La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio comparativo España- Rumania

Carmen Buhlea
(carmenbuhlea@yahoo.es)
Universidad de Valencia

Bernardo Gómez Alfonso
(Bernardo.Gomez@uv.es)
Universidad de Valencia

Resumen

Presentamos una caracterización de tres dificultades emergentes en la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos.

Estas dificultades, identificadas en un análisis histórico y epistemológico, dan lugar a conflictos cognitivos y a hipótesis explicativas de los mismos, que sugieren la conveniencia de modificar algunas de las pautas de enseñanza.

Abstract

We presented a characterization of three emerging difficulties in the teaching and the learning of complex numbers.

These difficulties, identified in a historic and epistemological analysis, they give rise to cognitive conflicts and to hypothesis explicative of the same, that they suggest the convenience to modify some of the tuition guidelines.

Palabras claves:

Números complejos, radicales, imaginarios, dificultades, historia y epistemología, comparación de libros de texto

Key words:

Complex numbers, radicals, imaginary, difficulties, history and epistemology, comparison of schoolbooks

PROBLEMÁTICA

La problemática general es la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos.

En nuestra investigación partimos del convencimiento de que la enseñanza de los números complejos presenta complejidades y puntos débiles que afectan a la comprensión conceptual y procedimental de los estudiantes.

En relación con lo conceptual, sospechamos que el uso de raíces pares de números negativos en ecuaciones de segundo grado no explica bien el concepto de número imaginario y en mayor medida, la idea de número complejo no está bien explicada con la suma de un número real y otro imaginario.

Otra idea involucrada es el cambio de la noción de raíz cuadrada a la de radical, al pasar de la aritmética al álgebra. Sospechamos que la enseñanza no presta suficiente atención a este cambio, ya que parece que los estudiantes no son capaces de percibir las diferencias entre raíz y radical, por sí mismos.

En relación con lo procedimental, las dificultades se focalizan en las inconsistencias a las que conduce el doble signo $\pm$ asociado a las raíces cuadradas y a la extensión de las reglas para operar radicales, de los números reales a los imaginarios.

DEL MARCO DE REFERENCIA Y DEL DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para contrastar estas ideas, se pretende llevar a cabo un trabajo de investigación que tiene dos partes relacionadas, una teórica y otra experimental.

Se enmarca en la línea seguida por el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia.

Esta línea de investigación está orientada a la observación y a la modelización del proceso de enseñanza-aprendizaje y se caracteriza por utilizar: el análisis histórico-epistemológico, el análisis de libros de texto y el análisis de tareas (Gomez 2006).

El modelo de referencia es el marco teórico de investigación en Matemática Educativa de Filloy (1999), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL).

Los MTL fundamentan la investigación desde el punto de vista teórico. Desde el punto de vista metodológico, aportan una manera de organizar la investigación orientada a la observación experimental de fenómenos de enseñanza y aprendizaje y ayudan a explicar de manera coherente los fenómenos observados. Se caracterizan por ser modelos recurrentes que ponen en evidencia las relaciones que hay entre las cuatro componentes que entran en juego: enseñanza, cognición, competencia y comunicación.

Antecedentes

La investigación enlaza con los trabajos de Pardo (2004) y Pastor (2004), dirigidos por el Dr. Bernardo Gómez.

En estos trabajos se identificaron algunas de las dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que han enfrentado a los matemáticos a lo largo de la historia, bajo la hipótesis de que estas dificultades e inconsistencias tal vez guarden paralelismo con las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia; y que es posible, que estas dificultades e inconsistencias estén siendo camufladas por la enseñanza actual, por lo que permanecen ocultas.

Como consecuencia de esta investigación se abrió una nueva perspectiva para abordar futuros trabajos, que se refleja en la siguiente hipótesis.

Hipótesis teórica a contrastar

Es posible que algunas de las dificultades identificadas en el análisis histórico y epistemológico se reproduzcan en los estudiantes de hoy. En algún caso estas dificultades pueden estar favorecidas por un determinado modelo de enseñanza y en otros puede que sean consecuencia directa de la complejidad propia de los números complejos, y, por tanto, de carácter intrínseco al contenido matemático.

Metodología

Nuestro propósito es hacer emerger estas dificultades en los estudiantes, y determinar cuáles son fruto de la enseñanza y cuáles son intrínsecas.

Para ello se pretende hacer un estudio comparativo entre dos países, España y Rumania, con culturas docentes diferentes. Este estudio se sustenta en dos partes relacionadas, una teórica y otra experimental.

