MECANISMOS DE UNA FALTA DE COMPETENCIA EN CÁLCULO MENTAL

Un estudio en la formación de maestros

Bernardo Gómez Alfonso.
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València. España.

Abstract

The present article resumes a research wich aim was to check a theory on competence in mental calculation. The analyses involves Spanish students in a Teacher Training College in solving mental calculation problems with natural and decimal numbers, in test format, before and after receiving instruction based on methods taken from the written tradition found in arithmetic textbooks.

Resumen

Este artículo resume una investigación cuyo objetivo fue contrastar una teoría acerca de una falta de competencia en cálculo mental. Esta teoría se apoya en otras que han sido previamente puestas de manifiesto por otros autores en los dominios del cálculo escrito y del álgebra elemental. El análisis se llevó a cabo con estudiantes españoles para maestros, en su ambiente universitario natural, al resolver problemas de cálculo mental con números naturales y decimales, antes y después de recibir enseñanza de una selección de los métodos de cálculo recogidos por la tradición escrita en los libros de Aritmética.

Presentación

El informe que aquí se presenta resume una parte de una investigación más amplia (Gómez, 1994, 1995 a y 1995 b) realizada sobre un tema del currículum del periodo de la educación obligatoria en España y en otros muchos países. Este tema es el cálculo mental. En este artículo sólo me voy a referir a la segunda parte de esta investigación, concretamente la dedicada al análisis cualitativo de los errores. Previamente, es obligado explicar en qué concepción de los mismos me he basado.

Los errores y su importancia

Tradicionalmente, los profesores han creído que los errores de cálculo que cometían los estudiantes eran debidos a una falta de domino de los métodos o a un despiste a lo largo del proceso de cálculo. En esta postura, de corte conductista, se consideraba que los errores carecían de interés, eran algo que había que ignorar hasta que se producía la respuesta correcta.

En la actualidad, algunos estudiosos e investigadores (Menchinskaya y Moro, 1975; Radatz, 1979; 1980; Movshovitz-Hadar, 1987; Brousseau, 1983; Brousseau, Davis y Werner, 1986; Confrey, 1991; Borasi, 1987; 1994; ...) de la educación matemática tienen otra opinión en la que, en coherencia con el punto de vista constructivista del aprendizaje, se reconoce el valor del análisis de los errores de los estudiantes. En este sentido, de acuerdo con Borasi (1994), el punto de vista dominante es el relacionado con el diagnóstico de las dificultades de aprendizaje y las sugerencias para remediarlas. Otras posturas (Confrey, 1991, Borasi, 1994) apuestan por enfoques en los que se busca explotar los errores para generar nuevas cuestiones y exploraciones, o como trampolín para la indagación en matemáticas.

De acuerdo con la postura constructivista los errores son una fuente de información para el profesor acerca de lo que han aprendido y cómo lo han aprendido los estudiantes (Borasi, 1994). Para Brousseau (1983) "el error y el fracaso no juegan el papel simplificado que a veces se les quiere hacer representar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la inseguridad, del azar como se cree en las teorías empiristas y conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido". Por tanto, un error no es sólo la ausencia de respuesta correcta, ni el resultado de un accidente; sino que es más bien un producto de la experiencia previa (Radatz, 1980), una parte del proceso de aprendizaje que se manifiesta de forma persistente y reproducible.

Desde esta perspectiva, el análisis de los errores es muy interesante ya que puede revelar la existencia de dificultades individuales que están relacionadas con malentendidos instalados y consolidados, que la enseñanza práctica no siempre tiene en cuenta. Cuando el análisis está hecho por el estudiante se vuelve una ayuda para su aprendizaje, y cuando está hecho por el profesor en una ayuda para que éste diseñe una instrucción más eficaz.

Finalidad

En matemáticas son muchos los dominios en los cuales los estudiantes cometen errores. Uno de ellos es el del cálculo mental, ya que como es fácilmente constatable es general la falta de competencia de los estudiantes cuando calculan mentalmente y en particular la disminución de la misma cuando se pasa de calcular con números naturales a calcular con números decimales (Gómez, 1994). Se hace por tanto necesaria una indagación de los errores en cálculo mental a efectos de abordar el análisis que permita determinar su tipología, desenmascarar su naturaleza, reagruparlos en relación con la constitución del conocimiento y, también, para enfrentar a los estudiantes con su propio proceso de aprendizaje.

