MATEMÁTICAS I

COLECCIÓN DE PROBLEMAS

CURSO ACADÉMICO 2018-19

Clara Calvo   Carlos Ivorra

Práctica 1 Introducción a las funciones de varias variables

1. La demanda mensual de cerveza de un consumidor viene dada por la función

$$D(r,p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

donde r es la renta mensual del consumidor (en miles de euros) y p es el precio (en euros) de un litro de cerveza. Actualmente, el precio es $p = 2$€ y el consumidor dispone de una renta de $r = 2\,000$€ mensuales.

   (a) Explica qué significa la notación $D(r,p)$.

   (b) Escribe la expresión que representa la demanda actual de cerveza y calcula su valor.

   (c) Calcula cuál sería la demanda si el consumidor pasara a disponer de una renta mensual de $r = 2.5$ u.m. Expresa el resultado correctamente e interprétalo.

   (d) ¿Y si, con la renta actual, el precio subiera 50 céntimos?

   (e) Expresa los resultados de los dos últimos apartados en términos de incrementos parciales de la función D.

   (f) Calcula el incremento (total) de la demanda si $\Delta r = 0.5$ u.m. e $\Delta p = 1$€. Exprésalo correctamente e interprétalo.

   (g) ¿Qué signo cabría esperar que tuviera $\Delta_r D(3,3)(0.5)$? Comprueba si tu conjetura es correcta.

   (h) Con el precio actual, ¿qué renta mensual haría que el consumidor limitara su consumo de cerveza a 8 litros mensuales?

   (i) Calcula a partir de qué precio el consumidor no estará dispuesto a comprar cerveza con su renta actual.

   (j) Calcula cuánto tendría que reducirse el precio de la cerveza para que el consumidor mantuviera su demanda tras haber sufrido un recorte salarial de un 5%.

2. Sea $f(x,y,z) = xy^2 - 3z$.

   (a) ¿Qué significa la notación $f(x,y,z)$?

   (b) Explica qué significa $f(2,1,7)$ y calcula su valor.

   (c) Calcula $\Delta_z f(2,1,7)(2)$.

   (d) Calcula $\Delta f(2,1,7)(-1,0,2)$.

   (e) Resuelve la ecuación $f(2,y,1) = 5$.

   (f) Resuelve la ecuación $f(1,p,2) = f(4,4,p)$.

3. Descompón en funciones básicas la función $g(u,v) = 5 \ln^4 \sqrt{u^2 v + 3}$.

---

4. La producción diaria de una empresa de fabricación de zapatos viene dada por

$$S(p,K,L) = p\sqrt[3]{KL^2} \text{ pares de zapatos},$$

donde p es el precio de venta en euros, K es el capital invertido en la producción (en euros) y L el número de trabajadores. Actualmente el capital de la empresa es $K = 120\,000$€ y su plantilla es de $L = 15$ trabajadores. Por otra parte, se estima que la demanda diaria de su producto es

$$D(p, M) = \frac{1\,470\sqrt{M}}{p} \; ,$$

donde M es la inversión mensual en marketing, que actualmente es de $M = 1\,600$ €.

(a) Calcula la oferta (producción) y la demanda que conseguiría la empresa si vendiera cada par de zapatos a un precio de 20 €.

(b) Interpreta los resultados obtenidos en el apartado anterior. ¿Le conviene a la empresa vender a ese precio?

(c) ¿Qué signo cabe esperar en ΔD si la empresa decide aumentar un 5% el precio de sus zapatos? Escribe la expresión completa para este incremento parcial y calcúlalo.

(d) Calcula (para la situación actual) el precio de equilibrio de la empresa, es decir, el precio p para el cual la oferta es igual a la demanda.

(e) Calcula la oferta y la demanda correspondientes al precio de equilibrio y comprueba que, en efecto, son iguales.

(f) Calcula $\Delta S(14, 120\,000, 15)(0, 67\,500, -3)$ e interpreta el resultado. (Redacta la interpretación evitando palabras técnicas como "incremento" y usando palabras cotidianas como "contratar", "despedir", "aportar capital", etc., de modo que resulte natural a cualquiera que no esté familiarizado con las matemáticas.)

(g) Calcula el incremento de demanda a que da lugar un incremento $\Delta M = 300$ € (manteniendo el precio de equilibrio). Exprésalo correctamente e interprétalo.

(h) ¿Qué incremento de capital ΔK debe aportar la empresa para que la oferta iguale a la nueva demanda calculada en el apartado anterior?

5. Si un banco nos ofrece un tanto por uno de interés i por nuestros ahorros, esto significa que si depositamos un capital C_0 en el instante $t = 0$, al cabo de t años nuestro capital será el dado por la expresión

$$C = C_0(1 + i)^t.$$

(a) ¿Qué deberíamos escribir en lugar de una simple C a la izquierda del signo $=$ si quisiéramos ser más precisos?

(b) Calcula el capital que tendremos al cabo de 5 años si en la actualidad ($t = 0$) depositamos 10 000 € en un banco que nos ofrece un 3% de interés anual ($i = 0.03$). Expresa el resultado con la notación adecuada.

(c) Calcula el incremento de capital que hemos conseguido con nuestra inversión. Escríbelo correctamente.

(d) Calcula $\Delta_t C(10\,000, 0.03, 2)(2)$ e interpreta el resultado. (Deduce del contexto cuál es cada variable.)

(e) ¿Qué capital tendríamos que invertir si quisiéramos disponer de 15 000 € dentro de 5 años?

(f) Otro banco nos ofrece 13 000 € dentro de 5 años si depositamos ahora nuestros 10 000 €. ¿Qué interés nos está ofreciendo?

6. La demanda D de un producto X viene dada por la función

$$D(r, p, p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

donde r es la renta media de los consumidores, p es el precio del producto X y p' el precio de un bien sustitutivo (es decir, de otro producto que los consumidores podrían comprar en lugar del que fabrica la empresa). Actualmente, ambos bienes se venden al precio de 1€ y el consumidor destina al producto X una renta de 36€.

(a) Calcula la cantidad de X que actualmente demandan los consumidores

(b) Calcula el incremento de demanda que se producirá si el precio del artículo X aumenta en 20 céntimos. Interpreta el resultado.

(c) Calcula el incremento de demanda que se producirá si el precio del bien sustitutivo aumenta a 2€ (y el de X se mantiene en 1€). Interpreta el resultado.

(d) Calcula el incremento de demanda que se producirá si suceden simultáneamente las variaciones de los dos apartados anteriores.

(e) Calcula el incremento de demanda que se producirá si los consumidores duplican su renta, pero los precios de ambos artículos también se duplican. Interpreta el resultado.

Cálculo de funciones e incrementos

7. Dadas las funciones

$$f(x, y, z) = \frac{x + y^2}{z^3}, \qquad Q(p, q) = \sqrt[5]{p + q^2}, \qquad H(r, s, t) = (r + 2s)t^3 + 3,$$

$$K(u, v) = \frac{1}{u} + \frac{3}{v}, \qquad L(m, n, t) = \frac{\frac{3}{t} - \sqrt{t}}{m^2 + n^2 + 5}, \qquad P(Q) = \frac{Q}{Q + 5}\left(7 - \frac{\sqrt{Q^2 + 2}}{Q + 1}\right),$$

(a) Comprueba los resultados siguientes:

$f(3, 5, 2) = 3.5$	$f\left(\frac{3}{7}, 0.2, 0.01\right) = 468\,571.43$	$Q(5, \sqrt{5}) = 1.58$
$Q(\sqrt{5}, 5) = 1.936$	$H(4, -4, -5) = 503$	$H\left(3, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) = 3.425$
$K(5, 7) = 0.628$	$K\left(-2, \frac{2}{5}\right) = 7$	$L(1, -5, 9) = -0.086$
$L(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}, 7) = -0.153$	$P(4) = 2.73$	$P(-10) = 16.24$

(b) Comprueba que

$\Delta_x f(5, 2, 1)(-2) = -2$	$\Delta f(1, 1, 1)(0.2, 0.1, -0.3) = 5.026$
$\Delta Q(1, -4)(-10, 2) = -3.14$	$\Delta_s H(6, -3, 5)(0.7) = 175$
$\Delta K\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right) = -6$	$\Delta_t L(-3, 4, 9)(1/12) = -5.6 \cdot 10^{-4}$
$\Delta P(3)(3.2) = 1.072$	

(c) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de Q que se produce al pasar de $(p,q) = (3,-2)$ a $(p,q) = (5,-1.5)$.

(d) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de K que se produce si partimos de $(u,v) = (5,3)$ e $\Delta u = 2$.

(e) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de L que se ha producido si ahora $(m,n,t) = (4,8,16)$ y antes las variables valían la cuarta parte que ahora.

(f) Calcula (y expresa correctamente) el incremento de P que se produce si $Q = 3$ y aumenta un 10%.

8. Comprueba con la calculadora los resultados siguientes:

(a) $2^{\sqrt{5}} - 3^{\ln 2} = 2.57$,

(b) $\cos\pi + \operatorname{sen}\sqrt{\pi} = -0.02$,

(c) $\dfrac{e^{\sqrt[7]{1000}}}{1+\ln 5} = 5.6$,

(d) $e^5 = 148.41$,

(e) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = 1$,

(f) $\operatorname{sen}^3\pi = 0$,

(g) $\operatorname{sen}\pi^3 = -0.398$,

(h) $\ln^4(\cos(\pi/3)) = 0.23$,

(i) $\ln(\cos^4(\pi/3)) = -2.77$,

(j) $\ln(\cos(\pi/3)^4) = -1.02$,

(k) $\ln(\cos(\pi^4/3)) = -0.7$.

Análisis de funciones elementales

9. Descompón las funciones siguientes en las funciones básicas que las componen:

a) $\operatorname{sen}(x+2y) - 2\cos(x^2y)$ *b)* $\dfrac{x(y^2+z^2)\ln z}{xy^2+z^2\ln z}$ *c)* $\ln^5(xy)$

d) $\ln(\cos^4 x)$ *e)* $5(x+y-z)e^{z/10}$ *f)* $\dfrac{40}{\frac{\operatorname{sen} xy}{z}}$

g) $\dfrac{\frac{40}{\operatorname{sen} xy}}{z}$ *h)* $\dfrac{\sqrt{x^2y+z^3}}{7xy-5}$ *i)* $\dfrac{x\operatorname{sen} y+5}{x^5\cos z-1}$

j) $(x\ln y)^{5+\operatorname{sen} x}$ *k)* $\dfrac{(y+3y^2)\operatorname{sen} x}{z^4\operatorname{sen} x}$ *l)* $\dfrac{\ln^3 x}{\cos^4(xy)}$

Ecuaciones

10. Resuelve las ecuaciones siguientes:

1) $p^2 + 2p = 5p - 1$	2) $(5t - 3)t = 2t - 8$	3) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x} = 5x$
4) $L^5 + 9 = 0$	5) $\sqrt[3]{c+3} - 2 = 5$	6) $\sqrt{4-x} - x = 2$
7) $x + 2 = \sqrt{4x+13}$	8) $p = 2 + \sqrt{p^2 - 2}$	9) $T^3 - 10T = 0$
10) $\dfrac{15}{p^2} - \dfrac{8}{p} + 1 = 0$	11) $10p\left(15 - \dfrac{3}{p}\right) = 0$	12) $10p\left(15 - \dfrac{3}{p}\right) = 1$

11. Calcula el precio de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son

$$S(p) = 25p, \qquad D(p) = \frac{2\,000}{p} - 50.$$

12. El coste de producir q unidades de un artículo viene dado por la función

$$C(q) = 5000 + q + \frac{q^2}{500}\,€.$$

   (a) Calcula el coste fijo de la empresa, es decir, el coste en el que incurre la empresa aunque no produzca ninguna unidad de producto.

   (b) Calcula la producción que puede conseguirse con un presupuesto de 15 000 €.

Cuestiones

13. La función $B(q, p)$ representa el beneficio anual de una empresa en función de la cantidad q que produce de un artículo y el precio p al que lo vende. Explica qué significa que $B(10\,000, 500) = 6\,000\,000$ u.m.

14. Dada una función $h(p, q)$, di con palabras lo que significa $\Delta h(3, 2)(1, -1)$.

15. Dada una función $g(x, y, z)$, explica la diferencia entre $\Delta_y g(3, 1, -1)(2)$ e $\Delta_z g(3, 1, -1)(2)$. En la expresión $\Delta g(1, 2, 3)(0.1, 0.2, 0.3)$, ¿cuál es el valor inicial de x?, ¿cuánto vale Δx?, ¿cuál es el valor final de x?

16. Si nos dicen que

$$P = 3s^2x + xks,$$

¿Por qué no podemos calcular $P(1, 3, -2)$? ¿Qué información nos falta?

17. Una empresa fabrica dos productos en cantidades q_1 y q_2, para lo cual utiliza tres materias primas cuyos precios son p_1, p_2 y p_3. Imagina que tenemos una expresión para calcular el coste C de la producción a partir de estos datos. ¿Cómo se expresa esto? ¿Cómo expresarías, más concretamente, el coste de producir 100 unidades del primer producto y 500 del segundo si las tres materias primas tienen un precio de 3 u.m.? ¿Y el incremento de coste si p_3 pasa a ser de 3.5 u.m?

18. Una empresa fabrica un artículo en cantidad Q y C es el coste de su producción. Si tenemos un criterio para calcular C a partir de Q, ¿esto significa que Q es función de C o que C es función de Q? ¿Dicha función se representará por $Q(C)$ o $C(Q)$?

Práctica 2 Funciones de varias variables

1. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$f(x,y)=\frac{x^{\ln y}\operatorname{sen}\frac{y}{x-2}}{\sqrt{5^x+\sqrt[3]{1-y}}},\qquad g(u,v,w)=\ln\left(\frac{\sqrt{u+1}-\sqrt[4]{v-1}}{(\cos w)^{u+3}}\right),$$

$$h(p,q,r,s)=\operatorname{sen}^5\sqrt[3]{pq-qr^4}-e^{s^4},\qquad k(a,b)=\left(a^{\sqrt{b}}+1,\frac{a}{b+3},\ln(a^4+7)\right).$$

2. Considera las funciones siguientes:

$$f(x,y,z)=30+xy^2-zy^{-2},\quad g(u,v)=\frac{uv^2+v^6}{v+3u},\quad p(w)=3w^4-2w+5,$$

$$h(r,s,t)=(r+s^4,st+3,rst-3rt^2,t),\quad P(m,n)=4m^3n-2m+7m^2n^5,$$

$$F(u,v,w)=u+5v-w,\quad G(x,y)=(5x+2y)^2+\frac{3}{x},\quad H(p,q,r)=8,$$

$$R(x,y,z,w)=\sqrt[4]{5x-3y+z+2w},\qquad S(x,y,z,w)=\sqrt[4]{5}x-3y+z+2w.$$

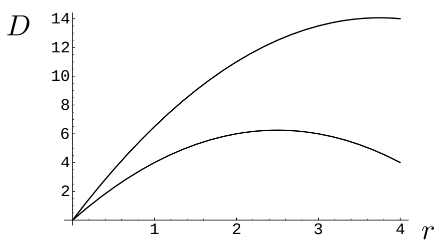
   (a) Indica cuáles son polinomios y cuáles no lo son. En caso de que no lo sean explica por qué.
   (b) De entre todas las funciones sólo hay una que es lineal. Indica cuál es.
   (c) Calcula sus dominios.
   (d) Particulariza para cada una de ellas la expresión $f: D\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

3. Consideremos de nuevo la función del problema 1 de la página 1:

$$D(r,p)=\frac{15r}{p}-r^2\ \text{l/mes},$$

que representa el consumo de cerveza en función de la renta r de un consumidor y del precio p del litro de cerveza. Los valores actuales son $p=2$ € y $r=2$ miles de €.

La figura muestra las gráficas de las funciones $D(r,2)$ y $D(r,3)$ (o, como dicen los economistas, dos gráficas de D como función de r "*ceteris paribus*"):



   (a) Razona qué curva corresponde a $D(r,2)$ y cuál a $D(r,3)$.
   (b) Determina si el número de litros consumidos aumentará o disminuirá si el consumidor pasa a tener una renta de 4 000 €.

(c) Si el precio es de 2 u.m., ¿qué renta daría lugar al mayor consumo mensual de cerveza aproximadamente? ¿Cuántos litros consumiría aproximadamente con dicha renta?

(d) Determina si, en caso de que, partiendo de los valores iniciales $(r, p) = (2, 2)$ la renta pase a ser de $r = 2.5$ u.m. y el precio pase a $p = 3$ u.m., el consumo de cerveza aumentará o disminuirá.

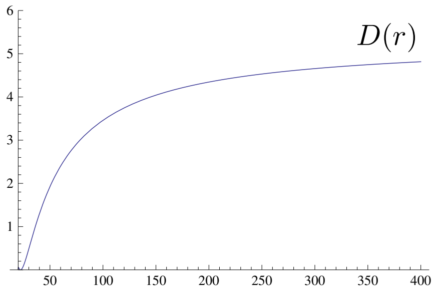
(e) Un bien se dice *normal* si cuando los consumidores tienen más renta aumentan el consumo, y se dice *inferior* en caso contrario. Razona a partir de las gráficas si la cerveza es un bien normal o inferior para nuestro consumidor.

(f) Calcula la función $D(2, p)$.

(g) Calcula $\lim_{p\to 0^+} D(2, p)$ e interpreta el resultado. ¿Depende el resultado de que la renta actual sea precisamente $r = 2$?

4. A partir de un estudio econométrico, un economista ha construido una función que se ajusta a la cantidad mensual de un bien que consume cada individuo de una población en función de su nivel de renta. La función resulta ser

$$D(r) = \left(1 - \frac{20}{r}\right) \ln^2\left(10 - \frac{200}{r}\right).$$



(a) Comprueba que el dominio de D es el conjunto $D_0 = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 20\}$. ¿Tiene esto una interpretación económica?

(b) ¿Está definida la función D para $r = 20$?

(c) A la vista de la gráfica, ¿tiene sentido hablar de la demanda del producto cuando la renta es de 20 u.m.?

(d) ¿Cómo expresarías el apartado anterior matemáticamente?

(e) ¿Qué cabe suponer que sucede con los consumidores cuya renta es menor de 20 u.m.?

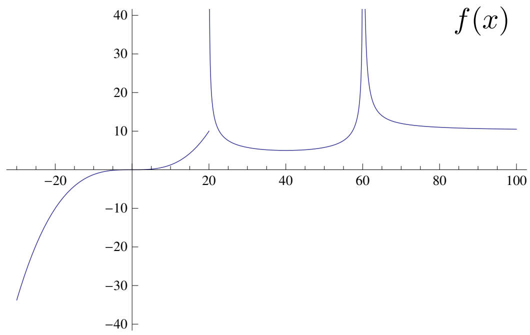
(f) Deduce de la gráfica el valor aproximado de $\lim_{r\to+\infty} D(r)$. Interprétalo.

(g) Calcula el límite del apartado anterior.

5. A partir de la gráfica, determina los límites siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 20^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 20^+} f(x), \quad \lim_{x\to 60} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$



6. Calcula los límites siguientes:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t^4}{3} - 5\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} 2 + \sqrt[3]{4 - 2x}\,, \qquad \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{\ln^3(h^2 + 2)}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x}\,,$$

$$\lim_{t\to 0^+} e^{2/t^3}\,, \qquad \lim_{t\to 0^-} e^{2/t^3}\,, \qquad \lim_{y\to 1} (y^2 - 1)^{2/3}\,, \qquad \lim_{y\to 1} (y^2 - 1)^{-2/3}\,.$$

Dominios

7. Calcula el dominio de las funciones siguientes y particulariza para cada una de ellas la expresión $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+3y} + \frac{\ln(x-y)}{z}}{e^{x-5y}}, \qquad h(u,v) = (\sqrt{\ln(u^2+v^2+3)},\ (u+v)\sqrt[3]{u},\ 3^{u-v}),$$

$$f(x,y) = (\cos 2^y,\ y^5 \operatorname{sen} \sqrt[5]{x}), \quad P(a,b,c,d) = \frac{\sqrt[4]{a}}{a^2+b^2+1} - \frac{\sqrt[3]{c}}{c^3+d^3+1},$$

$$h_1(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)+3, \quad h_2(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+3),$$

$$h_3(x,y,z) = \ln(x+y+z+3), \qquad h(t) = (\sqrt{t^2-t^3},\ (t+1)^t).$$

8. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

$$\frac{(x+y)^{3/4}}{x-y}, \quad \sqrt{x^2+y^2}, \quad 2^{x/\sqrt{y}}, \quad y^{x^2}, \quad (y^2)^x, \quad \frac{x\ln(x+y+1)}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\sqrt[4]{x-y^2}}{\sqrt[3]{x^3-2y}}, \quad \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^3+y^3}, \quad e^{\operatorname{sen} xy}, \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}, \quad f(x,y) = (x^2+2y^3)^{-3},$$

$$L(x,y) = x^{-2}\cos xy, \quad r(t) = \frac{t}{t+1}, \quad h(x,y,z) = (x\ln(y+z), e^{1/y}, x+y^2-3z),$$

$$f(m,n) = 3m^2 - 2mn + 7, \quad p(u,v) = (\sqrt{u+v},\ \ln u), \quad T(u,v) = \sqrt{e^{u/v}},$$

$$s(p,q,r) = (p+q)^{\ln r}, \quad f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - e^y).$$

Límites

9. Calcula los límites siguientes:

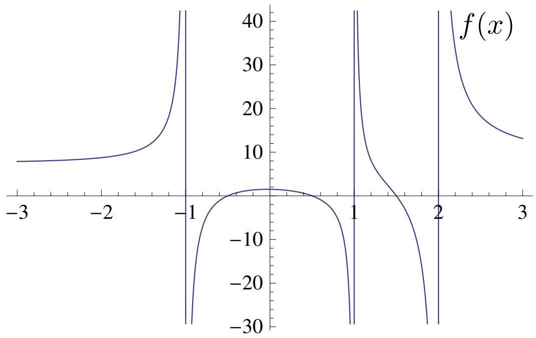
1) $\lim\limits_{t\to 0^-} -\frac{1}{5t^3}$	2) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2 + \frac{x^5}{4}$	3) $\lim\limits_{m\to +\infty} e^{-2m} + 3$
4) $\lim\limits_{z\to -\infty} 3^{-5z} - 100$	5) $\lim\limits_{t\to 0^+} 5^{-2/t}$	6) $\lim\limits_{y\to 1^-} \ln(1-y)$
7) $\lim\limits_{y\to 1^-} \ln^4(1-y)$	8) $\lim\limits_{k\to 0^+} \sqrt{1-e^{-5k}}$	9) $\lim\limits_{s\to 7^+} \sqrt[5]{\ln(s-7)}$
10) $\lim\limits_{a\to -\infty} \sqrt{1-2^{a^3}}$	11) $\lim\limits_{x\to 2^+} 5 - \ln(x^2-4)$	12) $\lim\limits_{b\to 2^+} \frac{1}{2-b}$
13) $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(3 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/3}$	14) $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(3 - \frac{1}{t^2}\right)^{-1/3}$	15) $\lim\limits_{z\to +\infty} \cos\frac{1}{z}$
16) $\lim\limits_{r\to -\infty} \ln(2^{-r} - 6)$	17) $\lim\limits_{s\to +\infty} 4s^{-3} + s^{-1}$	18) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{-3}}{x+1}$

10. Razona el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2000+2e^{-1/x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} 3-\ln\frac{2}{x+5}.$$

11. Razona el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{t\to-\infty} 5+\sqrt{1+\frac{3}{e^{t^2}}}, \qquad \lim_{t\to 2^+} e^{10+\frac{1}{\ln(t-2)}}.$$



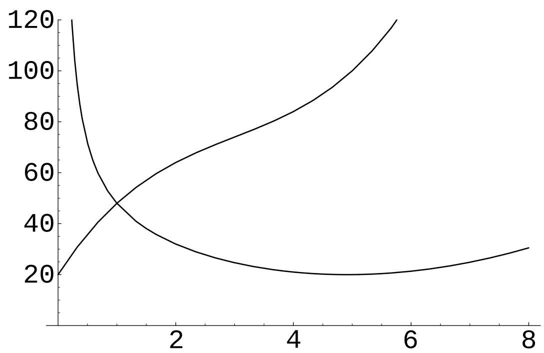
12. A partir de la gráfica, determina los límites de la función f en los puntos -1, 1, 2 y $1/2$.

