

Tablas del estadístico 'f' con un grado de libertad en el numerador

J. Fernando García Pérez, Juan Pascual Llobell y M. Dolores Frías Navarro
Universitat de València

Resumen

El estadístico 'f' se calcula igual que el 'F' de Snedecor pero asume que la población padre es rectangular y discreta. Este estadístico está recomendado cuando no se puede asumir que la distribución de la variable dependiente sea normal, siendo válido para distribuciones asimétricas y cuando el tamaño de la muestra sea muy pequeño. En este trabajo se presentan las tablas del estadístico 'f' con un grado de libertad en el numerador para valores de la distribución rectangular entre 2-10 y para 2-82 grados de libertad en el denominador. Las tablas son completamente operativas si se asume un 5% de error de tipo I.

PALABRAS CLAVE: *Distribución muestral de f, prueba exacta, incumplimiento del supuesto de normalidad*

Abstract

TABLES OF F STATISTIC WITH ONE DEGREE OF FREEDOM IN THE NUMERATOR. The f statistics is computed as Snedecor's F except that it assumes that the distribution is uniform and discrete. This statistics has been recommended when one cannot assume that the dependent variable follows the normal distribution, and it is valid with skewed distributions and very low sample sizes. In the paper, we have presented the tables of the f statistics with 1 degree of freedom in the numerator for values in the range of 2-10 and in the range of 2-82 degrees of freedom in the denominator. The tables are fully operative when the type I error is 0.05.

KEY WORDS: *Sample distribution of f, exact tests, violation of normality assumption*

El estadístico 'f' (García, Frías y Pascual, 2000; García, Pascual y Frías, 2002) se calcula de la misma manera que el 'F' de Snedecor (1934) pero supone que la población padre es rectangular y discreta. Una interpretación de por qué Snedecor supuso que la variable dependiente se distribuía normalmente puede estar en que consideró que esta distribución representa adecuadamente, o de manera bastante parecida, la forma en que se distribuyen muchas variables, entre ellas las psicológicas (Maxwell y Delaney, 1989, pp: 51-55). Pero más que por una cuestión de controvertible *realismo*, la razón de mayor peso debió ser pragmática, se sabe que en la mayor parte de las distribuciones muestrales de los estadísticos, cuando se alcanza cierto límite en el número de grados de libertad del término de error, finalmente, suelen converger los puntos percentiles con los que se obtienen partiendo de que la forma de la distribución de la variable dependiente era la normal. Partiendo de esta premisa o supuesto si los datos de un experimento proceden de una variable distribuida normalmente, los valores de Snedecor serán completamente exactos, pero si la distribución de la población padre tuviera otra forma, la probabilidad del error de *Tipo I* sería distinta.

Una de las desviaciones de la forma normal mejor estudiadas por la literatura psicológica es la asimetría, por ejemplo, la distribución del *tiempo de reacción* suele ser asimétrica positiva porque existe un número reducido de personas que emplean un tiempo excesivo en completar la tarea experimental. Esta circunstancia suele atribuirse al efecto de algunas variables extrañas como la distracción, errores previos, interpretaciones incorrectas de las instrucciones, desmotivación, etc. (Luce, 1986). Esta distribución asimétrica positiva se representa mediante una curva *ex-gausiana* (Heathcote, 1996; Luce, 1986; Ratcliff, 1979; Ratcliff y Murdock, 1976) que se obtiene sumando a una distribución normal otra exponencial que *parametriza* la cola derecha. En otras ocasiones, la distribución del tiempo de reacción se ajusta mejor a la forma *log-normal* (Burns y Anderson, 1993; Richards y Cronise, 2000). En otros campos, una asimetría negativa muy pronunciada suele aparecer cuando se miden variables como el autoconcepto familiar (García y Musitu, 1999; Tomás y Oliver, 2004), donde la mayoría de las personas suelen situarse en las posiciones más altas de la escala.