El desarrollo de la parte teórica, con lo cual se constituye el modelo teórico inicial, se configura a lo largo de una revisión de la investigación afín para conocer el estado de la cuestión en relación con esta problemática; y un análisis histórico-epistemológico para ver cómo ha evolucionado y cómo han sido tratadas en los libros de textos, antiguos y actuales, las dificultades previamente identificadas en relación con los números complejos.

Aquí son muy importantes las *cogniciones petrificadas.* El término de *cogniciones petrificadas* fue acuñado por Puig (2006). Él considera la búsqueda de *cogniciones petrificadas* una manera de examinar los textos de matemáticas de épocas pasadas propia de la didáctica de las matemáticas y explica el término de *cogniciones petrificadas* de la siguiente manera:

Petrificadas porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más de lo que ya está en ellos. Cogniciones porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara como su autor (Puig, 2006, p.113).

En esta parte, se necesita caracterizar la componente formal, para ello interesa ver cómo se contempla este tema de los números complejos en el nivel superior porque es al que se aspira que lleguen los estudiantes y detectar así las relaciones entre los dos niveles de enseñanza. En concreto, se pretende hacer una revisión de dos libros actuales de matemáticas del nivel superior a aquellos que corresponden al nivel de los estudiantes con los que se quiere hacer un estudio cognitivo, uno de cada país, para primeros cursos de universidad.

El modelo de enseñanza lo vamos a caracterizar a partir de los documentos oficiales en relación con los currículos de ambos países, España y Rumania, y mediante un análisis comparativo de sus libros de texto, vamos a analizar qué tratamiento dan a los problemas identificados en el marco teórico.

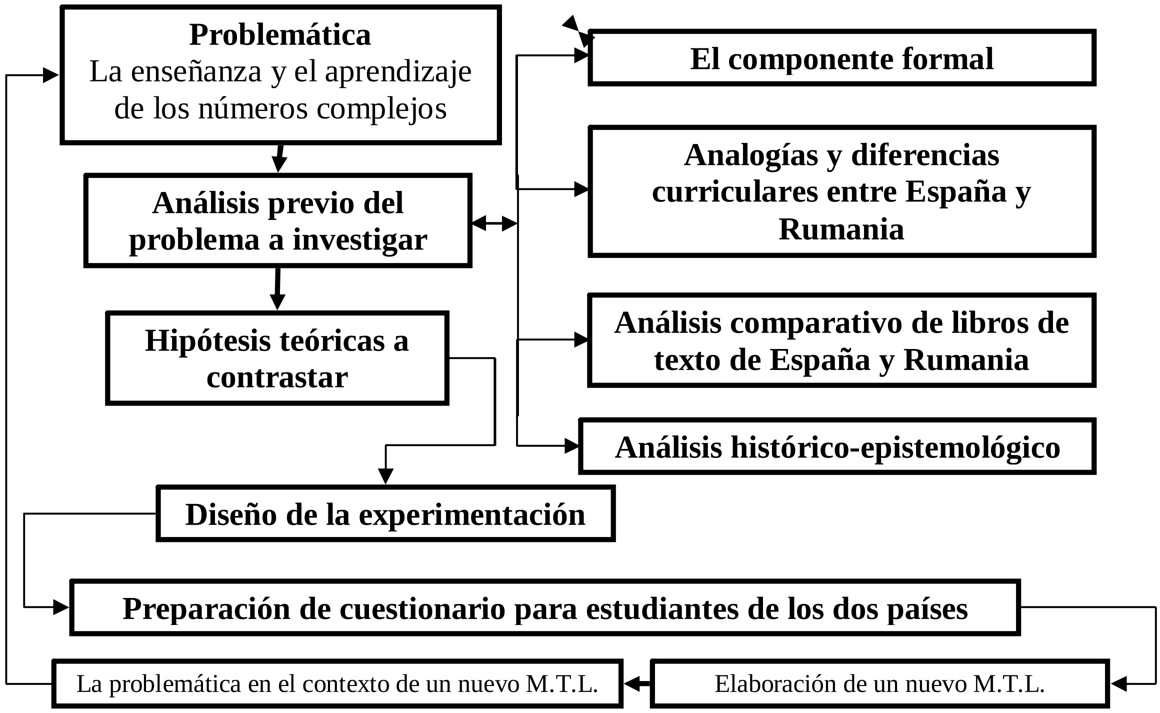
El desarrollo de la segunda parte del trabajo, la parte experimental, se basa en la información obtenida en la parte teórica para elaborar un cuestionario para estudiantes de bachillerato de los dos países, que permita contrastar la hipótesis de partida.

Se cree que las dificultades e inconsistencias que sólo se observen en uno de los dos países son las que podrán ser achacadas a las peculiaridades de su modelo de enseñanza.