Gráficas

13. Una fábrica produce diariamente q toneladas de detergente en polvo. El coste de la producción depende de q según la función

$$C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20 \text{ u.m.},$$

donde q es el nivel de producción diaria. El nivel de producción actual es de $q = 2$ toneladas.



(a) Calcula el coste de la producción actual.

(b) Si la empresa aumenta su nivel de producción, ¿es de esperar que el coste aumente o disminuya?

(c) Comprueba tu conjetura calculando $\Delta C(1)(1)$ y $\Delta C(2)(1)$. Interpreta ambos resultados.

(d) De las dos gráficas representadas en la figura, una corresponde a la función $C(q)$. Razona cuál es.

(e) ¿Cuándo crece más lentamente el coste, para producciones pequeñas, medias o grandes?

(f) Calcula $\lim\limits_{q\to+\infty} C(q)$ e interprétalo.

(g) En el apartado (c) has podido comprobar que el coste de producir una tonelada más de detergente no es siempre el mismo o, dicho de otro modo, que no todas las toneladas producidas tienen el mismo coste. Por ello es razonable calcular el *coste medio* de la producción (lo que cuesta de media cada tonelada producida), que es

$$\mathrm{CMe}(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 9q + 36 + \frac{20}{q} \text{ u.m./t.}$$

Calcula el coste medio actual e interprétalo.

(h) La otra gráfica que aparece en la figura es la de la función $\mathrm{CMe}(q)$. A partir de ella explica cómo se comporta el coste medio al aumentar la producción: ¿aumenta, disminuye, o depende?

(i) Expresa matemáticamente el comportamiento del coste medio que observas en la figura para producciones q próximas a 0.

(j) ¿Cuál es aproximadamente, según la gráfica, la producción para la que el coste medio es el menor posible?

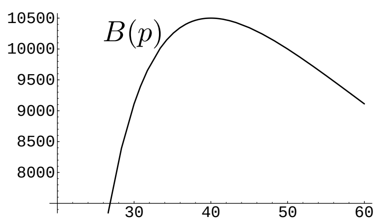
14. Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo producto tecnológico para el cual no tiene competencia, así que puede fijar el precio p que considere más conveniente. Un estudio de mercado indica que la demanda diaria del producto vendrá dada aproximadamente por la función

$$D(p) = \frac{1\,000\,000}{p^2}.$$

El coste unitario de fabricación es de 20 €, y además hay un coste fijo de 2 000 €.

(a) Calcula la función de beneficios diarios de la empresa $B(p)$ en términos del precio de venta p (entendiendo que la cantidad diaria q que fabricará la empresa es la demanda esperada).

(b) Calcula el precio mínimo p_0 y el precio máximo p_1 a los que puede vender la empresa su producto para obtener beneficios (los que cumplen $B(p) = 0$).

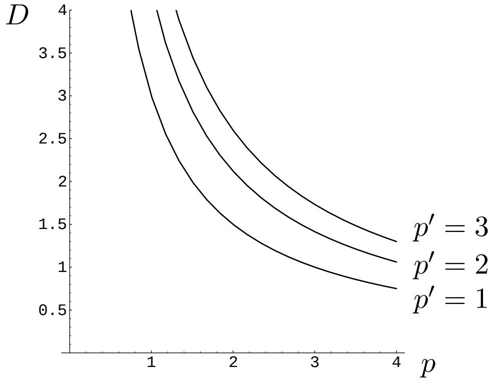


(c) Según la figura, ¿a qué precio le conviene a la empresa vender su producto?

15. Consideremos de nuevo la función de demanda del producto X del problema 6 (pág. 3):

$$D(r, p, p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

donde p es el precio de X, p' el precio de un bien sustitutivo y r es la renta de los consumidores. Supongamos que la renta de los consumidores permanece fija en $r = 36$ u.m. La figura siguiente muestra las gráficas de las funciones $D(36, p, p')$ para $p' = 1$, $p' = 2$ y $p' = 3$.



(a) Calcula las tres funciones $D(36, p, 1)$, $D(36, p, 2)$ y $D(36, p, 3)$.

(b) A la vista de las gráficas, si el precio p' se mantiene constante y p aumenta, ¿qué le sucede a la demanda, aumenta o disminuye? Interpreta la respuesta.

(c) A la vista de las gráficas, si el precio p se mantiene constante y p' aumenta de 1 a 2 o de 2 a 3, ¿qué le sucede a la demanda, aumenta o disminuye? Interpreta la respuesta.

(d) Calcula $\lim\limits_{p \to 0} D(36, p, 2)$ y $\lim\limits_{p \to +\infty} D(36, p, 2)$. Interpreta los resultados.

(e) Señala en la figura el punto inicial y el punto final del incremento $\Delta D(36, 2, 1)(0, 1, 2)$. ¿Cómo será este incremento según la figura, positivo o negativo?

(f) Calcula analíticamente el incremento del apartado anterior y comprueba que su signo es el que muestra la gráfica.

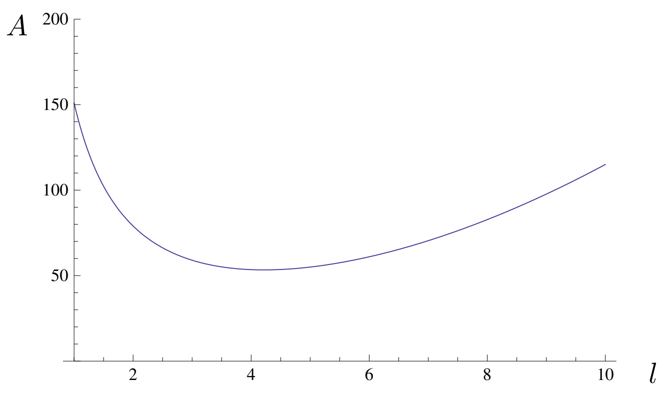
16. El ahorro mensual de un cierto trabajador viene dado por la función

$$A(r, p, l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \text{ €},$$

donde r es su salario, p un indicador del precio de los artículos de primera necesidad y l un indicador del precio de los artículos de lujo que interesan al trabajador. Actualmente, el trabajador cobra 2 400 € mensuales y los indicadores son $p = 4$ y $l = 3$.

(a) La gráfica muestra el ahorro en función de l para los valores actuales de r y p. Escribe dicha función y representa el punto que corresponde a la situación actual.

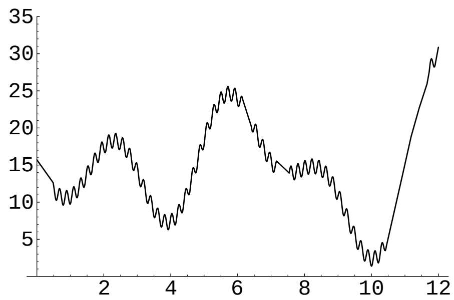
(b) A la vista de la gráfica, indica sin hacer cálculos el signo de $\Delta_l A(2400, 4, 3)(1)$ y $\Delta_l A(2400, 4, 3)(5)$. Razona tu respuesta.



17. La cotización en bolsa de las acciones de una empresa durante el último año ha sido la dada por la función

$$C(t) = 15 + 5\,\mathrm{sen}(2t + 3) + t\cos t + \mathrm{sen}(30t),$$

donde t es el tiempo en meses, de modo que el año empieza en $t = 0$. (Así, 1 día $= 1/30$ mes. Un año financiero tiene 360 días.) La figura muestra la gráfica de la función $C(t)$:



(a) Calcula el dominio de C y el subdominio con sentido económico.

(b) Calcula la cotización inicial y la cotización final de las acciones en el año considerado.

(c) ¿Cuál hubiera sido el mejor momento para invertir en ellas? ¿Y el peor?

(d) Si hubiéramos comprado acciones el 1 de abril ($t = 4$), ¿hubiera sido rentable venderlas tres días más tarde? Calcula el incremento ΔC correspondiente.

Cuestiones

18. ¿Qué es el dominio de una función?

19. ¿Qué significa $f : D \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Pon un ejemplo concreto en el que

$$D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x \neq 0\}.$$

¿Cómo se lee esto último?

20. Si $f(u, v) = 5 + u/v$, explica qué le sucede a f en el punto $(5, 0)$. Relaciona tu respuesta con el dominio de f.

21. ¿Por qué el dominio de $f(x, y) = e^{x+y}$ es $\mathbb{R}^2$ y no $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e > 0\}$?

22. Razona sin usar la calculadora si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

(a) $e^{-5} > 0$,

(b) $\ln 10 > 0$,

(c) $\mathrm{sen}\, 5\,000 > 5$,

(d) $\ln(0.001) > 0$,

(e) $\ln(-2) < 0$,

(f) $3^{-8} < 0$,

(g) $\sqrt[3]{-15} < 0$,

(h) $\sqrt[4]{-15} < 0$,

(i) $(-17)^4 > 0$.

Práctica 3 Composición de funciones

1. La función de beneficios de una empresa es $B(I, C) = I - C$, donde I son sus ingresos y C sus costes. A su vez, los ingresos vienen dados por $I(p, q) = pq$, donde p es el precio de venta de su producto y q la cantidad producida, y la función de costes es

$$C(q) = q^2 + 2q + 16.$$

   (a) ¿Cómo se llama la función compuesta de las funciones dadas? Calcúlala y determina su valor para $(p, q) = (20, 10)$. Interpreta el resultado.

   (b) Veremos más adelante (problema 5 pág. 31) que, si la empresa no puede influir en el precio de mercado p, el máximo beneficio lo consigue determinando su producción según la función de oferta $q = S(p) = (p - 2)/2$. Calcula la función compuesta $B(p)$ e interprétala.

   (c) Explica la diferencia de interpretación entre las funciones calculadas en los dos apartados anteriores.

   (d) Calcula $B(20)$ e interpreta el resultado. Explica la diferencia con el beneficio calculado en el apartado (a).

   (e) Determina el *precio de cierre* de la empresa, es decir, el precio de mercado para el cual sus beneficios son nulos (y por debajo del cual son negativos).

2. Calcula la composición de las funciones

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2y + z}, \qquad x(p) = p^3, \qquad y(p, q) = p - q, \qquad z(p, q) = p\,2^q.$$

   Calcula $f(1, 2, 7)$ y $f(1, 3)$.

---

3. Una empresa planea sacar al mercado un nuevo producto cosmético. Un estudio de los costes indica que el precio de venta más adecuado viene dado por $p = 30 + 12c$, donde $0 \leq c \leq 1$ es un índice que mide la calidad del producto. Por otra parte, un estudio de mercado prevé que la demanda diaria del nuevo producto vendrá dada por la función

$$D(p, c) = \frac{60\,000\,c}{\sqrt{p}}.$$

   (a) Obtén la función $c(p)$ que determina la calidad que debe tener el producto para que su precio de venta pueda ser p.

   (b) Calcula la función $D(p)$ e interprétala. Explica la diferencia de interpretación entre $D(p, c)$ y $D(p)$.

   (c) El plan inicial de la empresa es lanzar el cosmético con un precio $p = 36$ €. Estudia si aumentar este precio inicial en 2 € produciría un aumento o una disminución en la demanda esperada. Calcula para ello el incremento adecuado ΔD. Escríbelo correctamente.

   (d) Interpreta el resultado obtenido en el apartado anterior.

   (e) Calcula el precio al que debe lanzarse el cosmético para conseguir una demanda de 6 000 unidades diarias. ¿Cuál tendría que ser su índice de calidad?

4. La función de beneficios de una empresa es $B(p, D) = 1000p \ln D$, donde p es el precio al que vende su producto y D es su demanda. Por otra parte, la demanda depende del precio según la relación $D(p) = 10\,000/p^4$.

   (a) Calcula la función compuesta $B(p)$ y explica la diferencia de interpretación entre $B(p, D)$ y $B(p)$.

   (b) Calcula $B(5)$ e interpreta el resultado.

   (c) Calcula $B(5, 20)$. ¿Tiene sentido económico el resultado? Si es así, ¿cuál?

5. Una industria química fabrica un producto a partir de tres materias primas. Cuando emplea x toneladas de la primera, y toneladas de la segunda y z litros de la tercera, la producción que obtiene es la dada por la función

$$Q(x, y, z) = x^2\sqrt{y} + z^2.$$

   No obstante, para que el producto tenga las propiedades deseadas es necesario que las cantidades empleadas de las dos primeras materias primas respeten la proporción $y = 4x$.

   (a) Calcula la función compuesta (indicando su nombre) y explica la diferencia de interpretación respecto de la función de producción dada.

   (b) Calcula $Q(1, 2)$ e interpreta el resultado.

6. Un consumidor puede adquirir tres bienes en cantidades x, y, z, y la utilidad que consigue con cada posible compra viene dada por la función

$$U(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}.$$

   Los bienes son complementarios, de modo que por cada unidad que adquiere del segundo artículo necesita 3 del primero y 9 del tercero (es decir, $x = 3y$, $z = 9y$).

   (a) Calcula la función compuesta (indicando su nombre) y explica la diferencia de interpretación respecto de la función de utilidad dada.

   (b) Calcula $U(2)$ e interpreta el resultado.

7. Calcula la composición de las funciones indicadas. Escribe el nombre de la función compuesta en cada caso y simplifica su expresión en la medida de lo posible.

   (a) $f(u, v) = u/v, \quad u = x^2y^5z, \quad v = xyz^6.$

   (b) $f(u, v) = u/v, \quad u = x^2y^5 + x^5y^2z^3, \quad v = x^2y^5z.$

   (c) $f(x, y, z) = x^2yz, \quad x = p^3q, \quad y = p^2 + q^2.$

   (d) $P(s, t) = \sqrt{s} + \sqrt{t}, \quad s = u^4v^2, \quad t = u^2 + v^2.$

   (e) $Q(a, b, c) = a^2bcd, \quad a = x^2, \quad b = xy, \quad c = \ln xy^3, \quad d = y^2.$

   (f) $h(p, q, r) = \sqrt{pq - r}, \quad p = x + y,\ q = x - 2y,\ r = xy + 2y^2.$

   (g) $f(t) = e^t, \quad t = \ln xy.$

   (h) $h(x, y) = 5 \ln x - \sqrt[3]{y}, \quad x = e^{p-2q},\ y = (p + q)^6.$

Práctica 4 Funciones homogéneas

1. Estudia la homogeneidad de las funciones siguientes:

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + z^5 \qquad g(x,y) = \frac{x^2y + 3y^3}{x^7} \qquad h(u,v,w) = \sqrt[5]{u^2vw - 5v^2w^2}$$

$$p(s,t) = \frac{\sqrt{s} + 3\sqrt{t}}{\sqrt{2s+3t}} \qquad g(a,b) = 5a^3b - 6ab \qquad F(p,q,r) = p^5 \operatorname{sen}^2(p^2 + qr)$$

$$H(x,y) = y^3e^{x/y}\cos(5 + \tfrac{x^2}{y^2}) \qquad Q(K,L) = K^{0.2}L^{0.5} \qquad P(u,v) = (u^2v + v^3)^5$$

2. La función de demanda de un bien es

$$D(r,p,p_1,p_2) = \sqrt[5]{r}\ln\left(\frac{p_1p_2}{p^2}\right),$$

donde r es la renta de los consumidores, p el precio del bien y p_1, p_2 los precios de dos bienes sustitutivos. Estudia si existe ilusión monetaria.

3. La función de producción de una empresa viene dada por

$$Q(K,L,M) = \sqrt[6]{K^2LM^3}.$$

Estudia los rendimientos a escala de la empresa.

---

4. Estudia la homogeneidad de las funciones siguientes:

   (a) $f(x,y) = \sqrt[4]{xy^2 - x^3}$

   (b) $P(r,s) = r + 2s$

   (c) $Q(K,L) = K^3L^5$

   (d) $g(a,b,c) = \dfrac{ac^2 + 2b^3}{a - b - c}$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{e^{x/y}x^2\sqrt{x+y}}{3x+2y}$

   (f) $P(r,s,t) = \dfrac{r^2(2s+t)}{\sqrt{rs}}\ln(\dfrac{rs}{t^2})$

   (g) $t(x,y,z) = x\operatorname{sen}(yz)$

   (h) $h(u,v) = u^2 + v^4$

   (i) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz - x^2y}$

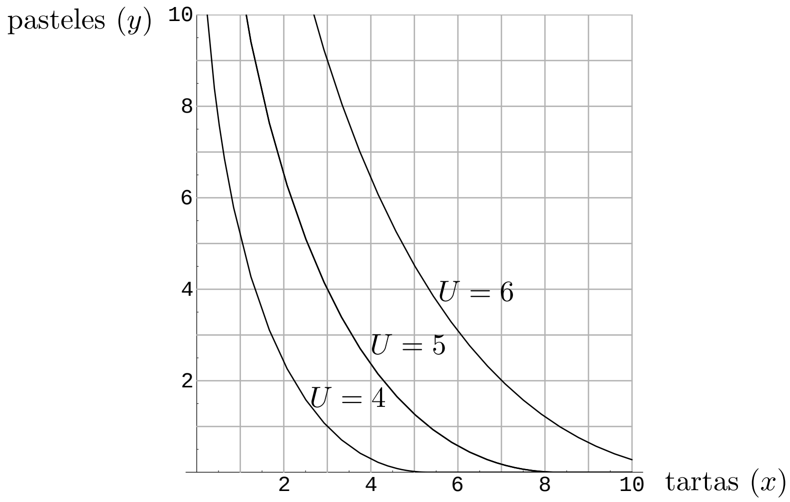
   (j) $f(x,y) = \dfrac{4\sqrt{x}}{y}$

   (k) $f(x,y) = x^2e^{x/y}\sqrt{xy}$

   (l) $T(u,v) = \sqrt[3]{u^4v^2 - u^6} - \sqrt[4]{\frac{u^{11}}{v^3}}$

Práctica 5 Funciones implícitas

1. Un consumidor goloso adquiere mensualmente x tartas e y pasteles. Su función de utilidad es
$$U(x, y) = \sqrt{3x} + \sqrt{y}.$$
Esto significa que U es la función con la que "puntúa" o "valora" sus posibles consumos, de modo que el hecho de que $U(2, 1) = 3.45$ y $U(1, 2) = 3.15$ se interpreta como que el consumidor está más satisfecho si se toma 2 tartas y 1 pastel que si se toma 1 tarta y 2 pasteles. Las curvas de nivel de utilidad se llaman *curvas de indiferencia.* La figura muestra las curvas de indiferencia correspondientes a niveles de utilidad 4, 5 y 6.



La respuesta a los apartados (a)–(d) siguientes debes razonarla a partir de la gráfica:

(a) Si actualmente adquiere 3 tartas al mes y 4 pasteles, ¿sobre qué curva de indiferencia nos encontramos?

(b) Si, partiendo del consumo actual, el consumidor tuviera que renunciar a una tarta, cuántos pasteles tendría que comprar de más para mantenerse en el mismo nivel de utilidad?

(c) Si un mes el consumidor se toma 4 pasteles, ¿cuántas tartas tendría que comerse para aumentar en una unidad su utilidad actual?

(d) Si quisiera conservar su nivel de utilidad actual comiendo sólo tartas, ¿cuántas tartas necesitaría?

(e) Escribe la ecuación de la curva de indiferencia actual e interprétala.

(f) Calcula la función implícita $y(x)$ determinada por la curva de indiferencia.

(g) ¿Cuál es la gráfica de la función $y(x)$?

(h) Calcula $y(2)$ y relaciona el resultado con el apartado (b).

(i) Localiza en la figura el valor de $y(2)$ e $y(3)$. ¿Es razonable deducir de la figura que $\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty$? Calcula el límite analíticamente. Interpreta el resultado.

2. Considera la función $f(x, y, z) = \dfrac{xe^z}{y}$.

   (a) Dibuja la gráfica de la función $f(x, 1, 0)$.

   (b) Escribe la ecuación de la curva de nivel 5 de la función f. Interprétala.

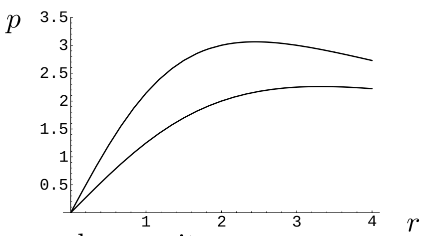
   (c) Comprueba si los puntos $(5, 1, 0)$, $(2, 3, 1)$ y $(1, 2, \ln 10)$ están o no sobre dicha curva de nivel.

   (d) Calcula las funciones implícitas $x(y, z)$ y $z(x, y)$ determinadas por la curva de nivel. Interprétalas.

   (e) Calcula $z(3, 8)$ e interpreta el resultado.

---

3. Continuando con el problema 1 (pág. 1), la gráfica siguiente muestra las curvas de nivel de demanda correspondientes a $D = 6$ y $D = 11$.



   (a) Escribe las ecuaciones de dichas curvas de nivel.

   (b) Razona cuál corresponde a cada curva.

   (c) Explica la interpretación económica de las ecuaciones que has escrito.

   (d) Identifica en la gráfica el punto que corresponde a la situación actual.

   (e) Supongamos que la renta del consumidor pasara a ser de 4 u.m. Para que su consumo de cerveza no variara, ¿el precio tendría que variar mucho o poco?

   (f) ¿Y si su renta pasara a ser de 1 u.m.?

   (g) Si el litro de cerveza pasara a valer 2.5 €, ¿el consumo mensual podría ser de 11 litros para algún nivel de renta? ¿Y de 6 litros? ¿Con qué nivel de renta, aproximadamente? Calcúlalo analíticamente a partir de la ecuación.

   (h) Calcula la función implícita $p(r)$ determinada por la curva de nivel correspondiente a $D = 6$. ¿Cuál es la interpretación económica de esta función? ¿Cuál es su gráfica?

   (i) Calcula $p(3)$ e interprétalo.

4. Un consumidor dispone de un presupuesto de 100 € para gastárselo en dos bienes A y B. El primero cuesta 5 € /unidad, y el segundo 12 € /unidad.