R cómo índice de precisión

La distribución muestral de *f*, sin embargo, supone que la variable dependiente se distribuye rectangularmente en *R* intervalos equiprobables. Por este motivo es difícil que pueda imaginarse en la realidad algún ejemplo que no sea muy rebuscado donde esta forma sea asumible. No obstante esto no supone ningún problema serio porque en la mayoría de situaciones es posible realizar una transformación de la variable dependiente a esta escala. El parámetro importante para esta operación es *R*, pues representa al número de intervalos que se pueden efectuar.

La distribución rectangular y discreta tampoco es nueva en psicología, habitualmente se emplea para informar de la posición relativa de un sujeto respecto del grupo con el que se bareman las pruebas psicométricas: las escalas de deciles o percentiles. Si bien no se puede asumir que las

puntuaciones rtil se an una transformación lineal de las puntuaciones originales, es completamente asumible el principio de orden por el cual si dos puntuaciones son diferentes en la rtil, lo serán a su vez en la original, de tal manera que la mayor también lo será respecto de la menor. Es una transformación que mantiene el orden pero no la linealidad, aplicando una relación en la cual varios valores pasan a uno sólo, discretizando la escala. Es lo mismo que cuando se redondean las puntuaciones de una variable considerando el error de medida del instrumento. Si se estuviera midiendo la temperatura con un termómetro cuya precisión máxima fuera las décimas las puntuación 37,51, quedaría en 37,5 y la de 37,857 en 37,9. Es lógico ajustar la precisión de los valores a la fidelidad real del instrumento con el que se han medido.

¿Cómo determinar el valor de R para aplicar la prueba f? Pues, en principio, se utilizará el mayor valor de R que sea posible: el límite lo estipulará la precisión con la que se haya medido la variable dependiente, y desde el punto de vista del diseño la varianza que se haya producido en la variable dependiente, o variables dependientes, del experimento. Por ejemplo, si R se fijara a partir de los terciles, se obtendría una escala rectangular de 4 puntos (R = 4). El procedimiento sería correcto si la distribución de la variable en 4 intervalos se ajustara a la distribución rectangular, para esto el número de observaciones en cada uno de los cuatro intervalos tendría que ser la misma —exactamente del 25%— o variar en muy poco respecto de la distribución teórica. Otro criterio para realizar la transformación es determinando el error típico de estimación, y garantizar que las bandas rtil no se superpongan (Martínez, 1995, p. 627). Esta transformación se puede realizar fácilmente con cualquier programa estadístico.

Los valores exactos de la media y varianza de la variable dependiente

La ventaja fundamental de este procedimiento es que permite conocer con exactitud cual será la media y la varianza poblacional de la variable dependiente medida con la escala rtil. Desde otra perspectiva, se puede decir que la media (μ) y la varianza (σ²) de la población padre estarán determinadas, únicamente, por el tamaño de R (Figura 1), de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{R + 1}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(R - 1)(R + 1)}{12}$$

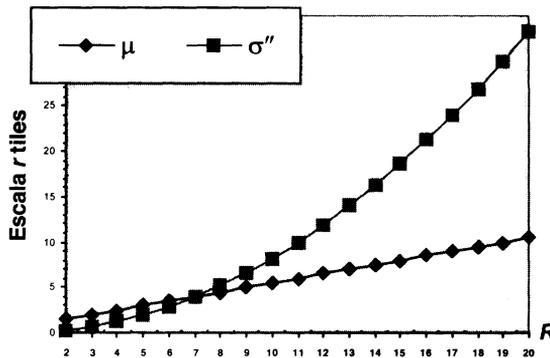


Figura 1: Media (μ) y varianza (σ²) de la población padre según varíe R

Definiendo formalmente la población padre, puede decirse que será una variedad de la distribución rectangular (uniforme) discreta R, con un recorrido finito entre los valores 1, el mínimo, y R, el máximo, de tal manera que 1 ≤ r ≤ R, siendo r cualquier valor entero 1, 2, ..., R. La función de probabilidad en cualquier punto r será 1/R, y la de distribución, r/R.