Antecedentes: Categorías de las respuestas incorrectas en el cálculo.

En un estudio precedente (Menchinskaya y Moro, 1975) se señala que en el cálculo aritmético escrito se pueden dividir las respuestas incorrectas en dos categorías básicas, según que la fuente de las mismas sea las condiciones con que se llevan a cabo las operaciones o la calidad del dominio de los conocimientos aritméticos. Las primeras son mecánicas, surgen cuando bajo ciertas condiciones (cansancio, falta de interés, distracción, nerviosismo, etc.) el estudiante pierde el control consciente en la resolución del problema, por lo tanto son esporádicas. Las segundas admiten dos subcategorías: una que agrupa a las que están basadas en una memorización pobremente establecida de determinados hechos numéricos (ej. 7x8=54 o 58), y otra, que agrupa a las que se basan en la forma en que han sido aprendidas las reglas. Este último tipo de respuestas incorrectas son las que interesan en este trabajo. En la medida en que son persistentes y reproducibles, para referirnos a ellas usaremos la denominación de *errores sistemáticos de procedimiento*.

No obstante la dificultad que tiene dar una definición de *error sistemático de procedimiento* por cuanto ésta depende del enfoque en que va a ser utilizado y del contexto de la investigación, en este trabajo se le considera de un modo restringido y se le da el sentido de procedimiento inapropiado, persistente y reproducible que no se debe a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de memoria.

Teoría acerca de una falta de competencia

Para explicar los errores sistemáticos de procedimiento, Menchinskaya y Moro (1975) sugieren que son el resultado de reglas previamente aprendidas, cuyo campo de aplicación se extiende injustificadamente a situaciones donde no funcionan, o en las que se omiten determinados pasos necesarios.

Esta explicación, entronca con la que se ha dado para determinados errores en otras partes de la matemática, como la de Matz (1982) sobre los errores sistemáticos en la resolución de problemas algebraicos. Para Matz, estos errores son el resultado de adaptaciones razonables, pero que no siempre funcionan, de los conocimientos previos adquiridos a nuevas situaciones, y que algunos de estos errores del álgebra tienen su origen en una falta de dominio y comprensión de los procedimientos aritméticos.

En este mismo sentido, Brousseau (cit. Palarea y Socas, 1994), señala que "los errores de este tipo se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto, y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. Tienden así un «puente» para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares".

Inspirándose en estas ideas se ha tratado de contrastar, en este trabajo, hasta qué punto los errores sistemáticos de procedimiento al aplicar los métodos de cálculo mental son el resultado de adaptaciones de conocimientos previos adquiridos a situaciones nuevas y de averiguar, en la medida de lo posible, qué mecanismos cognitivos son identificables en estas adaptaciones.

Metodología.

El estudio se hizo con 144 estudiantes españoles de la Escuela de Magisterio de la Universitat de València a lo largo del curso académico 1992-93, en su ambiente universitario natural, a partir de dos pruebas del tipo test con ejercicios de cálculo mental con números naturales y decimales.

Entre el pretest y el postest se llevó a cabo una fase de enseñanza de acuerdo con la propuesta experimental elaborada (Gómez, 1994) de una selección escogida de los métodos de cálculo mental extraídos a partir del análisis de la literatura, durante un periodo de unas tres semanas en el ambiente natural de clase de matemáticas, cuyo horario era de 3 horas por semana. En esta fase los ejercicios fueron exclusivamente con números naturales.

La ejercicios de las pruebas fueron elegidos tras experiencias piloto atendiendo a consideraciones sobre su no excesiva dificultad, su vinculación a métodos alternativos, la posibilidad de hacer comparaciones entre los datos con números naturales o decimales, y que el número de ejercicios de cada prueba estuviera dentro de los límites razonables para que los estudiantes pudieran resolverlos en sesiones de una hora.

Se presentaron 14 ejercicios en la primera prueba y 20 en la segunda, la mitad de restar y la mitad de multiplicar. No se plantearon ejercicios de sumar y de dividir porque se tenía el convencimiento, basado en experiencias piloto previas y en el análisis bibliográfico, de que la suma mental no tiene dificultades notables y la división apenas se hace mentalmente.

