

# LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS: UN ESTUDIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Tomás Pardo y Bernardo Gómez

*Presentamos algunos de los resultados más relevantes de un estudio sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. El estudio se ha dirigido a recabar información para sustentar sugerencias de intervención en las pautas educativas en relación con esta temática.*

*Términos clave:* Enseñanza y aprendizaje de los números complejos; Estrategias de intervención.

Teaching and Learning of Complex Numbers: A Study at University Level

*We present some of the most relevant results of a study concerning the teaching and learning of complex numbers. The study is focused on collecting data to support suggestions for teaching interventions related to this content.*

*Keywords:* Teaching and learning of complex numbers; Intervention strategies.

Esta investigación se enmarca en la línea seguida por los miembros del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, que toma como modelo de referencia el marco teórico de investigación en matemática educativa de Filloy (1999), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). Este marco fundamenta la investigación desde el punto de vista teórico y aporta, desde el punto de vista metodológico, una manera de organizar la investigación en matemática educativa orientada a la observación experimental de fenómenos de enseñanza y aprendizaje. En definitiva, los MTL nos ayudan a explicar de manera coherente los fenómenos observados. Los MTL se caracterizan por ser un modelo recurrente y contemplar cuatro componentes interrelacionadas: (a) componente de enseñanza del MTL, (b) componente de cognición del MTL, (c) componente de competencia formal del MTL y (d) componente de comunicación del MTL.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, 2(1), 3-15.

## EL OBJETO DE ESTUDIO, EL DISEÑO Y EL DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El objeto de estudio ha sido la problemática de la enseñanza/aprendizaje de los números complejos. El análisis previo de la problemática ha delimitado el marco teórico para la observación experimental situándolo en la componente formal, y dentro de ella en el análisis histórico y epistemológico.

Establecido el marco teórico, se ha procedido al desarrollo de un programa de observación experimental donde ha entrado en juego la componente cognitiva mediante el procedimiento denominado *análisis de tareas*.

La hipótesis teórica a contrastar con la observación experimental fue que es posible que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos, a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismo con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia.

Para centrar el estudio, se ha tratado de buscar en el desarrollo histórico de los números complejos algunas de las dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que han tenido que sortear los matemáticos y que la enseñanza actual no está teniendo en cuenta.

Una revisión histórica preliminar, permitió identificar cuatro grandes etapas caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos:

*Algebraica.* Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas como raíces inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos.

*Analítica.* Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos, o nulos. Por eso, se las llama cantidades imaginarias, porque sólo existen en la imaginación.

*Geométrica.* Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado  $\sqrt{-1}$  como unidad perpendicular a 1 y consideración de los imaginarios como vectores del plano. Así, en el plano de ejes real e imaginario un vector queda representado por  $a + bi$ ; y  $\sqrt{-1}$  actúa como rotación de  $90^\circ$  alrededor de O, es decir como un signo o índice de perpendicularidad.

*Formal.* Formalización de los números complejos y consideración de los mismos como pares ordenados de números reales.

Estas etapas se tomaron como referencia para organizar la búsqueda y selección de cuestiones relevantes para contrastar la hipótesis, contextualizándolas en una concepción epistemológica. Con estas cuestiones, se procedió a la elaboración y

al pilotaje de un cuestionario para su posterior aplicación a 19 estudiantes de primer curso de la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Valencia, en su ambiente habitual de clase el último mes del curso académico.

## LA SELECCIÓN DE CUESTIONES PARA LA OBSERVACIÓN EXPERIMENTAL

El cuestionario sometido a los estudiantes constó de cinco tareas, una por cada una de las etapas señaladas antes, excepto en el caso de la etapa analítica de la cual se extraen dos tareas.

Para el estudio de las respuestas, se ha aplicado la metodología del análisis de tareas, lo que ha permitido realizar una primera descripción y categorización de las actuaciones de los estudiantes mediante un modelo de interpretación de nuestro grupo PNA. Este análisis permite aventurar que se confirma la hipótesis de partida en el sentido de que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades identificadas que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen y, en algunos casos, agravadas.

Las cuatro primeras tareas fueron las siguientes (prescindimos de la quinta porque no ha cumplido con las expectativas).