En el ámbito de la investigación aplicada este procedimiento permite valorar de manera ajustada la varianza real de la variable dependiente del experimento de manera que, cómo se aprecia en la Figura 1, al incrementar el número de puntos en la escala rtil se incrementa la varianza de la variable dependiente expresada en tal escala. Esta característica es muy importante a la hora de calcular con exactitud la potencia de la prueba estadística y emplear el número de observaciones necesarias para reducir la probabilidad de cometer errores del Tipo II.

Por otra parte, como no es necesario suponer que la variable dependiente se distribuya exactamente de ninguna forma precisa, se evita un supuesto a priori que hace que la distribución muestral de F en ocasiones se aplique sin tener garantías de controlar los dos errores de inferencia estadística, en especial el error del *Tipo II* que se suele habitualmente producir en los casos de asimetría manifiesta de la variable dependiente. La asimetría puede aumentar el error de *Tipo II* si las observaciones extremas incrementan considerablemente el error típico de estimación. De tal forma, que si la prueba de la hipótesis se realiza eliminando las puntuaciones de la cola, suele aumentar el valor empírico de F .

La distribución muestral de f

Para aplicar la prueba f del análisis de la varianza se siguen los siguientes pasos: (1º) transformar las puntuaciones de la variable dependiente en puntuaciones r tiles, (2º) calcular el ANOVA con las nuevas puntuaciones r tiles, y (3º) emplear la distribución muestral de f —calculada asumiendo que la distribución padre tiene forma rectangular— con parámetros v_1 , v_2 , R y α para aplicar la prueba de la hipótesis. En la Tabla 1 se presentan los valores críticos de esta distribución para el percentil 95 cuando hay un grado de libertad en el numerador.

Los supuestos de la prueba f son: (a) que la variable transformada a la escala r til se distribuya rectangularmente, y (b) que las observaciones en la variable dependiente no estén correlacionadas, supuesto que se puede asumir con plenas garantías si se ha aplicado la asignación aleatoria de las condiciones a los grupos de la variable independiente. Por lo tanto, cuando la metodología del experimento sea experimental los puntos de la distribución serán exactos, mientras que si se emplean otras metodologías las garantías son las mismas que con la prueba F .

La distribución muestral de f se ha obtenido generando la **población completa** de resultados que se pueden producir con los grados de libertad que se facilitan en la tabla. Por lo tanto, NO se ha realizado una simulación parcial sino que se han calculado las funciones de distribución completas. Los valores que se proporcionan son exactos porque se han calculado todos los posibles resultados del análisis de la varianza. En García, Frías y Pascual, 2000; García, Frías y Pascual, 2001 y García, Pascual y Frías, 2002 hay varios ejemplos sencillos que ilustran detalladamente el cálculo de una función de distribución de este estadístico.

Los cálculos se han realizado para asegurar la operatividad práctica de la distribución con un grado de libertad en el numerador (véase la Tabla 1). Para ello se ha tomado como criterio que la divergencia con la distribución F fuera cómo máximo de una centésima. Conforme se incrementan los valores de n y R se aproximan los puntos percentiles de la distribución de f a los de F normal. Pero también, conforme aumentan n y R se diversifica cada una de las 2 muestras en progresión geométrica. Por ejemplo (Véase la Tabla 1), para calcular el percentil 95 en la distribución de $f_{1, 14, 9}$ —cuyo valor es 4,68— hay que generar para cada condición experimental R^* muestras de 8 elementos, por tanto: $9^* = 43046721$. A la hora de aplicar el ANOVA es preciso cruzar todas ellas, lo que implica elevar al cuadrado esta cantidad: $43046721^2 = 1853020188851800$, y calcular el valor de f para todas estas combinaciones. Para realizar estos cálculos se agruparon las muestras por frecuencias.

