eta_4$  sí resultan significativos, no se considera descabellado ilustrar la correlación temporal en el número de saltos entre ambas variables. Ésta se muestra en la Figura 12. Se comprueba la reducida variabilidad, fortaleciendo más aún el supuesto de intensidades constantes en el tiempo. Asimismo la correlación contemporánea en el tamaño de los saltos alcanza el valor de 0.71, muy superior que en el caso BTC-EUR.



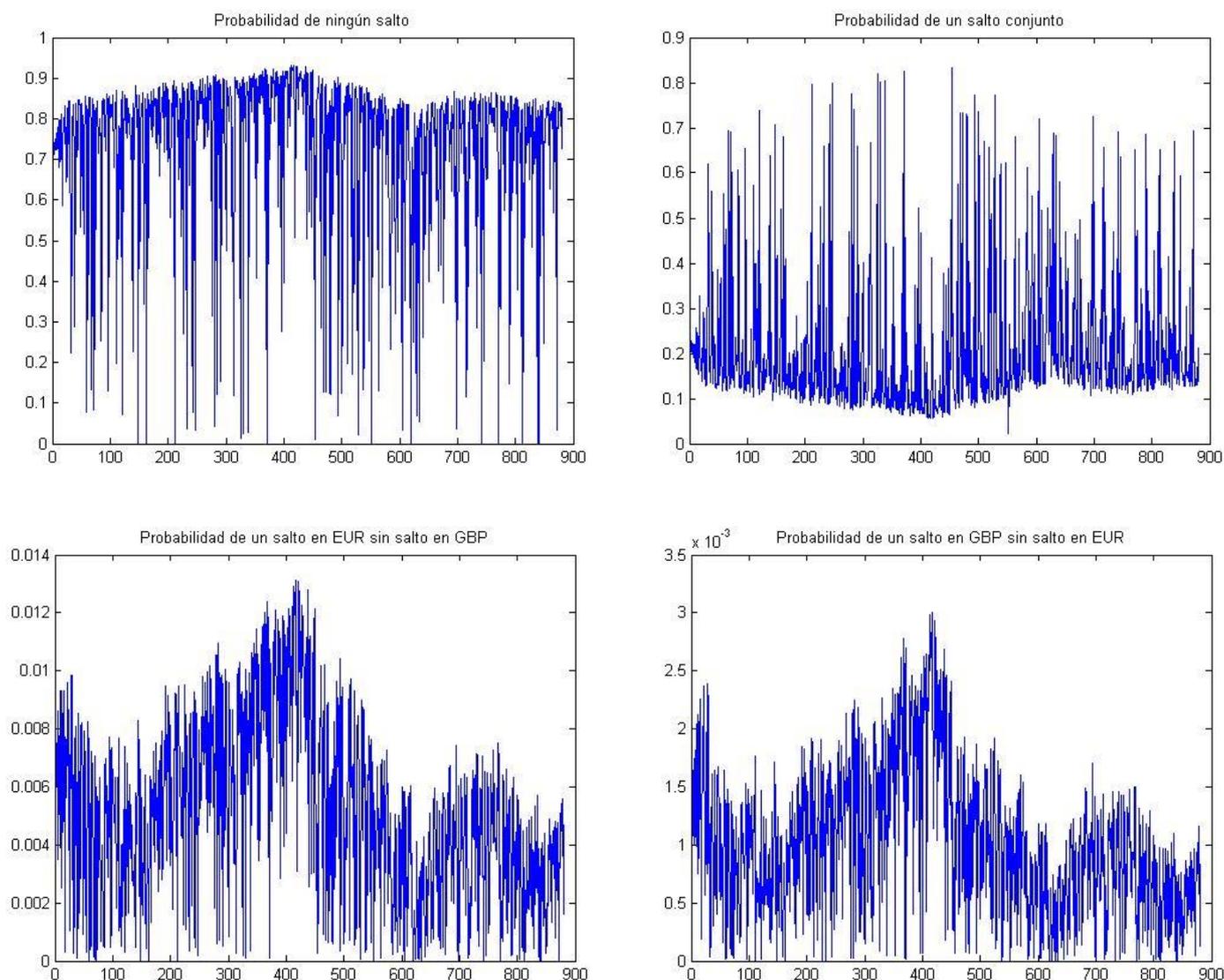
**Figura 12:** Serie de correlación temporal entre el número de saltos que transcurren sobre las divisas tradicionales en cada uno de los períodos.

Resulta relevante hacer inferencia sobre las probabilidades de salto. Tal y como se comenta en metodología, la serie de saltos producidos resulta no observable pero, mediante el filtro *expost* definido, se pueden crear series contenedoras de con qué probabilidad se ha dado  $i$  saltos en una serie y  $j$  saltos en la otra para cada instante considerado. Éste análisis se efectuará con las estimaciones pertenecientes al modelo mixto para el BTC-EUR y para el

modelo de intensidad de salto constante para el EUR-GBP. Este análisis puede contener muchas series distintas según cuál sea el objetivo, en este estudio se muestran las cuatro series consideradas más relevantes: probabilidad de ningún salto, probabilidad de un salto en una divisa y ninguno en la otra y probabilidad de un salto conjunto. La Figura 13 muestra el resultado para BTC-EUR y en la Figura 14 se sitúa aquél para el EUR-GBP.