El estilo fue escrito-escrito: ejercicios presentados en una hoja por escrito, solicitud de efectuar el calculo mentalmente y requerimiento de escribir exclusivamente el resultado finalmente obtenido. Aunque no se limitó el tiempo, se disponía de una hora por sesión que fue suficiente. Al acabar el cuestionario, los estudiantes debían explicar, en la misma hoja y a su manera, cómo habían procedido para resolverlo. Esta información fue utilizada posteriormente para establecer una tipología de los errores que fue finalmente contrastada mediante entrevistas individualizadas selectas.

Ejercicios del Pretest

547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58
$3{,}1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x42	3,4x0,15	64x25

Ejercicios del Postest

737-289	634-75	1400-675	481-186	245-197	14-7,75	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6
$4{,}1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18

Resultados

Antes de recibir enseñanza de la selección de métodos de cálculo mental, la mayoría de los estudiantes estaban anclados en los métodos que son emulación mental de los métodos "standard" o de columnas, siendo los errores más frecuentes los que se identificaron como errores de descuido o fallo de memoria.

Tras la enseñanza, aumentó la flexibilidad de los estudiantes los cuáles se desanclaron de los métodos que son emulación mental de los métodos "standard" o de columnas y optaron por aplicar generalizadamente métodos alternativos. Esta mayor flexibilidad, o mayor uso de métodos alternativos, fue acompañada de una mayor variedad y número de errores de procedimiento.

Una vez efectuado el análisis, la gran variedad de errores observados se pudo organizar en torno a tres grandes categorías, que los agrupan. Estas son:

1. *Extrapolaciones*. Inserciones improcedentes de algunos de los pasos, pero no de todos, de alguno de los métodos o reglas aprendidas, que los alumnos extraen y llevan a otro método o regla diferente donde no funcionan.

2. *Generalizaciones*. Extensiones de métodos o reglas completos, que los alumnos aplican tal cual las conocen o han aprendido, a situaciones nuevas donde no funcionan.

3. *Centramientos*. Son métodos que se aplican correctamente hasta que sufren una interferencia motivada por algún hecho que centra y desvía la atención del resolutor, el cual provoca una opción incorrecta en algún paso o resultado intermedio. Esta opción se suele manifestar en un paso o resultado que se aplica a un dato diferente al que debería.

Adviértase que aunque la diferencia entre extrapolación y generalización parece sutil no lo es ciertamente. En efecto, en la extrapolación sólo se extraen uno o varios pasos del total de los pasos de un método para llevarlo a otro método donde estos pasos están fuera de lugar, mientras que en la generalización es todo un método completo el que se saca de un campo de validez y se lleva a otro donde no funciona.

Para ilustrar estas categorías se presentan a continuación dos ejemplos de cada una de ellas. Estos ejemplos se describen transcribiendo literalmente (entrecomillado) la información que los mismos estudiantes anotaron en su hojas del test, como explicación de lo que habían hecho mentalmente. La interpretación que se hace del error observado en términos de extrapolación, generalización o centramiento, está contrastada con los indicios que se obtuvieron en las entrevistas individualizadas. Por motivo de brevedad no se incluyen las transcripciones de estas entrevistas.

Extrapolaciones

Ejemplo: 3.1^2= “96.1. He multiplicado 3.1x3.1 ->

$$\begin{array}{r} 3\,.\,1 \\ \times\ 3\,.\,1 \\ \hline 3\,.\,1 \\ 9\ 3 \\ \hline 9\ 6.\ 1 \end{array}$$

El estudiante ha emulado mentalmente el método de columnas, pero "bajó" el punto decimal guardando la posición como si fuera una cifra más. Este paso, que es propio del algoritmo de la suma, aparece como un indicio de que el estudiante está extrapolando una parte del algoritmo de la suma al algoritmo de la multiplicación.

Ejemplo: 3.4x0.15=10.5. “He multiplicado 34 por 1.5 y me da 6.0+4.5 =10.5”.

El estudiante mueve o desplaza el punto decimal un espacio hacia la derecha en ambos factores, con lo cual suprime el punto decimal de 3.4. Después, calcula los productos parciales que resultan de la descomposición del 35 en 30+4. Así halla 30x1.5 y 4x1.5, pero comete otro error ya que su respuesta 4.5 a 30x1.5 indica que no ha tenido en cuenta el cero del 30.

