El futuro del cálculo

Bernardo Gómez Alfonso. Dpto. Did. Mat. Universitat de Valéncia

Resumen

En este artículo se toma posición por una determinada manera de entender el papel que en adelante debe jugar el cálculo aritmético en la enseñanza obligatoria. Esta posición se sustenta a partir de lo que ha sido su evolución a lo largo de la historia desde el punto de vista de la educación y, también, de los propuestas recogidas en los documentos oficiales actuales.

> **Cálculo** "del latín *calculas*, que quiere decir «guijarro» y, por extensión «bola», «ficha» y «peón». Esta etimología hace referencia no solamente a las antiguas técnicas de cálculo sobre el ábaco de columnas, sino también al método, todavía más primitivo, del montón de piedras, que permitió a nuestros lejanos antepasados de la Prehistoria iniciarse en el arte del cálculo elemental. El hecho de que los romanos enseñaran a contar a sus hijos por medio de guijarros, de fichas o peones, incidió en que la palabra llegara a designar cualquiera de las operaciones aritméticas básicas (Ifrah, 1985, p. 1446).
>
> **Calcular** es hallar un número desconocido por medio de otros conocidos.

Los orígenes

Para calcular se hace uso de procedimientos o métodos que se conocen desde muy antiguo, son un legado Indoarábigo cuyo nombre actual es el de algoritmos da cálculo.

En una época en que no había calculadoras, la enseñanza de los algoritmos de cálculo debía hacerse con un nivel de exigencia que hoy consideraríamos excesivo. Un buen calculista no sólo tenía que saber calcular bien sino que tenía que hacerlo lo más rápido posible. Esto explicaría el empeño que tuvieron los autores antiguos, en su afán por introducir el nuevo arte de calcular, en desarrollar los métodos más cómodos, simples, seguros y breves posibles.

Por eso, desde antiguo, se conocen una gran variedad de métodos que son el resultado del esfuerzo de los autores por ahorrar tarea, aliviar la dificultad, evitar errores, comprobar resultados, ser rápidos, o sencillamente porque en matemáticas siempre se ha considerado que es más elegante y brillante utilizar el camino más corto que no el innecesariamente más largo

En las situaciones más elementales, cuando los números con los que se opera son lo suficientemente pequeños para guardarlos en la memoria, muchos de estos métodos pueden llegar a realizarse de una manera exclusivamente mental, por ello, se les considera como métodos de cálculo mental, pero no se pueden desligar de los métodos del cálculo escrito, porque en ellos hunden sus raíces y encuentran sus antecedentes aritméticos.

Desde la aparición de las primeras Aritméticas impresas los métodos de cálculo ya están prácticamente configurados como los conocemos hoy en día. En el largo período de tiempo que abarca desde ese momento hasta el final del siglo XVIII, apenas hay diferencias remarcables en cuanto a la forma de enseñarlos.

La tónica dominante consiste en presentar varios métodos para una misma operación, coexistiendo unos junto a los otros los algoritmos generales con los particulares y los más populares con los menos conocidos. En esta época, en que no hay un currículo obligatorio, la razón que explica por qué un maestro opta por una u otra selección de métodos no es otra que su libre albedrío, probablemente lo que él aprendió.

El punto de inflexión

Hay que situar el comienzo del siglo XIX como el punto de inflexión en cuanto a la configuración de la enseñanza del cálculo aritmético. Varios fenómenos concurren para ello:

1. El establecimiento de un currículum obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo.
2. La incorporación de nuevas ideas pedagógicas que hacen que la enseñanza deje de mirar únicamente al objeto de estudio y tenga también en cuenta la psicología de los niños, para adaptarse a sus posibilidades y a sus necesidades.
3. La creación de Instituciones para la formación de los Maestros.
4. El convencimiento de que las matemáticas ocupan un lugar esencial en el conjunto de las ciencias, y de que es necesario que se propague su estudio.
5. El mayor recurso al razonamiento y la mayor preocupación por el método de presentación de las ideas.
6. La asunción de los medios del álgebra con el consiguiente aumento en la brevedad y pérdida de retórica.
7. La asunción del sistema métrico decimal, a partir de la ley de Julio de 1849 que lo implanta en España y hace obligatoria (art. 11) su enseñanza, desde 1º de Enero de 1852.

