

Práctica 2: Métodos de interpolación numérica

- ♦ Polinomios de interpolación de Lagrange
- ♦ Interpolación de splines

Matemáticas para la Computación
Emiliano Torres

Polinomios de interpolación

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

- ♦ Dados n puntos que corresponden a los datos:
- ♦ Si existe una función $f(x)$ definida en el intervalo $[x_1, x_n]$ donde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ / $f(x_i) = y_i$ para $i=1, \dots, n$, entonces a $f(x)$ se le llama una **función de interpolación de los datos**, cuando es usada para aproximar valores dentro del intervalo $[x_1, x_n]$
- ♦ Pueden existir varios tipos de funciones que interpolen los mismos datos (trigonométricas, exponenciales, polinómicas, combinaciones de éstas, etc.)
- ♦ El tipo de interpolación que se elige, depende de la naturaleza de los datos manejados y de los valores intermedios esperados.
- ♦ En la interpolación por **funciones polinómicas** pueden existir infinidad de funciones polinómicas de interpolación para una misma tabla de datos, por lo que se pone una restricción para que el polinomio de interpolación sea único.
- ♦ Un polinomio de interpolación es una función polinómica que además de interpolar los datos, es el de menor grado posible.

Polinomios de interpolación de Lagrange

- El polinomio de interpolación de Lagrange se plantea como:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot l_k(x) \quad l_k(x) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$p(x) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot l_k(x) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \left(\prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n y_k \left(\frac{(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1}) \dots (x_k - x_n)} \right) = \sum_{j=1}^n C_k \cdot N_k$$

$$C_k = y_k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j} \quad N_k = (x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

Ejemplo de polinomio de interpolación de Lagrange

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

$$C = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j} \quad C_k = y_k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$$

$$C_1 = y_1 \prod_{j=1, j \neq 1}^n \frac{1}{x_1 - x_j} = y_1 \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = 1 \frac{1}{(5+7)(5+6)(5-0)} = \frac{1}{660} = 0.0015$$

$$C_2 = y_2 \prod_{j=1, j \neq 2}^n \frac{1}{x_2 - x_j} = y_2 \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = -23 \frac{1}{(-7-5)(-7+6)(-7-0)} = \frac{-23}{-84} = 0.2738$$

$$C_3 = y_3 \prod_{j=1, j \neq 3}^n \frac{1}{x_3 - x_j} = y_3 \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = -54 \frac{1}{(-6-5)(-6+7)(-6-0)} = \frac{-54}{66} = -0.81$$

$$C_4 = y_4 \prod_{j=1, j \neq 4}^n \frac{1}{x_4 - x_j} = y_4 \frac{1}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = -954 \frac{1}{(0-5)(0+7)(0+6)} = \frac{-954}{-210} = 4.5428$$

$$p(x) = C_1(x+7)(x+6)x + C_2(x-5)(x+6)x + C_3(x-5)(x+7)x + C_4(x-5)(x+7)(x+6)$$

Práctica

➤ Consultar la ayuda de:

♦ **yi=interp1(x,y,t[,method])**

calcula el valor interpolado para la abscisa **t** a partir de un conjunto de puntos dados por los vectores **x** e **y**. Se puede indicar el método de interpolación: 'nearest', 'linear', 'spline', 'pchip', 'cubic' y 'v5cubic'

♦ **yi=spline(x,y,t[,method])**

interpolación segmentaria o interpolación por splines.

La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, utiliza segmentos de polinomios, cada uno definido en un intervalo, que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad para realizar la interpolación.

Las *splines cúbicas* han resultado ser las más adecuadas y se utilizan para diseño por ordenador, diseño de letras y aplicaciones médicas.

Práctica

➤ Crear una función que calcule los coeficientes de Lagrange a partir de los vectores **x** e **y**

■ Utilizar la función `length(x)`
$$C = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$$

➤ Crear una función que interpole mediante un polinomio de Lagrange para los valores dados en **t**

- Esta función utiliza la creada en a)