TENDENCIAS METODOLÓGICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD DERIVADAS DEL ANÁLISIS DE LIBROS ANTIGUOS. EL CASO DE LOS PROBLEMAS DE “COMPAÑÍAS”.

Dr. Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España.

Resumen

En este artículo se expone a grandes rasgos la evolución de la enseñanza de la proporcionalidad a través de tres principales enfoques metodológicos que se han identificado en una revisión de libros de texto antiguos (anteriores al siglo XIX) y modernos (desde el siglo XIX en adelante).

Para ilustrar estos enfoques se ha elegido el problema de "compañías”, se muestran los métodos diseñados para resolverlo, su evolución y la forma en que se incorporan al curriculum oficial de aritmética actual. Después se hace una reflexión sobre la naturaleza de estos métodos y se derivan implicaciones o consecuencias para una posterior investigación.

Abstract

The main purpose of this article is to show how the teaching of proportionality has evolved. Revisiting old and modern textbooks three principal methodological approaches have been identified.

To illustrate these approaches, the teaching of the “Fellowship rule problems” has been choosen. The analysis of these teaching schemes enables to show the arithmetic and algebraic methods used to solve them. It also allows to display teaching evolution and the ways it have been incorporated in the current official arithmetic curriculum. A study of the methods used is presented as well as implications for further investigations.

Introducción

Este artículo corresponde a una investigación centrada en la enseñanza de la proporcionalidad, y se circunscribe a una de las partes de la fase exploratoria en la que se hace un análisis didáctico (entendido como análisis desde las diferentes áreas de conocimiento que intervienen en la educación matemática) para fundamentar un marco teórico descriptivo de la problemática, que posibilite establecer cuestiones centrales para indagar en una fase empírica posterior.

La metodología adoptada recurre a diversos tipos de análisis cualitativos, uno de ellos es el análisis histórico y epistemológico en obras elementales “los libros de texto” para la enseñanza, antiguos y modernos, ya que se considera que éste es importante en la medida en que aporta información sobre algunos de los elementos que sustentan el modelo actual de enseñanza. En efecto, los libros de texto, además de un reflejo del estado de la ciencia, son una muestra indicativa de las concepciones dominantes en los distintos momentos de la historia acerca de qué contenidos deben ser enseñados, cuáles deben ser enfatizados, cual es la forma de organizarlos, con qué enfoques conceptuales y con qué metodología. En este trabajo, lo que se ha buscado al analizar las diversas obras es precisar los cambios en las reformulaciones del concepto de “regla de compañía” a lo largo de un espacio temporal determinado.

Se considera que este análisis es útil para buscar modelos que permitan elaborar una plantilla para la observación experimental posterior de la naturaleza y la evolución del razonamiento proporcional de escolares de primaria y secundaria. A continuación se exponen algunas primeros resultados derivados de este análisis.

La enseñanza de la proporcionalidad

En el marco de la organización tradicional de los libros de aritmética

Las nociones de proporcionalidad aparecen en los libros de Aritmética desde tiempo inmemorial, su enseñanza se enmarca en una organización tradicional del contenido de los mismos en la que se pueden distinguir dos partes: una que lleva a conocer los procedimientos relativos a las diversas operaciones, y otra que lleva a la resolución de toda clase de cuestiones con los números. La primera parte, se centra en la numeración y el cálculo de números naturales, quebrados, fracciones decimales, y números denominados (con las unidades de pesas, monedas y medidas). La segunda parte, que se dedica a las cuestiones con los números, se subdivide en otras dos, según que las cuestiones sean relativas a propiedades tales como la divisibilidad y las fracciones continuas, o relativas a aplicaciones, que es donde se ubica la proporcionalidad y los problemas de la aritmética comercial.

En el marco de los cambios metodológicos en los libros de texto.