### **Tarea 1: la Partición**

Esta tarea la elegimos de la etapa que hemos llamado algebraica. Está tomada literalmente de Cardano (1662, p. 287) y consiste en un problema cuya solución viene de la mano de una ecuación de segundo grado. El enunciado se puede observar en la Figura 1. Su propósito es hacer aflorar las posibles dificultades e inconsistencias de los estudiantes para resolver un problema planteado con números enteros pero cuya solución no es real sino compleja. La respuesta adecuada implica aceptar que las raíces complejas de la ecuación de segundo grado que permite resolver el problema son soluciones matemáticamente válidas, aunque en el enunciado no se mencione el campo numérico en el que debe darse la solución.

### **Tarea 2: el Logaritmo**

Esta tarea, corresponde a la etapa que hemos denominado analítica. Está basada en una conocida controversia sobre la existencia de los logaritmos de los números negativos entre Bernouilli y Leibniz, recogida por Euler (1749). Esta controversia surgió ante las contradicciones a las que llevaba el uso poco exigente de las reglas de cálculo. Su propósito es hacer aflorar las posibles dificultades e inconsistencias de los estudiantes cuando tienen que interpretar una secuencia de operaciones lógicas con logaritmos de números negativos. El enunciado de la tarea 2 está recogido en la Figura 2. La respuesta adecuada implica el reconocimiento de la existencia de logaritmos de números negativos en el campo comple-

jo. Además, hay que saber cuando se pueden extender las reglas generales de la operatoria con logaritmos de los reales positivos a los negativos y por qué se pueden extender o no<sup>1</sup>.

### **Tarea 3: las Operaciones**

Esta tarea la ubicamos en la etapa analítica y está basada en anotaciones de Euler (1984, pp. 42-44) y Vallejo (1841, p. 242), sobre el cuidado que hay que tener al multiplicar expresiones imaginarias. Su enunciado se puede observar en la Figura 4. El objetivo de la tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes ante la multiplicación de raíces con radicando negativo, dado que si se aplica la regla general de la multiplicación “la raíz del producto es el producto de las raíces”, se obtiene un resultado contradictorio con la regla para multiplicar los números imaginarios. La respuesta adecuada implica el reconocimiento de que las reglas generales de la multiplicación no funcionan en el producto de raíces con radicando negativo.

### **Tarea 4: el Orden**

Esta tarea, la hemos diseñado basándonos en un comentario de Hamilton (1837; citado por Ferreirós, 1998, p. 11), donde se pone de manifiesto la dificultad de situar bajo la definición clásica de número a los imaginarios, dado que éstos no pueden satisfacer el requisito de ser un cuerpo ordenado, como ocurre con los números reales. Su enunciado queda recogido en la Figura 5. El objetivo de esta tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes cuando se les pide que ordenen números complejos presentados de varias formas. La respuesta adecuada implica reconocer que los números complejos no tienen un orden compatible con su estructura de cuerpo.

## LOS RESULTADOS

A continuación, se presenta una muestra de las respuestas más relevantes de los estudiantes al resolver las cuatro primeras tareas del cuestionario, junto con una ilustración del tipo de análisis que hemos hecho de las mismas.

### **Tarea 1: Ejemplo del Alumno 1**

La Figura 1 muestra la resolución del alumno 1 a la tarea 1.

---

<sup>1</sup> Recuérdese que hay infinitos logaritmos para cada número: los números reales positivos tienen un sólo valor del logaritmo que es real, siendo todos los otros imaginarios. Los números negativos y los números complejos tienen todos los valores del logaritmo imaginarios.

*Cuestión 1. La Partición*

Divide el número 10 en otros dos números cuyo producto sea 40

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 5} \\ 9 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 8} \\ 7 \quad 1 \end{array}$$

$$40 = 2^3 \cdot 5 \quad \wedge \quad 10 = 5 \cdot 2$$

Explica como lo haces

.....

$$40 = 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 \quad \wedge \quad 10 = 5 \cdot 2 \quad (\text{sol})$$

es poden dividir per potencies de 2  
 ns ~~3~~ 3 i 5.

Figura 1. Resolución del alumno 1 a la tarea 1

*Explicación*

El estudiante calcula los factores de 40 y de 10. Divide el 10 por dos números naturales menores que 10 y cuyo producto es 40.