En el primer error, la manera por la cual suprime el punto decimal moviéndose un espacio a la derecha simultáneamente en ambos factores, recuerda la manera en que se suprime el punto decimal en el algoritmo de la división cuando el divisor es decimal. Por lo tanto, este paso, aparece como un indicio de que el estudiante está extrapolando una parte del algoritmo de la división al caso de la multiplicación.

Generalizaciones

Ejemplo: 64x75=4830. “Al 75 le quito 5, y al 64 le pongo 5, de manera que queda 69x70; (multiplico por un número más fácil y me da el mismo resultado)”.

El estudiante decrementa un factor para redondearlo y después se limita a compensar la alteración efectuada aumentando el otro factor en la misma cantidad. Esto es un procedimiento típico de un método de la suma, el método de compensación. Pero lo que en la suma es una alteración invariante no lo es en la multiplicación. En este caso el estudiante no ha tenido en cuenta esto y, en cambio, parece que se ha sentido inclinado a hacer una falsa generalización de un método de la suma al caso de la multiplicación.

Ejemplo: 28x35=640. “He multiplicado 20x30=600 y después 8x5=40 y he sumado 600+40=640”.

El estudiante multiplica entre sí los valores que ocupan el mismo lugar. Las cifras de las decenas completadas con el cero entre sí y las cifras de las unidades también entre sí. Esto es un procedimiento típico de la suma: 28+35=(20+30)+(8+5). Pero al hacer esto ha omitido productos intermedios, evidenciando una falta de reconocimiento de la propiedad distributiva que aquí hay que aplicar dos veces: 28x35=(20+8)x(30+5). Esta omisión es un indicio de una falsa generalización del método que es válido para la suma al caso de la multiplicación.

Centramientos

Ejemplo: 28x35= “994. Multiplico 35x30 y le resto 56”.

El estudiante multiplica 30, en vez de 28, por 35. Después, en vez de compensar el exceso en el resultado restando el producto de 2 por 35, resta el producto de 2 por 28, que es 56. El estudiante adapta un método que parece que conoce en su sintaxis pero que aparece infectado ya que efectúa el producto parcial sobre el dato equivocado. Esto hace pensar en un centramiento en el dato alterado, que es el 28, en vez de en el efecto de la alteración que es que ha obtenido "dos veces treinta y cinco" de más.

Ejemplo: 47x99="423. 47x100=470-47=423".

El estudiante multiplica 100, en vez de 99, por 47, pero obtiene como resultado 470 en vez de 4700. El estudiante aplica el método correctamente, pero su respuesta parece infectada por una "coletilla" vinculada a la multiplicación por cien. En efecto, como cuando se multiplica 3x100, 4x100, ..., 9x100, se obtienen trescientos, cuatrocientos , ... , novecientos, parece que el estudiante se centra en la coletilla "cientos"; así, 47x100 será un número del orden del cuatrocientos. Este error, hace pensar en un fenómeno de "perseveración" (Pipping, 1975, Menchinskaya y Moro, 1975), pero en la medida que fue persistente y se reprodujo en las entrevistas se toma aquí como error de centramiento.

Conclusiones.

La investigación permite concluir que el modelo teórico de la falta de competencia descrito anteriormente, para los procedimientos del cálculo escrito y de álgebra elemental es lo bastante general como para explicar lo que ocurre en el dominio del cálculo mental y con estudiantes de nivel educativo superior.

Del análisis efectuado se sigue que los estudiantes utilizan procedimientos inapropiados en los que los mecanismos que se han identificado son: generalizaciones, extrapolaciones y centramientos, los cuales estarían relacionados con la influencia de los conocimientos previos sobre los más recientes.

Unas veces, estos mecanismos parecen debidos a la generalización de propiedades no explicitadas de determinadas situaciones numéricas, que ellos perciben como verdaderas porque les han funcionado en un determinado campo de validez, pero que no es cierto que siempre funcionen. Otras veces, parece que son debidos a rigideces motivadas probablemente por una enseñanza excesivamente orientada al automatismo y en la que predomina lo sintáctico sobre lo semántico (Resnick, 1992). En otras palabras, predomina la atención en la secuenciación y encadenamiento de los pasos sobre el significado de los mismos y los efectos que las alteraciones en los datos producen en los resultados.

También se ha observado, que los estudiantes no reconocieron en general, ni aprovecharon, las ventajas de expresarse en el lenguaje simbólico de ecuaciones y paréntesis del álgebra y prefirieron usar el lenguaje retórico y reglado de la aritmética. Probablemente muchos de sus errores se hubieran evitado si así lo hubieran hecho.