Diagrama de flujo de la investigación

El diseño de la experimentación se representa mediante el siguiente diagrama de flujo:

Esquema del diseño de la experimentación



DIFICULTADES EMERGENTES DEL ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

El objetivo del estudio histórico-epistemológico se ha centrado en analizar el estadio del concepto de número complejo al final del siglo XVIII y su evolución en el siglo XIX, así como las dificultades asociadas a él y la observación de la manera en que fueron superadas, con la finalidad que nos sugieran preguntas de investigación.

En este apartado nos centramos en explicar las tres dificultades principales que tenemos caracterizadas hasta el momento.

1) La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada (reflejada en Euler);

2) La susceptibilidad de la raíz cuadrada de un número negativo a los signos + y - (reflejada en Peacock);

3) La perplejidad de Vallejo en relación con la operación de los binomios complejos.

1) La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada

Autores antiguos, de la segunda mitad del siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX, consideraban que:

(…) *la raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que* $\sqrt{4}$*, por ejemplo, es igualmente 2 y -2, y en general, se puede adoptar tanto* $-\sqrt{a}$ *como* $+\sqrt{a}$ *para la raíz cuadrada de a* (Euler,1774, p. 44).

En este texto aparece $\sqrt{4}$ como la raíz cuadrada de 4, que es un conjunto de dos valores y $\sqrt{a}$ como uno de los dos valores de la raíz cuadrada de a, que es solo un número.

Si consideramos que

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

entonces se obtiene que

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = (\pm 2) + (\pm 2) = \{-4, 0, +4\}$$

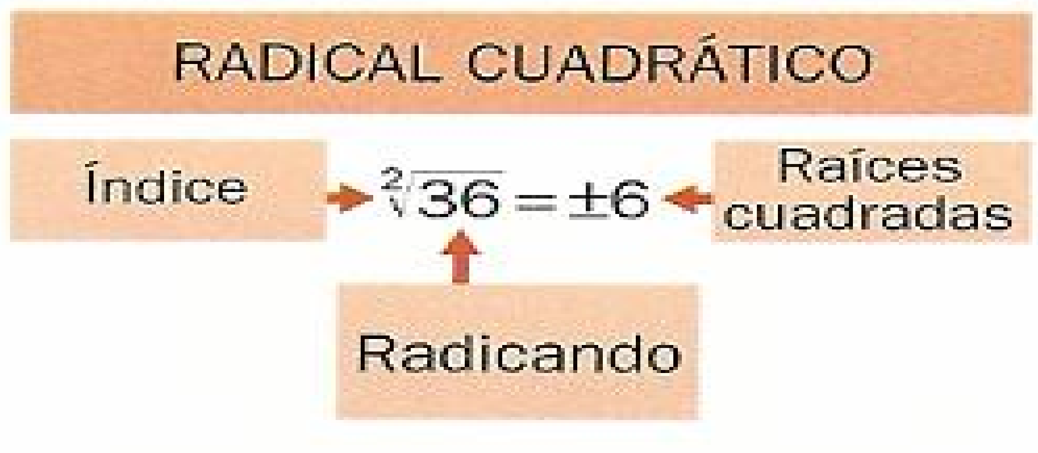
$$\sqrt{4} - \sqrt{4} = (\pm 2) - (\pm 2) = \{-4, 0, +4\}$$

lo que lleva a un conflicto cognitivo.

Las hipótesis explicativas serían:

- La imperceptibilidad de las diferencias que hay entre la raíz cuadrada y el radical cuadrado de un número.
- La paradoja de la raíz cuadrada. El uso del singular para expresar un plural.

Los libros de texto españoles parece que favorecen esta dificultad.



3° ESO, Edit. SM, 2003, p.36

2) La susceptibilidad de la raíz cuadrada de un número negativo a los signos + y –

La puntualización que hace Euler lleva a considerar que la raíz cuadrada de un número negativo, -a, es tanto $+\sqrt{-a}$ como $-\sqrt{-a}$.

(…) la raíz cuadrada de –a es igualmente $+\sqrt{-a}$ *y* $-\sqrt{-a}$ (Euler 1774, p.44).

Lo mismo se encuentra en la afirmación de Peacock (1830, p.352):

(…) la raíz cuadrada de - a^2 *es igualmente* $+a\sqrt{-1}$ *y* $-a\sqrt{-1}$ *por la misma razón que la raíz cuadrada de* a^2 *es igualmente* $+a$ *y* $-a$*;*

pues

$(-a\sqrt{-1}) \times (-a\sqrt{-1}) = -a^2$ *lo mismo que* $(+a\sqrt{-1}) \times (+a\sqrt{-1})$.