En la historia reflejada en los libros de texto la enseñanza de la proporcionalidad ha sufrido cambios metodológicos cuyas características diferenciadoras se pueden vincular a tres grandes periodos:

1. Hasta el final del siglo XVIII, en los libros generales de aritmética, la proporcionalidad se ubicaba en un bloque de contenidos dedicado a la comparación de números, donde se estudiaban razones y progresiones, y a continuación un largo listado de sus aplicaciones, fundamentalmente las referidas a diversas situaciones prácticas cuyos nombres eran: la regla de tres (cuyo objeto es determinar el cuarto proporcional), la regla de compañías (reparto del beneficio), la regla de interés (beneficio con una tasa convenida), la regla de descuento (comercial), la regla conjunta (cambio de moneda, trueques), la regla de aligación (precio medio y composición de una mezcla en cantidades convenidas), y la regla de falsa posición (usar números arbitrarios para encontrar el verdadero). El enfoque metodológico seguía un estilo en el que se ponían multitud de casos o cuestiones concretas semejantes, puestas de innumerables modos, sobre las que se establecían como reglas los variados medios particulares de que se valían para resolverlos.

2. En el siglo XIX se modifica el tratamiento de la proporcionalidad al incorporar planteamientos generales del álgebra. Se considera que como una proporción es una igualdad los problemas de proporciones se reducen a problemas de ecuaciones, esto permite entre otras cosas el estudio independiente de las progresiones en los libros de álgebra. El capítulo dedicado a la proporcionalidad parece que pasa de estar organizado en torno a la comparación de números a

organizarse en torno al estudio de “cantidades que varían en la misma razón” (ej. Cirodde, 1865, p. 214), mas tarde denominadas “magnitudes proporcionales” (ej. Bruño, 1939, p. 324; Dalmáu Carles, 1937,p. 14). Por otro lado, aunque las aplicaciones de la proporcionalidad también admitían un estudio algebraico, se mantenían en los libros de aritmética ya que no podía desatenderse a los estudiantes que abandonaban sus estudios antes de acceder al estudio del álgebra. En este caso el enfoque metodológico abandonaba la teoría clásica, y recurría a un nuevo estilo de razonamiento aritmético basado en el análisis de la cuestión y la deducción de las consecuencias que resultan del mismo para que se pueda encontrar la solución a los problemas por discernimiento propio, sin depender del recuerdo de reglas.

3. En el siglo XX la actividad escolar está organizada conforme a la división en grados, según la edad y condiciones intelectuales de los alumnos, bajo programas oficiales de carácter cíclico (repetición de los temas aumentando el grado de dificultad en cursos sucesivos) y mediante enseñanza simultánea. Para hacer posible este modelo se necesita un texto que pueda ser usado al mismo tiempo por todos los escolares de una misma clase, el libro escolar, que uniformiza la metodología, reduce el contenido y adapta su presentación a formas textuales aptas para ser memorizadas y reproducidas por los niños. En el caso de la proporcionalidad ésta se ubica en los libros escolares de nivel superior y sus formas textuales son básicamente: enunciados verbales, tablas de valores, representaciones gráficas y expresiones simbólicas.

Los cambios metodológicos: El caso de la “regla de compañías”

Para entrar en detalles acerca de la forma concreta en que estos tres enfoques se han plasmado en el tratamiento de las aplicaciones de la proporcionalidad, se ha considerado conveniente estudiar un ejemplo paradigmático, la regla de compañías, que se encuentra en todos los programas de aritmética y que tiene un origen antiquísimo (ejemplos similares se describen en el libro de Ahmes-Papiro de Rhind).

El problema 63, de Ahmes (también llamado de Rhind, 1650 a. C.), por ejemplo, pide dividir 700 hogazas de pan entre cuatro personas de tal manera que las cantidades que reciba cada uno estén en la proporción continua 2/3 : 1/2 : 1/3 : 1/4. La solución se halla calculando la razón de 700 a la suma de las fracciones de la proporción; en este caso, al dividir 700 por 1+3/4 o, lo que es lo mismo, al multiplicar 700 por el inverso del divisor, que es 1/2 = 1/4, se obtiene el resultado 400; tomando ahora los 2/3, 1/2, 1/3 y 1/4 de 400 se tienen las raciones de pan pedidas (Boyer, 1986, p. 36).