   (a) Escribe la función $G(x, y)$ que calcula el gasto del consumidor si compra x unidades del producto A e y unidades del producto B.

   (b) Las curvas de nivel de las funciones de gasto de este tipo son rectas, por lo que se llaman *rectas presupuestarias.* Escribe la ecuación de la recta presupuestaria correspondiente a los 100 € de que dispone el consumidor. Interprétala.

   (c) Representa gráficamente la recta presupuestaria del apartado anterior.

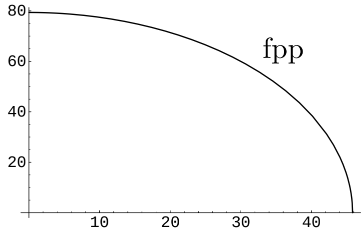
   (d) Calcula la función implícita $y(x)$ determinada por la recta presupuestaria. Interprétala.

   (e) Calcula $y(8)$ e interprétalo.

5. Calcula las funciones implícitas indicadas definidas por las ecuaciones indicadas:

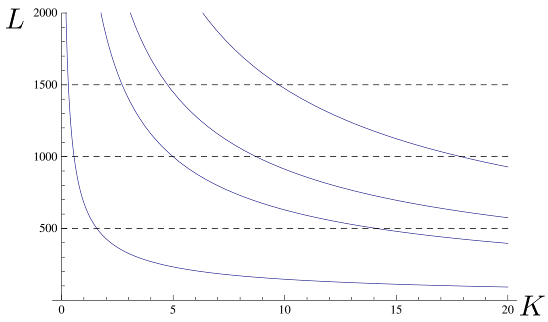
   (a) $\sqrt[5]{K^2L^4} = 2$, calcula $K(L)$.
   (b) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 100$, calcula $y(x, z)$.
   (c) $z \ln(xy) = 20$, calcula $x(y, z)$.
   (d) $(x + 2y)^z = 1\,000$, calcula $z(x, y)$.

6. Una empresa fabrica dos productos en cantidades x e y. La empresa puede decidir la cantidad que produce de cada uno de ellos, pero sus recursos son limitados y exigen que la producción (x, y) cumpla la relación $3x^2 + y^2 \leq 6\,300$. De este modo, las producciones que aprovechan al máximo los recursos de la empresa cumplen la ecuación $3x^2 + y^2 = 6\,300$. La curva determinada por esta ecuación se llama *frontera de posibilidades de producción de la empresa,* y está representada en la figura.



   (a) ¿Cuál es la máxima producción del primer producto que puede conseguir la empresa (a costa de no producir nada del segundo)?
   (b) ¿Cuál es la máxima producción del segundo producto que puede conseguir la empresa?
   (c) Calcula la función implícita $y(x)$ definida por la frontera de posibilidades de producción e interprétala.
   (d) Calcula $y(30)$ e interprétalo.
   (e) ¿Cuál es la gráfica de la función $y(x)$?
   (f) Si actualmente la empresa fabrica 30 unidades del primer producto, ¿cuántas unidades del segundo tendría que dejar de producir si quisiera aumentar en una unidad la producción del primero?
   (g) Marca en la figura el punto correspondiente a la producción actual de la empresa.

7. La función de producción de una empresa es $Q(K, L) = \sqrt[5]{K^2L^3}$, donde K es el número de máquinas empleadas en la producción y L el número de trabajadores. La gráfica muestra varias curvas de nivel de la función.



   (a) Escribe la ecuación de la isocuanta (curva de nivel de producción) correspondiente a una producción de 120 unidades de producto. Interprétala.
   (b) Calcula la función implícita $L(K)$ definida por dicha ecuación.
   (c) Calcula $L(15)$ e interpreta el resultado.
   (d) Calcula $\Delta L(15)(1)$ e interpreta el resultado.
   (e) Sabiendo que la curva de nivel actual es una de las representadas en la figura, señala los puntos correspondientes a la situación inicial y final del incremento del apartado anterior.

8. El ahorro mensual de un cierto trabajador viene dado por la función

$$A(r,p,l) = \frac{r}{p^2 l} + l^2 \text{ €},$$

donde r es su salario, p un indicador del precio de los artículos de primera necesidad y l un indicador del precio de los artículos de lujo que interesan al trabajador.

(a) Escribe la ecuación de la curva de nivel correspondiente a un ahorro de 59 € mensuales. Interprétala.

(b) Calcula la función implícita $p(r,l)$ determinada por la curva de nivel.

(c) Calcula $p(2400,3)$ e interpreta el resultado.

Cuestiones

9. Considera una función $f(x,y,z)$.

(a) ¿Cuál es el significado de una curva de nivel $f(x,y,z) = \alpha$?

(b) Si esta ecuación define una función implícita $z(x,y)$, ¿cuál es el significado de esta función?

(c) ¿Cómo será la función compuesta $f(x,y) = f(x,y,z(x,y))$?

Práctica 6 Cálculo de derivadas

1. Calcula las derivadas parciales de las funciones siguientes:

$$3x^5y^7 \qquad 2x^5y^2+3x^2y-2x+y-6 \qquad x^6e^{y^4} \qquad \sqrt{x^2\cos(y^3z+z^6)} \qquad x^y$$

$$2^{\operatorname{sen} y}\cos^5(x^2y^4+x^3) \qquad \ln^4\operatorname{sen}^3\sqrt{3x^2y-2y^2} \qquad \frac{\sqrt{y}\,\operatorname{sen} x}{(x^2+z^2)^3} \qquad \frac{x}{y^5}-5\,\frac{y+3}{z-2} \qquad 7xe^{x/y}$$

2. Calcula el vector gradiente de las funciones siguientes:
   (a) $f_1(x,y,z)=3x^5y+xy^4z+y^5+2z^2+5$,
   (b) $f_2(r,s)=r^5\cos 3s^4$,
   (c) $f_3(u,v,w)=(u^2+2uv+vw^5)e^{u+2v-w+1}$,
   (d) $f_4(p,q)=\operatorname{sen}^8(p^2+q^3)$,
   (e) $f_5(p,q)=\operatorname{sen}(p+2q^2)^8$.

3. Calcula la matriz jacobiana de las funciones siguientes:
   (a) $f(x,y)=(x^5y,x+y,x^2-3xy)$
   (b) $g(u,v,w)=(u^3e^{vw},7)$
   (c) $P(q)=(\ln q,3^q,\sqrt{q^3-3q},q+1)$

---

4. Calcula el vector gradiente de las funciones siguientes:
   (a) $f(x,y,z)=x^5y-3x^2z+xyz-3y+2$,
   (b) $g(x,y)=x/y^3$,
   (c) $h(x,y,z)=\sqrt{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)$,
   (d) $p(u,v)=\dfrac{u+v}{u^2+v^2}$,
   (e) $t(p,q)=\dfrac{p}{1+q^2}$,
   (g) $k(x,y)=\sqrt[5]{e^{xy^2}}$,
   (h) $L(r,s)=\sqrt[3]{2^{r+s}}$,
   (i) $P(a,b)=\dfrac{b-b^3}{a^2+2b-1}$,
   (j) $Q(x,y,z)=\dfrac{x\cos y}{\sqrt{y+2z}}$,
   (k) $T(v,w)=\ln^3(v/w)$.

5. Calcula la matriz jacobiana de las funciones siguientes:
   (a) $f(x,y,z)=(x+y^2,xyz)$
   (b) $T(s)=(s^2+1,1/s,\sqrt[3]{s})$
   (c) $g(x,y)=(x,y,\ln(x+y),x\operatorname{sen} y)$
   (d) $r(x,y,z)=(xy^2-z^5,8,2^{xy^3})$
   (e) $f(p,q,r)=(p^3+q^2,p+qr^3)$
   (f) $f(x,y)=(e^y,x\,2^{x+2y},7)$
   (g) $h(p,q)=(q\operatorname{sen} p,p^3\,2^{pq},\sqrt[3]{p})$
   (h) $p(x,y)=(x^2,xy,x^y)$
   (i) $h(s,t)=(s^2t,s,e^{st})$
   (j) $G(p,q)=(\ln p,\frac{\sqrt[3]{q}}{p},\sqrt{pq})$
   (k) $g(x,y)=(x^2y,3x+y^4)$
   (l) $P(u,v)=(u+v,uv,u^v)$

6. Calcula las derivadas parciales de las funciones siguientes:

1. $f(x,y,z) = 3x^2y + 5z^3 - 8$
2. $p(q,r) = q\cos r + r^5 \ln q$
3. $h(u,v,w) = u^4 e^{2u-v^3} + w2^w$
4. $G(s,t) = \dfrac{2st^2 + t}{5t^3 + s^2}$
5. $T(k,l) = \dfrac{e^k - l}{l^5 + 2}$
6. $P(r,s,t) = \dfrac{\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\, r}{3r^5 - 2^{4s+2}}$
7. $f(x,y) = \ln^4(\mathrm{sen}\, e^{2x^2-xy})$
8. $g(v,w) = \ln^5 \mathrm{sen}^4 \sqrt{v^3 - 5v^2w^5}$
9. $p(m,n) = 2^{3m}\,\mathrm{sen}\sqrt{m^2 + 8n}$
10. $S(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{5^{\mathrm{sen}\, x} + z}{\ln^3 y + z^2}}$
11. $R(a,b,c) = \sqrt[5]{\ln(a^5\sqrt{bc^3})}$
12. $q(u,v,w) = (\ln^5 u)e^{\sqrt[7]{v}}(w^3 - 3/w)$
13. $F(M,N) = \dfrac{\frac{1}{M} - \frac{1}{N}}{M^2 + N^2}$
14. $j(y,z) = \dfrac{9}{5y^3 + 7^{z/6}}$
15. $x(u,v) = (2u+v)e^{\sqrt{u}\ -v^5/3}$
16. $y(u,v) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{sen}\, u}}{u^v}$
17. $K(x,y) = (\ln\sqrt{x})^{y^5}$
18. $Q(a,b,c) = (2a - 5b)^{3c+2}$
19. $f(x,y) = \dfrac{e^y + 8}{(x^2y^3 + x)^{17}}$
20. $L(r,s,t) = \dfrac{2^r s^{\mathrm{sen}\, t}}{\mathrm{sen}^4 r}$
21. $M(f,g) = \left(\dfrac{f^3 + 6}{\sqrt[7]{g^2 + 3}}\right)^5$
22. $T(t,u) = 5e^{t/u} + \ln(t - u)$
23. $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^4\,\mathrm{sen}^5\sqrt{y})}$
24. $q(u,v,w) = \dfrac{3u}{(2\,\mathrm{sen}\, v\cos^5 w + 4)^5}$
25. $g(p,q,r) = p^2\,\mathrm{sen}^3 q^2 e^{q-r}$
26. $Q(i,j,k) = 2^i\,\mathrm{sen}(jk)\sqrt{k}$
27. $f(x,y) = 5e^{1/x + 1/y^2}$
28. $F(x,y,z) = 2^x(3 + \sqrt{y})^{-z}$
29. $k(p,q) = \dfrac{e^{p-q} + 3^{q-p}}{p}$
30. $r(s,t) = 5\left(s + \frac{1}{t}\right)^6 + st$
31. $k(a,b,c) = \ln^5\left(\dfrac{1/a + 2/b^4}{a + 1/c^5}\right)$
32. $f(u,v) = 2^{u+v}\sqrt{\cos^5 v^3}$
33. $p(u,v,w,x) = u^5 e^{v/w} + w\ln^5 x$
34. $f(x,z) = (1 + \mathrm{sen}\, x)^{2\ln z}$
35. $g(x,t) = (x^3 + 3x + 2)5^{x^2+3t^4}$
36. $h(x,t) = (x^3 + 3x + 2)^{3t^4}$
37. $p(x,y) = \dfrac{(x + e^x)^5}{(y + \sqrt[3]{y})^3}$
38. $A(f,g) = \dfrac{1}{f^2 + g^2\cos f}$
39. $B(h,k,l) = \dfrac{h^3\ln^4(h^2 + hk)}{l^6}$
40. $C(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_1} + x_1\sqrt[4]{x_1 7^{x_2}}$

7. Calcula las derivadas parciales de las funciones siguientes:

1. $f(x,y) = x \operatorname{sen}^5 e^{xy}$
2. $f(x,y) = \operatorname{sen}^3(\ln x^5)\, x^{y^2+3y}$
3. $g(x,y) = \dfrac{1/x^4}{(e^{2x}+xy^3)^3}$
4. $f(x,y,z) = x^2(\operatorname{sen}^4 \sqrt{y})2^{x^2z+z}$
5. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^{2y}}$
6. $f(x,y) = 3^{1/x^3} \ln^5 \sqrt[3]{ye^{3-y}}$
7. $g(x,y) = (\operatorname{sen} x^2)^{\cos y} \cdot x$
8. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 \sqrt{x}}{\cos y}$
9. $f(x,y) = \sqrt[5]{5x^2+3y^3} \ln x$
10. $f(x,y) = x^4 \cos^5 \sqrt{xy}$
11. $g(x,y) = \ln(x/y)$
12. $f(x,y) = (x^3+4xy)e^{\sqrt{x^2+5}}$
13. $g(x,y) = \dfrac{\ln x}{(x^2+y)^5}$
14. $f(x,y) = \sqrt{e^x \operatorname{sen} xy}$
15. $g(x,y) = \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\cos^3(y^2+1)}$
16. $f(x,y) = (2xy+1)\operatorname{sen}^5 \sqrt{x}$
17. $g(x,y) = \dfrac{2^{xy}}{x^5-3x+1}$
18. $f(x,y) = \operatorname{sen} \sqrt{\frac{x}{y}}$
19. $g(x,y) = \dfrac{x^2 e^{y^3}}{\ln x}$
20. $f(x,y) = \ln^5(x/y)$
21. $g(x,y) = e^{x^2+2y^3} \operatorname{sen} x^4$
22. $P(x,y) = \sqrt[4]{x} \ln^4(y^2-4)$
23. $Q(x,y) = \dfrac{e^x \cos y}{\sqrt{y^5+1}}$
24. $f(x,y) = x^5 \operatorname{sen}^4 \sqrt{y}$
25. $g(x,y) = e^{2x} \ln(2x-3y)$
26. $f(x,y) = x \cos e^{x/y}$
27. $f(x,y) = x^2 y \ln x^2$
28. $g(x,y) = (x^7+\sqrt{x}) \ln^5 y$
29. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+2xy}$
30. $g(x,y) = \dfrac{ye^{2x}}{y^2+1}$
31. $f(x,y) = y \ln(x^2+xy)$
32. $g(x,y) = \dfrac{xe^{y^2}}{y}$
33. $f(x,y) = e^{x^2y} \cos \sqrt{x^3+y}$
34. $f(x,y,z) = e^{x/y} \operatorname{sen}^2 z^5$
35. $f(x,y) = x^2 \cos \sqrt{x^3y+y^2}$
36. $g(x,y) = 4e^{x/y}+x^2+3$
37. $f(x,y) = e^x \sqrt{xy^2-3y}$
38. $g(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\ln(xz)}$
39. $f(x,y,z) = \sqrt{\operatorname{sen} x}\, \dfrac{\ln^4 y}{y^2+z^4}$
40. $f(x,y) = (xy^2+2y) \ln^5 \sqrt{x}$
41. $g(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{2y}}$
42. $f(x,y) = \operatorname{sen}^5 \sqrt{x/y^3}$
43. $g(x,y) = (3x^6y+\ln x)e^{\sqrt{x}}$
44. $f(x,y) = x^3 \ln^2(xy)$
45. $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+1}+\ln y}{y^3+y}$

Práctica 7 Interpretación de la derivada

1. Una empresa fabrica un artículo X a partir de dos factores de producción A y B. La función de producción es $P(x, y) = x + y + 0.005xy^2$ unidades de X, donde x e y son las cantidades de los factores de producción.

   (a) Calcula la producción actual si se están empleando 100 unidades de A y 80 unidades de B.

   (b) Calcula la producción marginal respecto de y para la producción actual. Indica su interpretación.

   (c) Calcula el incremento de producción que puede obtenerse si la cantidad empleada del factor B pasa a ser de 82 unidades. Haz el cálculo exacto y el cálculo aproximado a partir de la producción marginal. Calcula el porcentaje de error.

   (d) Ídem si, partiendo igualmente de 80 unidades de B, pasamos a utilizar 200 unidades. Compara los resultados en ambos casos.

2. Una editorial A es una de las principales suministradoras de libros a una pequeña ciudad, aunque tiene una única competidora B. La empresa estima que la demanda de sus libros en la ciudad depende del precio medio al que los vende p_1, del precio medio a que vende los libros la editorial B y del precio medio de los artículos de primera necesidad. Si la función de demanda (de los libros de A) es $D(p_1, p_2, p_3)$ y la empresa estima que, para los precios actuales $\bar{p}_0$, se tiene

$$\left.\frac{\partial D}{\partial p_1}\right|_{\bar{p}_0} = -2, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p_2}\right|_{\bar{p}_0} = -1, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p_3}\right|_{\bar{p}_0} = 2,$$

   (a) ¿Cuál de las variables p_2, p_3 representa —presumiblemente— a los precios de la editorial B y cuál a los precios de los artículos de primera necesidad?

   (b) Interpreta las derivadas.

   (c) ¿Qué efecto tendría para la editorial una rebaja media de sus precios de 0.8 unidades monetarias?

3. El capital de una empresa durante un periodo de diez años $[0, 10]$ viene dado por la función

$$C(t) = 500e^{3e^{0.01t}-3}.$$

   (a) Determina el capital con que contaba la empresa al principio del periodo y el capital final.

   (b) Calcula $\left.\dfrac{dC}{dt}\right|_0$ e interpreta el resultado.

   (c) Calcula la derivada de C en tanto por 1 en un instante arbitrario t. Llama $R(t)$ a la función resultante. (Es la rentabilidad de la empresa en cada instante.)

   (d) Calcula $R(0)$ y $R(10)$ e interpreta los resultados.

   (e) Calcula la derivada en porcentaje de $R(t)$. Interprétala.

4. La función de demanda de un artículo es $D(p,r) = \ln\left(1 + \frac{2r}{p}\right)$, donde p es el precio y r la renta media de los consumidores. El precio actual es $p = 2$ u.m. y $r = 100$ u.m.
   (a) Calcula la demanda actual.
   (b) Calcula las derivadas parciales de D para los valores actuales de las variables e interprétalas.
   (c) Usa las derivadas para determinar qué produciría un mayor incremento de la demanda:
      i. Un incremento de la renta de $\Delta r = 10$ u.m.
      ii. Un incremento del precio de $\Delta p = -0,5$ u.m.
   (d) Calcula los incrementos exactos de la demanda correspondientes a cada caso y compáralos con las estimaciones anteriores calculando el porcentaje de error.
   (e) Calcula la elasticidad de la demanda respecto del precio para los valores actuales e interprétala.

Interpretación de derivadas y aproximación de incrementos

5. La tasa de paro (porcentual) de dos países A y B viene dada por las funciones
$$P_A(t) = 8(1.1)^t \ \% \qquad \text{y} \qquad P_B(t) = 8(0.9)^t \ \%.$$
   (a) Determina la tasa de paro en la actualidad ($t = 0$) en ambos países.
   (b) Calcula las derivadas de ambas tasas en $t = 0$ e interprétalas.
   (c) ¿Cuál de los dos países está en mejor situación?

6. Se estima que la función de costes de una empresa es $C(x,y) = 150\ln(2+x+3y)$, donde x e y son las cantidades producidas de los dos artículos que fabrica la empresa. La producción actual es $(x,y) = (100,100)$. Determina el dominio matemático de la función C así como el subdominio con sentido económico.
   (a) Calcula el coste marginal respecto a cada uno de los artículos para los valores actuales de las variables. Interprétalos.
   (b) Escribe la fórmula que relaciona el incremento de coste que se produce si $\Delta x = 4$ con su aproximación con derivadas.
   (c) Calcula dicho incremento de forma exacta y de forma aproximada mediante la fórmula del apartado anterior. Calcula el porcentaje de error de la aproximación.
   (d) Repite los cálculos si, en lugar de incrementarse la producción del primer artículo, lo hace la del segundo, en la misma cantidad.

7. La función $B(D,p)$ nos da el beneficio de una empresa en función de su demanda diaria y del precio al que vende su producto. Actualmente la empresa tiene una demanda de 2 000 u.p. diarias y el precio de venta es de 3 €, con lo que consigue un beneficio de 90 000 €. Además:
$$\left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(2\,000,3)} = 2, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(2\,000,3)} = \pm 100\,000.$$

(a) Interpreta estas derivadas.

(b) Razona el signo correcto de la segunda derivada. (Haz el apartado siguiente considerando dicho signo.)

(c) Calcula $\Delta_p B(2\,000, 3)(0.1)$ e interpreta el resultado.

(d) Calcula la derivada en porcentaje del beneficio respecto del precio para los valores actuales e interprétala.

(e) Calcula la elasticidad del beneficio respecto del precio para los valores actuales e interprétala.

8. Una empresa distribuidora de vino estima que la demanda de su marca en miles de litros mensuales viene dada por la función

$$D(r, p, q) = (200 - r)e^{0.1q/p} \text{ kl/mes},$$

donde r es la renta mensual (en euros) que los consumidores dedican al consumo de vino, p es el precio al que la empresa vende el litro de vino y q es el precio al que otra marca competidora vende el litro de vino. Actualmente, la renta de los consumidores es de 100 €, la empresa vende su producto a $p = 2$ € y el precio de la otra marca es de $q = 4$ €.

(a) Comprueba que

$$\left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(100,2,4)} = -1.22, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(100,2,4)} = -12.21, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{(100,2,4)} = 6.10.$$

(b) Interpreta las derivadas. ¿Puedes concluir algo sobre la calidad del vino que distribuye la empresa?

9. La función de producción de una empresa es $Q(K, L) = K^2 \ln L^3$, donde K y L son los factores de producción, que actualmente son empleados en cantidades $K = 2$, $L = 1$.

(a) Calcula el nivel de producción actual.

(b) Calcula $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(2,1)}$ e interpreta el resultado.

(c) Utiliza la derivada anterior para calcular aproximadamente el incremento de producción que puede conseguirse si la cantidad de L empleada pasa a ser $L = 1.05$.

(d) Calcula el porcentaje de error de la aproximación del apartado anterior.

Derivadas en porcentaje

10. La función $B(p, q, t) = 1000e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p de venta de su producto, el precio q de su principal materia prima y el tiempo t en años. En la actualidad ($t = 0$) se tiene $p = 1$ y $q = 2$.

(a) Calcula la derivada parcial de B respecto a t en el momento actual e interprétala.

(b) Calcula la derivada en porcentaje del beneficio respecto al tiempo para los valores actuales e interprétala.

11. La función de producción de una empresa es $Q(x, y) = 2\sqrt{x}\ln y$, donde x e y son las cantidades empleadas de dos factores de producción. Actualmente la empresa utiliza 400 unidades del primero y 100 del segundo.

    (a) Calcula la producción marginal $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(400,100)}$ e interpreta el resultado.

