

### Ejemplo de modelo con variables binarias

**Ejemplo** *Un bufete de abogados ha aceptado cinco nuevos casos, cada uno de los cuales puede ser llevado adecuadamente por cualquiera de los cinco asociados más recientes. Debido a la diferencia en experiencia y práctica, los abogados emplearán distintos tiempos en sus casos. Uno de los asociados más experimentados ha estimado las necesidades de tiempo en horas según la tabla siguiente:*

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Abogado 1	145	122	130	95	115
Abogado 2	80	63	85	48	78
Abogado 3	121	107	93	69	95
Abogado 4	118	83	116	80	105
Abogado 5	97	75	120	80	111

*Determinar qué caso debe llevar cada abogado (de modo que cada uno se dedique a un único caso) para que el tiempo empleado sea mínimo.*

Para modelizar el problema emplearemos 25 variables binarias  $x_{ij}$  que tomarán el valor 1 si el abogado  $i$  lleva el caso  $j$  y el valor 0 en caso contrario. Así, el tiempo que tardará en resolverse el caso 1 será de

$$145x_{11} + 80x_{21} + 121x_{31} + 118x_{41} + 97x_{51} \quad \text{horas,}$$

pues el único sumando no nulo en esta suma será el correspondiente al abogado que lleve el caso. Es claro entonces que la función objetivo será

$$\begin{aligned} &145x_{11} + 80x_{21} + 121x_{31} + 118x_{41} + 97x_{51} \\ &+ 122x_{12} + 63x_{22} + 107x_{32} + 83x_{42} + 75x_{52} \\ &+ 130x_{13} + 85x_{23} + 93x_{33} + 116x_{43} + 120x_{53} \\ &+ 95x_{14} + 48x_{24} + 69x_{34} + 80x_{44} + 80x_{54} \\ &+ 115x_{15} + 78x_{25} + 95x_{35} + 105x_{45} + 111x_{55}. \end{aligned}$$

Las restricciones han de forzar a que cada abogado lleve sólo un caso y que cada caso sea llevado sólo por un abogado.

Por ejemplo, que el abogado 1 lleve sólo un caso equivale a decir que sólo una de las cinco variables  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$  puede tomar el valor 1. Como son binarias, esto equivale a su vez a la ecuación

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1.$$

En total, el modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Min.} \quad & 145x_{11} + 80x_{21} + 121x_{31} + 118x_{41} + 97x_{51} \\
 & + 122x_{12} + 63x_{22} + 107x_{32} + 83x_{42} + 75x_{52} \\
 & + 130x_{13} + 85x_{23} + 93x_{33} + 116x_{43} + 120x_{53} \\
 & + 95x_{14} + 48x_{24} + 69x_{34} + 80x_{44} + 80x_{54} \\
 & + 115x_{15} + 78x_{25} + 95x_{35} + 105x_{45} + 111x_{55} \\
 \text{s.a.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \quad (\text{El abogado 1 lleva sólo un caso}) \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \quad (\text{El abogado 2 lleva sólo un caso}) \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1 \quad (\text{El abogado 3 lleva sólo un caso}) \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1 \quad (\text{El abogado 4 lleva sólo un caso}) \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \quad (\text{El abogado 5 lleva sólo un caso}) \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \quad (\text{Alguien lleva el caso 1}) \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \quad (\text{Alguien lleva el caso 2}) \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \quad (\text{Alguien lleva el caso 3}) \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \quad (\text{Alguien lleva el caso 4}) \\
 & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \quad (\text{Alguien lleva el caso 5}) \\
 & x_{ij} \text{ binarias}
 \end{aligned}$$

El modelo en LINGO es:

```
[Tiempo] Min=145*x11+80*x21+121*x31+118*x41+97*x51
+122*x12+63*x22+107*x32+83*x42+75*x52
+130*x13+85*x23+93*x33+116*x43+120*x53
+95*x14+48*x24+69*x34+80*x44+80*x54
+115*x15+78*x25+95*x35+105*x45+111*x55;
[Abogado1] x11+x12+x13+x14+x15=1;
[Abogado2] x21+x22+x23+x24+x25=1;
[Abogado3] x31+x32+x33+x34+x35=1;
[Abogado4] x41+x42+x43+x44+x45=1;
[Abogado5] x51+x52+x53+x54+x55=1;
[Caso1] x11+x21+x31+x41+x51=1;
[Caso2] x12+x22+x32+x42+x52=1;
[Caso3] x13+x23+x33+x43+x53=1;
[Caso4] x14+x24+x34+x44+x54=1;
[Caso5] x15+x25+x35+x45+x55=1;
@BIN(x11);@BIN(x12);@BIN(x13);@BIN(x14);@BIN(x15);
@BIN(x21);@BIN(x22);@BIN(x23);@BIN(x24);@BIN(x25);
@BIN(x31);@BIN(x32);@BIN(x33);@BIN(x34);@BIN(x35);
@BIN(x41);@BIN(x42);@BIN(x43);@BIN(x44);@BIN(x45);
@BIN(x51);@BIN(x52);@BIN(x53);@BIN(x54);@BIN(x55);
```

Y la solución:

Variable	Value	Reduced Cost
X11	0.000000	145.0000
X21	0.000000	80.00000
X31	0.000000	121.0000
X41	0.000000	118.0000
X51	1.000000	97.00000
X12	0.000000	122.0000
X22	0.000000	63.00000
X32	0.000000	107.0000
X42	1.000000	83.00000
X52	0.000000	75.00000
X13	0.000000	130.0000
X23	0.000000	85.00000
X33	1.000000	93.00000
X43	0.000000	116.0000
X53	0.000000	120.0000
X14	0.000000	95.00000
X24	1.000000	48.00000
X34	0.000000	69.00000
X44	0.000000	80.00000
X54	0.000000	80.00000
X15	1.000000	115.0000

X25	0.000000	78.00000
X35	0.000000	95.00000
X45	0.000000	105.0000
X55	0.000000	111.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
TIEMPO	436.0000	-1.000000
ABOGADO1	0.000000	0.000000
ABOGADO2	0.000000	0.000000
ABOGADO3	0.000000	0.000000
ABOGADO4	0.000000	0.000000
ABOGADO5	0.000000	0.000000
CASO1	0.000000	0.000000
CASO2	0.000000	0.000000
CASO3	0.000000	0.000000
CASO4	0.000000	0.000000
CASO5	0.000000	0.000000

Como las variables no nulas son  $x_{51}$ ,  $x_{42}$ ,  $x_{33}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{15}$ , concluimos que el abogado 5 debe llevar el caso 1, el abogado 4 el caso 2, el abogado 3 el caso 3, el abogado 2 el caso 4 y el abogado 1 el caso 5. De este modo el tiempo necesario será de 436 horas.