LAS CONCEPCIONES ESCOLARES DE LOS DECIMALES

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia.

Resumen
Se hace aquí una caracterización de las concepciones de los decimales que los estudiantes construyen en relación con los contextos escolares que se utilizan para introducirlos, después se plantean algunas inconsistencias derivadas de estas concepciones, y se hace el estudio de un caso.

INTRODUCCIÓN

La idea principal de esta comunicación es que las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance. La palabra concepción se usa aquí en el sentido de Artigue (1984), para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar los estudiantes, a medida que su conocimiento va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de las concepciones que los estudiantes construyen a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas es un tema que ha despertado el interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas porque, como se ha señalado (Brousseau, 1998, p. 142), son conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes.

Además el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto.

CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS

En la investigación afín precedente sobre este tema quizá el trabajo más relevante sea el de Brousseau (1983, 1998), quien, en el centro de su teoría de las situaciones didácticas sitúa la problemática de los obstáculos al aprendizaje matemático. Como ejemplo de los obstáculos de origen didáctico, que son los que parecen depender únicamente de una opción o de un proyecto del sistema educativo (1998, p.125), estudia la presentación actual de los decimales en el nivel elemental.

“La presentación actual de los decimales en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución en el cuadro de una opción didáctica hecha por los enciclopedistas, después por la Convención (conforme a una concepción que se remonta al mismo Stevin) : teniendo en cuenta su utilidad, los decimales iban a ser enseñados a todo el mundo lo más pronto posible, asociados a un sistema de medida, y refiriéndose a las técnicas operatorias de los enteros. Así, hoy, los decimales son, para los estudiantes, enteros naturales con un cambio de unidad, por lo tanto, naturales (con coma) y medidas. Y esta concepción, apoyada por una mecanización del estudiante, va a hacer obstáculo hasta la universidad para una buena comprensión de los reales” (1998, p. 125).

ACERCAMIENTOS ESCOLARES DE LOS DECIMALES Y CONCEPCIONES ASOCIADAS

El hecho de que se liguen los decimales a la medida no parece explicar todos los obstáculos asociados a los decimales. Sin ánimo de ser exhaustivos, y basándonos en el trabajo de Brousseau, presentamos aquí una caracterización más amplia de las concepciones de los decimales que se derivan de las prácticas usuales de enseñanza y se discuten algunos de sus efectos:

a) En el contexto de la medida de magnitudes los decimales se construyen a partir de la expresión de cantidades en términos de unidades y subunidades; la coma decimal es entonces el indicador que señala el cambio de unidad, el paso de la unidad entera a la unidad fraccionaria. En la práctica se refuerza esa idea cuando, por ejemplo, 325 cm. se lee como 3 m. y 25 cm. Bajo esta interpretación el decimal funciona como un entero que no se puede desligar de la unidad. La costumbre de detenerse en la unidad más pequeña comúnmente utilizada (el cm. o el mm., para las longitudes) explica que haya estudiantes que digan que el siguiente de 3’25 es 3'26, o que no hay ningún decimal entre 3,25 y 3,26, y cuando corrigen su respuesta lo hacen bajo el mismo modelo erróneo. Estos estudiantes no conciben que el orden de los naturales no funciona con los decimales, y que dado un decimal no es posible hallar su siguiente.

b) En el contexto algorítmico, cuando se estudian las operaciones en forma mecánica, sin comprender, se refuerza la asimilación de los decimales a los enteros.En la práctica se insiste en esta idea cuando 3’25 se lee "tres veinticinco", o cuando se suma o resta operando las partes que van antes de la coma entre sí y las partes que van después de la coma también entre sí. Bajo esta interpretación se suele denominar parte entera a la de la izquierda de la coma y decimal a la de la derecha, lo que hace que algunos estudiantes sólo consideran decimal a ésta última, y por lo tanto, lo que es menor que uno. Esto lleva a pensar que la parte entera es la importante y la parte decimal vale poco y se puede despreciar. En el algoritmo de la división, cuando éste se aprende mecánicamente, los decimales aparecen como los números que resultan al continuar dividiendo cuando el resto es menor que el divisor, y por lo tanto se refuerza la idea de separación entre parte entera y parte decimal y que ésta es menor que la unidad. La separación entre partes suele provocar en el cálculo mental (Gómez, 1995) respuestas erróneas del tipo: $0,1^2 = 0,1$ o $0,4^2=0,16$, y también la creencia de que 3,9 es menor que 3,12 porque 9 es menor que 12.