    (b) Calcula la derivada de Q (respecto de x) en porcentaje para los valores actuales e interpreta el resultado.

12. Sea $B(x, y)$ la función de beneficios de una empresa, donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos. Actualmente, la producción de la empresa es $(x, y) = (3\,000, 1\,000)$ artículos. Además se estima que

$$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(3\,000,1\,000)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{(3\,000,1\,000)} = 4.$$

    (a) Interpreta estas derivadas.

    (b) Si actualmente el beneficio es de 500 u.m., calcula la derivada en porcentaje del beneficio respecto de la variable y e interpreta el resultado.

13. La producción anual de una empresa viene dada por la función

$$Q(p, t) = 1\,000(p^2 + 1)e^{(2t^2+tp)/100} \text{ miles de artículos,}$$

    donde t es el tiempo en años y p es el precio al que la empresa vende su producto. Actualmente ($t = 0$) el precio es de 2 €.

    (a) Calcula la producción actual.

    (b) Calcula

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{(2,0)}, \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{(2,0)}$$

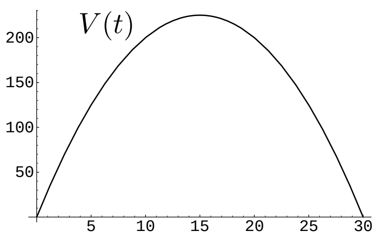
    (c) Interpreta las derivadas anteriores.

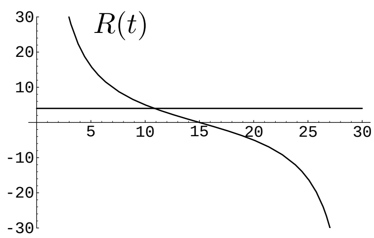
    (d) Calcula la derivada en porcentaje $I(p, t)$ de Q respecto del tiempo. Simplifica la expresión.

    (e) Calcula $I(2, 0)$ e interpreta el resultado.

    (f) Estudia cómo afecta al crecimiento (porcentual) de la producción de la empresa un aumento del precio.

14. Un agricultor ha plantado un árbol frutal que, según las previsiones, debería vivir unos 30 años. El valor del árbol va variando a medida que pasa el tiempo, en función de su productividad. Se estima que este valor viene dado por la función $V(t) = 30t - t^2$ u.m.





(a) El agricultor planea vender el árbol en el momento en que su valor sea máximo. Deduce de la figura cuál es este valor.

(b) El agricultor tiene un hijo que está estudiando Matemáticas I, y éste le hace ver que sus planes respecto al árbol no son los más inteligentes. Para ello, en primer lugar el hijo calcula la rentabilidad $R(t)$ (la derivada en porcentaje) que le proporciona el árbol en cada instante t. (Calcúlala tú también.)

(c) El hijo le muestra al agricultor que, tal y como se ve en la gráfica, la rentabilidad es siempre decreciente. Por otra parte, hace notar a su padre que en cualquier momento puede obtener una rentabilidad del 4% de cualquier capital de que disponga (por ejemplo, porque cierto banco le ofrece ese interés por un depósito). Por consiguiente, el mejor momento para vender el árbol es cuando su rentabilidad llega al 4%, pues a partir de ese momento éste será una inversión menos rentable que otras alternativas disponibles. Calcula el momento en que el agricultor debe vender el árbol teniendo en cuenta los consejos de su hijo economista.

15. El mismo agricultor del problema anterior tiene también un árbol que en un momento dado piensa talar para vender su madera. Se trata de un árbol que puede vivir cientos de años y el valor de su madera nunca deja de aumentar. Digamos que viene dada por la función $V(t) = e^{0.4\sqrt{t}}$ u.m. Determina el momento más conveniente para talar el árbol (que, como en el problema anterior, será aquel en el que su rentabilidad descienda hasta el 4%).

16. El beneficio de una empresa en función del tiempo (en años) viene dado por la función

$$B(t,i) = \frac{10\,000 i \ln(t^2+1)}{t},$$

que depende también del tipo de interés que le aplica el banco con el que trabaja, y que actualmente es $i = 0.02$.

(a) Calcula el beneficio marginal respecto del tiempo en el instante $t = 3$. Interpreta el resultado.

(b) Calcula $\Delta_t B(3, 0.02)(0.5)$ e interpreta el resultado.

(c) Calcula aproximadamente el incremento del apartado anterior mediante derivadas.

(d) Calcula la derivada en porcentaje de B en el punto $(3, 0.02)$ e interpreta el resultado.

Elasticidad

17. Considera de nuevo la función de demanda del problema 8 anterior.

(a) Calcula las elasticidades E_p, E_q y E_r respecto de las tres variables para valores cualesquiera de r, p y q y simplifica las expresiones todo lo posible.

(b) Calcula $E_p(100, 2, 4)$ e interpreta el resultado.

(c) Calcula $\Delta_p E_p(100, 2, 4)(0.1)$ de forma exacta y de forma aproximada con derivadas. Interpreta el resultado.

18. Considera de nuevo la función de demanda del problema 6 (pág.3):

$$D(r,p,p') = \frac{\sqrt{rp'}}{2p},$$

donde r es la renta media de los consumidores, p es el precio del producto X y p' el precio de un bien sustitutivo. Calcula su elasticidad respecto de las tres variables para $(r,p,p') = (36,1,1)$. Interpreta los resultados.

19. Calcula la elasticidad de la función de demanda $D(p) = 100/p$.

20. La demanda de un artículo viene dada por la función

$$D(r,p) = 3000\sqrt[3]{\frac{r}{p^2}} - 20\ln p,$$

donde p es el precio y r la renta de los consumidores. Calcula la elasticidad respecto del precio cuando $r = 16\,000$ y $p = 4$ e interpreta el resultado.

21. Una empresa vende un artículo a un precio $p = 2$€ y estima que la demanda prevista depende además de la renta r de los consumidores y viene dada por

$$D(r,p) = \frac{re^{\sqrt{r}}}{p}.$$

(a) Calcula $\left.\dfrac{\partial D}{\partial r}\right|_{(9,2)}$ e interpreta el resultado.

(b) Calcula el incremento esperado de la demanda si la renta de los consumidores pasa de 9 u.m. a 9.2 u.m.

(c) Calcula el incremento anterior de forma aproximada mediante derivadas.

(d) Calcula la elasticidad de la demanda respecto de la renta para $(r,p) = (9,2)$ e interpreta el resultado.

Cuestiones

22. Indica el signo que tendrán en condiciones normales las derivadas siguientes:

(a) La derivada del salario de un trabajador respecto al tiempo.

(b) La derivada parcial de la demanda de un artículo respecto de su precio.

(c) La derivada parcial del volumen de ventas de una empresa respecto de su inversión en publicidad.

(d) La derivada parcial del ahorro medio de los habitantes de un país respecto del índice de precios.

(e) La derivada respecto al tiempo de la población de un país en el que cada familia tiene una media de 1.8 hijos.

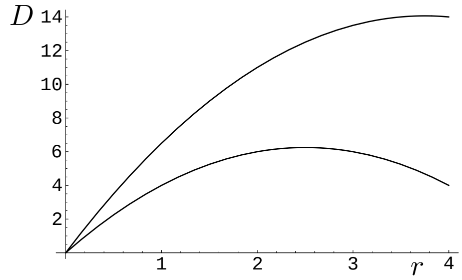
(f) La derivada del índice general de la bolsa de Madrid respecto del tiempo.

23. Sea $C(x)$ la función de costes de una empresa, donde x es la cantidad producida de un artículo. Explica la diferencia de interpretación entre

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{10} \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{1000}.$$

¿Qué signo cabe esperar que tengan estas derivadas?

Práctica 8 Derivadas de funciones de una variable



1. Considera de nuevo la función de demanda del problema 1 de la pág. 1:

$$D(r,p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

donde p es el precio (en €) de un litro de cerveza y r es la renta mensual del consumidor (en miles de €). Los valores actuales son $p = 2$€ y $r = 2$ miles de €. La figura muestra las gráficas de las funciones $D(r,2)$ y $D(r,3)$.

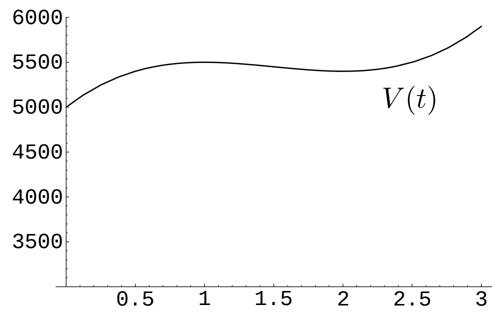
   (a) Calcula las derivadas $\left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(2,2)}$, $\left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(2,2)}$ e interprétalas.

   (b) Calcula el incremento de consumo que se producirá si el precio de la cerveza aumenta 1 u.m. Haz el cálculo de forma exacta y de forma aproximada con derivadas. ¿Es buena la aproximación? ¿A qué puede deberse?

   (c) Calcula la elasticidad-precio y la elasticidad-renta de la demanda en el punto $(2,2)$. Interprétalas.

   (d) A partir de la expresión de $\frac{\partial D}{\partial p}$, razona que la cerveza no es un bien Giffen para el consumidor sea cual sea el precio al que se venda, es decir, razona que éste siempre disminuirá su consumo de cerveza ante un aumento de precio *(ceteris paribus)*.

   (e) Un bien se dice *normal* si cuando los consumidores tienen más renta aumentan el consumo, y se dice *inferior* en caso contrario. Determina a partir de qué nivel de renta la cerveza pasa a ser un bien inferior para el consumidor cuando $p = 2$.



2. Hemos comprado unas acciones en el momento $t = 0$ (donde el tiempo está en años) por un valor de 5 000 €, y las hemos vendido al cabo de 3 años. Durante este periodo, su valor ha venido dado por la función

$$V(t) = 200t^3 - 900t^2 + 1200t + 5000 \text{€}.$$

   (a) Calcula el valor final de las acciones.

   (b) La figura muestra que, a partir de cierto momento t_1, el valor de las acciones empezó a decrecer, pero en otro momento posterior t_2 volvió a crecer. Calcula estos instantes donde el valor de las acciones tomó un máximo primero y un mínimo después.

   (c) Calcula la rentabilidad (la derivada de V en tanto por 1) inicial de las acciones, la rentabilidad final y la rentabilidad en los instantes t_1 y t_2.

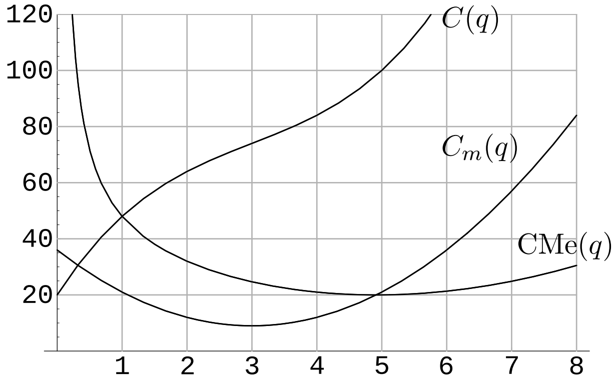
   (d) Durante los tres años que duró la inversión, ¿en qué momento alcanzaron las acciones su valor máximo?

   (e) ¿Cuál hubiera sido tu respuesta si no hubieras conocido la gráfica?

3. Consideremos de nuevo la función de costes del problema 13 de la pág. 9:

$$C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20 \text{ u.m.}$$

La figura muestra el coste C, el coste marginal C_m y el coste medio $CMe = C(q)/q$.



   (a) Calcula el coste marginal y el coste medio.

   (b) Calcula la producción a partir de la cual el coste marginal deja de ser decreciente y pasa a ser creciente.

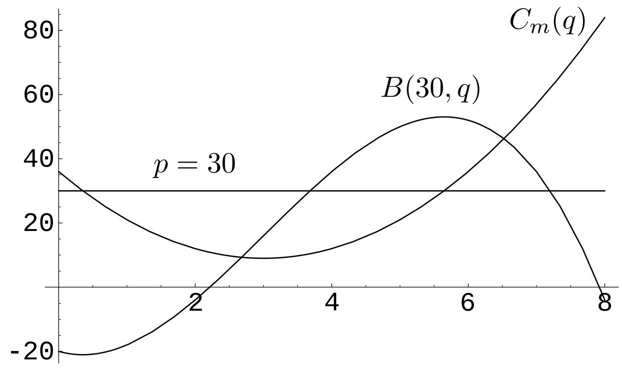
   (c) La figura muestra que el coste medio es mínimo justo donde coincide con el coste marginal. Demuestra que esto no es casual.

---

4. Continuando con el problema anterior, la función de beneficios de la empresa es

$$B(p, q) = pq - C(q).$$

La figura muestra la función de beneficio para un precio $p = 30$ u.m. y el coste marginal.



   (a) Calcula la función $B(30, q)$ y encuentra las producciones q para las que el beneficio es mínimo y máximo.

   (b) Comprueba en la figura que dichas producciones coinciden con las que hacen que el coste marginal sea precisamente p.

   (c) Justifica que esto es así cualquiera que sea el precio p y cualquiera que sea la función de costes $C(q)$.

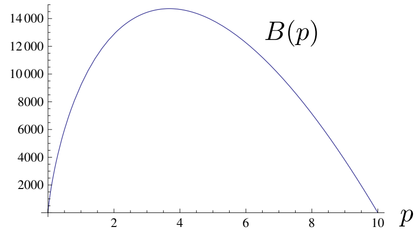
   (d) Calcula la función de oferta $S(p)$ que determina la producción más conveniente para la empresa en función del precio de mercado p.

   (e) Justifica que el *precio de cierre,* es decir, el precio para el que los beneficios de la empresa son nulos, es el correspondiente a la producción q en la que el coste medio coincide con el coste marginal. Deduce de la figura su valor en este caso.

5. Siguiendo el modelo del problema anterior, comprueba que la función de oferta del problema 1 de la pág. 13 es la indicada en el apartado (b) de dicho problema, es decir, calcula la producción q que hace que p sea igual al coste marginal.

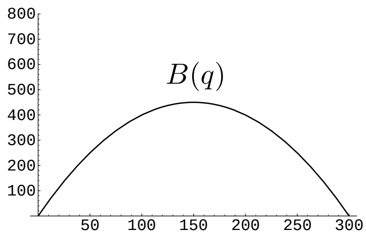
6. Comprueba que el precio al que a la empresa del problema 14 de la pág. 10 le conviene lanzar su producto es el que indica la gráfica.

7. La función $B(p) = 1000p \ln \frac{10\,000}{p^4}$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p al que vende su producto. Determina el precio al que la empresa le conviene vender su producto.



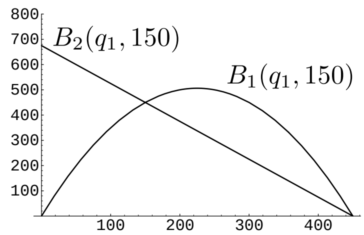
8. Una pequeña población se abastece de las fresas que cultivan dos agricultores A y B. El precio del kilo de fresas lo fija un intermediario en función de las producciones anuales q_1 y q_2 de A y B, según la relación
$$p = 10 - \frac{q_1 + q_2}{100}.$$
La producción de cada kilo de fresas tiene un coste de 4 u.m. Por consiguiente, el beneficio que consigue A con su producción es
$$B_1(q_1, q_2) = pq_1 - 4q_1 = (p-4)q_1 = \left(6 - \frac{q_1 + q_2}{100}\right) q_1.$$
Análogamente, el beneficio que obtiene B es
$$B_2(q_1, q_2) = pq_2 - 4q_2 = (p-4)q_2 = \left(6 - \frac{q_1 + q_2}{100}\right) q_2.$$

   (a) Supongamos que ambos agricultores se ponen de acuerdo en repartirse los beneficios a partes iguales, lo cual supone que ambos produzcan la misma cantidad de fresas $q = q_1 = q_2$. Calcula la función de beneficios $B(q)$ correspondiente (la que resulta de sustituir q_1 y q_2 por q en cualquiera de las dos funciones de beneficios anteriores).



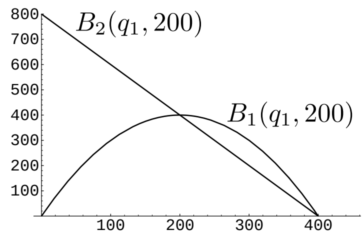
   (b) Comprueba analíticamente que, tal y como muestra la figura, el beneficio de los agricultores es máximo cuando cada uno de ellos produce $q = 150$ kg de fresas. ¿Cuál es el beneficio que obtiene cada uno? ¿A qué precio se pagará el kilo de fresas?

   (c) Supongamos que B decide respetar el acuerdo y produce $q_2 = 150$ kg de fresas, pero A se plantea violar el pacto y producir la cantidad q_1 que más le convenga. Calcula las funciones de beneficios $B_1(q_1, 150)$ y $B_2(q_1, 150)$.



   (d) Calcula la producción q_1 que maximiza el beneficio de A. ¿Qué beneficio consigue cada agricultor? ¿A qué precio se pagará el kilo de fresas?

   (e) Se puede demostrar (aunque no lo veremos aquí) que si B no se fía de A, la producción con la que consigue el máximo beneficio de manera que a A no le convenga ganar más que él es $q_2 = 200$ kg. Calcula las funciones de beneficios $B_1(q_1, 200)$ y $B_2(q_1, 200)$.



(f) Calcula la producción q_1 que maximiza el beneficio de A. ¿Qué beneficio obtiene cada agricultor? ¿A qué precio se comprarán las fresas si A y B no establecen ningún acuerdo?

(g) Explica, con la ayuda de un diccionario, por qué un pacto de este tipo entre dos o más empresas recibe el nombre de *colusión.*

Práctica 9 Derivadas sucesivas

1. Dada la función $f(x,y,z) = x^4 e^{y/2} \operatorname{sen}(4z)$,

   (a) Calcula
   $$\left.\frac{\partial^6 f}{\partial x \partial z^3 \partial x \partial y}\right|_{(1,0,\pi)}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

   (b) Calcula la matriz hessiana de f en el punto $(2,0,0)$.

2. Calcula la matriz hessiana de las funciones
$$f(x,y) = \frac{1}{xy}, \qquad h(x,y,z,w) = x^2 + y^2 - xw - zw + x - y + 5.$$

3. La función de costes de una empresa es $C(x,p) = 600\sqrt{p}\ln x$, donde x es la producción y p el precio medio de sus inputs.

   (a) Calcula el dominio de C y el subdominio con sentido económico.

   (b) Actualmente la producción es de 100 unidades de producto y el precio de 4 unidades monetarias. Calcula el efecto que tiene sobre el coste marginal (respecto a la producción) un incremento unitario del precio de los inputs.

   (c) ¿Cuánto aumentaría aproximadamente el coste si el precio pasara a ser $p = 4.1$ u.m.?

   (d) ¿Y el coste marginal?

4. La función de utilidad de un consumidor respecto de dos productos A y B es
$$U(x,y) = \ln(1+xy),$$
donde x e y son las cantidades de producto que adquiere. Supongamos que actualmente consume $(x,y) = (10,10)$.

   (a) Calcula la utilidad marginal respecto del producto A. Interpreta su signo.

   (b) Justifica matemáticamente esta afirmación: "Por cada unidad que aumenta el consumo de A, la utilidad marginal disminuye, es decir, el consumidor obtiene cada vez menos satisfacción adicional al incrementar su consumo de A".

   (c) Justifica matemáticamente esta afirmación: "Por cada unidad que aumenta el consumo de B la utilidad marginal de A aumenta, es decir, si el consumidor aumenta el consumo de B, entonces le es más útil aumentar el consumo de A."

   (d) Pon un ejemplo de dos productos para los que estas propiedades sean razonables.

---

5. El IPC de un cierto país en un instante t (expresado en años) viene dado por la fórmula
$$P = e^{(1+t/50)^{3/2}}.$$

   (a) Calcula la inflación I del país, es decir, la derivada de P en porcentaje. (Una vez simplificada, te ha de dar $I = 3(1+t/50)^{1/2}$.) ¿Qué tanto por ciento de inflación se tiene en $t = 0$?

(b) Estudia mediante derivadas el comportamiento de la inflación en $t = 0$. ¿Está aumentando o disminuyendo?

(c) Calcula la tasa de incremento de la inflación T en el país, es decir, la derivada de I en porcentaje. ¿Cuánto vale $T(0)$?

(d) ¿Cómo varía la tasa de incremento de la inflación del país?, ¿crece o decrece?

(e) Explica la frase siguiente:

> *En la crisis de* 1972 *el presidente Nixon anunció que la tasa de incremento de la inflación estaba descendiendo. Ésta fue la primera vez que un presidente usó la tercera derivada como argumento para su reelección.* Hugo Rossi, Notices of the AMS, v. 43, nº 10, octubre 1996.

Derivadas sucesivas

6. Calcula las derivadas indicadas de las funciones indicadas:

(a) $f(a,b) = (a^2+b)^3$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^3 f}{\partial a \partial b^2}\right|_{(2,1)}$

(b) $T(x,y,z) = \dfrac{x \ln y}{z}$ $\qquad \dfrac{\partial^5 T}{\partial z^2 \partial y \partial x \partial y}$

(c) $h(r,s) = s^2\sqrt{\cos r}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^4 h}{\partial r \partial s^3}\right|_{(1,1)}$

(d) $g(x,y,z) = z \operatorname{sen}(x - \ln y)$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^4 g}{\partial x \partial z \partial y^2}\right|_{(0,1,3)}$

(e) $M(u,v,w) = v\,(\cos u^2)^{2w}$ $\qquad \dfrac{\partial^3 M}{\partial u \partial v \partial w}$

(f) $L(x,y,z,t) = \dfrac{2^x \ln t\,(z-x)}{\sqrt{3x-y}}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^4 L}{\partial t^2 \partial z \partial x}\right|_{(1,2,0,\sqrt{2})}$

(g) $f(m,n) = 2\,e^{m-n}$ $\qquad \left.\dfrac{\partial^{20} f}{\partial m^9 \partial n^{11}}\right|_{(2,2)}$

7. La función de beneficios de una empresa viene dada por $B(t) = 5t^2$ u.m., donde t es el tiempo en años. El año actual es $t = 1$. ¿A qué ritmo está aumentando el beneficio marginal de la empresa?

8. La función $B(x,y)$ determina el beneficio de una empresa a partir de las cantidades producidas x e y de dos artículos. Interpreta la derivada

$$\left.\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right|_{(3\,000,1\,000)} = -0.3.$$

9. La demanda de un artículo viene dada por $D(p,r,t) = (\sqrt{r}+0.1t)/p^2$, donde p es el precio, r la renta de los consumidores y t el tiempo en años. Razona si $\frac{\partial D}{\partial p}$ aumenta o disminuye con el tiempo.

10. La función $B(p,q,t) = 1000e^{0.1t}(10p-2q)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p de venta de su producto, el precio q de su principal materia prima y el tiempo t en años. En la actualidad $(t=0)$ se tiene $p=1$ y $q=2$. Calcula aproximadamente mediante derivadas el incremento que experimentará el beneficio marginal respecto de q cuando pasen tres meses $(\Delta t = 1/4)$.