La dificultad de las poblaciones discretas es que los estadísticos presentan un efecto de escalera, fundamentalmente cuando la variabilidad de las puntuaciones que se pueden obtener es poca. Esto ocurre especialmente cuando $R = 2$, y en los casos en que el número de observaciones es muy pequeño (sobre todo si $n = 2$). Por este motivo al comienzo de la tabla hay algunos valores en los que no se ha podido fijar el percentil, indicándolo mediante el signo “-”. Por el mismo motivo se ha anotado en superíndice, junto a cada valor la posición percentil que ocupa en la distribución muestral. Los percentiles se han obtenido en todos los casos acumulando las puntuaciones desde abajo, comenzando con el valor más pequeño.

Para ilustrar la forma de la distribución de este estadístico también se presentan los valores en el percentil 90 (Tabla 2) y en el percentil 99. En ambas tablas se ha marcado con negrita los valores que se diferencian en una centésima con la distribución F . Puede comprobarse que las distribuciones muestrales tienen un efecto de escalera, con escalones mayores en los valores inferiores de la distribución, motivo por el cual la distribución converge antes con la F en el percentil 90 que en el 95, pero a la vez hay más veces en las que la discrepancia es mayor de una centésima.

En el percentil 99 (Tabla 3) apenas hay valores que ajusten con el de F , la primera convergencia se produce con 54 grados de libertad en el error y cuando $R = 4$. Por el contrario, como la distribución del estadístico F tiene una cola derecha alargada, en estos valores extremos hay pocas repeticiones de valores.

Volviendo a los valores críticos del percentil 95 (Tabla 1) que son los que habitualmente se emplean en la investigación aplicada cabe realizar los comentarios y recomendaciones siguientes.

Entre 16 y 26 grados de libertad en el error no se ha podido lograr la convergencia asumiendo una centésima de discrepancia con la distribución F , en estos casos se recomienda utilizar el

último valor calculado en la fila (se indica con una flecha hacia la derecha). La razón de que no se hayan calculado estos valores es por el altísimo número de muestras que resultan. Por otra parte, considerando el descenso tan bajo que tienen los percentiles entre columnas, tampoco es previsible que sea muy grande la pérdida de potencia.

A partir de 28 grados de libertad en el error y empleando una escala rectangular de 6 unidades, la discrepancia con la distribución F es de una centésima. Por lo tanto, a partir de este valor, incrementando tanto los gl del error como la precisión de la variable dependiente, se puede emplear los valores de F con plenas garantías. Lo mismo cabe decir con para $R = 5$ y 44 gl en el error, lo cual supone emplear en cada condición experimental 16 observaciones. Cuando se puedan fijar cuatro posiciones ($R = 4$), la convergencia se alcanza con 46 grados de libertad en el error.

Conclusiones

Como los valores calculados son exactos, siempre y cuando se proporcione el valor en la tabla se debería utilizar el que se proporciona. Si se han cumplido los dos supuestos sobre los que se ha calculado la distribución, el error de *Tipo I* será exactamente del 5%. Si el error de *Tipo I* fuera diferente del 5%, se especifica en la tabla.

Cuando no se proporciona un valor, pero los grados de libertad del error o de R son altos, se puede emplear la distribución muestral de F . Se ha trazado una línea para indicar a partir de cuantos grados de libertad es válido el ajuste. En estos casos la discrepancia será insignificante y las garantías respecto del error del Tipo I máximas.

En los valores mayores de $R = 7$, y entre 16 y 26 grados de libertad en el error, que no se han podido calcular se recomienda que empleen el último valor de la fila. En estos casos pudiera ser que el error del Tipo I fuese algo superior del 5%, pero la discrepancia no parece que llegue a ser considerable.