c) En el contexto de las fracciones los decimales se introducen como una nueva forma de escritura, así 0’2 es otra manera de decir 2/10 ó 1/5, etc. Estos son los decimales finitos que posteriormente se amplían con los decimales infinitos periódicos puros o mixtos, que proceden de las fracciones de la forma n/m, siendo $m \neq 2^p5^q$. Bajo esta interpretación los decimales no son nuevos objetos matemáticos, sino que sólo se trata de un cambio de sistema de representación. Esto encubre la existencia de los decimales no racionales como, por ejemplo, los radicales del tipo de $\sqrt{3}$, y dificulta la comprensión la conexión entre las fracciones y los decimales, hay estudiantes que no saben si se trata de una intersección, una inclusión, y en ese caso de quién sobre quién.

d) En el contexto de las reglas de la numeración, los decimales se construyen a partir de la prolongación del sistema “posicional” en el sentido opuesto al de los números naturales, guardando la precaución al extender las reglas de indicar el punto que marca el cambio de sentido; lo que en notación científica significa que los decimales son las potencias negativas de la base de numeración decimal.

0´03 es $3x10^{-2}$

de la misma manera que

300 es $3x10^{2}$.

En la práctica esta idea se ve reforzada por el uso de las calculadoras, cuyo uso temprano y excesivamente mecánico podría explicar las reticencias de los estudiantes a abreviar el resultado que da la calculadora de acuerdo con las reglas posicionales, así escriben $0'4 \times 10^{-2}$ en vez de 4×10^{-3}, o $0{,}3\underline{3}$ en vez de $0{,}\underline{3}$.

f) En el contexto de la ampliación de los campos numéricos, al pasar de los racionales a los reales, se construyen nuevos decimales para expresar, por ejemplo, el valor numérico de los radicales como √3. Estas expresiones decimales infinitas y no periódicas, que no proceden de fracciones, cualquier estudiante las consideraría como un número determinado, aunque, naturalmente, no racional, sin pararse a pensar que sólo se trata de aproximaciones mediante fracciones decimales. Con todo esto, los decimales en sus distintas variedades alcanzan el estatus de concepto intuitivo del número real.

INCONSISTENCIAS

Se dice que las ideas son consistentes cuando están bien trabadas o ligadas y que no es posible deducir de ellas elementos contradictorios. En algunos trabajos se ha evidenciado que los estudiantes incorporan ideas inconsistentes en la construcción de los conceptos matemáticos. Un ejemplo bien conocido de inconsistencia es el que se produce con los decimales cuando los estudiantes consideran que «Al dividir siempre obtenemos un resultado más pequeño», ya que esta idea es mutuamente excluyente con el resultado de la división por un decimal, «4:0,5=8».

En algunos casos los estudiantes identifican los elementos conflictivos en una situación como inconsistentes y, por lo tanto, problemáticos, entonces no estarán satisfechos con sus propios concepciones e intentarán resolver la inconsistencia. Terminarán necesariamente en un estado de desequilibrio, es decir, en un conflicto cognitivo.

Este es el caso de un estudiante de último curso de matemáticas, que se vio impelido a enfrentar en clase su idea de lo que significa la densidad de los racionales y el hecho de que éstos dejen puntos por cubrir, o huecos, en la recta real. Con la inestimable ayuda de sus propias explicaciones se puede ver como llega al conflicto cognitivo y como lo le da respuesta.

El estudiante tenía que desarrollar en clase de Didáctica de la Matemática el tema denominado *Introducción al número real*, para 4 º de ESO, plantea el siguiente acercamiento:

1 – Partimos de una familia de números.