11. La demanda de un artículo viene dada por la función
$$D(r,p) = 3000\sqrt[3]{\frac{r}{p^2}} - 20\ln p,$$
donde p es el precio y r la renta de los consumidores. Calcula $\left.\dfrac{\partial^2 D}{\partial p \partial r}\right|_{(16\,000,4)}$ e interpreta el resultado.

12. Se estima que la producción anual de una empresa viene dada por
$$Q(p,q,t) = 6\,000\,\frac{\sqrt{p}}{q}\,e^{t/100} \text{ miles de artículos,}$$
donde t es el tiempo en años, p el precio (en euros) y q es el precio de la principal materia prima (también en euros). Actualmente $(t=0)$ los precios son $(p,q)=(9,2)$.
    (a) Calcula la producción actual.
    (b) Calcula las tres derivadas parciales de Q, indica sus unidades e interprétalas.
    (c) Calcula la derivada en porcentaje $I(p,q,t)$ de la producción Q respecto de q. Simplifica la expresión.
    (d) Calcula $I(9,2,0)$ e interpreta el resultado.
    (e) Estudia cómo afecta a I un descenso de 0.20€ en el precio q.

Hessianas

13. Calcula la matriz hessiana de las funciones siguientes:
    (a) $f(x,y) = x^2 - 2xy^3 + 3x$,
    (b) $g(x,y,z) = e^{x^2}\operatorname{sen}(y+z)$,
    (c) $h(u,v,w) = u + 2v - w$,
    (d) $r(a,b) = \dfrac{1}{a+b^5}$.
    (e) $f(x,y) = x^{3y}$
    (f) $f(x,y,z) = xyz$
    (g) $f(x,y) = x^3\ln(y+1)$
    (h) $G(x,y) = 9\ln(x+y)$
    (i) $f(x,y) = x^{-4}\ln y$
    (j) $g(x,y) = \sqrt{x}\,e^y$
    (k) $f(x,y,z) = x^3 + e^{y^2+3}\cdot 3^z$
    (l) $h(x,y) = (x+\ln y)^2$
    (m) $Q(x,y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$
    (n) $h(x,y,z) = e^{x+2y} + z^2$
    (o) $g(x,y) = \dfrac{8\ln(y+2)}{x+2}$
    (p) $f(x,y,z) = x\operatorname{sen} y + z^3$
    (q) $R(x,y) = 2 + e^x\ln y$
    (r) $h(r,s,t) = e^r s + t^4$
    (s) $P(x,y) = e^x\operatorname{sen} y$
    (t) $f(x,y) = 4\sqrt[4]{x}\,\ln y$
    (u) $P(K,L) = K^3 + L^3 + K^2L$
    (v) $f(x,y,z) = \frac{\operatorname{sen} y^2}{x} + 7^{2z+3}$

Práctica 10 Diferenciabilidad

1. Dada la función
$$f(x,y,z) = x^3y^2 + xyz,$$
   (a) Calcula df.
   (b) Calcula $df(2,1,-1)$.
   (c) Calcula $df(2,1,-1)(1,-2,3)$.
   (d) Calcula la dirección de máximo crecimiento, la dirección de máximo decrecimiento y el conjunto de direcciones de crecimiento nulo de f en el punto $(2,1,-1)$.

2. Repite el problema anterior con la función $f(x,y) = xe^{y^2-1}$ (eliminando los valores de z en los datos).

3. La función $D(p,p') = 100\ln(1+\frac{p'}{p})$ u.p. representa la demanda del artículo que fabrica una empresa, donde p y p' representan el precio (en euros) al que la empresa vende su producto y el precio medio al que la competencia vende un artículo equivalente (pero no se dice qué variable representa cada cosa).
   (a) Calcula las derivadas parciales en $(p,p') = (4,2)$ €. Indica sus unidades.
   (b) A partir de las derivadas que has calculado, razona qué variable representa el precio de la empresa y qué variable representa el precio de la competencia.
   (c) Interpreta las derivadas.
   (d) Calcula aproximadamente mediante la diferencial el incremento de demanda que se producirá si de la situación actual $(p,p') = (4,2)$ € se pasa a $(p,p') = (3,3)$ €.
   (e) Calcula el incremento exacto.
   (f) Comprueba que el porcentaje de error es de un 13%.
   (g) Explica por qué el error es relativamente grande.

4. Una empresa fabrica dos productos A y B en cantidades x e y. Los beneficios que obtiene con su producción vienen dados por una cierta función $B(x,y)$. Actualmente los beneficios ascienden a 200 u.m., pero la empresa tiene más demanda de la que realmente está cubriendo, por lo que se plantea aumentar su producción. Sus recursos le permiten un aumento de 10 unidades de producto. La empresa estima que, para la producción actual $\bar{p} = (x,y)$ se cumple
$$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{\bar{p}} = 3 \text{ u.m./unidad de A}, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{\bar{p}} = 2 \text{ u.m./unidad de B}.$$
   (a) ¿Cuál es exactamente la interpretación de estas derivadas en este contexto concreto?
   (b) ¿Qué beneficios pasaría a obtener la empresa si aumentara en 5 unidades la producción de A? ¿Y si aumenta en 5 unidades la producción de B?
   (c) Para estimar con estos datos los beneficios de la empresa en el supuesto de que aumente simultáneamente 5 unidades la producción de A y 5 la de B necesitamos una hipótesis sobre la función B, ¿cuál?
   (d) Con dicha hipótesis, ¿cuáles pasarían a ser los beneficios de la empresa?

Cálculo de diferenciales y de direcciones de crecimiento

5. Calcula la diferencial de las funciones siguientes:

   (a) $P = 2x^3y - 3x + 4y^2$,

   (b) $Q = 3x - 5y + 7$,

   (c) $z = \ln xy$,

   (d) $T = e^{3u^2+y-\sqrt{t}}$,

   (e) $V = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x^2y)}$,

   (f) $r = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{p}$.

6. Calcula la diferencial de las funciones siguientes en los puntos indicados.

   (a) $h(x, y) = (x + \ln y)^2$ en $(3, 1)$,

   (b) $Q(x, y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$ en $(4, 4)$,

   (c) $g(x, y, z) = \sqrt[3]{x}\ln \frac{y}{z+1}$ en $(2, 1, 1)$,

   (d) $j(a, b) = ab$ en $(3, 1)$,

   (e) $h(u, v, w) = 3u^3 - w^4$ en $(1, 0, 1)$,

   (f) $f(x, y) = x^2 + 2xy$ en $(3, 4)$,

   (g) $g(u, v, w) = u^2e^{v-w}$ en $(2, 3, 3)$,

   (h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy - z^2$ en $(1, 2, 0)$,

   (i) $h(p, q) = 3p + 4q$ en $(1, 1)$,

   (j) $f(x, y) = x^3 \ln(y + 1)$ en $(2, 0)$,

7. Calcula la dirección de máximo crecimiento, máximo decrecimiento y las direcciones de crecimiento nulo de las funciones del problema anterior en los puntos indicados.

Aproximación de incrementos totales

8. Una empresa estima que sus beneficios $B(p, x)$ dependen del precio medio de sus materias primas p y de la cantidad de producto que fabrica x. Actualmente sus beneficios son de 100 u.m. y corresponden a una producción de $x = 5$ unidades y a unos precios de $p = 1$ u.m. Así mismo considera que

$$\left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(1,5)} = -3 \text{ u.m./u.m.}, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(1,5)} = 2 \text{ u.m./u.p.}$$

   (a) Interpreta las derivadas, especialmente su signo.

   (b) ¿Qué beneficios cabría esperar si los precios aumentan a 1.3 u.m.?

   (c) ¿Y si, además de dicho aumento de precios, la empresa aumenta su producción en 3 unidades?

   (d) ¿Hace falta alguna hipótesis matemática sobre la función B para justificar la respuesta a (c)?

9. Considera la función de producción $P(K, L) = K^3+L^3+K^2L$, en la que K y L son las cantidades empleadas de dos factores de producción. Las cantidades empleadas actualmente son $(K, L) = (2, 1)$.

   (a) Calcula la producción marginal respecto a cada factor de producción para la situación actual. Interpreta el resultado.

   (b) Calcula de forma aproximada con la diferencial el incremento de producción que puede conseguirse si se emplea $(K, L) = (2.2, 1.1)$.

   (c) Calcula el porcentaje de error de la aproximación anterior.

10. Sea $D(p,r,t)$ la función de demanda de un artículo en un mercado, donde p es el precio (en u.m.), r la renta media de los consumidores (en u.m.) y t el tiempo en años. Actualmente ($t=0$) se tiene $(p,r)=(5,14)$ y $D(5,14,0)=200$. Además

$$\left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(5,14,0)} = 20, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(5,14,0)} = -15, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(5,14,0)} = 10.$$

    (a) Interpreta estas derivadas.

    (b) ¿Qué demanda cabría esperar dentro de un año si la renta ha pasado a $r=13$ u.m. y el precio a $p=4.5$ u.m.?, ¿qué hipótesis sobre D es necesaria para responder a esta pregunta con los datos disponibles?

11. La función $C(x,p)$ determina el coste de producción de una empresa a partir del nivel de producción x y del precio p de un factor de producción. Actualmente se tiene que $(x,p)=(1\,000,3)$ y el coste es de 500 u.m. Además

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{(1\,000,3)} = 3, \qquad \left.\frac{\partial C}{\partial p}\right|_{(1\,000,3)} = 10.$$

    (a) Interpreta estas derivadas.

    (b) Calcula el coste (no el incremento de coste) que cabría esperar si la producción pasa a ser de 1 050 u.p. y el precio se reduce en 0.8 u.m.

    (c) Calcula $\Delta_x C(1\,000,3)(10)$ e interpreta el resultado.

12. La función $D(p,P,t)$ representa la demanda diaria de una empresa en función del precio p (en euros) al que vende su producto, de la cantidad P (en euros) que invierte mensualmente en publicidad y del tiempo t (en años). Actualmente ($t=0$) la empresa vende su artículo a $p=30$ € e invierte $P=90\,000$ euros mensuales en publicidad. Sabemos que

$$\left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(30,90\,000,0)} = \pm 10\,000, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial P}\right|_{(30,90\,000,0)} = \pm 3\,000, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(30,90\,000,0)} = -1\,000.$$

    (a) Razona el signo correcto que cabe esperar para las dos primeras derivadas.

    (b) Interpreta las tres derivadas.

    (c) Calcula el incremento de la demanda que cabe esperar para dentro de un mes (1/12 de año). ¿La empresa aumentará o disminuirá sus ingresos frente a la situación actual?

    (d) Supón que la empresa decide vender su producto a 29.50 €. ¿Cuál sería en tal caso el incremento de la demanda dentro de un mes?

    (e) La empresa se plantea aumentar su inversión en publicidad dentro de unos meses. Por ello está interesada en saber si el efecto que tendrá sobre su demanda un aumento de la inversión en publicidad aumenta o disminuye con el tiempo. ¿Qué derivada indica el efecto que tiene sobre la demanda un aumento en la inversión en publicidad? ¿Qué derivada indica si esta derivada aumenta o disminuye con el tiempo?

13. Un consumidor consume dos bienes en cantidades x e y, y con ello obtiene una utilidad $U(x,y) = x^2 + x\sqrt{y}$. Su consumo actual es de 2 unidades de A y 4 de B.
    (a) Calcula la utilidad marginal de A y B para el consumo actual. Interprétala.
    (b) Calcula a partir de las utilidades marginales el incremento de utilidad que se producirá si el consumo de A se incrementa en 0.1 unidades y (a la vez) el consumo de B se incrementa de 0.5 unidades.
    (c) Calcula el porcentaje de error de la aproximación anterior.

14. Una empresa fabrica un producto Z a partir de dos factores de producción A y B. Su función de producción viene dada por

$$Q(x,y,P) = \sqrt{xy} - \sqrt{P},$$

donde x e y son las cantidades empleadas de lo factores A y B y P es el nivel de producción de otros artículos que fabrica la misma empresa. Actualmente la empresa emplea 200 unidades de A y 800 de B, y el nivel de producción de otros artículos es $P = 100\,\text{u.p.}$
    (a) Calcula el nivel de producción actual del producto Z.
    (b) Calcula las derivadas parciales de Q para los valores actuales de las variables.
    (c) Interpreta las derivadas del apartado anterior.
    (d) Calcula $dQ(200, 800, 100)$.
    (e) Utiliza la diferencial que has calculado para aproximar el incremento de producción que conseguiría la empresa si aumentara en 5 unidades ambos factores de producción y redujera la producción de otros artículos a $P = 81\,\text{u.p.}$

15. La función $B(p, D, t)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p (en euros) al que vende un artículo, la demanda diaria D de dicho artículo y el tiempo t en años. Actualmente ($t = 0$) vende su artículo a un precio $p = 25$ €, tiene una demanda de 20 000 artículos diarios y $B(25, 20\,000, 0) = 300\,000$ €. Además

$$\left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{(25,20\,000,0)} = 120, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(25,20\,000,0)} = -700, \qquad \left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(25,20\,000,0)} = 12.$$

    (a) Interpreta las derivadas. ¿Son razonables los signos?
    (b) ¿Qué beneficios cabría esperar dentro de dos meses (2/12 de año) si la empresa redujera su precio a 22 unidades y ello provocara un aumento de la demanda de 100 artículos diarios?
    (c) ¿Qué hipótesis hemos de suponer sobre B para responder a la pregunta anterior? ¿Por qué?
    (d) La empresa quiere estudiar si su beneficio marginal sobre el precio aumenta o disminuye con el paso del tiempo. ¿Qué derivada contiene esta información?

16. La función de producción de una empresa es $Q(x,y) = 2\sqrt{x}\,\ln y$, donde x e y son las cantidades empleadas de dos factores de producción. Actualmente, la empresa utiliza 400 unidades del primero y 100 del segundo.

(a) Calcula $\Delta_x Q(400, 100)(10)$ de forma exacta y aproximadamente mediante derivadas. Interpreta el resultado.

(b) Calcula de forma aproximada el incremento de producción que puede lograrse utilizando los factores de producción en cantidades $(415, 105)$.

(c) Razona mediante derivadas si un aumento de la cantidad empleada del primer factor hace aumentar o disminuir la producción marginal respecto de x.

17. La función $B(x, y, p) = \dfrac{1\,000 \ln(p + x + 2y)}{p}$ representa el beneficio de una empresa en función de su producción de dos artículos A y B y del precio p de su principal materia prima. Actualmente la empresa produce 48 toneladas de A, 25 de B y compra su materia prima a 2 u.m./t.

    (a) Calcula dB.

    (b) Calcula $dB(48, 25, 2)$.

    (c) Calcula la dirección de máximo crecimiento, máximo decrecimiento y el conjunto de direcciones de crecimiento nulo de B en el punto $(48, 25, 2)$.

    (d) Calcula el incremento exacto de beneficio que cabe esperar si, partiendo de la situación actual, el precio de la materia prima desciende un 5% y la empresa aumenta su producción a 50 t. de A y 30 de B.

    (e) Comprueba que el porcentaje de error que resulta al aproximar el incremento anterior mediante la diferencial (sin tener en cuenta el signo) no supera el 4%.

18. La función $C(x, p, q) = 1000\sqrt{3x + 1}(x + 2p + 3q)$ representa el coste de producción de una empresa cuando x es la cantidad producida y p y q son los precios de sus principales materias primas. Actualmente la empresa produce 8 toneladas de su producto y los precios son $p = 3$€, $q = 2$€.

    (a) Calcula dC.

    (b) Calcula $dC(8, 3, 2)$.

    (c) Calcula la dirección de máximo crecimiento, máximo decrecimiento y crecimiento nulo de C en el punto $(8, 3, 2)$.

    (d) Usando los cálculos que has hecho, aproxima el incremento de coste que se produciría si la empresa aumenta su producción un 2% y el precio p disminuye 10 céntimos de euro (y el precio q no varía).

    (e) Comprueba que el porcentaje de error de la aproximación del apartado anterior no excede del 1%.

Práctica 11 La regla de la cadena

1. Dadas las funciones $f(x,y) = x^2 + y,\ \ x = y^2$ calcula la función compuesta. Calcula

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(y)}{\partial y}.$$

   En el caso de la derivada de la derecha, haz el cálculo derivando directamente la función y por la regla de la cadena.

2. Sea $B(p,p')$ la función de beneficios de una empresa E, donde p es el precio de su producto y p' el precio medio de la competencia. Para los precios actuales $p = 21$, $p' = 20$ se estima que

$$\left.\frac{\partial B(p,p')}{\partial p}\right|_{(21,20)} = -3, \qquad \left.\frac{\partial B(p,p')}{\partial p'}\right|_{(21,20)} = 2.$$

   (a) Interpreta estas derivadas.

   (b) Supongamos que la competencia ajusta sus precios según los de la empresa E, de modo que $p' = p - 1$. Calcula

$$\left.\frac{\partial B(p)}{\partial p}\right|_{21}.$$

   (c) Explica la diferencia entre las dos derivadas respecto de p, desde un punto de vista matemático y en cuanto a su interpretación económica. ¿Cuál de ellas nos serviría para estimar el efecto que tendría sobre los beneficios una disminución del precio p de 2 u.m.?

3. Considera la ecuación

$$f(x,y,z) = e^{xy}z - 10e^z = 0.$$

   (a) Comprueba que define a x como función implícita de y, z siempre que y, $z \neq 0$.

   (b) Calcula la función $x(y,z)$.

   (c) Calcula $x(5,10)$ usando y sin usar el apartado anterior.

   (d) Calcula

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{(5,10)}$$

   derivando la función implícita.

   (e) Calcula la misma derivada derivando implícitamente la ecuación.

4. La función de costes de una empresa es

$$C = q^3 - 6q^2 + 15q + 5,$$

   donde q es su nivel de producción, que actualmente es de $q = 10$ u.p.

   (a) Calcula el coste de producción actual.

(b) Demuestra que la ecuación anterior define a q como función implícita de C para valores de q y C próximos a los actuales.

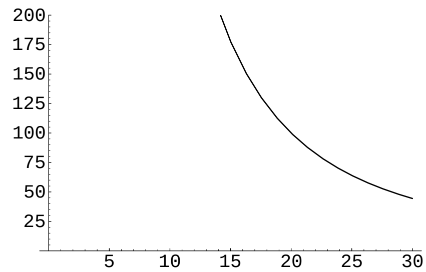
(c) Calcula
$$\frac{dq}{dC}$$
para los valores actuales e interpreta el resultado.

5. Una empresa utiliza $K = 20$ máquinas y $L = 100$ trabajadores para producir un artículo. La producción diaria que puede conseguirse en general con K máquinas y L trabajadores viene dada por la función
$$Q(K, L) = K^2 L.$$
El dueño de la empresa se está planteando la posibilidad de abaratar el proceso de producción sustituyendo a parte de la plantilla por una máquina adicional.

(a) Calcula la producción diaria actual de la empresa.

(b) Escribe la ecuación de la *isocuanta* (= curva de nivel de producción) actual. Interprétala.

(c) La figura muestra la gráfica de la isocuanta. Localiza en ella la situación actual de la empresa.



(d) Calcula la función implícita $L(K)$ definida por la curva de nivel. Interprétala.

(e) Calcula $L(20)$ y $L(21)$, e interpreta los resultados.

(f) Calcula la *Relación de Sustitución Técnica*
$$\mathrm{RST}(20) = -\left.\frac{dL}{dK}\right|_{20}$$
derivando la función implícita e interpreta el resultado.

(g) Repite el cálculo derivando implícitamente la curva de nivel.

(h) ¿Cuántos trabajadores irán a la calle si la negociación sindical no lo impide?

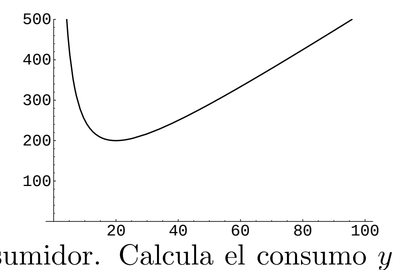
---

6. Un consumidor consume dos bienes en cantidades anuales x e y. Su función de utilidad es $U(x, y) = xy$. Supongamos que el consumidor ajusta su consumo a su nivel de renta anual r, de modo que su curva de indiferencia (curva de nivel de utilidad) es $xy = r$. Si los precios de los dos bienes son, respectivamente, p y q, entonces el gasto del consumidor viene dado por la función $G(x, y, p, q) = px + qy$.

(a) Calcula la función implícita $y(x, r)$ determinada por la isocuanta. Interprétala.

(b) Calcula la función compuesta $G(x, p, q, r)$. Interprétala.

(c) La figura muestra la función $G(x, 5, 2, 1\,000)$.



Calcula el consumo x que minimiza el gasto del consumidor. Calcula el consumo y del segundo bien y el gasto del consumidor. Interpreta todos los resultados.

(d) Comprueba que, en general, el consumo que minimiza el gasto del consumidor (para unos valores fijos de p, q y r) es

$$x(p,q,r) = \sqrt{\frac{rq}{p}} = r^{1/2}q^{1/2}p^{-1/2}.$$

Esta función se representa también como $D(p,q,r)$ y no es sino la función de demanda del consumidor.[1]

(e) Considerando la función $y(x,r)$, comprueba que la demanda del segundo bien es

$$y(p,q,r) = r^{1/2}q^{-1/2}p^{1/2},$$

así como que el gasto es

$$G(p,q,r) = 2r^{1/2}q^{1/2}p^{1/2}.$$

Interpreta esta función.

(f) Comprueba que se cumple el lema de Shephard: La derivada del gasto G de un consumidor respecto del precio p de un bien es igual a la demanda (compensada) de dicho bien.[2]

Derivadas de funciones compuestas

7. Sea $f(x,y) = x^2 + 3y - y^3$, donde $y = x^2 + 3$. Calcula

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{df}{dx},$$

usando la regla de la cadena cuando sea posible.

8. Sea $z = xy$, $x = u^2 + v$, $y = u - v$. Calcula

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{(1,2)}$$

por la regla de la cadena.

[1] Más precisamente, es la *demanda hicksiana* o *demanda compensada,* que depende (en este caso a través de la renta) del nivel de utilidad deseado por el consumidor. La *demanda marshalliana* es la que maximiza la utilidad fijado un nivel de gasto (un presupuesto).

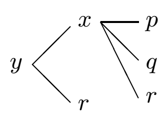
[2] Es fácil demostrar que el lema de Shephard se cumple en general (al menos para el caso de dos bienes): La condición para que el gasto $G = px + qy$ sea mínimo es

$$\frac{\partial G}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

y la derivada del gasto respecto de p es

$$\frac{\partial G}{\partial p} = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial p} = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = x + \frac{\partial x}{\partial p}\left(p + q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = x,$$

donde hemos derivado px como un producto y hemos aplicado la regla de la cadena a la composición



9. Sea $w = x^2 + y^2 + z^2$, donde $z = x + 2y$. Entonces
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$
Explica la diferencia entre las dos primeras derivadas que aparecen en la fórmula. Calcula la del miembro izquierdo en el punto $(x, y) = (2, 1)$.