**Figura 13:** Serie temporal de probabilidades expost sobre las diversas especificaciones de ocurrencia de salto. BTC-EUR, 15/11/2012 – 16/05/2016.



**Figura 14:** Serie temporal de probabilidades expost sobre las diversas especificaciones de ocurrencia de salto. EUR-GBP, 15/11/2012 – 16/05/2016.

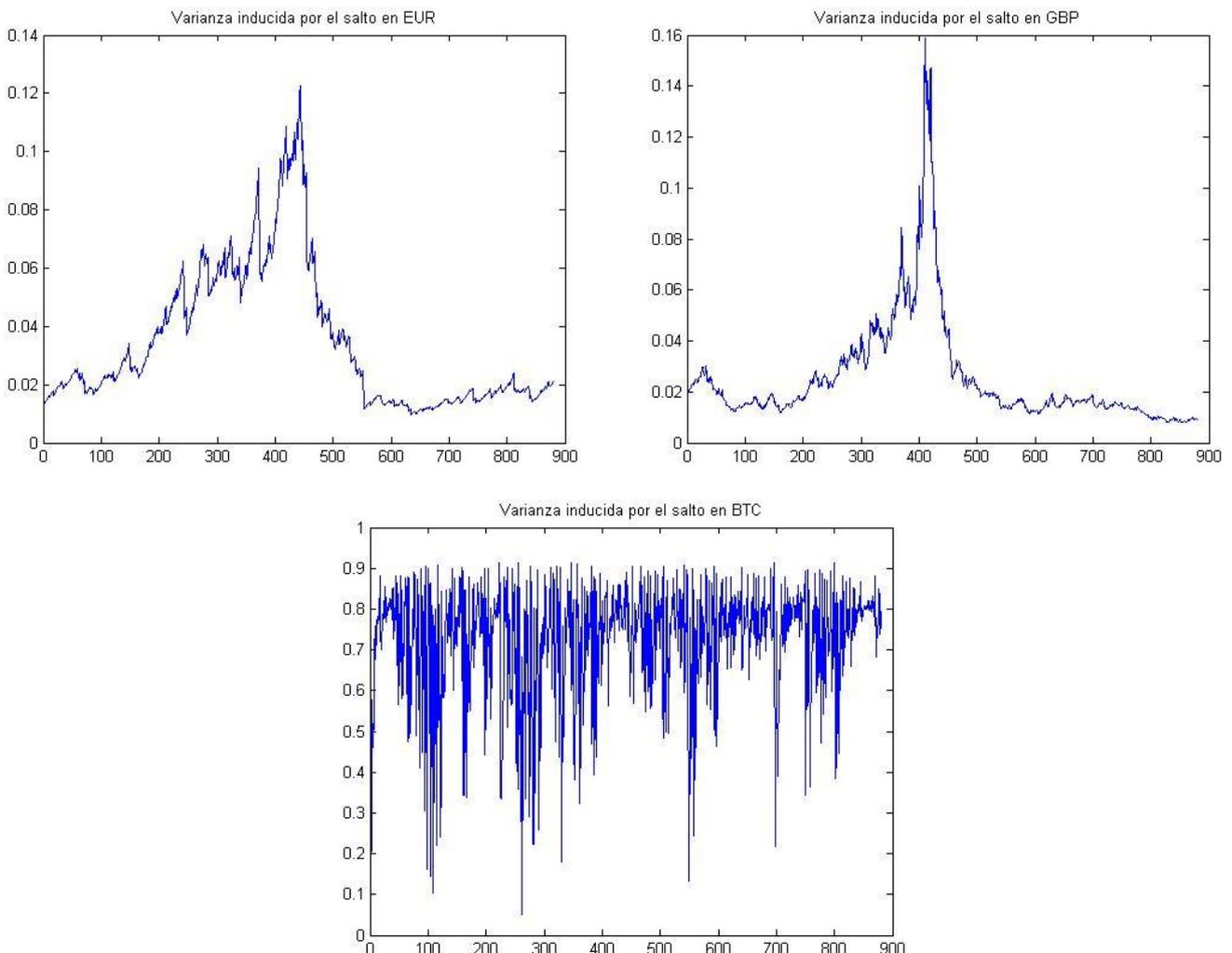
Las probabilidades calculadas expost para las dos modelizaciones muestran diferencias características que se han ido desvelando a lo largo del trabajo. La elevada volatilidad del retorno BTC, junto con su baja correlación con el retorno EUR, provocan una menor probabilidad de ocurrencia de ningún salto respecto a la elevada verosimilitud de este suceso en el EUR-GBP. Casi de forma complementaria, debido a la reducida ocurrencia de un elevado número de saltos, se comporta la probabilidad de salto conjunto. En los dos últimos gráficos se aprecia la relativa abrupta reducción, siendo ésta todavía más acentuada en el caso de las divisas tradicionales. La interpretación resulta clara, la modelización de la cryptodivisa BTC

resulta correcta bajo especificaciones GARCH pero la inclusión del componente de salto ayuda considerablemente a capturar esta dinámica tan característica.