En sentido estricto, la regla de compañía tiene por objeto determinar cuanto corresponde de las ganancias o pérdidas de una sociedad o empresa a cada uno de los socios o compañeros que la componen. Normalmente, el reparto de la ganancia, se hace de forma proporcional al capital aportado por cada socio, y al tiempo de inversión de cada capital, en cuyo caso se llama “con tiempo”. Los problemas relativos a éste segundo caso no van a ser objeto de este estudio, porque se reducen al primero y ya no se presentan en la práctica.

Si quieres saber que cosa es regla de compañías has de saber que no es otra cosa sino un ayuntamiento de dinero que se hace entre muchas o pocas personas para ganar su vida y después de aquello que se gana con los dineros que todos han puesto saber cuanto vendrá a cada uno según lo que puso o el tiempo que ha estado en la compañía como veras en los ejemplos siguientes (Ortega, 1563, p.133).

1. Hasta el siglo XIX la enseñanza de la regla de compañías se organiza en torno a la presentación de un amplio surtido de casos concretos y sus métodos particulares de resolución elevados a la categoría de reglas. En el tratado de Pérez de Moya (1573) para el caso de la regla sin tiempo coexisten los siguientes métodos[1]:

a) *Método de la "regla de tres"*, que consiste en ordenar los datos según manda la regla y aplicar el algoritmo cruzado: $G_p = \frac{C_p G_t}{C_t}$.

Dos hicieron compañía, el primero puso 6 ducados, el segundo puso 10, con este dinero granjeando ganaron 64 reales, pídese, ¿cuánto viene a cada uno de esta ganancia, según lo que puso? Suma (como la regla manda) los 6 (que puso el primero) con los 10 (que puso el segundo) y montarán 16, ordena una regla de tres, llana, diciendo: Si 16 ducados (que ambos pusieron) ganaron 64 reales, que vendrá de ganancia a los 6 ducados que puso el primero? Multiplica 64 (que es el segundo número de esta regla de tres) por 6 (que es el tercero) y montarán 384, parte estos 384 por el primer número (que es 16) y vendrá al cociente 24, y así ... (Pérez de Moya, 1573, p.265-66)

b) *Método de la tasa*, que consiste en hallar la tasa o relación entre lo que ponen todos y lo que ganan todos y considerar que ésta es la misma que hay entre lo que pone uno y lo que gana uno: $\frac{C_t}{G_t} = \frac{C_p}{G_p}$.

Dos hacen compañía, el uno puso 12 ducados, el otro 6, ganaron 54 reales, pídese, que viene a cada uno? Suma lo que ambos pusieron, y montará 18, mira la proporción que hay de 18 (que pusieron) a 54 (que dice que ganaron) y hallarás ser subtripla. De esto se infiere, que la misma proporción ha de haber de lo que cada uno puso, con la ganancia que le ha de venir, y por esta causa pondrás a los doce (que puso el primero) un número que este en tripla con él, y otro al seis, que también esté en subtripla, lo cual hace tomando el 3 (que es denominación de la proporción tripla) y multiplicando con él los 12 que puso el uno, y serán 36, ... (Pérez de Moya, 1573, p. 268)

c) *Método de la razón*, que consiste en hallar la razón o relación entre lo que pone uno y lo que ponen todos, y considerar que ésta es la misma que hay entre lo que ganó uno y lo que ganaron todos: $\frac{G_p}{G_t} = \frac{C_p}{C_t}$. En el contexto del problema esta razón está expresada en términos de fracción: "qué parte es lo que pone uno de lo que ponen todos".

Hácese de otro modo mirando que parte es lo que pone uno de lo que ponen todos, y tomando de lo que ganaran la tal parte. Ejemplo. Dos hacen compañía, el uno puso 4 ducados, el otro puso 2, ganaron 24 reales, pido ¿cuánto viene a cada uno? Suma 4 con 2 (que es lo que pusieron) y montará 6, mira ahora que parte es 2 (que puso el uno) destos 6, y hallarás ser tercia parte, lo cual verás partiendo 2 por 6, y vendrán dos sextos, que abreviados es un tercio (como se mostró en el capítulo séptimo del libro tercero) y por esto tomarás de los 24 (que ganaron) el tercio (que es 8) y tanto dirás que le cabe al que puso 2. Por esta misma orden, mira 4 qué parte es de 6, ... (Pérez de Moya, 1573, p. 271)

d) *Método recíproco del método de la tasa*, que consiste en hallar la tasa o relación entre lo que ganan todos y lo que ponen todos, y considerar que es la misma que hay entre lo que gana