*Interpretación*

De lo que manifiesta el estudiante en el apartado “explica cómo lo haces”, interpretamos que entiende que éste es un problema aritmético, y que en consecuencia sólo intenta resolverlo mediante operaciones aritméticas con números naturales. Tal vez hace una interpretación demasiado estricta de la palabra *divide* del enunciado. Es decir, lo entiende como la orden de hacer uso del algoritmo de la división, por eso divide por los números naturales cuyo producto es 40.

*Predicción y Sugerencias*

Creemos que el estudiante repetirá este tipo de procedimiento con problemas análogos mientras no se le haga ver que éste es un problema que admite una lectura y una resolución algebraica, y que la palabra del enunciado *divide* se refiere aquí a *descomponer* en dos sumandos y no necesariamente a dividir en sentido estricto.

*Categorías de Respuestas*

La Tabla 1 recoge los comportamientos observados agrupados por categorías con sus frecuencias correspondientes.

Tabla 1

*Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea 1*

Categorías	Frecuencia
Utilizan el álgebra y dan la solución compleja	5/19
Utilizan el álgebra y dejan la solución indicada sin expresión imaginaria	1/19
Utilizan la aritmética y se centran en factores del 40	5/19
Utilizan la aritmética e interpretan que hay que dividir el 10 en sentido estricto	2/19
No contesta o lo hace sin sentido aparente	6/19

**Tarea 2: Ejemplo del Alumno 2**

La Figura 2 recoge la resolución del alumno 2 a la tarea 2.

*Cuestión 2. El Logaritmo*

Dado que  $(-x)^2 = x^2$  se tiene que:

$$\log (-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2 \log (-x) = 2 \log x \Rightarrow \log (-x) = \log x ,$$

por lo que

$\log (-x)$  existe y es un número real.

En particular para  $x=1$ ,  $\ln(-1) = \ln(1)$  que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?

..... NO .....

¿Es correcto el razonamiento?

..... ~~NO~~ El razonamiento es correcto, pero de.....

principi... no... porque... porque el logaritmo de un número negativo no existe.

Explica tu respuesta

..... El logaritmo de un número.....

negativo no existe.....

Figura 2. Resolución del alumno 2 a la tarea 2

*Explicación*

Por un lado, dice que el razonamiento es correcto y, por otro, que el logaritmo de un número negativo no existe.

*Interpretación*

Su respuesta es incoherente, ya que si cree que no existen los logaritmos de los números negativos, no debería decir que el razonamiento es correcto.

*Predicción*

El estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Esto le induce a creer que las reglas aprendidas con los reales son válidas siempre. Si no se le advierte que esto no es así y el porqué, difícilmente podrá salir de esta creencia por sí sólo.

**Tarea 2: Ejemplo del Alumno 17**

La Figura 3 muestra la resolución de la tarea 2 hecha por el alumno 17.

*Cuestión 2. El Logaritmo*

Dado que  $(-x)^2 = x^2$  se tiene que:

$$\log (-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2 \log (-x) = 2 \log x \Rightarrow \log (-x) = \log x ,$$

por lo que

$\log (-x)$  existe y es un número real.

En particular para  $x=1$ ,  $\ln(-1) = \ln(1)$  que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?

... No, ~~ln(-x)~~ .....

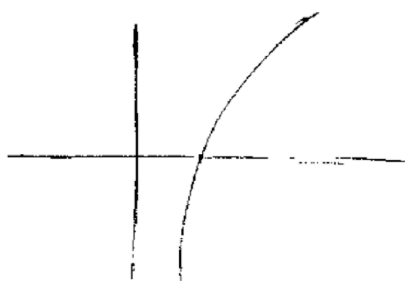
¿Es correcto el razonamiento?

... No .....

Explica tu respuesta

~~$(-x)^2 \neq x^2$  . I.R.A.  ~~$(-x)^2 = x^2$~~   ~~$-x = x$~~~~

~~$\log (-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2 \log (-x) = 2 \log (x)$   ~~$x \neq -x$~~~~



$0 < x < 1 \rightarrow \log x < 0$   
 $x > 1 \rightarrow \log x > 0$

Figura 3. Resolución del alumno 17 a la tarea 2

*Explicación*

El estudiante niega el razonamiento del enunciado porque dice que a números diferentes le corresponden logaritmos diferentes. Usa la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dice que el razonamiento no es correcto. Pero no explica satisfactoriamente el porqué.