Para finalizar, resulta interesante destacar qué elemento de la varianza total en la serie de retornos viene animado por la especificación GARCH multivariante y qué elemento queda justificado por el componente de salto. Tal y como Chan y Maheu (2002) muestran la varianza condicional de los retornos puede dividirse en:

$$Var[r_t|\Phi_{t-1}] = h_t + (\delta^2 + \theta^2) \cdot \lambda_t$$

Dados los modelos finalmente seleccionados,  $\lambda_t$  solo resulta una serie temporal cambiante en el caso BTC, para las divisas tradicionales esta parte queda representada por una constante.



**Figura 15:** Serie temporal del porcentaje inducido por el componente de salto en la varianza total de la serie de retornos, 15/11/2012 – 16/05/2016.

Como se refleja en la Figura 15 la desemejanza es absoluta, mientras en las divisas tradicionales éste componente no aporta más que el 12-16% en el pico de la varianza de la serie de retornos, éste representa de forma permanente el 70-80% para la varianza en los retornos del BTC. La clave de este resultado pasa por dos variables. Por un lado, la gran diferencia en el nivel de la desviación típica con la que el salto entra en la ecuación de medias, representado por el parámetro  $\delta$ , siendo éste, en promedio de los modelos, de 5.6 en el BTC mientras que su valor ronda el 0.1 para las divisas tradicionales. Por el otro lado, la adaptación a la situación por la que está pasando el mercado captada por la variación temporal del parámetro  $\lambda$ . Permitir que  $\lambda$  pueda modificar su valor adecuándose, mediante  $\eta$ , al nivel de los retornos al cuadrado en el período anterior, aproximación lícita de la volatilidad pasada, implica una permutación constante de la intensidad de salto acertada a la necesidad del modelo.

## 6. Conclusiones y discusión.

El objetivo primordial de este trabajo es lograr comprender el comportamiento de la criptomoneda Bitcoin mediante las diversas especificaciones que aquí se han empleado. Con tal metodología se ha llegado a una serie de resultados, en comparación con la conducta de las divisas tradicionales, de los que se pueden sacar conclusiones objetivas, en menor o mayor grado. El fin de la trayectoria es establecer si el Bitcoin se puede continuar considerando un activo puramente especulativo o, por el contrario, éste madura hacia una divisa más a tener en cuenta. En este punto es donde puede originarse la discusión.

Desde el análisis descriptivo de las series de retornos ya se empiezan a reflejar disparidades claras entre el Bitcoin y las divisas tradicionales. Sin duda las que más interés despiertan son la elevada volatilidad, una correlación incondicional prácticamente nula y el exceso de curtosis que presenta. Toda la modelización gira en torno a estos tres asuntos, modelos GARCH multivariantes e inclusión de componente de salto. Por ello es que se listan las conclusiones alcanzadas frente a estos asuntos:

- Se encuentra un patrón para la volatilidad condicional totalmente distinto al seguido por las divisas tradicionales. Su elevado nivel y la aparición de picos de volatilidad parecen tender a reducirse hasta llegar a mínimos históricos en la actualidad.

- En la matriz de varianzas y covarianzas de los modelos multivariantes, resultan todos los parámetros cruzados no significativos. Mostrando la falta de *spillovers* de volatilidad típicos que aparecen en las divisas clásicas y evidenciando una correlación condicional prácticamente nula que no parece tender a valores cercanos al resto de divisas.

- La intensidad del componente de salto que se incorpora en la modelización de divisas tradicionales manifiesta una reducida variabilidad la cual conduce a la preferencia de modelos de intensidad constante. Se considera que este comportamiento es debido al estado de madurez y consolidación de los mercados de las divisas consideradas, junto con un intervalo temporal no excesivamente largo, estos mercados no sufren cambios drásticos que impliquen consideraciones de variabilidad en la intensidad. En cambio se observa que para el Bitcoin son elegidos aquellos modelos de intensidad de salto variantes en el tiempo. Con tal de recoger mejor la leptocurtosis reflejada en la aparición de picos, la serie de retornos BTC tiene la necesidad de adaptarse a las condiciones actuales del mercado. La significatividad y el nivel de los parámetros  $\eta$ 's tienen un papel fundamental en la bondad del ajuste. Ciertamente es que esta intensidad suele tomar valores muy próximos a los de las divisas tradicionales cuando el Bitcoin no sufre de noticias relevantes que suelen tener un impacto exacerbado.