---

[1] En lo que sigue G_t , C_t , G_p , C_p representan las ganancias total, capital total, ganancia parcial y capital parcial, respectivamente. Asimismo, denominamos tasa a un cociente de cantidades de diferente espacio de medida o especie o y razón a un cociente de cantidades del mismo espacio de medida o especie.

uno y lo que pone uno: $\frac{G_t}{C_t}=\frac{G_p}{C_p}$. En el contexto del problema esta tasa está expresada en términos de división partitiva: "dividiendo lo que ganan todos en tantas partes iguales como unidades hay en lo que ponen todos".

Los legistas procurando brevedad, y claridad (...) hacen la regla de compañía dividiendo o haciendo la ganancia, o pérdida tantas partes iguales como unidades montare lo que todos los compañeros pusieren, y dando después tantas partes dellas a cada uno, como unidades hubiere en lo que pusiere. Ejemplo. Dos hacen compañía, el uno puso 5 ducados, el otro 11, ganaron 64, pido ¿qué viene a cada uno? Suma 5 (que puso el uno) con 11 (que puso el otro) y montarán 16, por lo cual harás los 64 (que ganaron) 16 partes iguales, lo cual se hace partiendo 64 por 16, y vendrá 4, y así dirás que hechos 64 , 16 partes iguales, cada parte vale 4. Ahora porque el primero puso 5 toma 5 partes de esta (que será tomar 5 veces el cuatro) que valen 20, y tanto viene al primero. Y porque el segundo puso 11, toma 11 partes destas, y serán 44, tanto le viene al segundo (Pérez de Moya, 1573, p. 272)

2. Al comenzar el siglo XIX, la enseñanza de la regla de compañías se ubica en el marco general de los problemas de reparto proporcional, esto es, de los problemas de distribución de un número dado a en partes desiguales, por ejemplo x, y, z que tengan entre sí las mismas razones que otros números también dados, por ejemplo m, n, p.

El objeto de esta regla es darnos a conocer el modo de distribuir una cantidad en partes que tengan entre sí las mismas razones que ciertos números conocidos ... (Lacroix, 1826, p. 313)

En las obras dedicadas a la enseñanza se suele presentar primero la forma algebraica de resolución para después particularizarla en ejemplos concretos. Esta forma algebraica es, tal y como aparece en Vallejo (1841) y en Lacroix (1846), la siguiente:

e) *Método algebraico de las razones*, que consiste en plantear los pares de razones iguales: $\frac{m}{n}=\frac{x}{y}$; $\frac{m}{p}=\frac{x}{z}$, despejar los valores desconocidos para ponerlos en función de uno sólo de ellos y de las cantidades conocidas $y=\frac{nx}{m}$; $z=\frac{xp}{m}$, y aplicar la condición del enunciado que liga las partes con el todo:

$$x+y+z=a \;->\; x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a \;->x=\frac{ma}{m+n+p};\ y=\mathbf{...}\ ;\ z=\mathbf{...}$$

Partir un número dado a en las partes que se quiera, v. g. en tres, que tengan entre sí la misma razón que las cantidades dadas m, n, p, esto es, que la primera tenga con la segunda la razón de m : n, y la primera con la tercera la razón de m : p. Sea x la primera parte y tendremos m : n : : x : $\frac{nx}{m}$ que será lo que corresponde a la segunda, m : p : : x : $\frac{px}{m}$ que será lo que corresponde a la tercera; y como todas juntas han de equivaler a **a**, se tendrá x + $\frac{nx}{m}$ + $\frac{px}{m}$ = a; que quitando los divisores, será mx + nx + px = ma, y descomponiendo factores tendremos x(m + n + p) = ma, que da x = $\frac{ma}{m+n+p}$ ... (Vallejo, 1841, p. 360)

En el libro de aritmética de Lacroix (1846), se reformulan las explicaciones de los métodos y se ofrecen sobre un mismo ejemplo. Concretamente se resuelve el siguiente problema:

> Tres comerciantes se han asociado para cierta negociación, y para ella ha contribuido el primero con 25000 pesos, el segundo con 18000, y el tercero con 42000. Concluida que fue la negociación, y habiendo esta producido de utilidad o beneficio común 12725 pesos, tratan de repartirse esta ganancia a proporción de lo que cada uno aprontó para la negociación; y se pregunta ¿cuánto corresponde a cada uno de los tres? (Lacroix, 1846, p. 316)

Primero con un método análogo al método de la razón c) anterior,

> Siendo la cantidad con que el primer socio contribuyó para la negociación $\frac{25}{85}$ ó $\frac{5}{17}$ del fondo total, la porción de ganancia que con arreglo al contrato le corresponde, deberá igualmente ser $\frac{5}{17}$ de la total. Por la misma razón el segundo socio que anticipó $\frac{18}{85}$ del fondo total, tendrá derecho a percibir $\frac{18}{85}$ de toda la ganancia; y por último al tercer socio que ha prestado $\frac{42}{85}$ del fondo total, le habrían de corresponder $\frac{42}{85}$ de la ganancia total (Lacroix, 1846, p. 316)

Después con su recíproco.

f) *Método recíproco del método de la razón*, que consiste en hallar la razón o relación entre lo que pusieron todos y lo que puso uno, y considerar que es igual a la que hay entre lo que ganaron todos y lo que ganó uno: $\frac{G_t}{G_p} = \frac{C_t}{C_p}$. En el contexto del problema esta razón está expresada en términos de división como medida: las veces que la ganancia que pertenece a cada uno de los socios está contenida en la ganancia total.

> Para resolver esta cuestión basta considerar que según la naturaleza del contrato la porción que de la ganancia pertenece a cada uno de los socios, debe estar contenida en la ganancia total tantas veces como la cantidad con que contribuyó para la negociación, esté contenida en el fondo total con que se haya negociado, o lo que es lo mismo, en la suma de las cantidades o capitales con que contribuyeron todos ... y a consecuencia, para determinar la parte de ganancia que corresponde a cada socio, haremos una proporción que en términos generales puede expresarse de esta manera ...
> 85000 : 25000 : : 12725 : ganancia corresp. al 1º.
> 85000 : 18000 : : 12725 : ganancia corresp. al 2º.
> 85000 : 42000 : : 12725 ganancia corresp. al 3º. ....etc. (Lacroix, 1846, p. 316)

Por último, Lacroix, presenta una versión del método recíproco de la tasa d), en la que ésta se interpreta en términos de “valor unitario”. Este método será conocido más adelante como:

d’) *Método de reducción a la unidad*, recíproco del método de la tasa, que consiste en hallar la relación entre lo que ponen todos y lo que ganan todos, y considerar que el valor de esta relación expresa lo ganado por cada unidad que se ha puesto, y, por tanto, lo que gana uno es tantas veces ese valor como unidades ha puesto. En el contexto del problema esta tasa en una división partitiva.

> Podríamos haber considerado el fondo total 85000 pesos compuesto de 85 partes iguales, a las cuales se les diese el nombre de acciones, de a 1000 pesos cada una; y después de haber determinado la porción de ganancia que

corresponde a cada acción, habríamos multiplicado aquella misma porción por el número de acciones que cada socio tuviese en la compañía. Como en el ejemplo propuesto cada acción sea $\frac{1}{85}$ del fondo total, la ganancia que le pertenece se hallará dividiendo por 85 la total, cuya división dará por cuociente 149 pesos 10 reales y 20 maravedis. Siendo, pues, 25 acciones de a 1000 pesos las que el primer socio puso en la compañía, habrán de corresponderle las ganancias de ellas o el producto de 25 veces 149 pesos 10 reales y 20 maravedis, que asciende a 3742 pesos 9 reales y 24 maravedis. Al segundo socio por haber puesto 18 acciones, le deberán corresponder 18 veces 149 pesos 10 reales y 20 maravedis, que suman 2694 pesos 10 reales y 20 maravedis. al tercero, que puso 42 acciones, le pertenece el importe de 42 veces la ganancia correspondiente a cada acción, que viene a ser 6287 pesos 9 reales y 24 maravedis (Lacroix, 1826, p. 316).