La conjunción de todos ellos provocará un cambio radical en la enseñanza del cálculo que dejará de ser un compendio de reglas para efectuar sobre números, como aún se decía al iniciarse el siglo XIX, para constituirse en una parte de la ciencia matemática donde aparece unificada la teoría y la práctica.

Las cuatro reglas

Con el tiempo, muchos de los algoritmos de cálculo fueron quedando relegados, cuando no olvidados. Esto fue así, porque al establecerse el sistema general y público de enseñanza, se hizo necesario un programa común para los estudiantes de un mismo nivel educativo, un programa de mínimos que todos debían aprender, y en consecuencia un solo método para cada operación: todos el mismo, el mejor por mas general; desde entonces estos algoritmos serán conocidos como "las cuatro reglas", que para muchos es sinónimo de cálculo aritmético. Los otros viejos algoritmos alternativos sólo serán valorados como métodos para abreviar: si suponen un ahorro en el número de cálculos intermedios, o la escritura de cifras en la disposición práctica vertical de columnas, o bien como métodos de cálculo mental: si son susceptibles de realizarse sin lápiz y papel.

Los principios que rigen el cálculo:

La estructura numérica decimal

Los algoritmos de cálculo se sustenta en los principios de la numeración decimal. A saber:

- Las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9,
- El agrupamiento decimal y valor de posición. Leyendo de derecha a izquierda las cifras representan unidades, grupos de diez unidades llamados decenas, grupos de diez decenas llamados centenas, grupos de diez centenas llamados millares, grupos de diez millares llamados unidades de millar, y así sucesivamente. Por lo tanto todo número natural se compone de unidades, decenas, ...
- El cero. Los números naturales que sólo tienen decenas llevan un cero en el lugar de las unidades. Los que sólo tienen centenas llevan dos ceros, uno en el lugar de las

unidades y otro en el lugar de las centenas, etc. Por lo tanto todo número natural es una suma de números acabados en sucesión decreciente de ceros

- El agrupamiento multiplicativo. Como 2 decenas son dos veces 1 decena, se puede escribir 2 x 10 en vez de 20, 3 x 10 en vez de 30, y así sucesivamente. Así, 423 se puede escribir 4 x 100 + 2 x 10 + 3. Por lo tanto todo número natural es una suma de multiplicaciones ordenadas de sus cifras, de derecha a izquierda por 1, 10, 100, 1000...

En definitiva, todo número natural se puede escribir de varias maneras:

En forma posicional	423
Descompuesto a) en unidades, decenas, centenas ... b) en suma de números acabados en ceros c) en suma de productos por la unidad seguida de cero orden decreciente...	 4 c, 2 d y 3 u 400 + 20 + 3 4x100 + 2x10 + 3

El análisis de las operaciones

Los algoritmos de cálculo son el resultado de la conjunción de dos hechos:

- El "análisis" de las operaciones, en el sentido de reducción del problema dado a otro más simple que ya se sabe resolver. Así, ciñéndonos a las operaciones directas: suma y multiplicación, cuando uno o los dos números que se quieren operar son de varias cifras, lo que se hace es reducir el caso por medio de una descomposición en operaciones parciales al caso en que los dos números que se quieren operar son de una sola cifra. En este caso, cuando los números que se quieren calcular son de una cifra, la obtención de los resultados depende del significado de la operación, de las propiedades que cumple y de la aplicación de las estrategias que se derivan de esas propiedades: conmutación, descomposición y compensación.
- Y la disposición práctica en columnas que se deriva de la aplicación de los principios y la estructura de la numeración decimal a los resultados parciales y totales que se siguen del análisis anterior.