- Con la inclusión del componente de salto en los modelos multivariantes se observa que para las divisas clásicas las intensidades de salto individual pasan a ser relativamente reducidas y otorgan su valor al parámetro de intensidad de saltos conjuntos. Este suceso se debe a la elevada correlación en el número esperado de saltos, signo de sensibilidad a mismos factores. Por contra en el modelo bivalente BTC-EUR este parámetro es prácticamente nulo y no significativo. Con tal de poder hacer inferencia sin considerar la elevada variabilidad que puede transmitir en la intensidad de salto, mediante los términos  $\eta$ 's cruzados, el BTC/USD sobre el EUR/USD se propone una especificación mixta variable-constante que, dadas las condiciones que aquí aparecen, obtiene muy buenos resultados.

- Se consiguen obtener, mediante el filtro *expost* propuesto, las series de probabilidades de ocurrencia en los saltos, conjuntos o no, en las variables consideradas. Se encuentran de nuevo diferencias causadas por la elevada desviación del componente de saltos en la cryptodivisa y su nula correlación con el retorno del EUR/USD. Mientras que entre las divisas clásicas la probabilidad de no acontecer ningún salto en ninguna de las divisas resulta muy elevada, alrededor de 0.8, en el caso BTC-EUR está es prácticamente la mitad.

· Finalmente se calcula qué proporción de la varianza total es inducida por la estructura GARCH y cuál por el componente de salto. Aquí es donde se encuentran las diferencias más radicales, la varianza del retorno del Bitcoin viene en su mayoría provocada por la inclusión del componente de salto. Resultado que no acaba de extrañar debido a la elevada desviación que éste incorpora.

Este último resultado, junto con el anterior de relativa baja probabilidad de cero saltos, son el reflejo más claro de que el Bitcoin necesita la incorporación de un componente de salto con tal de realizar un buen ajuste.

A lo largo de este proyecto se han encontrado rasgos que parecen indicar que el Bitcoin puede estar madurando hacia una divisa más, seguidamente estos atisbos se veían derrumbados por diferencias capitales. El porqué el Bitcoin padece de una relativa extrema volatilidad tiene su explicación en un conjunto de factores destacados. Al ser una moneda totalmente digital no existe una economía real que la respalda ni una institución que salga a estabilizar los ánimos y, por tanto, su valor solo se sostiene por la creencia conjunta de que esos números en una celda tiene poder de intercambio. En cierta manera como cualquier moneda actual. La estructura digital y descentralizada todavía causa cierto miedo, resulta común pensar que parece más fácil robar a un individuo con su conexión a internet que a un gran banco. Este pensamiento establece la creencia de que el mercado es débil aunque la red es prácticamente infranqueable. En relación con esto, queda demostrado que por la estructura del sistema esta moneda es ideal en el aspecto fuera de la legalidad. Continuas publicaciones sobre compra-venta de armas, drogas y otros bienes y servicios prohibidos dañan la imagen de la moneda y asustan a posibles inversores. También es cierto que no deja de ser un mercado inacabado, el límite de 21 millones de Bitcoins todavía no se ha alcanzado, la completitud del mercado llegará seguro con un gran impacto pero tarde o temprano se producirá una estabilización. La entrada-salida de grandes sumas de capital en extrañas operaciones, quizá de blanqueamiento, junto con esta cantidad finita pueden imponer una cota de volatilidad permanente en el mercado.

A pesar de la descripción de todos estos aspectos que pueden afectar negativamente al futuro del Bitcoin, existen muchos otros positivos que pueden llegar a contrarrestarlos. Es creciente el número de pequeños y medianos inversores que deciden entrar en el sistema Bitcoin únicamente como herramienta de pago.

## 7. Bibliografía.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, núm. 31, pp. 307-327.

Bollerslev, T. (1990). "Modelling the coherence in short-run nominal rates: A multivariate generalized ARCH approach", *Review of Economics and Statistics*, núm. 72, pp. 498-505.

Bollerslev, T., Engle, R.F. y Wooldridge, J.M. (1988). "A capital asset pricing model with time varying covariances", *Journal of Political Economy*, núm. 96, pp. 116-131.

Bollerslev, T. y Wooldridge, J.M. (1992). "Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances", *Econometric Reviews*, núm. 11, pp. 143-172.

Bouoiyour, J. y Selmi, R. (2014). "What does Crypto-currency look like? Gaining Insight into Bitcoin Phenomenon", *Munich Personal RePEc Archive*, núm. 57907.

Buchholz, M., Delaney, J. y Warren, J. (2012). "Bits and Bets: Information, Price Volatility and Demand for Bitcoin", *Economics*, núm. 312.

Chan, W.H. y Maheu, J.M. (2002). "Conditional Jump Dynamics in Stock Market Returns", *Journal of Business Economics and Statistics*, núm. 20, pp. 377-389.