Es decir que la raíz cuadrada de un número negativo, -a, tiene dos valores $+\sqrt{-a}$ como $-\sqrt{-a}$. Lo que puede inducir a pensar en que $-\sqrt{-a}$ es un número negativo y $+\sqrt{-a}$ es un número positivo. Entonces:

$$-\sqrt{-a} < +\sqrt{-a} \Rightarrow 0 < 2\sqrt{-a} \Rightarrow 0 < \sqrt{-a} \Rightarrow \text{ para } a=1,\ 0 < \sqrt{-1}$$

$$0 < \sqrt{-1},\ 0 \cdot \sqrt{-1} < \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow 0 < -1$$

lo que lleva a un conflicto cognitivo.

La hipótesis explicativa sería la imperceptibilidad de la no extensión del orden total de los reales a los complejos.

3) La perplejidad de Vallejo en relación con la operación de los binomios complejos.

La *perplejidad de Vallejo* aparece en una nota a pie de página en la cuarta edición de su tratado (1841).

(…) en el artículo 3 pone por definición, "la suma de dos cantidades es la diagonal del paralelogramo, cuyos lados son las dos cantidades". Esto no se yo el modo de comprenderlo, pues como los dos lados de un paralelogramo, y la diagonal forman un triángulo y la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero, según demostramos (§ 371), resulta, por los principios que tenemos allí demostrados, y que todos reconocen por verdaderos, que la suma de los dos lados de un paralelogramo es mayor que su diagonal; por lo que el tomar ahora por definición, que la diagonal de un

paralelogramo es igual á la suma de los lados, es una cosa que no se concibe; por lo que lo ménos hay mucha obscuridad (Vallejo, 1841, p. 244).

Vallejo confiesa no entender la representación de las cantidades imaginarias tal como la expone John Warren (1828) en *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of the Negative Quantities.*

La definición de la suma de dos cantidades para Vallejo no encaja en la definición de Warren:

La suma de dos cantidades es la diagonal del paralelogramo, cuyos lados son las dos cantidades (Warren 1828, p. 1).

lo que lleva a un conflicto cognitivo.

Vallejo no entiende que Warren se refiere a cantidades algebraicas, que tienen dirección además de magnitud, es decir, cantidades en que intervienen ángulos en su definición, según la interpretación de L. Puig (2006, p. 131-132):

La definición de adición, que Vallejo no entiende, no suma longitudes, que es lo único que consideraba Vallejo en su objeción (…), sino cantidades algebraicas que tienen longitud y dirección.

La dificultad de Vallejo se refleja en la enseñanza actual como la imperceptibilidad de la analogía de los números complejos con los vectores.

COMENTARIOS FINALES

Esta investigación que desarrollamos, diseñada y estructurada según los Modelos Teóricos Locales de Filloy, nos permitirá, mediante un análisis histórico-epistemológico y un análisis comparativo de libros de texto de dos países, hacer emerger dificultades conceptuales y procedimentales de los números complejos que puedan reproducirse en los estudiantes de los dos países. Además, este modelo nos permitirá diseñar un cuestionario para estudiantes de bachillerato de ambos países, con el fin de poder establecer si estas dificultades están favorecidas por un determinado modelo de enseñanza o son consecuencia directa de la complejidad propia de los números complejos. Toda la información conseguida sustentará sugerencias de intervención en las pautas educativas de los currículos de España Rumania, en relación con esta temática.

REFERENCIAS

Gómez, B. (2006). *Componentes de la investigación en pensamiento numérico y algebraico.* En Isabel Vale, Teresa Pimentel, Ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos y Paula Canavarro (eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçao de profesores,* (49-62). Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educaçao. Secçao de Educaçao Matemática. ISBN 972-8614-07-1.

Euler, L. (1774). Éléments d´algèbre, trad., Bernouilli, Lyon, Bruisset.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Pardo, T. (2004). *La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario*. Memoria de investigación. Departamento de Didáctica las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia.

Pastor, C. (2004). *La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario*. Memoria de investigación. Departamento de Didáctica las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia.

Peacock, G, (1830). *A Treatise on Algebra.* Cambrigde: J. & J. J. Deighton.

Puig, L. (2006). *Vallejo Perplejo.* En Maz, A., Rodríguez, M. y Romero, L., *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática, (113-138).* Servicio de Publicaciones, Universidad de Córdoba. Córdoba.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imprenta Garrasayaza.

Warren, J. (1828). *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square roots of the Negative Quantities.* J. Smith, Printer to the University.