Todo ello, se resume en un conjunto de pasos reglados que hay que dar, ni uno más, ni uno menos, y un convenio de escritura y recombinación de resultados de forma permitida y conveniente.

Enfoques en la enseñanza del cálculo

De acuerdo con la filosofía de enseñanza dominante en cada época la forma de presentar los algoritmos ha variado.

1. En una primera época el estilo fue "reglado", ilustrándose los métodos sobre ejemplos, sin aportar nada que se parezca a una fundamentación de los pasos que se prescriben.

2. Más adelante, ya acercándonos al siglo XIX, se da razón de los mismos, completando la presentación del método, una vez enunciado con el lenguaje retórico de la época e ilustrado con un ejemplo, con una demostración, que era un razonamiento también retórico, apoyado en la definición de la operación y en el valor de los órdenes de unidad de las cifras.

3. A medida que las nuevas teorías pedagógicas van cobrando fuerza, se va imponiendo un enfoque orientado a la repetición. Este enfoque se sustenta en la teoría que considera que la mente está constituida por facultades, en cierto modo análogas a los

músculos y que como tales se fortalecen y forman con el entrenamiento, cuánto más duro y fatigoso mejor.
4. Poco a poco, con la asunción de la sintaxis del álgebra se consolidará en el siglo XX el formato horizontal simbólico y contraído para unificar la descripción, el ejemplo y la fundamentación de los métodos, como una realización de las propiedades fundamentales de las operaciones.
5. Los avances tecnológicos suponen otros cambios en la presentación del contenido, apareciendo las ilustraciones para la modelización gráfica con pictogramas y diagramas.
6. El declive del enfoque de la “repetición” dio paso al enfoque “intuitivo”, donde se defendía que la matemática es una cuestión de comprender, ya que no tiene valor alguno lo que se aprende de memoria. Para hacer intuitiva la enseñanza del cálculo se deben materializar los números representándolos mediante objetos (palillos, haces de diez palillos atados, etc. para los diferentes órdenes de unidad), imágenes (dibujos) o símbolos (u, para unidades, d, decenas, c, ...).
7. En los años 40, el deseo de orientar la enseñanza para que fuese significativa se dirigió hacia la utilización de ejercicios prácticos que se relacionaban con la vida diaria.
8. En los años 60, el enfoque se dirigió hacia la comprensión de la estructura de los algoritmos, entendida como la comprensión de los conceptos de los sistemas de numeración: agrupamientos, formas equivalentes de escribir un número, y, la comprensión del papel de las propiedades de las operaciones: distributiva, asociativa y conmutativa. Dado que las relaciones estructurales no son evidentes en los algoritmos, los defensores de la enseñanza orientada a la estructura vieron en los materiales manipulativos una ayuda para su compresión. La notación de columnas, contraida, simbólica y formal debería surgir después del trabajo con representaciones concretas y otras cada vez más simbólicas, bajo la idea de que es preciso retrasar la presentación simbólica hasta que se haya comprendido lo que representa.
9. En la actualidad los textos escolares españoles se sitúan en este último enfoque, pero actúan con total libertad metodológica, hasta el punto de que algunos elementos de los enfoques anteriores todavía están presentes, en mayor o menor medida unos que otros, y más o menos disfrazados en la práctica escolar, como intento de solución a los requerimientos que los problemas de la enseñanza del cálculo plantean. Pero la idea que todos parecen asumir es la de que hay que hacer hincapié en el conocimiento conceptual, prestar atención a las relaciones numéricas y relegar la memorización y la práctica rutinaria.

El futuro

Desde siempre el cálculo ha tenido un lugar asegurado en el curriculum escolar. Los argumentos para su justificación han sido el de la utilidad social y el de la formación del individuo.

En la actualidad, la mayor parte del tiempo escolar de primaria continúa dedicándose a la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos de cálculo. Sin embargo la mayor parte de los cálculos en la vida diaria se hacen de cabeza o con calculadora. Los educadores deberían preguntarse:

¿Debemos seguir enseñando los algoritmos. Si es así, por qué y cómo?