Chan, W.H. (2003). "A Correlated Bivariate Poisson Jump Model for Foreign Exchange", *Empirical Economics*, núm. 28, pp. 669-689.

Chuliá, H. y Torró, H. (2007). "Asimetrías en volatilidad, beta y contagios entre las empresas grandes y pequeñas cotizadas en la bolsa española". *Investigaciones Económicas*, núm. 3, pp. 445-474.

Ding, Z., Engle, R.F. y Granger, C.W.J. (1993). "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model", *Journal of Empirical Finance*, núm. 1, pp. 98-106.

Ding, Z. y Granger, C.W.J. (1996). " Modeling volatility persistence of speculative returns: A new approach", *Journal of Econometrics*, núm. 73, pp. 185-215.

Engle, R.F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation", *Econometrica*, núm. 50, pp. 987-1008.

Engle, R. y Kroner K.F. (1995). "Multivariate simultaneous generalized ARCH", *Econometric Theory*, núm. 11, pp. 122-150.

Engle, R.F., Lilien, D. y Robins, R. (1987). "Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model", *Econometrica*, núm. 55, pp. 391-407.

Johansen, S. (1988). "Statistical Analysis of Cointegration Vectors", *Journal of Economic Dynamic and Control*, núm. 12, pp. 231-254.

Johansen, S. (1991). "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models", *Econometrica*, núm. 59, pp. 1551-1580.

Kroner, K.F. y Ng, V.K. (1998). "Modelling asymmetric comovements of asset returns", *The Review of Financial Studies*, núm. 11, pp. 817-844.

Yermack, D. (2014). "Is Bitcoin a real currency? An economic appraisal", *NBER Working Paper Series*, núm. 19747.

Zakoïan, J.M. (1994). "Threshold Heteroskedastic Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, núm. 18, pp. 931-955.

## Anexos.

### Anexo 1: Resultados de las modelizaciones.

Las tablas aquí establecidas se presentan con los valores de los parámetros estimados con cuatro decimales y, bajo éstos, entre paréntesis sus desviaciones estándar. También se muestran los valores del logaritmo de la función de máxima-verosimilitud en el óptimo y de los criterios de información Akaike (AIC) y Schwarz (SBIC). La nomenclatura utilizada hace referencia a los siguientes modelos: Modelos univariantes con componente de salto cuya intensidad se mantiene constante (*CJ GARCH/TGARCH*), modelos univariantes con componente de salto cuya intensidad varía en el tiempo (*TVJI GARCH/TGARCH*), modelos multivariantes con intensidades de salto constantes (*CBP BEKK/BEKKasim*) y modelos multivariantes con intensidades de salto variantes en el tiempo (*CBP BEKK/BEKKasim R<sup>2</sup>*).

#### 1.1. Univariantes: Bitcoin.

	<i>BTC</i>					
	<i>GARCH</i>	<i>TGARCH</i>	<i>CJ GARCH</i>	<i>CJ TGARCH</i>	<i>TVJI GARCH</i>	<i>TVJI TGARCH</i>
$\mu$	0.2047 (0.1203)	0.2613 (0.1598)	0.1278 (0.1068)	0.1558 (0.1231)	0.1310 (0.1136)	0.1577 (0.1334)
$w$	1.1242 (0.1075)	1.2426 (0.1288)	0.6349 (0.3412)	0.6812 (0.3667)	0.6147 (0.3819)	0.6220 (0.3791)
$\alpha$	0.1981 (0.0161)	0.2316 (0.0213)	0.2247 (0.1572)	0.2015 (0.1622)	0.2090 (0.1791)	0.2101 (0.1811)
$\beta$	0.8054 (0.0128)	0.8049 (0.0130)	0.7654 (0.1086)	0.7599 (0.1103)	0.7766 (0.1291)	0.7278 (0.1310)
$\gamma$	–	–0.0879 (0.0234)	–	–0.0772 (0.0589)	–	–0.0714 (0.0521)
$\theta$	–	–	–0.0696 (0.0842)	–0.0458 (0.0733)	–0.0717 (0.0788)	–0.0464 (0.0695)
$\delta$	–	–	5.6230 (1.4237)	5.7553 (1.5328)	5.5018 (1.4943)	5.6742 (1.5437)
$\lambda$	–	–	0.2044 (0.1118)	0.1818 (0.1353)	0.2002 (0.1189)	0.1907 (0.1261)
$\eta$	–	–	–	–	0.1921 (0.0982)	0.1843 (0.1077)
<b>LogL</b>	–2642.66	–2639.67	–2491.80	–2489.34	–2471.71	–2470.51
<b>AIC</b>	6.0083	6.0038	5.6726	5.6721	5.6293	5.6288
<b>SBIC</b>	6.0309	6.0300	5.7106	5.7127	5.6727	5.6776

