

Práctica 5: Introducción al procesamiento de señal. Transformada de Fourier

♦ **Objetivo:** Conocer las herramientas básicas que nos ofrece Matlab para trabajar en aspectos relacionados con el procesamiento de señal:

- Representación de señales y generación de ondas.
- Transformada de Fourier y Transformada de Fourier inversa.
- Muestreo y reconstrucción de señales.

Matemáticas para la Computación

Emiliano Torres

Conceptos

- ♦ Clasificación de las señales:
 - **Contínuas**: toman valor en cualquier instante del tiempo
 - **Discretas**: toman valor en algunos instantes concretos
 - **Analógicas**: en un instante de tiempo dado toman un valor real
 - **Digitales**: toman un valor de un conjunto de valores discretos
- ♦ Una señal continua en el tiempo es **periódica** si los valores se repiten cada T_0 unidades: $f(t+T_0)=f(t)$.
- ♦ período fundamental o **periodo** T_0
- ♦ **frecuencia** $N = 1 / T_0$ se mide en ciclos por unidad de tiempo (Hz= ciclos por segundo)
- ♦ frecuencia angular, pulsación o **frecuencia** $\omega_0 = 2\pi / T_0$

Ejercicio 1

1. Hacer una macro para generar señales y representar gráficamente ondas senoidales del tipo $\sin(2\pi f_0 t)$ donde f_0 es la frecuencia fundamental de la onda.
Pasos:
 - a) *Generar el vector base de tiempos de 0 a 1 segundo en intervalos de 0.001 segundos.*
 - b) *Generar tres señales senoidales $s1 = \sin(2\pi t)$, $s2 = \sin(2\pi 6t)$ y $s3 = \sin(2\pi 11t)$ representarlas gráficamente con el comando plot de Matlab*
 - c) *Generar una señal senoidal $s4$ que es la suma de las señales $s1$, $s2$ y $s3$, $s4 = s1 + s2 + s3$.*

Análisis de Fourier de funciones periódicas

- ♦ **Fórmula de descomposición de Fourier**

- ♦ Cualquier señal periódica $f(t)$ con periodo T_0 puede descomponerse en una combinación de funciones seno y coseno, de frecuencias múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $\underline{w}_0$.

- Por lo que $w_i = i * \underline{w}_0$ las frecuencias son múltiplos de la original, por lo que los periodos $T_i = T_0 / i$

- ♦ Ecuación de síntesis

- ♦ Ecuaciones de análisis $f(t) = \frac{a_0}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(w_i t) + b_i \text{sen}(w_i t)$

$$a_0 = \int_0^{T_0} f_p(t) dt$$

$$b_0 = 0$$

$$a_n = \int_0^{T_0} f_p(t) \cos(w_n t) dt \forall n \geq 1$$

$$b_n = \int_0^{T_0} f_p(t) \text{sen}(w_n t) dt \forall n \geq 1$$

Significado físico de la transformada de Fourier de funciones periódicas

- ♦ La ecuación de síntesis indica que cualquier función periódica es suma de funciones seno y coseno, multiplicadas por coeficientes.
- ♦ Cualquier señal $f_p(t)$ se puede construir (“sintetizar”) a partir de esas funciones simples.
- ♦ Cada una de las funciones de la base que se usan en la síntesis se le llama **armónico**. Su frecuencia es siempre múltiplo de la fundamental.
- ♦ Es decir, multiplicando cada armónico por su correspondiente coeficiente, y sumando luego todos los resultados, se obtiene $f_p(t)$

Expresión compleja de las fórmulas de Fourier

- ♦ Utilizando las fórmulas de Fourier para el seno y coseno de cualquier ángulo:

$$\cos(w_n t) = \frac{e^{jw_n t} + e^{-jw_n t}}{2}$$

$$\text{sen}(w_n t) = \frac{e^{jw_n t} - e^{-jw_n t}}{2j}$$

- ♦ Sustituyendo en la descomposición de Fourier se llega a una expresión alternativa a la ecuación de síntesis:

$$f(t) = \frac{a_0}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{i=1}^{\infty} |C_n| \cos(w_n t + j_n)$$

- ♦ Las ecuaciones de análisis quedan:

$$C_n = a_n - b_n j = \int_0^{T_0} f(t) e^{-jw_n t} dt$$

Ejercicio 2

2. Hallar la descomposición (con papel y lápiz) en series de Fourier de la función $y(t) = |\sin(pt)|$ para un período de muestreo $T_0 = 1$. Pasos:

- a) *Representar gráficamente la función $y(t)$ para 5 segundos.*
- b) *La descomposición en series de Fourier de $y(t)$ es*

$$f_p(t) = \frac{2}{p} + \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2pnt)$$

Hacer una función o una macro en Matlab que reconstruya la función $y(t)$ a partir de la descomposición de dicha función en series de Fourier $f_p(t)$ para 3, 6 y 12 armónicos.

- c) *Representar las reconstrucciones de $f_p(t)$ y compararlas con la función original $y(t)$.*