Como estos métodos se derivan de relaciones que no son exclusivas de los problemas de compañía, se generalizan y se aplican también a cualquier otro problema de reparto proporcional. Por ejemplo el siguiente:

Se pide dividir un batallón de 600 hombres en tres partes tales, que la 1ª sea a la 2ª como 2 : 3, y la 1ª a la 3ª como 4 : 5.

Este caso tiene de particular que se piden tres partes y se dan cuatro números, porque la 1ª está expresada con los 2 y 4. Para reducirlos a uno, coloco las dos razones así, $\frac{3}{2}\frac{5}{4}$; y reduciéndolas a un mismo denominador serán $\frac{12}{8}\frac{10}{8}$ o 8 : 12 y 8 : 10 de un mismo valor y con solo tres números 8, 10, 12 en cuya razón se han de dividir los 600 soldados. Sumo pues 8, 10, 12, divido 600 por la suma 30, y multiplicando el cociente 20 por 8, 10, y 12, tendré 160, 200, y 240 que son las partes que se piden (Juan Justo García, 1814, p. 139).

3. En el siglo XX, debido al carácter reduccionista de los libros escolares se opta por limitar los métodos de solución a uno sólo, que sirva para resolver todas las cuestiones. En el curso superior de Bruño (1939) se ofrece el siguiente método algebraico:

g) Método algebraico de la tasa, que consiste en plantear la serie de tasas iguales $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=t$, despejar con ayuda de la incógnita auxiliar: x=mt, y=nt, z=pt ; y aplicar la condición del enunciado que liga las partes con el todo:

$$x+y+z=a,\ mt+nt+zt=a,\ \frac{a}{m+n+p}=t$$

Tres socios han obtenido una ganancia de 21.500 pesetas. ¿Cuánto le corresponde a cada uno, si el primero invirtió en el negocio 20. 000 pesetas; el segundo, 30.000 pesetas y el tercero, 36.000 pesetas? Representando por x, y, z, los beneficios respectivos, se tendrá

$$\frac{x}{20.000}=\frac{y}{30.000}=\frac{z}{36.000};\frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{z}{18}=\frac{x+y+z}{43}=\frac{21.500}{43}=500\,ptas.$$

$$Luego x=500x10=5.000 ptas.; y=500x15=7.500; z=500x18=9.000. Total 21.500$$

(Bruño, 1939, p. 379).

En la artimética de Dalmáu Carles se hace uso de la propiedad de alternancia de las razones, pasando de razones a tasas algebraicamente:

Repartimentos proporcionales.

Definición.- Repartir un número en partes proporcionales a otros números dados, es dividir dicho número en tantas partes como números se dan; de modo que la razón de la primera parte a la segunda sea igual a la razón del primer número al segundo, que la razón de la parte segunda a la tercera sea igual a la razón del segundo número al tercero, y así sucesivamente.

Cómo se divide un número en partes proporcionales a otros números dados. - Se forman tantas reglas de tres simples como números se dan, diciendo en cada una de ellas:

Supuesto. Si a la suma de los números corresponden tantas unidades.

Pregunta. A uno de los números, cuántas unidades corresponderán.

En efecto, propongámonos, por ejemplo, dividir el número 300 en tres partes proporcionales a los números 2, 4 y 7.

Sean x, z, y las tres partes en que deseamos dividir el número 300. Tendremos, naturalmente, que,

$$x + z + y = 300.$$

Según la definición,

$$x : z : : 2 : 4$$
$$z : y : : 4 : 7$$

Alternando los medios en cada una de estas dos proporciones, resultará:

$$x : 2 : : z : 4$$
$$z : 4 : : y : 7$$

Siendo iguales entre sí estas cuatro razones, tenemos:

$$x : 2 : : z : 4 : : y : 7$$

Pero nosotros sabemos que (861)

$$x + z + y \text{ ó } 300 : 2 + 4 + 7 : : x : 2$$
$$x + z + y \text{ ó } 300 : 2 + 4 + 7 : : z : 4$$
$$x + z + y \text{ ó } 300 : 2 + 4 + 7 : : y : 7$$