1.2. Univariantes: Euro.

	<i>EUR</i>					
	<i>GARCH</i>	<i>TGARCH</i>	<i>CJ GARCH</i>	<i>CJ TGARCH</i>	<i>TVJI GARCH</i>	<i>TVJI TGARCH</i>
$\mu$	-0.0198 (0.0158)	-0.0261 (0.0163)	0.0021 (0.0175)	-0.0017 (0.0218)	0.0023 (0.0155)	0.0019 (0.0134)
$w$	0.0014 (0.0006)	0.0011 (0.0005)	-0.0014 (0.0029)	-0.0023 (0.0034)	-0.0013 (0.0030)	-0.0019 (0.0027)
$\alpha$	0.0314 (0.0050)	0.0181 (0.0056)	0.0110 (0.0067)	0.0098 (0.0072)	0.0108 (0.0061)	0.0127 (0.0058)
$\beta$	0.9659 (0.0051)	0.9701 (0.0047)	0.9895 (0.0048)	0.9897 (0.0032)	0.9896 (0.0052)	0.9765 (0.0073)
$\gamma$	-	0.0198 (0.0058)	-	0.0153 (0.0014)	-	0.0128 (0.0025)
$\theta$	-	-	0.0586 (0.0349)	0.0433 (0.0277)	0.0578 (0.1026)	0.0511 (0.1213)
$\delta$	-	-	0.1104 (0.0194)	0.1079 (0.0211)	0.1091 (0.0201)	0.1054 (0.0199)
$\lambda$	-	-	0.2398 (0.1740)	0.2214 (0.1716)	0.2373 (0.1751)	0.2104 (0.1806)
$\eta$	-	-	-	-	0.1730 (0.3661)	0.1702 (0.3819)
<i>LogL</i>	-690.55	-689.08	-634.68	-633.40	-634.67	-633.38
<i>AIC</i>	1.5767	1.5756	1.4567	1.4560	1.4589	1.4582
<i>SBIC</i>	1.6084	1.6028	1.4946	1.4994	1.5023	1.5071

1.2. Univariantes: Libra esterlina.

	<i>GBP</i>					
	<i>GARCH</i>	<i>TGARCH</i>	<i>CJ GARCH</i>	<i>CJ TGARCH</i>	<i>TVJI GARCH</i>	<i>TVJI TGARCH</i>
$\mu$	-0.0049 (0.0146)	-0.0147 (0.0143)	-0.0182 (0.0137)	-0.0192 (0.0240)	-0.0238 (0.0315)	-0.0179 (0.0224)
$w$	0.0020 (0.0010)	0.0014 (0.0006)	-0.0292 (0.0410)	-0.0310 (0.0310)	-0.0238 (0.0295)	-0.0243 (0.0303)
$\alpha$	0.0438 (0.0116)	0.0028 (0.0103)	0.0467 (0.0037)	0.0054 (0.0093)	0.0661 (0.0315)	0.0136 (0.0092)
$\beta$	0.9492 (0.0134)	0.9627 (0.0097)	0.9577 (0.0107)	0.9785 (0.0013)	0.9482 (0.0015)	0.9487 (0.0110)
$\gamma$	-	0.0599 (0.0016)	-	0.0322 (0.0042)	-	0.0214 (0.0021)
$\theta$	-	-	0.0560 (0.0424)	0.0523 (0.0455)	0.0472 (0.0820)	0.0455 (0.0973)
$\delta$	-	-	0.1059 (0.0787)	0.1041 (0.0777)	0.1153 (0.0816)	0.1170 (0.08404)
$\lambda$	-	-	0.2320 (0.2148)	0.2443 (0.2171)	0.2435 (0.1951)	0.2212 (0.2013)
$\eta$	-	-	-	-	0.1662 (0.2804)	0.1606 (0.2709)
<i>LogL</i>	-550.68	-544.80	-535.22	-533.92	-534.44	-533.57
<i>AIC</i>	1.2592	1.2481	1.2309	1.2302	1.2314	1.2317
<i>SBIC</i>	1.2809	1.2752	1.2689	1.2736	1.2748	1.2805