10. Sea $p(r, s) = 5\sqrt{r^2 + s^2} + 3\sqrt[3]{5 - r}$, donde $s = u + \operatorname{sen} v$, $r = 4\cos v$.
    (a) Calcula la función compuesta.
    (b) Calcula $\left.\frac{\partial p}{\partial u}\right|_{(3,0)}$ mediante la regla de la cadena.

11. Considera las funciones $z = x^3 y t^3$, $x = u^2 v$, $y = 2u$, $t = v^2 + 1$. Calcula la función compuesta y su derivada respecto de u en el punto $(1, 2)$ por la regla de la cadena.

12. El coste de producción de una empresa está en función del precio de cada uno de los dos inputs que utiliza, $C(x, y) = 2 + 3x + 5y$ u.m. Por otra parte, el precio de los inputs varía con el tiempo. Concretamente $x(t) = 1 + 2t$ u.m., $y(t) = 1 + t$ u.m., donde t es el tiempo expresado en años.
    (a) Calcula los precios de los inputs en el primer año estudiado ($t = 0$). Calcula el coste correspondiente.
    (b) Calcula la función $C(t)$.
    (c) Calcula el incremento de costes correspondiente al primer año (periodo $[0, 1]$).
    (d) Calcula las derivadas
    $$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{(1,1)}, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{(1,1)}, \quad \left.\frac{dC}{dt}\right|_{0}$$
    derivando directamente cada función (indica las unidades correspondientes).
    (e) Calcula la última derivada del apartado anterior mediante la regla de la cadena.
    (f) Interpreta todas las derivadas que has calculado.

13. Una empresa estima que sus beneficios vienen dados por la función
$$B(t, p) = \frac{4 + 0.2t}{\sqrt{p^2 - 5}},$$
donde el numerador es una estimación de la demanda futura en función del tiempo t y el denominador es una corrección en función del IPC p. El tiempo actual es $t = 1$ y el IPC es $p = 3$ u.m. No hay ninguna previsión fiable de la evolución del IPC, pero la empresa estima que en la actualidad
$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{1} = 0.2.$$
Según estas estimaciones, ¿los beneficios de la empresa van a aumentar o a disminuir a corto plazo?

14. Sea $D(p,r,t)$ la función de demanda de un artículo en un mercado, donde p es el precio, r la renta media de los consumidores y t el tiempo en años. Actualmente ($t=0$) se tiene $(p,r)=(5,14)$ y $D(5,14,0)=200$. Además
$$\left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{(5,14,0)}=20, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial p}\right|_{(5,14,0)}=-15, \qquad \left.\frac{\partial D}{\partial r}\right|_{(5,14,0)}=10.$$
   (a) Interpreta estas derivadas.
   (b) Supongamos que $r=r(t)$ y $p=p(t)$, de modo que
   $$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{0}=0.2, \qquad \left.\frac{dp}{dt}\right|_{0}=0.1.$$
   Interpreta estas derivadas.
   (c) Calcula
   $$\left.\frac{dD(t)}{dt}\right|_{0},$$
   (d) Interpreta esta derivada explicando especialmente la diferencia con la interpretación de
   $$\left.\frac{\partial D(p,r,t)}{\partial t}\right|_{(5,14,0)}.$$

15. La función $B(p,q,t)=1000e^{0.1t}(10p-2q)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p de venta de su producto, el precio q de su principal materia prima y el tiempo t en años. En la actualidad ($t=0$) se tiene $p=1$ y $q=2$.
   (a) Calcula la derivada parcial de B respecto de t en el momento actual e interprétala.
   (b) La empresa ajusta el precio p en función del tiempo y del precio q de la materia prima. Sabiendo que
   $$\left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{(2,0)}=0.1, \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(2,0)}=0.2,$$
   estudia si estos datos modifican la previsión del apartado (a).

16. El beneficio de una empresa viene dado por la función $B(p,D)=1\,000p\ln D$, donde p es el precio al que vende su producto y D es su demanda. A su vez, la demanda depende del precio según la relación
$$D(p)=\frac{10\,000}{p^4}.$$
Actualmente el artículo se vende a un precio $p=5$ €.
   (a) Calcula la demanda actual del producto.
   (b) Calcula
   $$\frac{\partial B(p,D)}{\partial p}$$
   para los valores actuales de las variables. Interpreta el resultado. ¿Podemos deducir que a la empresa le conviene aumentar el precio de su artículo?
   (c) Calcula mediante la regla de la cadena la derivada que indica realmente el efecto que tiene sobre el beneficio un aumento unitario del precio.

17. La función $B(t,p,D)$ determina los beneficios anuales previstos para una empresa en función del tiempo t, el precio medio p de sus factores de producción y la demanda D. Actualmente ($t=0$) se tiene que $p=15$ y $D=1\,000$. Además se estima que

$$\left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{(0,15,1\,000)} = 500, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(0,15,1\,000)} = -100, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(0,15,1\,000)} = 100,$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{0} = 2, \quad \left.\frac{\partial D}{\partial t}\right|_{0} = -300.$$

   (a) Interpreta las derivadas.
   (b) Razona por qué no podemos afirmar, de acuerdo con la primera de las derivadas anteriores, que dentro de un año los beneficios de la empresa habrán aumentado en 500 u.m.
   (c) Calcula el incremento esperado para los beneficios anuales de la empresa el año próximo.

18. La función $U(x,y)$ representa la utilidad que obtiene un consumidor al adquirir dos bienes en cantidades x e y. Su consumo actual es $(x,y)=(10,50)$. Los bienes son complementarios, y el consumidor los compra según la proporción $y=5x$. Sabemos que

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(10,50)} = 2, \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(10,50)} = 4.$$

   (a) Explica brevemente por qué no podemos usar la derivada de la izquierda para predecir el incremento de utilidad que se produciría si el consumidor adquiriera una unidad más del primer bien.
   (b) Calcula la derivada que nos proporciona dicha información.

19. La función $U(x,y,z)=xy\sqrt{z}$ representa la utilidad que obtiene un consumidor por la adquisición de tres bienes A, B y C en cantidades x, y, z, respectivamente. El consumidor adquiere estos bienes manteniendo las relaciones $x=2z$, $y=3z+1$.

   (a) Calcula la función compuesta.
   (b) Calcula las derivadas
$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{(8,13,4)}, \qquad \left.\frac{dU}{dz}\right|_{4}$$
   usando la regla de la cadena cuando sea posible.
   (c) Interpreta separadamente ambas derivadas y explica después la diferencia entre ambas.

20. La demanda de un artículo depende del tiempo t, de su precio p y de la renta r de los consumidores según la función

$$D(t,p,r) = 1\,000\,\frac{r}{p}\,e^{t/10}.$$

Actualmente el precio es $p=2$ € y la renta es $r=400$ €.

(a) Calcula $\left.\dfrac{\partial D}{\partial t}\right|_{(0,2,400)}$ e interpreta el resultado.

(b) Razona por qué no podemos usar únicamente la derivada anterior para determinar la demanda del año próximo si sabemos además que

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_0 = 0.2\text{€}/\text{año}, \qquad \left.\frac{dr}{dt}\right|_0 = 15\text{€}/\text{año}.$$

(c) Calcula la derivada que indica realmente la demanda esperada para el año próximo e interpreta el resultado.

21. La función $B(D, p)$ representa el beneficio de una empresa en función de su demanda D y del precio p al que vende su producto. Por otra parte, la demanda D es función del precio p. Actualmente el artículo se vende a un precio $p = 10$€ y $D(10) = 5\,000$.

    (a) Interpreta las derivadas

    $$\left.\frac{\partial B}{\partial p}\right|_{(5\,000,10)}, \qquad \left.\frac{dB}{dp}\right|_{10}$$

    y explica la diferencia de interpretación entre una y otra.

    (b) Una de las dos derivadas anteriores vale $5\,000$€/€, y la otra vale -200€/€. Razona cuál es cual.

22. La función de costes de una empresa es $C(x) = 2\,000+5x$, donde x es la cantidad producida de un artículo. Su función de beneficios es $B(x, C, D)$, donde D representa la demanda. Para los valores actuales (x_0, C_0, D_0) se tiene que

    $$\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{(x_0,C_0,D_0)} = 8, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial C}\right|_{(x_0,C_0,D_0)} = -3, \quad \left.\frac{\partial B}{\partial D}\right|_{(x_0,C_0,D_0)} = 10.$$

    (a) Explica brevemente por qué no es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 unidades monetarias.

    (b) Razona si a la empresa le conviene o no aumentar su producción.

23. Un pequeño empresario emplea $K = 5$ máquinas y $L = 12$ trabajadores. Su función de producción es $Q(K, L) = \sqrt{K^3 + KL^2}$.

    (a) Calcula las derivadas parciales de Q para las condiciones actuales e interprétalas.

    (b) Para manejar K máquinas son necesarios $L(K) = 2K + 2$ trabajadores. Calcula la función $Q(K)$.

    (c) Calcula la derivada de $Q(K)$ para $K = 5$ mediante la regla de la cadena.

    (d) Explica la diferencia de interpretación entre las dos derivadas de Q respecto de K que has calculado. ¿Cuál indica realmente lo que sucedería si decidiéramos emplear una máquina más en el proceso de producción?

24. La función $D(r, p, q) = r^2/pq$ representa la demanda de un producto en función de su precio p, de la renta r de los consumidores y del precio q de un bien complementario. Actualmente $r = 100$, $p = 5$ y $q = 2$. La renta depende del tiempo $r(t) = 100e^{0.1t}$ y, por otra parte, la empresa ajusta el precio de su producto en función del tiempo y del precio q, de modo que $p(t, q) = e^{0.2t}(q + 3)$.

(a) Calcula la función compuesta $D(t,q)$.

(b) Calcula las derivadas parciales de la función compuesta mediante la regla de la cadena para $t=0$ y $q=2$.

(c) Explica la diferencia de interpretación entre las derivadas

$$\left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{(100,5,2)} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial D}{\partial q}\right|_{(0,2)}$$

de modo que la explicación refleje claramente qué variables dependen de otras y cuáles no.

25. La producción $Q(p,t)$ de una empresa depende del precio p al que vende su artículo y del tiempo t. Actualmente el precio es $p = 3$€ y la producción es de 100 000 artículos. Se estima que

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{(3,0)} = 5\,000 \text{ artículos/€}, \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{(3,0)} = 1\,000 \text{ artículos/año}.$$

(a) Interpreta estas derivadas.

(b) Si la política de precios de la empresa viene dada por $p(t) = 3+0.05(t+1)^2$€, calcula $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_0$.

(c) Interpreta esta derivada y explica la diferencia con la derivada análoga que aparece en el enunciado.

(d) ¿Qué producción cabe esperar para dentro de dos años teniendo en cuenta la política de precios de la empresa?

Derivadas de funciones implícitas

26. Estudia si la ecuación $x^2+4y^2=4$ define a x como función implícita de y y a y como función implícita de x cerca del punto $(2,0)$.

27. La función de producción de una empresa es $q(K,L) = 3K^2L^3$, donde K es el capital y L el trabajo. Actualmente, la empresa utiliza los factores $(K,L) = (5,4)$.

(a) Calcula la isocuanta (= curva de nivel de producción) actual. Interprétala.

(b) Calcula la función implícita $K(L)$ determinada por la isocuanta. Interprétala.

(c) Calcula la Relación de Sustitución Técnica

$$\text{RST} = -\frac{dK}{dL}$$

Haz el cálculo a partir de la función $K(L)$ y derivando implícitamente la ecuación de la isocuanta.

(d) Calcula la RST actual e interprétala.

28. Un consumidor adquiere dos bienes en cantidades x e y, de modo que su función de utilidad es $U(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$. Su nivel de consumo actual es $(x,y) = (9,4)$.

(a) Calcula la utilidad actual.

(b) Escribe la ecuación de la curva de indiferencia (= curva de nivel de utilidad) actual e interprétala.

(c) Calcula la *Relación Marginal de Sustitución*

$$\mathrm{RMS}(9) = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_9$$

e interprétala. Haz el cálculo derivando implícitamente la ecuación y derivando la función implícita.

29. Considera de nuevo el problema 6 de la pág. 18, en el que una empresa fabrica dos artículos en cantidades x e y sujeta a la frontera de posibilidades de producción $3x^2 + y^2 = 6\,300$. Calcula la *Relación de Transformación de Producto*

$$\mathrm{RTP}(9) = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_9$$

e interprétala.

30. Para cada una de las funciones de utilidad

$$U_1(x, y) = xy, \qquad U_2(x, y) = x^2y^2, \qquad U_3(x, y) = \ln x + \ln y,$$

donde x e y son las cantidades consumidas de dos artículos:

(a) Calcula la utilidad marginal respecto de x y estudia en cada caso mediante derivadas si ésta aumenta o disminuye a medida que x aumenta.

(b) Considera una curva de indiferencia (= curva de nivel de utilidad) $U(x, y) = \alpha$ arbitraria y calcula la función implícita $y(x)$ que determina. Interprétala.

(c) Calcula la *Relación Marginal de Sustitución*

$$\mathrm{RMS}(x) = -\frac{dy}{dx}.$$

Interprétala.

(d) Comprueba mediante derivadas que $\mathrm{RMS}(x)$ es decreciente en los tres casos, es decir, que disminuye cuando el consumo x aumenta.

31. Una empresa fabrica dos artículos en cantidades x e y, pero sus posibilidades de producción exigen que se cumpla la relación $x^2 + y^2 = 125$.

(a) Calcula la función implícita $y(x)$ determinada por la ecuación.

(b) Calcula $y(10)$ e interpreta el resultado.

(c) Calcula la *relación de transformación de producto*

$$\mathrm{RTP}(x) = -\frac{dy}{dx}.$$

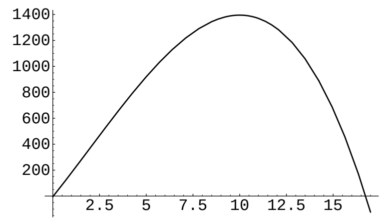
(d) Calcula $\mathrm{RTP}(10)$ e interpreta el resultado.

(e) Razona si la RTP aumenta o disminuye al aumentar la producción de x.

32. Continuando con el problema 4, la función de beneficios de la empresa será

$$B(p,q) = pq - q^3 + 6q^2 - 15q - 5,$$

donde p es el precio del producto. La figura muestra la gráfica de la función $B(195,q)$.



(a) Calcula la producción q con la que la empresa consigue el beneficio máximo si el precio del producto es $p = 195$ u.m.

(b) Escribe la ecuación $\dfrac{\partial B}{\partial q} = 0$ para un precio p arbitrario y comprueba que define a q como función de p para valores próximos a los actuales.

(c) Calcula $\dfrac{dq}{dp}$ para los valores actuales e interpreta el resultado. (Nota que la función implícita es la función de oferta de la empresa.)

33. Una oposición consta de tres ejercicios puntuados de 0 a 10. Para aprobar hay que obtener una nota final de al menos 5, donde, si las notas obtenidas en los ejercicios son x, y, z, la nota final se calcula mediante la fórmula

$$N(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^3yz)^{1/5} + \frac{1}{2}z.$$

(a) Calcula la nota final de un opositor que ha obtenido un 5 en cada ejercicio.

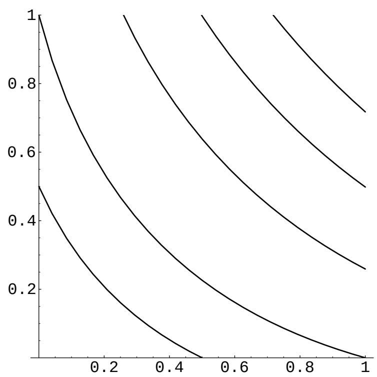
(b) Escribe la ecuación de la curva de nivel 5 de la función N. Interprétala.

(c) Comprueba que dicha ecuación define una función implícita $z(x,y)$ para valores cualesquiera x, y, $z \geq 0$.

(d) Calcula $z(5,5)$ y $z(6,0)$. Interpreta los resultados.

(e) Calcula $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(5,5)}$ e interpreta el resultado.

34. La utilidad de un consumidor viene dada por $U(x,y) = xe^y + ye^x$, donde x e y son las cantidades adquiridas de dos bienes.



(a) Comprueba mediante el teorema de la función implícita que las curvas de nivel de U definen a y como función implícita de x siempre que x, $y \geq 0$.

(b) La figura muestra varias curvas de nivel de U. ¿A qué nivel de utilidad corresponde la que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$? Escribe la ecuación correspondiente e interprétala.

(c) Observa que no es posible calcular la función implícita $y(x)$, a pesar de que hemos justificado que existe y de que la figura así lo muestra.

(d) Calcula la Relación Marginal de Sustitución RMS $= -\dfrac{dy}{dx}$.

35. Una empresa fabrica tres artículos en cantidades x, y, z. Los recursos de la empresa exigen que x, y, z cumplan la relación

$$xy + xz + yz = 80.$$

(a) Justifica mediante el teorema de la función implícita que dicha ecuación define a z como función implícita $z(x,y)$ para producciones x, y, $z > 0$.

(b) Calcula $z(10,2)$ e interpreta el resultado.

(c) Calcula

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(10,2)}$$

derivando implícitamente la ecuación e interpreta el resultado.

36. La demanda de un artículo viene dada por la función

$$D(r,p) = 3\,000\sqrt[3]{\frac{r}{p^2}} - 20\ln p,$$

donde r es la renta de los consumidores y p el precio. Actualmente $r = 16\,000$ y $p = 4$.

(a) Escribe la ecuación de la curva de nivel de demanda actual. Interprétala.

(b) Comprueba que dicha ecuación define a p como función implícita de r para valores próximos a los actuales.

(c) Calcula e interpreta la derivada $\left.\dfrac{dp}{dr}\right|_{16\,000}$.

37. La función de utilidad de un consumidor es $U(x,y) = 4xy^{3/2}$, donde x e y son las cantidades que consume de dos bienes. Su consumo actual es $(x,y) = (3,4)$.

(a) Escribe la ecuación de la curva de indiferencia correspondiente al nivel de utilidad actual.

(b) Razona mediante el teorema de la función implícita que la ecuación anterior define a x como función implícita $x = x(y)$.

(c) Calcula la Relación Marginal de Sustitución

$$\text{RMS} = -\frac{dx}{dy}$$

derivando implícitamente la curva de indiferencia. Indica la expresión general (para x, y arbitrarios), y también su valor para el consumo actual.

(d) Calcula explícitamente la función implícita $x(y)$ y, a partir de ella, calcula directamente la RMS para el consumo actual. Comprueba que obtienes el mismo resultado.

(e) Razona que la RMS es decreciente, es decir, que disminuye a medida que y aumenta.

38. Una fábrica elabora dos productos en cantidades x e y, y su frontera de posibilidades de producción viene dada por la ecuación $2x^2 + y^3 = 80$. La producción actual es $(x, y) = (6, 2)$.

    (a) Comprueba que la ecuación anterior permite definir a y como función implícita $y = y(x)$ para producciones similares a la actual.

    (b) Calcula la Relación de Sustitución del Producto

    $$\mathrm{RSP} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{6}$$

    derivando implícitamente.

    (c) Calcula explícitamente la función $y(x)$ y calcula la RSP derivando directamente.

    (d) Interpreta el valor obtenido para la RSP.

39. Un consumidor compra 10 libros al año, va 40 veces al cine y 5 veces al teatro. La utilidad que consigue con estas aficiones viene dada por la función

    $$U(L, C, T) = L^2 C T^3.$$

    (a) Escribe la ecuación de la curva de indiferencia correspondiente al consumo actual.

    (b) Razona que dicha ecuación define a C como función implícita $C = C(L, T)$.

    (c) Calcula las derivadas

    $$\left.\frac{\partial C}{\partial L}\right|_{(10,5)}, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial T}\right|_{(10,5)}$$

    sin calcular la función $C(L, T)$.

    (d) Interpreta las derivadas del apartado anterior.

    (e) Calcula la función $C(L, T)$ y, a partir de ella, vuelve a calcular las derivadas anteriores.

40. La función $U(x, y, z) = xy\sqrt{z}$ representa la utilidad que obtiene un consumidor por la adquisición de tres bienes A, B y C en cantidades x, y, z, respectivamente. Dicho consumidor desea obtener un nivel de utilidad de 100 unidades.

    (a) Escribe la ecuación de la curva de indiferencia elegida por el consumidor.

    (b) Comprueba que la ecuación anterior define a z como función implícita $z(x, y)$ siempre que las cantidades consumidas sean no nulas.

    (c) Calcula explícitamente la función $z(x, y)$.

    (d) Calcula $z(10, 5)$ e interpreta el resultado.

    (e) Calcula e interpreta la derivada $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(10,5)}$.