*Interpretación*

Usa un argumento lógico para explicar que algo está mal, detecta la contradicción y la usa para negar uno de los pasos. Pero su explicación es insuficiente como respuesta a la pregunta ya que no se basa en la cadena de razonamientos del enunciado. No explica por qué la regla que es válida con los reales aquí no lo es.

*Predicción y Sugerencias*

Como el anterior, el estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Si no se le advierte que con los complejos hay que reconceptualizar la noción de logaritmo y revisar sus reglas de cálculo, podemos esperar que incurra en contradicciones.

*Categorías de Respuestas*

La Tabla 2 recoge los comportamientos observados agrupados por categorías con sus frecuencias correspondientes.

Tabla 2

*Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea 2*

Categorías	Frecuencia
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dicen que el razonamiento no es correcto. Pero no explican por qué	8/19
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dicen que el razonamiento sí que es correcto. Son inconsistentes	3/19
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen pero no contestan a la pregunta si el razonamiento es correcto	3/19
Señalan uno de los pasos como incorrecto, pero su razonamiento no está bien argumentado	3/19
Manifiestan dificultades de tipo algebraico. Inconsistencias con los paréntesis	2/19

**Tarea 3: Ejemplo del Alumno 5**

La Figura 4 muestra la resolución hecha por el alumno 5 a la tarea 3.



## Cuestión 3. Las Operaciones

Calcula

$$a) \sqrt{-5}\sqrt{-5} = \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$$

Explica tu respuesta

... la multiplicació de arrels té la propietat que  
 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ , aleshores s'aplica aquesta propietat.

$$b) \sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5 \cdot (-1)^2} \cdot \sqrt{-5} = -\sqrt{5} \sqrt{-5} = -\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \sqrt{5} = -\sqrt{5^2} \cdot i = \pm i$$

Explica tu respuesta

... apliquem de nou la propietat anterior i substituïm  
 $\sqrt{-1}$  per  $i$ .

Figura 4. Resolución del alumno 5 a la tarea 3

*Explicación*

El estudiante, en el primer apartado, aplica la regla general para multiplicar radicales, calcula el cuadrado de dentro del radical, calcula la raíz cuadrada del resultado y acompaña la respuesta con el doble signo  $\pm$ .

En el apartado a, aplica la misma regla general que antes, aunque lo que escribe bajo el radical no se corresponde con el signo menos que extrae y que cabe suponer que procede de considerar que  $\sqrt{(-1)^2} = -1$  y no 1. Esto queda corroborado por su actuación posterior, donde extrae la forma imaginaria  $\sqrt{-1}$  que escribe después como  $i$ . Finalmente, aplica otra vez la regla general a  $\sqrt{5}\sqrt{5}$  y calcula la raíz cuadrada con el doble signo  $\pm$ , aunque olvida escribir el 5.

*Interpretación*

En la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En el primer apartado no tiene en cuenta que se trata de expresiones imaginarias, lo que le hubiera llevado a extraer  $\sqrt{-1}$ , a diferencia de lo que hace en el segundo apartado donde sí que lo hace. Otro aspecto llamativo es que parece interpretar el signo radical como la orden de calcular la doble raíz cuadrada de un número, lo que es una interpretación aritmética inconsistente porque produce respuestas contradictorias cuando se opera con radicales.

*Predicción y Sugerencias*

Entendemos que el estudiante conoce y puede manejar las reglas para operar radicales, raíces cuadradas y la expresión imaginaria implicadas en la tarea, pero encuentra dificultades para decidir cuándo estas reglas están permitidas y cuándo no. En concreto, ignora que la regla para multiplicar radicales no funciona con

los radicandos negativos. Por otra parte, el estudiante utiliza una concepción aritmética del signo radical que le lleva a confundirlo con la orden de calcular la raíz cuadrada. Ignora que  $\sqrt{(a)^2} = |a|$  y no  $\pm a$  como él manifiesta.

En consecuencia, podemos esperar que el estudiante repetirá este tipo de comportamiento con problemas análogos y entendemos que son un producto de la enseñanza, que no advierte de estas restricciones adecuadamente. Creemos que es necesario revisar la distinción entre radical y raíz cuadrada, redefinir la noción de raíz cuadrada para incorporar el caso de radicandos negativos y justificar por qué  $\sqrt{-1} \sqrt{-1}$  no es 1 ni  $\pm 1$ , sino que es  $-1$ .