2.1. Multivariantes: Bitcoin-Euro.

	1 = BTC , 2 = EUR					
	BEKK	BEKK asim	CBP BEKK	CBP BEKK asim	CBP BEKK R <sup>2</sup>	CBP BEKK asim R <sup>2</sup>
$\mu_1$	0.2748 (0.0334)	0.3711 (0.0210)	0.1494 (0.1042)	0.1523 (0.0977)	0.1662 (0.1270)	0.1797 (0.1330)
$\mu_2$	-0.0076 (0.0552)	-0.0335 (0.0406)	-0.0011 (0.0033)	0.0017 (0.0042)	0.0011 (0.0160)	-0.0102 (0.0314)
$c_1$	1.3158 (0.7731)	1.2723 (0.7337)	0.8221 (0.2943)	0.8302 (0.3082)	0.6509 (0.2416)	0.7130 (0.3492)
$c_2$	0.0325 (0.0111)	0.0604 (0.0355)	-0.0053 (0.0006)	-0.0075 (0.0064)	-0.0054 (0.0158)	-0.0062 (0.0173)
$c_{12}$	-0.0065 (0.0155)	0.0579 (0.1014)	-0.0084 (0.0158)	-0.0105 (0.0739)	-0.0031 (0.0623)	0.0217 (0.0915)
$a_1$	0.2460 (0.0679)	0.2447 (0.0361)	0.4036 (0.0524)	0.3923 (0.0437)	0.3633 (0.0487)	0.3191 (0.0403)
$a_{12}$	-0.0044 (0.0018)	0.0257 (0.0257)	-0.0736 (0.0965)	0.0096 (0.0887)	-0.0108 (0.0362)	0.0083 (0.0219)
$a_{21}$	0.0495 (0.0110)	0.0420 (0.0284)	-0.0022 (0.0083)	0.0114 (0.0099)	-0.0023 (0.0094)	-0.0173 (0.0330)
$a_2$	0.1433 (0.0210)	0.1371 (0.0772)	0.1004 (0.0118)	0.0865 (0.0133)	0.1090 (0.0150)	0.0814 (0.0113)
$b_1$	0.9418 (0.0725)	0.9284 (0.0844)	0.8016 (0.0770)	0.7898 (0.1001)	0.8607 (0.0421)	0.8002 (0.0508)
$b_{12}$	-0.0013 (0.0119)	0.0316 (0.0632)	0.0686 (0.0757)	-0.0466 (0.0609)	0.0446 (0.0975)	0.0528 (0.0887)
$b_{21}$	0.0192 (0.1458)	-0.0287 (0.0637)	0.0013 (0.0050)	-0.0200 (0.0521)	0.0011 (0.0605)	-0.0023 (0.0565)
$b_2$	0.9380 (0.0159)	0.9617 (0.0535)	0.9883 (0.0019)	0.9780 (0.0108)	0.9871 (0.0034)	0.9712 (0.0045)
$g_1$	-	-0.0662 (0.0106)	-	-0.0695 (0.0211)	-	-0.0817 (0.0304)
$g_{12}$	-	0.0732 (0.0260)	-	-0.0537 (0.0714)	-	0.0515 (0.0802)
$g_{21}$	-	-0.0042 (0.0155)	-	0.0015 (0.0085)	-	-0.0022 (0.0079)
$g_2$	-	0.0660 (0.0582)	-	0.0471 (0.0403)	-	0.0213 (0.0156)
$\theta_1$	-	-	-0.0762 (0.0562)	-0.0597 (0.0450)	-0.0475 (0.0329)	-0.0451 (0.0347)
$\theta_2$	-	-	0.0525 (0.0421)	0.0343 (0.0199)	0.0260 (0.0133)	0.0331 (0.0135)
$\delta_1$	-	-	5.8690 (1.7582)	5.6701 (1.240)	5.5319 (1.7276)	5.6043 (1.749)
$\delta_2$	-	-	0.1168 (0.0205)	0.1237 (0.0320)	0.1310 (0.0273)	0.1115 (0.0313)
$\lambda_1$	-	-	0.1561 (0.0730)	0.1483 (0.0666)	0.1246 (0.0741)	0.1337 (0.0813)
$\lambda_2$	-	-	0.2577 (0.0996)	0.2537 (0.1006)	0.2377 (0.1161)	0.2219 (0.1099)
$\lambda_3$	-	-	0.0001 (0.0015)	0.0002 (0.0027)	0.0018 (0.0122)	0.0011 (0.0107)
$\eta_1$	-	-	-	-	0.1803 (0.1205)	0.1783 (0.1273)
$\eta_2$	-	-	-	-	0.6006 (0.6973)	0.6201 (0.7004)
$\eta_3$	-	-	-	-	0.1758 (1.6973)	0.1793 (1.7301)
$\eta_4$	-	-	-	-	0.2913 (0.3164)	0.3010 (0.3319)
$\rho$	-	-	-0.0803 (0.0353)	-0.0679 (0.0407)	-0.1155 (0.0828)	-0.0901 (0.0776)
<b>LogL</b>	-3626.23	-3551.01	-3127.82	-3116.35	-3129.55	-3127.04
<b>AIC</b>	8.2616	8.0999	7.1482	7.1313	7.1612	7.1646
<b>SBIC</b>	8.3321	8.1921	7.2622	7.2669	7.2969	7.320