Práctica 12 Primitivas

1. Calcula las integrales siguientes:

   1. $\displaystyle\int \cos x\,dx$
   2. $\displaystyle\int (4x^7 - 6x^3 + 3x^2 + 2x - 6)\,dx$
   3. $\displaystyle\int (3x^2 + 5)\cos(x^3 + 5x)\,dx$
   4. $\displaystyle\int x^4 2^{x^5}\,dx$
   5. $\displaystyle\int \frac{7x^3}{x^4 + 8}\,dx$
   6. $\displaystyle\int \frac{4}{3\sqrt{x}}\operatorname{sen}(7\sqrt{x})\,dx$
   7. $\displaystyle\int 3\cos(5 - x)\operatorname{sen}(5 - x)\,dx$
   8. $\displaystyle\int \frac{5}{x}\sqrt[4]{\ln x}\,dx$
   9. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x)^7}\,dx$
   10. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln x\,dx$
   11. $\displaystyle\int xe^{x^2} - \frac{1}{x^4}\,dx$
   12. $\displaystyle\int \frac{9}{5 - x}\,dx$
   13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{4\sqrt[5]{x^3 - 3}}\,dx$
   14. $\displaystyle\int \frac{2\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$
   15. $\displaystyle\int xe^x\,dx$
   16. $\displaystyle\int (x - 3)\operatorname{sen}(x + 4)\,dx$
   17. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$
   18. $\displaystyle\int \ln x\,dx$
   19. $\displaystyle\int (1 - x)2^{-x}\,dx$

---

2. Calcula las integrales siguientes:

   1. $\displaystyle\int (3x^3 - 6x^2 + x - 5)\,dx$
   2. $\displaystyle\int (x^6 + \frac{1}{x^3} - 5\cos x)\,dx$
   3. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} 5x + \cos 4x + 3)\,dx$
   4. $\displaystyle\int 7e^{3x}\cos e^{3x}\,dx$
   5. $\displaystyle\int 5^{2x}\operatorname{sen} 5^{2x}\,dx$
   6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + (1 + x^3)^2}\,dx$
   7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}(3\sqrt{x} + 8)^9\,dx$
   8. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}\,dx$
   9. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$
   10. $\displaystyle\int \frac{3x + 5}{(3x + 5)^2 + 10}\,dx$
   11. $\displaystyle\int \frac{5^x}{\sqrt[5]{5^x + 5}}\,dx$
   12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\cos\sqrt{x}}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$
   13. $\displaystyle\int 9x\,3^{-x^2}\,dx$
   14. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$
   15. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln^5 x\,dx$

16. $\int e^x \sqrt{3+5e^x}\,dx$

17. $\int \dfrac{e^{3x}+x^2}{e^{3x}+x^3}\,dx$

18. $\int \dfrac{2\cos\ln(3x+5)}{3x+5}\,dx$

19. $\int \dfrac{7}{5+5x^2}\,dx$

20. $\int \dfrac{7x}{5+5x^2}\,dx$

21. $\int \operatorname{sen}(5-x)\,dx$

22. $\int \dfrac{3x^4\operatorname{sen}(x^5-1)}{\cos(x^5-1)}\,dx$

23. $\int 4x^4\operatorname{sen}x^5\cos x^5\,dx$

24. $\int 4\operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx$

25. $\int (\sqrt{x}+x)(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$

26. $\int (\sqrt{x}+x)^5(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})\,dx$

27. $\int (5-x)\operatorname{sen}(5-x)\,dx$

28. $\int \ln x^4\,dx$

29. $\int x^3\ln x^4\,dx$

30. $\int x^{-1}\ln x^4\,dx$

31. $\int (1-x)e^{-x}\,dx$

32. $\int (xe^x+x)\,dx$

33. $\int x^3\operatorname{sen}x^4\,dx$

34. $\int x\operatorname{sen}x\,dx$

35. $\int 3x(4\operatorname{sen}2x+9\cos 3x)\,dx$

36. $\int \dfrac{3x\operatorname{sen}x^2}{5\cos x^2}\,dx$

37. $\int (1-2x)e^x\,dx$

38. $\int 7e^{x/2}\sqrt[5]{3+e^{x/2}}\,dx$

39. $\int x\operatorname{sen}(2x+1)\,dx$

3. Calcula las integrales siguientes:

1. $\int \dfrac{5}{\sqrt{3x}}\operatorname{sen}\sqrt{3x}\,dx$

2. $\int \dfrac{7\operatorname{sen}(5x+3)}{8}\cos(5x+3)\,dx$

3. $\int \dfrac{7(5x+3)}{8}\cos(5x+3)\,dx$

4. $\int x^2\ln x^2\,dx$

5. $\int (5-3x)2^{3-5x}\,dx$

6. $\int \dfrac{5\cos 3x\,\operatorname{sen}3x}{1+\cos^2 3x}\,dx$

7. $\int (3x+\cos 3x)^5(1-\operatorname{sen}3x)\,dx$

8. $\int \dfrac{5\operatorname{sen}8x}{1+\cos^2 8x}\,dx$

9. $\int (1-x)^3\ln(1-x)\,dx$

10. $\int \dfrac{5x^{-2/3}}{1+(\sqrt[3]{x})^2}\,dx$

11. $\int x\,5^{x+1}\,dx$

12. $\int te^{-0.1t}\,dt$

13. $\displaystyle\int 3e^{5x}\cos e^{5x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$

15. $\displaystyle\int \ln^{27}(2x+3)\frac{1}{2x+3}\,dx$

16. $\displaystyle\int \ln(2x)\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{2e^{3x}}{\sqrt{4+5e^{3x}}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2e^{3x}}{4+5e^{3x}}\,dx$

19. $\displaystyle\int 8\cos^{10}x\,\operatorname{sen}x\,dx$

20. $\displaystyle\int xe^{3x+2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-3x}}}\,dx$

22. $\displaystyle\int x\ln x^2\,dx$

23. $\displaystyle\int \cos^5(3x+2)\operatorname{sen}(3x+2)\,dx$

24. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(3x+2)\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$

26. $\displaystyle\int (x+1)\sqrt[3]{1-2x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx$

28. $\displaystyle\int (5+e^{2x}+7xe^{x})\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{5}{x}\,3^{7\ln x}dx$

30. $\displaystyle\int x\,3^{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{10x^2e^{-x^3}}{\sqrt{2+e^{-x^3}}}\,dx$

32. $\displaystyle\int 2x\operatorname{sen}2x\,dx$

33. $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen}e^{2x}\,dx$

34. $\displaystyle\int 5(\operatorname{sen}3x)\operatorname{sen}(\cos 3x))\,dx$

35. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x/3)\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,e^{-\sqrt[3]{x-5}}\,dx$

37. $\displaystyle\int (1-2x)\operatorname{sen}(3x)\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{5}{2x+1}\ln^3(2x+1)\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}\operatorname{sen}e^{2x}}{\cos e^{2x}}\,dx$

41. $\displaystyle\int (x-1)\cos 5x\,dx$

42. $\displaystyle\int 10e^{3x+2}\operatorname{sen}e^{3x+2}\,dx$

43. $\displaystyle\int 7x^9\ln x\,dx$

44. $\displaystyle\int x(x-2)^{-2/3}\,dx$

45. $\displaystyle\int \ln x^3\,dx$

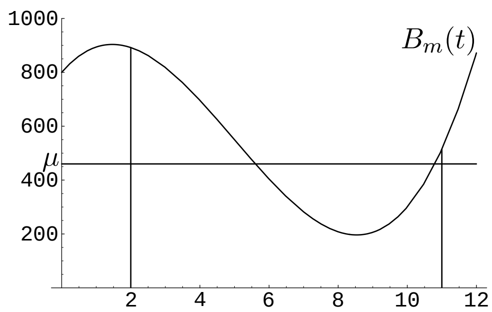
46. $\displaystyle\int \frac{5}{2x+1}\,3^{\ln(2x+1)}\,dx$

47. $\displaystyle\int 7\sqrt[5]{\cos 3x}\,\operatorname{sen}3x\,dx$

48. $\displaystyle\int xe^{1-x/30}\,dx$

Práctica 13 La integral de Riemann

1. El beneficio marginal de una empresa durante un periodo de un año ha venido dado por la función
$$B_m(t) = 4t^3 - 60t^2 + 150t + 800\,\text{u.m./mes},$$
donde t es el tiempo en meses ($0 \le t \le 12$).



   (a) Calcula $B_m(2)$ y $B_m(11)$. Interpreta los resultados.

   (b) Calcula $\int_2^{11} B_m(t)\,dt$. Interpreta el resultado.

   (c) Interpreta geométricamente el resultado anterior.

   (d) Calcula el beneficio medio μ de la empresa en el periodo comprendido desde marzo a noviembre inclusive. Interprétalo.

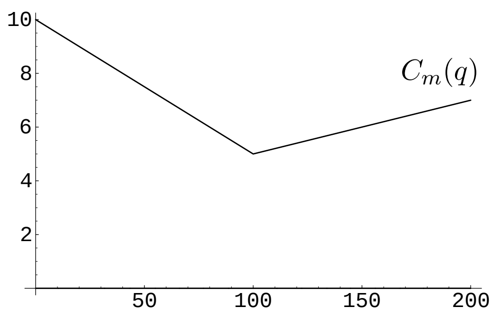
   (e) Interpreta geométricamente en la figura el beneficio que habría acumulado la empresa en el periodo indicado en el apartado anterior si su beneficio marginal hubiera sido constante igual a μ.

   (f) Calcula el beneficio $B(t)$ acumulado por la empresa desde el 1 de enero hasta el instante t.

   (g) A partir de la expresión obtenida en el apartado anterior, comprueba que el beneficio marginal de la empresa es el dado en el enunciado del problema.

2. Calcula
$$\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx, \qquad \int_0^5 xe^x\,dx.$$

3. Los costes marginales de una empresa vienen dados por la función
$$C_m(q) = \begin{cases} 10 - \frac{q}{20} & \text{si } 0 \le q \le 100, \\ 3 + \frac{q}{50} & \text{si } 100 \le q. \end{cases}$$
Además, la empresa tiene un coste fijo de 300 u.m.



   (a) Calcula $\int_0^{150} C_m(q)\,dq$.

   (b) Interpreta económicamente el resultado.

   (c) Interpreta geométricamente el resultado.

   (d) Calcula el coste de producir 150 unidades de producto.

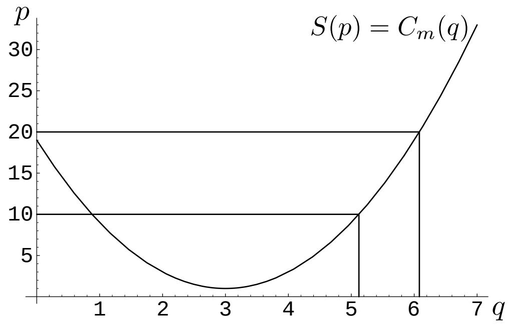
4. La función de coste marginal de una empresa es $C_m(q) = 1 + \dfrac{(2q-6)^2}{2}$ y sus costes fijos son de 20 u.m.

   (a) Calcula la función de coste de la empresa.

   (b) Teniendo en cuenta que la producción que maximiza el beneficio de la empresa es la que cumple que $C_m(q) = p$, donde p es el precio de mercado del producto, calcula la función de oferta de la empresa[3] $q = S(p)$.

   (c) Calcula las cantidades de producto q_0 y q_1 que le conviene producir a la empresa si el precio de mercado es $p_0 = 9.66$ y $p_1 = 20$, respectivamente. Identifícalas en la figura.

   (d) Calcula el incremento de beneficio que consigue la empresa si el precio de mercado pasa de ser p_0 a ser p_1.



   (e) Calcula $\Delta C = \displaystyle\int_{q_0}^{q_1} C_m(q)\,dq$. Interpreta el resultado económica y gráficamente.

   (f) Se define el *excedente del productor* como

$$\text{EP} = \int_0^p S(p)\,dp = \int_{p_0}^p S(p)\,dp,$$

   donde p_0 es el precio de cierre y p el precio de venta. Calcúlalo para $p = p_1 = 20$ e interpreta el resultado geométricamente.

   (h) A partir de la figura, interpreta económicamente la suma $\Delta I = \Delta C + \text{EP}$.

   (i) Interpreta económicamente el excedente del productor.

5. Razona cuáles de las funciones siguientes son integrables Riemann en el intervalo $[-5, 5]$ y cuáles no:

$$x^5, \quad \frac{1}{x^5}, \quad \frac{6}{(x+10)^5}, \quad \ln x^2, \quad \frac{e^{x+2}}{e^{x+2}-1}, \quad \frac{e^{x+7}}{e^{x+7}-1}, \quad \sqrt[3]{x-2},$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \le 0, \\ \ln x & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 0, \\ 2^x & \text{si } x \ge 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}} & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

---

6. Calcula

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx, \quad \int_{10}^{17} \sqrt{x-1}\,dx, \quad \int_0^5 xe^x\,dx, \quad \int_1^2 x^4 \ln x\,dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx, \qquad \int_0^5 \frac{dx}{3x+2}, \qquad \int_1^5 (x^3 + \ln x)\,dx.$$

[3]Puede probarse que el precio de cierre de la empresa, es decir, el precio por debajo del cual sus beneficios son negativos, es $p_0 = 9.66$ u.m. Así, el dominio con sentido económico de $S(p)$ es $[p_0, +\infty[$ o, equivalentemente $S(p) = 0$ para $p < p_0$.

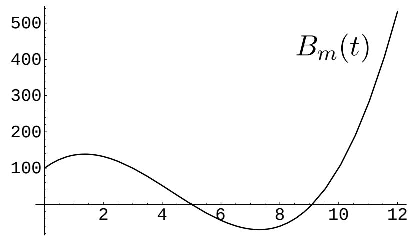
7. Calcula las integrales en el intervalo $[-5,5]$ de las funciones del problema 5 que sean integrables en dicho intervalo.

8. Calcula la integral en $[3,15]$ de la función
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 10,\\ \sqrt{x} & \text{si } x>10.\end{cases}$$

9. Calcula el valor medio en el intervalo $[4,10]$ de la función
$$f(x)=\begin{cases} 4+3\sqrt{x} & \text{si } 0\le x\le 5,\\ \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x>5.\end{cases}$$

10. Calcula la integral de la función
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x\le 4,\\ \dfrac{5}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} & \text{si } x>4,\end{cases}$$
en el intervalo $[1,9]$.

11. Los beneficios marginales de una empresa a lo largo de un año han venido dados por la función
$$B_m(t)=2t^3-26t^2+60t+100\,\text{u.m./mes},$$
donde t es el tiempo en meses $(0\le t\le 12)$.



   (a) Calcula el beneficio acumulado por la empresa a lo largo del año
   (b) Interpreta geométricamente el resultado.
   (c) ¿Qué signo tendrá el beneficio acumulado durante los meses de julio y agosto?
   (d) Calcula el beneficio medio correspondiente a dichos dos meses.

12. El beneficio marginal de una empresa durante un año (desde $t=0$ hasta $t=1$) ha venido dado por $B_m(t)=te^{1-t^2}$ millones de euros/año. El beneficio inicial (es decir, los costes de lanzamiento del producto cuando todavía no había ingresos) era $B(0)=-0.5$ millones de €.
   (a) Calcula la función de beneficio acumulado $B(T)$ para dicho periodo.
   (b) Calcula el instante T en que los beneficios de la empresa fueron nulos (es decir, el instante en que la empresa compensó la inversión inicial y pasó de tener pérdidas a tener beneficios).
   (c) Calcula el instante en que el beneficio marginal fue máximo.

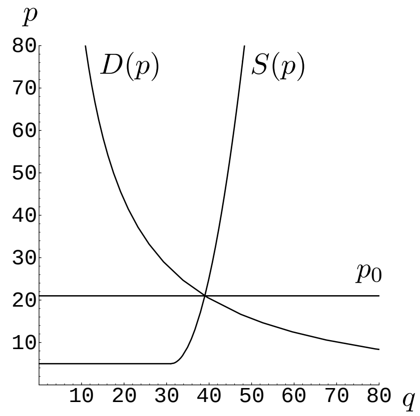
13. Los costes fijos de una empresa son de 100 u.m., mientras que la función de costes marginales es
$$C_m(q) = 3q^2 - 60q + 345 \text{ u.m./u.p.}$$
    (a) Calcula el coste de producir 8 unidades de producto.
    (b) Calcula la función de coste total.

14. El beneficio marginal de una empresa durante un periodo de 10 años $[0, 10]$ ha sido
$$B_m(t) = \frac{10\,000}{(2t+1)^3}.$$
Calcula el beneficio medio en el periodo $[4, 9]$. Interprétalo. ¿En qué instante el beneficio marginal coincidió con el beneficio medio?

15. Calcula la función de costes de una empresa cuyos costes fijos son de 500 u.m. y cuya función de coste marginal es $C_m(q) = 0.1q^2 - 2q + 15$ u.m./u.p.

16. Calcula la cotización media de las acciones del problema 17 de la pág. 12 durante el año considerado en dicho problema.

17. Las funciones de oferta y demanda de un bien son, respectivamente,
$$S(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 5, \\ 31 + 2\sqrt{p-5} & \text{si } p \geq 5, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad D(p) = \frac{1\,000}{p+4} - 1.$$
    (a) Comprueba que el precio de equilibro es $p_0 = 21$.
    (b) Calcula el precio p_1 a partir del cual el producto deja de tener demanda.
    (c) Si el precio de venta es el precio de equilibrio, calcula el excedente del productor y el excedente del consumidor:
$$\text{EP} = \int_0^{p_0} S(p)\,dp, \qquad \text{EC} = \int_{p_0}^{p_1} D(p)\,dp.$$
    (d) Interpreta geométricamente ambas integrales.[4]



18. La función de oferta de un bien en un mercado es $S(p) = 1\,250p$, donde p es el precio de venta. La demanda la determina un total de 1 000 consumidores, cada uno de los cuales sigue la función de demanda
$$D(p) = \frac{10}{\sqrt{p}},$$

[4]Teniendo en cuenta el lema de Shephard (problema 6 (pág. 43)) la función $D(p)$ es la derivada del gasto G del consumidor (el gasto total necesario para mantener su nivel actual de utilidad), por lo tanto
$$\text{EC} = \int_{p_0}^{p_1} D(p)\,dp = \int_{p_0}^{p_1} \frac{dG}{dp}\,dp = G(p_1) - G(p_0) = \Delta G.$$
Así pues: el excedente del consumidor es el incremento del gasto del consumidor que se produciría si el precio del artículo pasara de p_0 a p_1 o, equivalentemente, lo que se ahorra el consumidor a la hora de alcanzar su nivel de utilidad gracias a que el precio del artículo es p_0 y no otro que quede fuera de sus posibilidades.

(a) Calcula el precio de equilibrio.

(b) Calcula el nuevo precio de equilibrio si el número de consumidores aumenta a 1 100.

(c) Calcula el incremento del excedente del productor y el incremento del excedente del consumidor (de un consumidor) debidos a la variación del precio.

19. El beneficio marginal de una empresa durante un periodo de cinco años ha venido dado por la función
$$B_m(t) = \begin{cases} 1\,000\sqrt{t} & \text{si } 0 \le t \le 2, \\ 500\,t & \text{si } 2 < t \le 5. \end{cases}$$
Calcula el beneficio medio de los cuatro últimos años. Interprétalo.

20. La función de costes marginales de una empresa es
$$C_m(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{120}{x+10} & \text{si } 0 \le x < 50, \\[2ex] 10 + \dfrac{120}{(x+10)^2} & \text{si } x \ge 50, \end{cases}$$
donde x es la cantidad producida de cierto artículo. Teniendo en cuenta que la producción tiene un coste fijo de 1 000 u.m., calcula el coste de producir 110 u.p.

21. Calcula el valor medio en el intervalo $[1, 5]$ de la función
$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 < x < 2, \\ x^2 & \text{si } 2 \le x < 4, \\ xe^{x^2} & \text{si } 4 \le x < 6, \\ \ln x & \text{si } 6 \le x. \end{cases}$$

22. Una empresa produce un artículo con la siguiente función de coste marginal:
$$C_m(x) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 \le x \le 100, \\ \dfrac{1\,000}{x} & \text{si } 100 < x. \end{cases}$$
Calcula el coste medio de producir 200 unidades de producto.

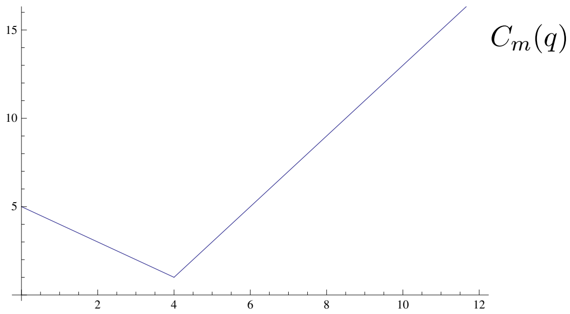
23. El coste marginal de una empresa viene dado por la función
$$C_m(q) = \begin{cases} 5 - q & \text{si } 0 \le q \le 4, \\ 2q - 7 & \text{si } q \ge 4, \end{cases}$$
donde q es la cantidad producida de un artículo. Los costes fijos son de 15 u.m.

(a) Calcula $\displaystyle\int_0^{10} C_m(q)\,dq$.

(b) Interpreta la integral anterior gráfica y económicamente.

(c) Supongamos que la empresa pasa de producir 6 artículos a producir 9. Calcula el coste medio de los nuevos artículos producidos.

(d) Calcula el coste de producir 3 artículos.



24. El beneficio marginal de una empresa durante un periodo de 10 años ha venido dado por la función

$$B_m(t) = \begin{cases} 3+t & \text{si } 0 \leq t \leq 5, \\ 18-2t & \text{si } 5 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

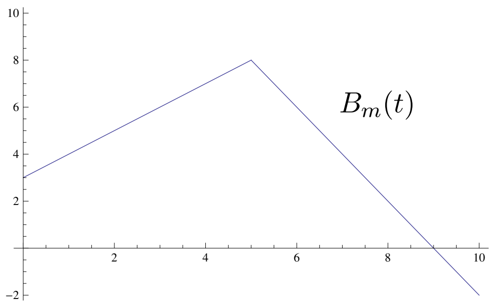
Al principio del periodo el capital de la empresa era de 100 u.m.

(a) Calcula $\displaystyle\int_6^{10} B_m(t)\, dt$.

(b) Interpreta la integral anterior gráfica y económicamente.

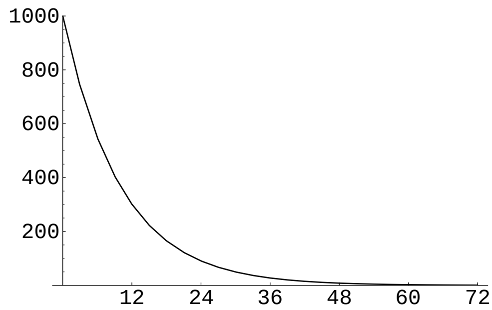
(c) Escribe la expresión para el beneficio medio que obtuvo la empresa en los cuatro últimos años del periodo.

(d) Calcula el capital de la empresa al final del periodo.



Práctica 14 La integral impropia

1. Un empresario compra una nueva máquina para su fábrica de la que espera obtener un rendimiento de 1 000 € /mes. No obstante, el desgaste de la máquina hace que este rendimiento marginal no se mantenga constante, sino que vaya disminuyendo según la función $R_m(t) = 1\,000\, e^{-0.1t}$ € /mes, donde t es el tiempo en meses a contar desde el momento de compra. La figura muestra su gráfica.



   (a) ¿A partir de qué instante t se hace 0 el rendimiento marginal de la máquina?

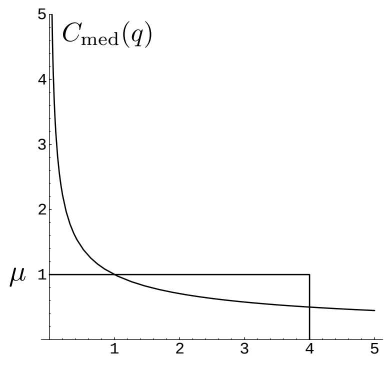
   (b) Calcula el rendimiento acumulado $R(t) = \int_0^t R_m(t)\, dt$ por la máquina desde $t = 0$ hasta un tiempo t.

   (c) Calcula el rendimiento acumulado al cabo de 5, 6, 10 y 20 años. Interpreta económicamente los resultados. Interpreta geométricamente los dos primeros.

   (d) Calcula $\int_0^{+\infty} R_m(t)\, dt$. Interpreta el resultado.

2. La función de costes de una empresa es $C(q) = \sqrt{q}$, con lo que el coste medio es

$$C_{\text{med}}(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$



   (a) ¿Es el coste medio integrable Riemann en el intervalo $[0, 4]$?

   (b) ¿Tiene sentido (matemáticamente) calcular su valor medio

$$\mu = \frac{\int_0^4 C_{\text{med}}(q)\, dq}{4 - 0}$$

   en dicho intervalo?

   (c) Comprueba que

$$\int_0^4 C_{\text{med}}(q)\, dq = 4 \text{ u.m.}$$

   Interpreta geométricamente este resultado.

   (d) Concluye que el valor medio es $\mu = 1$. Interpreta geométricamente este resultado.

3. Estudia si las integrales siguientes son convergentes o divergentes y, en caso de que sean convergentes, calcula su valor.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{0} x^3\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx \qquad \int_0^5 \frac{1}{1-x}\,dx \qquad \int_{-2}^{3} \frac{6x-3}{x^2-x-2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^6}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\,dx$$

4. Calcula la integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x < 1, \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

---

5. Estudia si las integrales en el intervalo $[-5,5]$ de las funciones del ejercicio 5 de la pág. 58 que no son integrables Riemann son convergentes o divergentes.