Por lo tanto, el estadístico f se ha comprobado que puede emplearse de manera satisfactoria en la investigación aplicada porque permite controlar adecuadamente el error del Tipo I y cuenta con la ventaja añadida de que es fácil de aplicar. Basta con transformar a una escala percentilica los valores de la variable dependiente después de haber obtenido los datos de la investigación. Esto es especialmente útil cuando no se puede asegurar la distribución normal de la variable dependiente. Otra ventaja práctica es que se puede aplicar con los procedimientos habituales de cálculo y que se trata de un procedimiento con el que el investigador se encuentra familiarizado.

Pero también permite otra ventaja importante, ésta con respecto de la potencia, que puede conocerse con exactitud cuál será el valor paramétrico de la media y la varianza de la variable dependiente. De manera que resulta más sencillo reducir la probabilidad de cometer un error del Tipo II.

Bibliografía

- Bock, R. D. (1975). *Multivariate statistical methods in behavioral research*. New York: McGraw-Hill.
- García, J. F., & Musitu, G. (1999). *AF5: Autoconcepto Forma 5*. Madrid: TEA ediciones.
- García, J. F., Frías, M. D., & Pascual, J. (2000). Prueba de aleatorización vs. distribución F cuando la escala de medida de la variable dependiente es discreta y el diseño experimental. *Psicothema*, 12(2), 253-256.
- García, J. F., Frías, M. D., & Pascual, J. (2001). *Los diseños de la investigación experimental. Comprobación de las hipótesis (2ª Ed.)*. Valencia: Cristóbal Serrano Villalva.
- García, J. F., Pascual, J., & Frías, M. D. (2002). Distribución muestral del estadístico $F - f$ - cuando la variable dependiente es discreta y rectangular. *Metodología de las ciencias del comportamiento*, Volumen especial, 219-233.
- Heathcote, A. (1996). RTSYS: A DOS application for the analysis of reaction time data. *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers*, 28, 427-445.
- Luce, R. D. (1986). *Response times*. New York: Oxford University Press.
- Martínez, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos*. Madrid: Síntesis Psicología.
- Maxwell, S. E., & Delaney, H. D. (1989). *Designing experiments and analysis data. A model comparison perspective*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.
- Richards, J. E., & Cronise, K. (2000). Extended visual fixation in the early preschool years: Look duration, heart-rate changes, and attentional inertia. *Child Development*, 71, 602-620.
- Snedecor, G. W. (1934). *Calculation and interpretation of analysis of variance and covariance*. Monograph n. 1, Iowa State College, Division of Industrial Science. Ames, IW: Collegiate Press.
- Tomás, J. M., & Oliver, A. (2004). Análisis psicométrico confirmatorio de una medida multidimensional del autoconcepto en español. *Revista Interamericana de Psicología*, 38(2), en prensa.
- Ratcliff, R. (1979). Group reaction time distributions and an analysis of distribution statistics. *Psychological Bulletin*, 86, 446-461.
- Ratcliff, R., & Murdock, B. B. (1976). Retrieval processes in recognition memory. *Psychological Review*, 83, 190-214.