2.1. Multivariantes: Euro-Libra esterlina.

	1 = EUR , 2 = GBP					
	BEKK	BEKK asim	CBP BEKK	CBP BEKK asim	CBP BEKK R <sup>2</sup>	CBP BEKK R <sup>2</sup> asim
$\mu_1$	-0.0328 (0.0396)	-0.0781 (0.0681)	-0.0044 (0.0182)	0.0034 (0.0194)	0.0012 (0.0274)	-0.0009 (0.0016)
$\mu_2$	-0.0588 (0.0419)	-0.0484 (0.0131)	-0.0108 (0.0152)	0.0052 (0.0176)	-0.0004 (0.0082)	-0.0006 (0.0067)
$c_1$	0.0404 (0.0114)	0.0143 (0.0113)	0.0037 (0.0068)	0.0022 (0.0040)	-0.0006 (0.0034)	-0.0004 (0.0029)
$c_2$	0.0486 (0.0048)	0.0188 (0.0068)	0.0011 (0.0015)	0.0009 (0.0018)	0.0002 (0.0055)	0.0001 (0.0023)
$c_{12}$	-0.0379 (0.0237)	-0.0058 (0.0108)	-0.0009 (0.0015)	-0.0009 (0.0016)	0.0011 (0.0149)	-0.0008 (0.0027)
$a_1$	0.1375 (0.0435)	0.1489 (0.0275)	0.1014 (0.0175)	0.1120 (0.0198)	0.1031 (0.0170)	0.1114 (0.0190)
$a_{12}$	0.0712 (0.0179)	0.0719 (0.0158)	-0.0741 (0.0967)	0.0716 (0.1002)	-0.0920 (0.0800)	0.0803 (0.0766)
$a_{21}$	-0.0584 (0.0097)	-0.0475 (0.0341)	0.0273 (0.0799)	-0.0224 (0.0813)	0.0328 (0.1562)	-0.0231 (0.0970)
$a_2$	0.1780 (0.0622)	0.1802 (0.0371)	0.1764 (0.0537)	0.1659 (0.0501)	0.1739 (0.1488)	0.1672 (0.1391)
$b_1$	0.9782 (0.0089)	0.9729 (0.0020)	0.9845 (0.0107)	0.9689 (0.0169)	0.9823 (0.0121)	0.9696 (0.0170)
$b_{12}$	-0.0762 (0.0121)	0.0357 (0.0067)	0.0180 (0.0190)	-0.0171 (0.0188)	0.0212 (0.0224)	0.01726 (0.0310)
$b_{21}$	0.0882 (0.0267)	-0.0742 (0.0024)	-0.0043 (0.0102)	0.0040 (0.0112)	-0.0030 (0.0454)	0.0034 (0.0507)
$b_2$	0.9797 (0.0183)	0.9778 (0.0083)	0.9724 (0.0086)	0.9701 (0.0100)	0.9716 (0.0212)	0.9711 (0.0191)
$g_1$	-	0.0729 (0.0403)	-	0.0579 (0.0359)	-	0.0556 (0.0323)
$g_{12}$	-	-0.0349 (0.0617)	-	-0.0313 (0.0599)	-	-0.0283 (0.0570)
$g_{21}$	-	-0.1498 (0.0529)	-	-0.1098 (0.0550)	-	-0.0915 (0.0612)
$g_2$	-	0.0568 (0.0383)	-	0.0503 (0.0320)	-	0.0498 (0.0314)
$\theta_1$	-	-	0.0498 (0.0293)	0.0431 (0.0261)	0.0459 (0.0238)	0.0401 (0.0202)
$\theta_2$	-	-	0.0476 (0.0115)	0.0425 (0.0104)	0.0466 (0.0151)	0.0405 (0.0160)
$\delta_1$	-	-	0.0955 (0.0519)	0.0924 (0.0496)	0.1069 (0.0633)	0.0994 (0.0664)
$\delta_2$	-	-	0.1009 (0.0263)	0.0937 (0.0333)	0.1008 (0.0408)	0.0968 (0.0475)
$\lambda_1$	-	-	0.0038 (0.0234)	0.0046 (0.0248)	0.0143 (0.2129)	0.0200 (0.2207)
$\lambda_2$	-	-	0.0185 (0.0269)	0.0234 (0.0367)	0.0632 (0.0763)	0.0605 (0.0872)
$\lambda_3$	-	-	0.3036 (0.1783)	0.2905 (0.1701)	0.2647 (0.3556)	0.2513 (0.3434)
$\eta_1$	-	-	-	-	0.7342 (1.3519)	0.7219 (1.3612)
$\eta_2$	-	-	-	-	0.2798 (0.4087)	0.2835 (0.4110)
$\eta_3$	-	-	-	-	0.9010 (0.5971)	0.8837 (0.5870)
$\eta_4$	-	-	-	-	0.3547 (0.1365)	0.4003 (0.2008)
$\rho$	-	-	0.7176 (0.5220)	0.6802 (0.5008)	0.6019 (0.5170)	0.5304 (0.5307)
<b>LogL</b>	-1754.61	-1484.62	-1122.45	-1116.70	-1120.68	-1115.03
<b>AIC</b>	4.0127	3.4088	2.5958	2.5918	2.6008	2.5971
<b>SBIC</b>	4.0832	3.5011	2.7097	2.7274	2.7365	2.7544