Invirtiendo los términos de cada una de estas tres últimas proporciones resultará:

$$2 + 4 + 7 \text{ ó } 13 : 300 : : 2 : x$$
$$2 + 4 + 7 \text{ ó } 13 : 300 : :4 : z$$
$$2 + 4 + 7 \text{ ó } 13 : 300 : : 7 : y$$

Conforme a la regla dada

Una vez planteado el procedimiento, se aplica de modo reglado a los ejemplos.

Ejemplo. Repartir el número 200 en parte proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Resolución. Las tres partes del número 200 han de ser proporcionales a los números 2, 3 y 5.

Sumando estos números, tenemos que 2+3+5 = 10. Diremos ahora:

Para la 1º parte.

S.	Si a 10 corresponden	200
P.	A 2 corresponderán	x
	10 : 2 : : 200 : x	x = 40, parte primera

Para la 2º parte ...

(Dalmáu, 1944, p. 193).

En otros textos españoles de carácter más intuitivo se opta exclusivamente por el método “de reducción a la unidad”, señalado antes (cuyo interés pedagógico aparece ya enfatizado a comienzos del siglo XIX, hasta el punto de llegar a hacerse uso exclusivo de él en algunas aritméticas, como por ejemplo la de Reynaud, cit. Bourdon, 1848, p. 235). En Puig Adam (1956) la versión que se enseña se sustenta en un ejemplo concreto, y es la siguiente:

Repartir una suma de 1220 pesetas entre cuatro socios cuyos capitales son 7000 pesetas, 4500 pesetas, 3500 pesetas y 3000 pesetas, o sea, en total: 18000. A cada peseta de capital corresponde una ganancia de 1290:18000 = 0,07166, luego a los cuatro socios les corresponde, respectivamente, 7000 x 0,07166, ... (Puig Adam, 1956, p. 249).

En la actualidad, este es el método que casi exclusivamente se utiliza en los libros de texto en vigor en España. Textualmente como sigue:

Tres amigos (Victoria, Julio y Rosa) han recibido 15 900 PTA por el buzoneo de propaganda. Si Victoria ha repartido 3 lotes de octavillas, Julio 4 lotes y Rosa 5 lotes, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno?
Idea clave: ¿A cuánto sale el lote de propaganda distribuido?
Razonamos paso a paso
PRIMER PASO: dejar claro el número total de unidades entre las que ha de repartir.
¿Cuántos lotes se han embuzonado?
3+4+5 = 12 lotes
SEGUNDO PASO: Calcular la cantidad que corresponde a cada una de esas unidades de reparto.
¿Cuánto cobran por lote repartido?
15 900 : 12 = 1 325 PTA/lote
TERCER PASO: Calcular lo que toca a cada parte según el número de unidades de reparto que la componen.
Victoria --> 3 lotes --> 3 x 1325 = 3 975 PTA
Julio --> 4 lotes --> 4 x 1325 = 5 300 PTA
Rosa --> 5 lotes --> 5 x 1325 = 6 625 PTA (Mat. 1. Anaya, Colera et, al., 1996, p. 32)

La naturaleza comparativa de los métodos de resolución de la relga de compañías

El análisis de los métodos señalados antes permite discernir que no son piezas inconexas, sino que se sustentan en los mismos procesos comparativos propios de cualquier situación de proporcionalidad, a saber, la comparación multiplicativa de pares de cantidades del mismo espacio de medida (razones) o de diferente espacio de medida (tasa), seguido de una inferencia analógica entre los pares de razones o de tasas obtenidos.

En efecto, en los métodos b), d), d') y g) se hace uso de la inferencia analógica entre el resultado de procesos comparativos multiplicativos entre cantidades de diferente espacio de medida (tasa), lo que en el lenguaje algebraico se escribe así: $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$.

En los métodos c), e) y f) se hace uso de la inferencia analógica entre las relaciones que expresan el resultado de procesos comparativos multiplicativos entre cantidades del mismo espacio de medida (razón), lo que en el lenguaje algebraico se escribe así: $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$; $\frac{m}{p} = \frac{x}{z}$.