Implicaciones educativas

El análisis efectuado en relación con los errores en cálculo mental ha puesto de manifiesto problemas en la enseñanza que permanecen ocultos cuando sólo se trabaja con los algoritmos de lápiz y papel. Ignorarlos no es solución. Hacer emerger y conocer los errores de los estudiantes, en cambio, ayuda a conocer sus concepciones, la forma en que están aprendiendo o han aprendido, las dificultades que enfrentan. Este conocimiento puede ser provechoso para los profesores puesto que constituye una pauta para la reflexión que ayude a desarrollar una instrucción más efectiva.

A veces, la eliminación de procedimientos falsos se muestra resistente, incluso después de que el alumno ha comprobado su falsedad y aparentemente los ha rechazado. Investigaciones como ésta señalan que los errores están profundamente interiorizados por los alumnos y que no son de fácil eliminación. Incluso, en muchos casos, parece que los estudiantes han superado un error y luego lo vemos con desilusión, resurgir al poco tiempo. Para ello, plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual es incorrecta y darles entonces una explicación, es, a menudo, insuficiente, porque un conocimiento no se adquiere simplemente sustituyendo una concepción antigua por otra nueva, sino como resultado de un proceso relativamente discontinuo que supone estructuraciones, acomodaciones y maduraciones.

El reto que se sigue de aquí es lograr un cambio en la enseñanza, para evitar estos efectos no deseados, y en orden a conseguir una mejora de las concepciones que los estudiantes tiene sobre los procedimientos aritméticos como medio de expresión significativa y no automática de sus acciones sobre los números.

Mi experiencia, como resultado de esta investigación me dice que el camino que debemos emprender pasa necesariamente por enfrentar a los alumnos con sus propios errores, provocar el conflicto en su mente haciéndoles ver la inconsistencia de sus respuestas al pedirles comprobaciones y pruebas, hacerles ver las ventajas del lenguaje simbólico sobre el retórico para descubrir y reconocer las leyes y principios que están aplicando, y reflexionar sobre el efecto de las alteraciones de los datos sobre los resultados.

Referencias.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics* 7, 3. pp. 2-8

Borasi, R., (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry" a teaching experiment, *Journal for Research in Mathematics Education*., 25, 2. pp. 167-202.

Brousseau, G., (1983). Les obstacles épistémologique et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 4. 2, pp. 167-198.

Brousseau, G.; Davis, R. B. y Werner, T., (1986). Observing Students at Work, en B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht, D. Reidel Publishing Co.

Centeno, J., (1988). *Números decimales, ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid. Ed. Síntesis.

Confrey, J., (1991). Learning to listen: A student's understanding of powers of ten, en E. von Glasersfeld (ed.), *Radical constructivism in mathematics education*, pp. 111-138. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

Gómez, B., (1994). *El cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Memoria de Tesis Doctoral. Universitat de València. Valencia. España.

Gómez, B., (1995, a). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO* (Aceptado para su publicación).

Gómez, B., (1995, b). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias* (Aceptado para su publicación).

Matz, M., (1982). Towards a process model for high school algebra errors, en *Intelligent Tutoring Sistems*. . D. Sleeman & J. S. Brown, (eds.), pp. 25-49. London, Academic Press.

Menchinskaya, N. A., y Moro, M. J., (1975). Instruction in mental and written calculation, en J. Kilpatrick, J. Wirszup, E. Begle, y J. Wilson (eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics.* 14, pp. 73-88. Standford, California: School Mathematics Study Group.

Movshovitz-Hadar, N. ; Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 1, pp. 3-14.

Palarea, M. y Socas, M., (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico, *Suma*, 16, pp. 91-98

Pipping, G. (1975). Rechenschwäche in psycologister sicht. *Mathematik in der schule*, 13, 623-628 (cit. Radatz, 1979).

Radatz, H., (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 3, pp. 163-172.

Radatz, H., (1980). Students errors in the mathematical learning process, *For the Learning of Mathematics,* 1, 1, pp. 16-20.

Resnick, L. B., (1992). From Protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everiday knowledge, en G. Leinhartdt, R Putham y R. Hattrup (eds.), *Analisis of Arithmetic for Mathematics Teaching,* pp. 373-429. Hillsdale, New Jersey. LEA