2 – Mostramos mediante ejemplos la necesidad de ampliar esta familia.

3 – Definimos una nueva familia y observamos como quedan integradas la anterior y la nueva.

De manera sucesiva iremos recordando y creando los enteros (Z), los racionales (Q) y los irracionales (I) antes de definir los reales (R).

A continuación centra su atención en la identificación entre los decimales, en sus formas finita y periódica, con los racionales. Literalmente como se recoge en el texto siguiente:

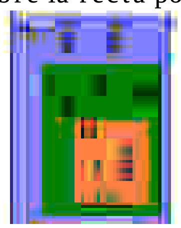
- Una fracción la podemos expresar como un número decimal, dividiendo el numerador entre el denominador, como por ejemplo = 0´5. En este caso, al dividir, hemos obtenido un número decimal exacto, ya que el resto es cero. Pero esto no siempre ocurre así. Si realizamos = 0´3333333... = 0'3, tenemos un decimal periódico. Si calculamos la expresión decimal de   = 4´83333... = 4´83, tenemos un decimal periódico mixto. Resumiendo, si calculamos la forma decimal de una fracción, tendremos un número decimal con un numero finito de dígitos decimales, o bien, un número infinito de dígitos decimales que se van repitiendo de forma periódica.

- Además, sabemos obtener la forma fraccionaria de un número decimal de estas características.
- Al conjunto de todos los números enteros y fraccionarios lo llamaremos conjunto de los números RACIONALES (Q).

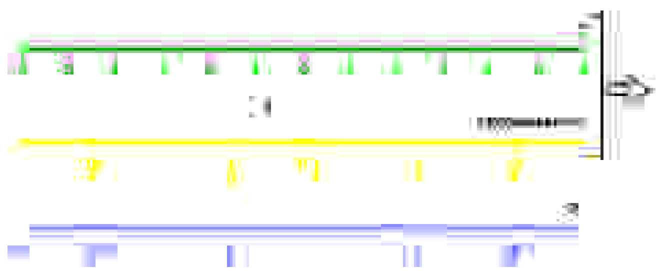
Para ilustrar estos números elige la representación mediante un diagrama de conjuntos inclusivos y la representación con puntos sobre la recta por cubrimiento progresivo .

Éstos números se representan con conjuntos de modo inclusivo y se representan con puntos sobre la recta por cubrimiento progresivo

Si lo representamos en forma de conjuntos ®



Si construimos la recta Racional a partir de la recta entera:



Finalmente establece la densidad de Q en los siguientes términos:

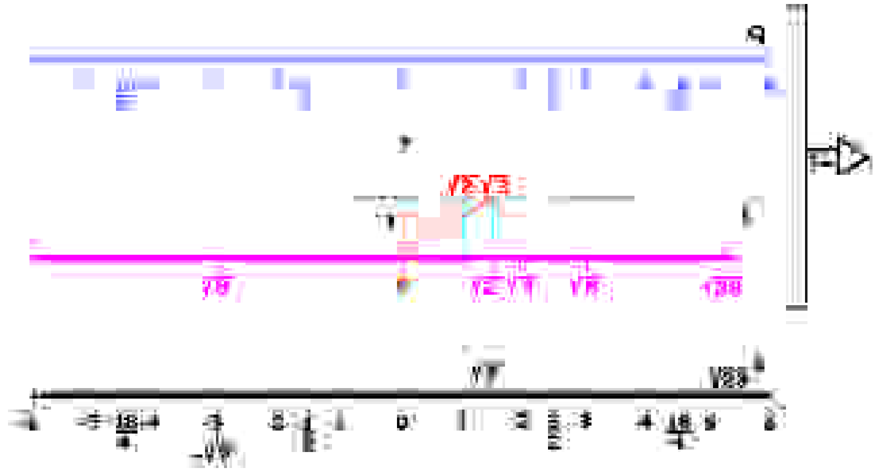
- La densidad de Q quiere decir que entre dos números racionales podemos encontrar infinitos números racionales.