Por otra parte, en el contexto de los problemas, intervienen otros elementos que determinan variantes o alternativas en las comparaciones. Así, estas se pueden hacer en dos sentidos: $\frac{a}{b}$ o $\frac{b}{a}$, o en el modo fracción, división como medida o división como partición.

En el cuadro siguiente se sintetizan los procesos, los sentidos y los modos que corresponden a los métodos recogidos en el apartado anterior

Proceso/sentido	a/b		b/a	
Razón		Modo Fracción	Modo División Medida	
Tasa	Modo División partitiva		Modo División Partición	

Epílogo

Esta visión panorámica de la historia reflejada en los libros de texto de la enseñanza de una aplicación paradigmática de la proporcionalidad como es la regla de compañía muestra una evolución en la que se destacan como rasgos principales:

〈 El paso de un planteamiento centrado estrictamente en la resolución de ejemplos concretos y particulares a un planteamiento centrado en la resolución de un problema general, el reparto proporcional, que engloba y unifica los problemas particulares;

〈 El paso de ofrecer métodos alternativos de apariencia inconexa, a ofrecer un método general, bien en su versión algebraica o bien en su versión aritmética, en la forma conocida como "método de reducción a la unidad.

Por otra parte, también muestra el juego de alternativas o variantes para los procesos comparativos en el contexto de los problemas. Teniendo en cuenta que éstos no están explícitos en los enunciados sino que dependen de consideraciones personales, sería interesante indagar acerca de cuáles son los aspectos que están en el origen de estas consideraciones, en particular los de tipo evolutivo o de desarrollo intelectual y los vinculados a la instrucción o al aprendizaje escolar.

Por último, cabe señalar que lo que nos interesaría ahora es avanzar en el estudio de los procesos comparativos.implicados en otras situaciones típicas de la proporcionalidad, y más adelante en el estudio de su evolución, uso y disponibilidad por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas.

Anaya (1996) Matemáticas 1. Madrid.

Bourdon, M. (1848). *Aritmética*. Tomo I, 21 ed. francesa. Madrid. Imprenta de D. J. M. Alonso. 1ª Ed: 1797.

Boyer, C (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad, 1ª Ed. 1968.

Bruño (1939). *Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada.* Curso Superior. 2ª Edición. Zaragoza: "La instrucción popular". S. A. Imprenta Editorial Gambón. 1ª Ed. 1932.

Cirodde, P. L. (1865). *Lecciones de Aritmética*. Traducido por Francisco Zoleo. Undécima tirada. Madrid: Carlos Bailly-Bailliere.

Dalmáu Carles (1937). *Lecciones de Aritmética aplicadas a las diferentes cuestiones mercantiles para las escuelas y colegios de primera enseñanza*. Teoría y más de 2.000 problemas y ejercicios. Libro del Alumno. Grado Superior. 2.ª Parte. 97.ª. Edición. Gerona-Madrid: Ed. Dalmáu Carles, Pla. S. A.

Dalmáu Carles. J. (1944?). *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*. Nueva Edición corregida y aumentada. Libro del alumno. Grado profesional. Gerona. Ed. Dalmáu Carles. 1ª Ed. 1898?.

Justo García, Juan (1814). *Elementos de Áritmética, Algebra y Geometria.* Tomo Primero. Quarta impresión. Salamanca: Imprenta de D. Vicente Blanco (Juan).

Lacroix, S. F. (1846). *Tratado elemental de Aritmética.* Tomo I. 3ª ed. Madrid: Imprenta Real. 1ª Ed., 1797.

Ortega, Juan de (1563). *Tractado subtilissimo d'arithmetica y geometria*. Granada: René Rabut.

Pérez de Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía, y Philosophia natural.* Alcalá de Henares: Juan Gracian.

Puig Adam, P., (1956). *Didáctica matemática Eurística.* Madrid: Instituto de F. del P. de Enseñanza Laboral.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* .4ª edición. Tomo I. Parte 1ª, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imp Garrayasaza. 1ª Ed. 1813.