#### *Categorías de Respuestas*

La Tabla 3 recoge los comportamientos observados agrupados por categorías con sus frecuencias correspondientes.

Tabla 3

#### *Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea 3*

Categorías	Frecuencia
Utilizan correctamente la regla para operar imaginarios	9/19
Utilizan la regla para operar imaginarios con errores de descuido	4/19
Usan las dos reglas: la general para multiplicar radicales y la regla para multiplicar raíces imaginarias	4/19
Aplican exclusivamente la regla general de multiplicar radicales	2/19

#### **Tarea 4: Ejemplo del Alumno 3**

La Figura 5 recoge la resolución que presenta el alumno 3 a la tarea 4.

*Cuestión 4. El Orden*

Usando los signos  $<$ ,  $>$ ,  $=$  ordena los números;

a)  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-1}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{1}$

$\sqrt{-2} < \sqrt{-1} < 0 < \sqrt{1}$

Explica tu respuesta

Porque las raíces no altera el orden de los números: si  $a < b \rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

b)  $1+i$ ,  $1+2i$ ,  $2+2i$ ,  $2+i$

$1+i < 1+2i = 2+i < 2+2i$

Explica tu respuesta

c)  $i$ ,  $\sqrt{i}$ ,

$\sqrt{i} < i$

Explica tu respuesta

Porque la raíz de un número es menor que el número

Figura 5. Resolución del alumno 3 a la tarea 4

*Explicación*

El estudiante ordena todos los números en los tres apartados, pero sólo explica el criterio que usa en los apartados a y c. En estos apartados, extiende reglas no enseñadas propias de los reales a los complejos: *si un número es menor que otro su raíz también lo es, la raíz de un número es menor que el número.*

*Interpretación*

De la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En los apartados a y c no tiene en cuenta que se trata de expresiones imaginarias y que las reglas de los reales no tienen por qué funcionar. En el apartado b, dado que los números están expresados en forma binómico, utiliza un criterio idiosincrásico que creemos que se basa en el orden de los módulos.

En ningún caso se plantea que pueda ser imposible ordenar los números dados y tampoco tiene en cuenta que las raíces de los números negativos no existen en el campo real.

*Predicción y Sugerencia para la Enseñanza*

El alumno conoce reglas para ordenar números reales pero no percibe que éstas no son ciertas cuando los números son imaginarios y ordena de modo *sui generis* números complejos por lo que creemos que se debe actuar en los métodos de enseñanza para evitar la creencia de que las propiedades de un campo numérico se cumplen en otro campo que lo contenga.

*Categorías de Respuestas*

La Tabla 4 recoge los comportamientos observados agrupados por categorías con sus frecuencias correspondientes.

Tabla 4

*Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea 4*

Categorías	Frecuencia
Extienden propiedades de los números reales	12/19
Utilizan las componentes de los números complejos	10/19
Usan el módulo de los números complejos	5/19
Tropiezan con dificultades de naturaleza diferente	9/19

## CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE TAREAS

Nuestro modelo es una herramienta válida para llevar a cabo la investigación planteada. En ésta se pone de manifiesto que los alumnos presentan dificultades e inconsistencias al responder a las tareas del cuestionario, las cuales permiten aventurar que se confirma la hipótesis teórica inicial de modo que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades e inconsistencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes reproducen, en algunos casos, agravadas.

## REFERENCIAS

- Cardano, G. (1662). *Ars magna*. En Girolamo Cardano, *Opera Omnia, Vol. 4*. Edición de Lugduni. (Trabajo original publicado en 1545)
- Euler, L. (1749). De la controverse entre M. M. Leibniz et Bernouilli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 17, 195-232.
- Euler, L. (1984). *Elements of algebra*. (J. Hewlett, Trad.). New York: Springer-Verlag. (Trabajo original publicado en 1770)
- Ferreirós, J. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Aljaima.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado elemental de matemáticas: Tomo I*. Madrid: Imprenta Garrayasaza.

Este trabajo se publicó originalmente como Pardo, T. y Gómez, B. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Noveno simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 251-260). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Tomás Pardo	Bernardo Gómez
IES Tirant lo Blanc	Universidad de Valencia
tomparsa1@gmail.com	bernardo.gomez@uv.es