6. Calcula las integrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2}\,e^{5/x}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{x^2}\,e^{3/x}\,dx.$$

7. Calcula

$$\int_1^5 \frac{dx}{6-2x} \qquad \int_{-\infty}^{2} \frac{6\,dx}{\sqrt{4-2x}} \qquad \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x}\ln^{-5}x\,dx \qquad \int_1^5 \frac{x-3}{x^2-6x}\,dx \qquad \int_{-1}^{5} \frac{x-3}{x^2-6x}\,dx$$

$$\int_5^{10} \frac{x-3}{x^2-6x}\,dx \qquad \int_1^5 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1-e^x}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{-2/x}\,dx \qquad \int_0^3 \frac{3x}{\sqrt[3]{(x^2-4)^5}}\,dx$$

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{1-x^2}\,dx \qquad \int_1^5 \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2 x}\,dx \qquad \int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{x^3}e^{1/x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}e^{-2/x}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{7}{x^3}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^5 dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}\,e^{-\sqrt[3]{x-5}}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x-1)^5}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-x}-1}\,dx \qquad \int_{-1}^{+\infty} \frac{6x-3}{x^2-x-2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-3x}}}\,dx \qquad \int_0^5 \frac{4x}{x^2-4}\,dx$$

8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{4+5e^{3x}}} & \text{si } x < 1, \\ 1/x & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

calcula su integral en $[0,5]$ y en $]-\infty,0]$.

9. Calcula la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 2+\sqrt{t} & \text{si } 0 \le t < 10, \\ e^{-0.02t} & \text{si } t \ge 10. \end{cases}$$

10. Un empresario realiza una inversión en maquinaria cuyo rendimiento marginal se estima en $R_m(t) = 2\,000e^{-0.01t}$ € /año, donde t es el tiempo en años.

    (a) Calcula el rendimiento medio del periodo $[4, 10]$.

    (b) Calcula el rendimiento máximo que puede dar la maquinaria, es decir, el rendimiento desde $t = 0$ hasta $+\infty$.

11. Un producto se vende a un precio $p = 2$ € , y su función de demanda es

$$D(p) = \frac{500}{p^2}.$$

    Calcula el excedente del consumidor

$$\mathrm{EC} = \int_p^{+\infty} D(p)\,dp.$$

12. La oferta y la demanda de un artículo vienen dadas por las funciones

$$S(p) = \begin{cases} 5p^2 - 125 & \text{si } p \ge 5, \\ 0 & \text{si } p < 5, \end{cases} \qquad D(p) = \frac{37\,500}{p^2}.$$

    (a) Comprueba que el precio de equilibrio es $p_0 = 10$ €.

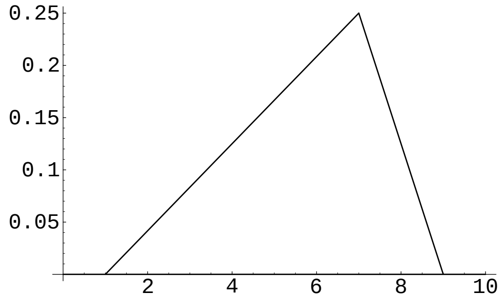
    (b) Calcula el excedente del productor y el excedente del consumidor:

$$\mathrm{EP} = \int_0^{p_0} S(p)\,dp, \qquad \mathrm{EC} = \int_{p_0}^{+\infty} D(p)\,dp.$$

Práctica 15 Variables aleatorias continuas

1. Supón que la función de densidad de probabilidad de la nota X que vas a sacar en Matemáticas I es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{24} & \text{si } 1 \le x < 7, \\ \dfrac{9-x}{8} & \text{si } 7 \le x \le 9, \\ 0 & \text{si } 9 < x. \end{cases}$$



   (a) Calcula tu probabilidad de suspender, tu probabilidad de aprobar y tu probabilidad de sacar un notable.
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que saques exactamente un 8?
   (c) Calcula tu probabilidad de sacar una nota cualquiera entre $-\infty$ y $+\infty$.
   (d) Calcula tu nota esperada.
   (e) ¿Cuál es la probabilidad de sacar más de 9?, ¿puedes poner un ejemplo de circunstancias en las que se diera este caso?

2. La variable aleatoria X mide la duración en años de una bombilla halógena. Su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & \text{si } x \ge 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Comprueba que $f(x)$ cumple lo necesario para ser una función de densidad de probabilidad.
   (b) ¿Le conviene al fabricante ofrecer una garantía de un año?

3. Sea X la edad de un alumno de clase escogido al azar, y supongamos que X es una variable aleatoria con esta función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{45-2x}{20} & \text{si } 18 \le x \le 22, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Comprueba que la función $f(x)$ es aceptable como función de densidad.
   (b) Calcula la edad media $E[x]$ de los alumnos de la clase.
   (c) Calcula la *mediana* M de las edades de los alumnos de la clase, es decir, la edad M para la que $\mathrm{P}(X \le M) = 0.5$.
   (d) Calcula la probabilidad de que un alumno tomado al azar tenga 18 años (y ten presente que una persona no tiene 18 años sólo el día de su cumpleaños, sino que tiene 18 años hasta que cumple 19 años).

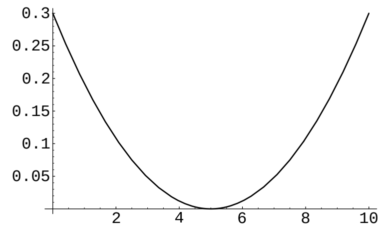
---

4. Sea X una variable cuya función de densidad de probabilidad es la de la distribución normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Comprueba que la esperanza de X vale 0.

5. Supón ahora que X es la nota que sacará en esta asignatura un alumno del grupo tomado al azar (no la nota de un alumno en concreto). No sería descabellado que la función de densidad de X fuera de la forma



$$f(x) = \begin{cases} k(5-x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k para que $f(x)$ sea ciertamente una función de densidad.
   (b) Da una posible interpretación de la función $f(x)$, suponiendo que aproximadamente la mitad de los alumnos del grupo no asiste a clase.
   (c) Calcula la probabilidad de que X corresponda a un aprobado justo (no a un notable ni a un sobresaliente).
   (d) Calcula la nota media esperada para el grupo.

6. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad sea de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k(1+\sqrt{x}) & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula $\mathrm{P}(2.1 \leq X \leq 3.5)$.
   (c) Calcula la esperanza de X.

7. En las encuestas de evaluación del profesorado, los alumnos responden a varias preguntas sobre su profesor puntuándolas entre 1 y 5. Sea X la media de las respuestas de un alumno del grupo escogido al azar y supongamos que la función de densidad de probabilidad de X es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)(25-x^2) & \text{si } 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la valoración media que los alumnos han hecho del profesor (la esperanza $E[x]$).
   (c) Calcula la probabilidad de que un alumno asigne al profesor una valoración mayor que 4.

8. Sea X la edad de una persona tomada al azar en una población dada. Supongamos que la densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} 0.025e^{-0.025x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Comprueba que la función $f(x)$ es realmente una función de densidad de probabilidad.
   (b) Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, su edad esté comprendida entre los 6 y los 14 años.
   (c) Calcula la edad a que cumple $\mathrm{P}(X \leq a) = 0.95$.
   (d) Calcula la probabilidad de encontrarnos con una persona de más de 500 años.

9. Para preparar el partido de la próxima jornada de liga, el entrenador del equipo de fútbol A ha analizado todos los partidos en los que su equipo se ha enfrentado a su adversario B, y ha concluido que el tiempo (en minutos) que el equipo B tarda en meter el primer gol es una variable aleatoria con función de densidad de la forma
$$f(t) = \begin{cases} ke^{-0.3t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$
   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la probabilidad de que el equipo B meta el primer gol en los primeros 10 minutos de partido.
   (c) ¿Debería estar preocupado el portero del equipo A?

10. La variable aleatoria X representa la temperatura mínima del día 1 de enero en cierta ciudad. Su función de densidad es
$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/18}.$$
Calcula la temperatura mínima esperada $E[X]$ para el próximo 1 de enero.

11. La función de densidad de una variable aleatoria es
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} & \text{si } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la esperanza de X.
   (c) Calcula la mediana de X.

12. Calcula la mediana de una variable aleatoria cuya función de densidad es
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x+3}{312} & \text{si } 2 < x < 10, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

13. Supongamos que la nota X en esta asignatura de un alumno escogido al azar tenga la función de distribución
$$f(x) = \begin{cases} k \operatorname{sen} \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   (a) Comprueba que f es una función de densidad de probabilidad y calcula el valor de k.
   (b) Calcula la esperanza $E[X]$.

14. La edad de los habitantes de una población es una variable aleatoria X cuya función de densidad es de la forma
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{1-x/30} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la edad media de la población.
   (c) Calcula la edad t tal que $\Pr(X \leq t) = 0.95$.

Práctica 16 Ecuaciones diferenciales

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y,$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y},$

   (c) $(1 + e^x)y\,\dfrac{dy}{dx} = e^x, \quad y(0) = 1,$

   (d) $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0,$

   (e) $(1 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0,$

   (f) $\dfrac{dy}{dx}\operatorname{sen} x = y \cos x,$

   (g) $x\sqrt{1 - x^2}\,dx + y\sqrt{1 - y^2}\,dy = 0, \qquad y(0) = 1,$

   (h) $y \ln y\,dx + x\,dy = 0, \qquad y(1) = e.$

2. Sea p el precio de un bien, y supongamos que la oferta y la demanda vienen dadas por

$$S(p) = 2p, \qquad D(p) = 100 - 8p.$$

   (a) Calcula el precio de equilibrio.

   (b) Supongamos que el precio p varía con el tiempo $p = p(t)$ y que cumple la ecuación de Walras:

$$p' = k(D(p) - S(p)) \quad \text{con } k > 0.$$

   Interpreta económicamente esta condición.

   (c) Calcula $p(t)$ si $k = 0.5$.

   (d) Comprueba que $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$ es el precio de equilibrio.

3. Sea $D(p)$ la demanda de un artículo en función de su precio. Supongamos que cuando $p = 1$ la demanda es de 100 unidades de producto, así como que la elasticidad es constante $E = -1$. Calcula la demanda correspondiente a un precio $p = 5$ u.m.

4. Hemos invertido 1 000 € durante un año en unos fondos cuya rentabilidad ha resultado ser la dada por $i_\infty = 10 \cos 2\pi t$. Calcula el capital final que hemos obtenido.

---

5. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

   (a) $\dfrac{y^2}{x}\dfrac{dy}{dx} = e^x, \qquad y(0) = 3$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = xy \operatorname{sen} x, \qquad y(0) = 5$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x \operatorname{sen} x^2}{\sqrt{y}}, \qquad y(0) = 4$

   (d) $xy\dfrac{dy}{dx} = 1$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}, \qquad y(2) = 4$

(f) $\sqrt{2x}\,\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{y}$

(g) $3(y+1)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+(y+1)^2}{1+(x+1)^2}$

(h) $\cos 2x\,\dfrac{dy}{dx} = 6\sqrt{y}\,\mathrm{sen}\,2x$

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2^x}{y}$

(j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{x^5}$

(k) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{e^y}, \qquad y(1) = 0$

(l) $xe^{2y}\dfrac{dy}{dx} = \ln x, \qquad y(1) = 0$

6. Un artículo se vende a un precio $p = 4$€ y su demanda actual es de 100 000 unidades diarias. Determina qué demanda cabría esperar si el precio fuera de 5€ sabiendo que la elasticidad de la demanda es $E = -p/10$.

7. Un artículo se vende a un precio $p = 2$€ y su demanda actual es de 10 000 unidades. Calcula la demanda correspondiente a un precio $p = 3$€ si la elasticidad es $E = p\sqrt[3]{2-p}$.

8. La elasticidad de la demanda de un bien respecto de la renta de los consumidores es $E(r) = -r\ln r$. Calcula la demanda correspondiente a una renta $r = 2$ u.m. si cuando la renta es de 1 u.m. la demanda es de 1 000 u.p.

9. La población actual de una ciudad es $P = 1\,000\,000$ habitantes, y evoluciona en el tiempo según la ecuación diferencial
$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{P}.$$
Calcula la población que tendrá la ciudad dentro de dos años.

10. La población de cierto país aumenta proporcionalmente al número de habitantes. Si después de dos años la población se ha duplicado y después de tres años es de 20.000 habitantes, calcula la población inicial.

11. Invertimos un capital de 3 000€ a un interés continuo variable dado por $i_\infty = 0.01t$ durante 3 años. Calcula el capital final.

12. Invertimos un capital de 1 000€ en una inversión que nos proporciona una rentabilidad $i_\infty = 0.02t$ (a partir de $t = 0$). Calcula la función $C(t)$ que da el capital en cada instante t. ¿Cuántos años han de pasar para lograr un capital de 2 000€?

13. Se nos plantea la posibilidad de invertir un capital por un periodo de tres años. De entre las distintas expectativas sobre la rentabilidad de la inversión, la menos favorable pronostica que la evolución del interés será $i_\infty(t) = 5 + 16t - 3t^2$ %. Determina el mínimo capital que debemos invertir para asegurarnos un capital final de 1000€.

14. La oferta y la demanda de un bien dependen de su precio p, pero también varían con el tiempo t (dado en meses), de modo que

$$S(p) = (40 + 10p)(t + 1), \quad D(p) = (100 - 20p)(t + 1).$$

Actualmente (en $t = 0$) el precio es de $p = 3$€. Determina el precio que cabe esperar para dentro de un mes, para dentro dos meses y para dentro de tres meses si éste cumple la ecuación de Walras (cf. problema 2) con $k = 0.02$. Compara los resultados con el precio de equilibrio.

15. Un artículo se vende a un precio de $p = 2$€ y su demanda actual es de 200 u.p. Se estima que, para valores de p cercanos al actual, la elasticidad de la demanda es $p - 4$. Calcula la demanda que cabría esperar si el precio se incrementara en 0.5€.

16. El beneficio marginal de una empresa es $B_m(t) = B/100$, donde t es el tiempo en años (y B el beneficio). Sabiendo que el año pasado el beneficio fue de 1 000 u.m., calcula el beneficio actual (en $t = 0$) y el beneficio esperado para el año próximo.

17. Depositamos un capital de 1000 u.m. durante 10 años a un interés continuo variable, que ha resultado ser $i_\infty(t) = 0.05 + 0.01t$. Calcula el capital final.

18. Queremos invertir un capital durante un año (desde $t = 0$ hasta $t = 1$) y esperamos que la rentabilidad de la inversión sea $i_\infty = 0.07 + 0.06\sqrt{t} + 0.09t^2$. Calcula el capital que hemos de invertir si queremos asegurarnos un capital final de 3 450€.

19. Una inversión durante un año (desde $t = 0$ hasta $t = 1$) ha proporcionado una rentabilidad $i_\infty = 0.04(t + 1)$. Calcula cuánto tendríamos que haber invertido para haber conseguido un capital final de 5 000€.

20. La demanda actual de un producto es de 740 u.p. y su elasticidad respecto de la renta de los consumidores es $E(r) = r/1\,000$. Si la renta actual es de 2 000 u.m., calcula la demanda que cabe esperar si dicha renta aumenta en 100 u.m.

21. La población de una ciudad (en miles de habitantes) tiene una tasa de crecimiento anual de $2\sqrt{P}\,t\cos t$ miles de habitantes/año. Calcula la población esperada dentro de ocho años si la población actual (en $t = 0$) es $P = 100$.

22. La variación con el tiempo de la demanda de un artículo (en porcentaje) viene dada por la función $e^{-0.1t}$. Si la demanda actual (en $t = 0$) es de 1 000 u.p., calcula la demanda prevista para dentro de un año.

23. La población de una ciudad crece a un ritmo de $\sqrt{P}\,e^{0.1t}$ habitantes/año, donde P es la población en el instante t. Determina el número de habitantes en $t = 0$ sabiendo que en $t = 10$ la ciudad contaba con dos millones de habitantes.

24. Unos fondos de inversión han proporcionado durante un periodo de tres años $[0, 3]$ una rentabilidad $i_\infty = t\cos t^2$. Determina qué capital tendríamos que haber invertido para garantizar un capital final de 10 000€.

25. La oferta y la demanda de un producto en función de su precio vienen dadas por

$$S(p) = 3p, \qquad D(p) = \frac{375}{p^2}.$$

   (a) Calcula el precio de equilibrio p_0.
   (b) Aplica la ecuación de Walras (problema 2) con $k = 1$ para determinar la función $p(t)$ que determina la evolución del precio del artículo con el paso del tiempo.
   (c) Calcula el precio que cabe esperar dentro de tres años si actualmente (en $t = 0$) el precio es $p = 10$ €.

26. La oferta y la demanda de una empresa vienen dadas por

$$S(p) = \frac{p^2 - 4}{p}, \qquad D(p) = \frac{5}{p}.$$

   (a) Calcula el precio de equilibrio p_0.
   (b) Calcula el excedente del consumidor $\int_{p_0}^{+\infty} D(p)\, dp$.
   (c) Calcula la evolución del precio en función del tiempo resolviendo la ecuación de Walras (problema 2) con $k = 1$.

27. La rentabilidad de unas acciones ha venido dada por

$$i_\infty(t) = 0.15 \operatorname{sen}(0.8t + 2).$$

   (a) Plantea y resuelve la ecuación diferencial que determina el valor $C(t)$ de las acciones en cada instante t.
   (b) Determina la cantidad que deberíamos haber invertido en $t = 0$ para haber logrado un capital de 1 000 € en $t = 1$.
   (c) ¿Nos hubiera convenido mantener la inversión durante 3 años?

28. La rentabilidad de las acciones de una empresa durante un periodo de cuatro años $0 \leq t \leq 4$ ha venido dada por

$$i_\infty(t) = 0.2 \, \frac{t - 5}{t^2 - 10t - 11}.$$

   (a) Calcula la rentabilidad media de los dos primeros años.
   (b) Plantea y resuelve la ecuación diferencial que determina el valor $C(t)$ de las acciones en cada instante t.
   (c) Si hemos comprado un paquete de 500 € de dichas acciones en $t = 1$, calcula su valor en $t = 4$.

Práctica 17 Álgebra lineal y sistemas de ecuaciones

Productos de matrices

1. Calcula:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinantes

2. Calcula los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 27, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

3. Calcula los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 \\ 8 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -27, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & -3 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 110,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & 10 \\ -3 & 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} = -60, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -29.$$

Matrices inversas

4. Calcula la matriz inversa de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calcula la matriz inversa de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -4 & 3/2 \\ 1/2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & -4/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/10 & 0 & 0 \\ 3/10 & 4/10 & -2/10 \\ -4/10 & -2/10 & 6/10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/10 & -2/10 & -4/10 \\ 7/10 & -2/10 & 1/10 \\ 13/10 & -8/10 & -1/10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/12 & -3/12 & 7/12 \\ 6/12 & 3/12 & -3/12 \\ -2/12 & 3/12 & 1/12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/4 & 1 & 2/4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Sistemas de ecuaciones lineales

6. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+\ z &= 6\\ -x-\ y+4z &= 12\\ 2x+3y-\ z &= 6\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x-\ y-\ z &= -1\\ x+2y+5z &= 2\\ -3x+\ y+2z &= 9\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+3y-z &= 15\\ x-\ y+z &= -1\\ x+2y\quad &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -2x+y &= 10\\ y+2z &= 0\\ 2x+z &= 6\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 5x+10y+\ z &= 2\\ 3x+\ 6y+\ z &= 2\\ -2x+\ y+10z &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 6x-\ y+\ z &= 0\\ x+\ y+\ z &= -3\\ 2x-3y-4z &= 2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-\ z &= 11\\ x-\ y+\ z &= 2\\ -x+2y+3z &= 4\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+2y+\ z &= 4\\ x+2y-\ z &= 0\\ -2x-\ y+4z &= 7\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+2y-\ 6z &= 10\\ 2x-\ y+\ 3z &= 0\\ -x-\ y+10z &= 1\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+\ 4y-\ z &= 1\\ 2x+10y-3z &= -2\\ -5x-21y+6z &= 1\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+5y-3z &= -2\\ x+3y-\ z &= 2\\ -3x-\ y+\ z &= 2\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+10y+8z &= 5\\ x+\ 5y+2z &= 1\\ -2x-9y+3z &= 5\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z &= 5\\ 3x+\ y+2z &= 1\\ -3x+5y-3z &= -8\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x+\ y+2z &= 1\\ x-2y+3z &= 5\\ -3x+5y-3z &= -8\end{aligned}\right\}$$

Sistemas de ecuaciones

7. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{5}{10}\\ 5x+10y &= 1\,600\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{y}{x+3} &= 1\\ 2x+2y &= 400\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}}{\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}} &= \frac{8}{4}\\ 8x+4y &= 600\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{20}{5}\\ 20x+5y &= 4\,000\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x^{1/2}y^{1/2} &= 200\\ y &= 2x\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2xy &= 25\,600\\ y &= x\end{aligned}\right\}$$

8. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 8-4x-8y=0 \\ 10-6x-3y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 4x+6y=24 \\ 8x+3y=24 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x^2+y^2=6\,300 \\ 3x+2y=210 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} p+1.5q=6 \\ p-\lambda=0 \\ q-1.5\lambda=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3x^2+y^2=6\,300 \\ 3-6x\lambda=0 \\ 2-2y\lambda=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} h+1.5r=6 \\ 2h-\quad p=0 \\ 2r-1.5p=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+y=11 \\ x+20y=120 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} \sqrt{x}+y=9 \\ x+20y=81 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+\quad y=30 \\ 4x+2y=80 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ y-\lambda=0 \\ x-2\lambda=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} \frac{4}{\sqrt{x}}-2x\lambda=0 \\ \frac{5}{2\sqrt{y}}-10y\lambda=0 \\ x^2+5y^2=21 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 1-2KL\lambda=0 \\ 3-K^2\lambda=0 \\ K^2L=36 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} yz-2\lambda=0 \\ xz-\quad\lambda=0 \\ xy-3\lambda=0 \\ 2x+y+3z=18 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 16-4x\lambda=0 \\ 24-6y\lambda=0 \\ 12-2z\lambda=0 \\ 2x^2+3y^2+z^2=29 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3-yz\lambda=0 \\ 4-xz\lambda=0 \\ 2-xy\lambda=0 \\ xyz=72 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 9-\lambda(y+5)=0 \\ 2-\lambda(x+2)=0 \\ xy+5x+2y=6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 1-2x\lambda=0 \\ \frac{1}{y}-6y\lambda=0 \\ x^2+3y^2=146 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3-\lambda-4\mu=0 \\ 2-\lambda-2\mu=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y-\lambda-\mu=0 \\ 2y+4x-\lambda-\nu=0 \\ x+y=4 \\ \mu x=0 \\ \nu y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -2x+8-\lambda=0 \\ -2y-\lambda-\nu=0 \\ x+y=6 \\ \nu y=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -2x+z=0 \\ 10-2y-2\lambda y=0 \\ 9-2z+x=0 \\ \lambda(1-y^2)=0 \end{array}\right\}$$