Sobre esto no hay una respuesta consensuada, aunque sí la hay sobre la necesidad de disminuir el énfasis sobre "las cuatro reglas" en favor del cálculo variado: una integración del cálculo escrito, estimado, mental y con calculadora según convenga (DCB, 1989; Estándares del NCTM, 1989).

Y debe disminuirse el énfasis sobre el cálculo y la memorización de reglas, porque "lo central es el razonamiento matemático, la resolución de problemas, la comunicación, y las relaciones" (NCTM, 1989, p. 210).

Estas afirmaciones abren un abanico de posibilidades. Veamos algunas de ellas:

- Una enseñanza integradora del cálculo, que no separe el mental del escrito y la calculadora en una perspectiva de cálculo variado. Esta perspectiva parece ser una tendencia actual en los currícula de diferentes países.

En este sentido, se postula enseñar las estrategias de cálculo mental de modo integrado con las del cálculo escrito. Esta idea va especialmente dirigida contra la práctica escolar de ejercitar el cálculo mental después del cálculo escrito.

- El cálculo no debe enseñarse como una colección de habilidades independientes, sino como un sistema matemático organizado según principios unificadores definidos, de manera que el alumno advierta la estructura, razón y coherencia de lo que se le enseña.

En este sentido, se postula que el cálculo no debe ser algo para hacer individualmente en soledad, sino a través de la discusión en clase de los hechos del sistema de numeración y nociones del valor de posición, de las propiedades y estrategias, y en el significado y naturaleza de las operaciones.

- La presentación de los algoritmo podría basarse en la construcción progresiva basada en el significado de las operaciones (Treffers, 1987), de modo que los estudiantes encuentren sus propios caminos personales para el cálculo, apoyándose en modelos visuales para la disposición práctica de las operaciones.

En este sentido, es crucial saber discernir lo que es fundamental o imprescindible de lo que es superfluo en la disposición práctica de los algoritmos, y conocer las ideas que rigen la operatoria, y las leyes que determinan la estrategia del proceso (Gómez, B., 1988).·

- Algebra y aritmética no son sistemas matemáticos aislados, de hecho el álgebra permite generalizar la aritmética y la aritmética es campo de aplicación y validación de fórmulas algebraicas (Gómez, B., 1995a). Una consecuencia que se extrae de esto es que la enseñanza de la aritmética y del álgebra debería organizarse evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ambas.

En este sentido, para comprender las generalizaciones, captar relaciones estructurales y argumentar en aritmética, se considera que el lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis del álgebra es una herramienta a menudo más apta que el lenguaje reglado de columnas.

- Es importante hacer emerger errores para abordar el análisis que permita desenmascarar su naturaleza, y enfrentar a los estudiantes con sus propios análisis, y mejorar el sentido numérico con ayuda de la estimación, porque se considera que todo esto proporciona un aprendizaje más efectivo y una comprensión más profunda (Gómez, B., 1995b y 1996).·

En este sentido, el reto es desarrollar una instrucción más efectiva, anticipando las respuestas de los alumnos, y diseñando estrategias para la corrección de las mismas cuando se requiera.

BIBLIOGRAFIA

DCB (1989). *Diseño Curricular Base. Educación primaria*. Ministerio de Educación y Ciencia.

Estandares del NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (Edición original: Curriculum and evaluation. Standards for School Mathematics. 1989. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: Author). Sevilla. S.A.E.M. Thales.

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid. Ed. Síntesis.

Gómez, B. (1995a). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra. *Suma*. nº 20, pp. 61-68.

Gómez, B. (1995b). Tipología de los errores de cálculo mental en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias , 13*. 3. pp. 313-325.

Gómez, B. (1996). Mecanismos de una falta de competencia en cálculo mental. Un estudio en la formación de maestros. *Educación Matemática*. *8*, 1, Abril. México.pp. 4-12.

IIfrah, G. (1985). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial. 1987

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction-The Wiscobas Project*. D. Reidel Publishing Company.