Tabla 3. Percentiles de f para el 99,0% con 1 grado de libertad en el numerador

$gl_1 \backslash R$	2 Percentil	3 Percentil	4 Percentil	5 Percentil	6 Percentil	7 Percentil	8 Percentil	9 Percentil	10 Percentil	F
2	—	—	—	—	49,00 ^{0,994}	50,00 ^{0,990}	81,00 ^{0,994}	81,00 ^{0,991}	98,00 ^{0,991}	98,50
4	—	—	25,00 ^{0,994}	27,00 ^{0,991}	28,80 ^{0,990}	28,80 ^{0,990}	28,80 ^{0,990}	28,90 ^{0,990}	28,90 ^{0,990}	21,20
6	—	18,00 ^{0,991}	18,00 ^{0,990}	16,20 ^{0,990}	18,00 ^{0,990}	17,00 ^{0,990}	17,00 ^{0,990}	17,00 ^{0,990}	17,00 ^{0,990}	13,75
8	—	14,40 ^{0,993}	13,50 ^{0,990}	13,33 ^{0,990}	13,07 ^{0,990}	12,96 ^{0,990}	12,96 ^{0,990}	12,96 ^{0,990}	12,96 ^{0,990}	11,26
10	25,00 ^{1,000}	11,25 ^{0,990}	11,25 ^{0,990}	11,25 ^{0,990}	11,14 ^{0,990}	11,14 ^{0,990}	11,10 ^{0,990}	11,10 ^{0,990}	11,12 ^{0,990}	10,04
12	12,50 ^{0,993}	10,67 ^{0,991}	10,08 ^{0,990}	10,08 ^{0,990}	10,08 ^{0,990}	10,08 ^{0,990}	10,07 ^{0,990}	10,04 ^{0,990}	10,04 ^{0,990}	9,33
14	9,21 ^{0,992}	9,74 ^{0,992}	9,61 ^{0,990}	9,43 ^{0,990}	9,43 ^{0,990}	9,44 ^{0,990}	9,38 ^{0,990}	9,38 ^{0,990}	9,40 ^{0,990}	8,86
16	7,69 ^{0,991}	9,00 ^{0,990}	9,12 ^{0,990}	8,91 ^{0,990}	8,95 ^{0,990}	8,94 ^{0,990}	8,94 ^{0,990}	8,94 ^{0,990}		8,53
18	10,12 ^{0,992}	8,58 ^{0,990}	8,64 ^{0,990}	8,64 ^{0,990}	8,62 ^{0,990}	8,61 ^{0,990}	8,61 ^{0,990}			8,29
20	8,57 ^{0,992}	8,27 ^{0,990}	8,45 ^{0,990}	8,37 ^{0,990}	8,39 ^{0,990}	8,37 ^{0,990}				8,10
22	7,62 ^{0,991}	8,17 ^{0,990}	8,23 ^{0,990}	8,17 ^{0,990}	8,17 ^{0,990}	8,19 ^{0,990}				7,95
24	8,00 ^{0,991}	7,98 ^{0,990}	8,03 ^{0,990}	8,00 ^{0,990}	8,00 ^{0,990}	8,01 ^{0,990}				7,82
26	8,73 ^{0,993}	7,83 ^{0,990}	7,84 ^{0,990}	7,89 ^{0,990}	7,88 ^{0,990}					7,72
28	7,98 ^{0,992}	7,81 ^{0,990}	7,79 ^{0,990}	7,78 ^{0,990}	7,80 ^{0,990}					7,64
30	7,42 ^{0,992}	7,72 ^{0,990}	7,70 ^{0,990}	7,70 ^{0,990}						7,56
32	7,00 ^{0,990}	7,68 ^{0,990}	7,61 ^{0,990}	7,61 ^{0,990}						7,50
34	8,37 ^{0,991}	7,60 ^{0,990}	7,53 ^{0,990}	7,55 ^{0,990}						7,44
36	7,78 ^{0,991}	7,53 ^{0,990}	7,50 ^{0,990}	7,48 ^{0,990}						7,40
38	7,33 ^{0,991}	7,45 ^{0,990}	7,42 ^{0,990}	7,43 ^{0,990}						7,35
40	6,96 ^{0,990}	7,40 ^{0,990}	7,38 ^{0,990}	7,38 ^{0,990}						7,31
42	7,00 ^{0,990}	7,35 ^{0,990}	7,37 ^{0,990}	7,34 ^{0,990}						7,28
44	7,96 ^{0,990}	7,31 ^{0,990}	7,30 ^{0,990}	7,30 ^{0,990}						7,25
46	7,54 ^{0,990}	7,27 ^{0,990}	7,24 ^{0,990}							7,22
48	7,20 ^{0,990}	7,21 ^{0,990}	7,22 ^{0,990}							7,19
50	6,91 ^{0,990}	7,17 ^{0,990}	7,23 ^{0,990}							7,17