Llegado a este punto, se enfrenta con los irracionales; los introduce a partir del cálculo de radicales y son los que tienen una forma decimal que es infinita pero no es periódica. Dice:

Cuando calculamos   , nos da un número decimal de infinitas cifras no periódico (las cifras decimales no se repiten de forma periódica). Este es un tipo de número que no teníamos y que además es imposible de poner en forma fraccionaria. Al conjunto de este tipo de números lo llamaremos conjunto de los números IRRACIONALES (**I**).

Por último muestra como se pueden ubicar los números reales en sus diversas formas en la recta.

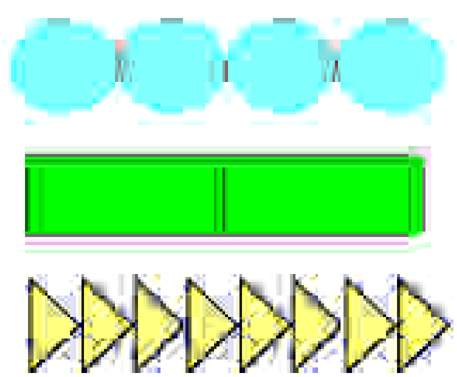
Con la recta de los racionales y con la de los irracionales construimos la recta real.



Y aquí identifica los elementos conflicitivos. Se pregunta:

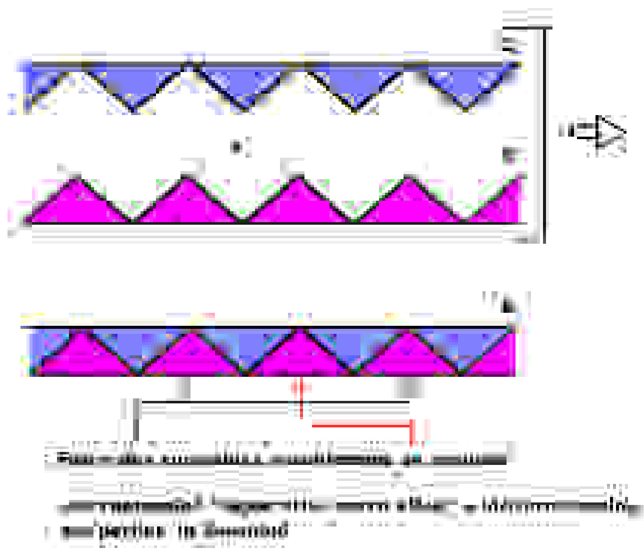
Pero esta recta real , ¿esta bien? ,Si **Q** es denso, toda la recta esta llena de racionales, no hay huecos, entonces, ¿dónde ponemos los irracionales ?. Una idea aproximada puede ser la siguiente:

Si aumentamos el tamaño de las rectas hasta poder apreciar lo puntos, podemos encontrarnos con:



Y responde

Nosotros elegimos las siguientes representaciones:



Al buscar una explicación de la inconsistencia que le produce su interpretación de la densidad de Q, en el sentido de que no deja huecos en la recta real, junto con la aceptación de que los irracionales han de tener ubicación en la recta y por tanto deben de cubrir un punto, se ve abocado a pensar que los puntos no son redondos sino que tienen forma de medio rombo. Esto le permite encajarlos pero, olvida que:

- Los puntos racionales de la recta están dibujados uno al lado del otro, tocándose, lo que contradice la idea de que los números racionales no tienen “siguiente”.
- Los racionales y los irracionales guardan biyección en el dibujo, lo que tampoco es cierto.

Referencias

Artigue, M (1984). *Contribution a l’étude de la reproductibilité des situations didactiques. divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thése de Doctorat d’Etat. université Paris VII.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques.* 4. 2. 164-198.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

Gómez, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Mathema. Granada: Comares.

Tirosh, D. y Graeber, A. O. (1990). Inconsistencies in preservice elementary teacher’s beliefs about multiplication. *Focus on the learning problems in mathematic*, 12, 3, 4, 65-74

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: their causes and function in learning mathematics. *Focus on the learning problems in mathematic*. 12, 3, 4, 85-98