APORTACIONES DEL ÁREA A LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS MATEMÁTICOS : LA VISIÓN DE UN PROFESOR DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

RESUMEN

En esta ponencia se aborda el tema desde dos puntos de vista:

— Desde el de un miembro de la comunidad de profesionales de la Didáctica de las Matemáticas[1].

— Desde el de un profesor de la asignatura Didáctica de las Matemáticas integrada en el Plan de estudios de una Licenciatura de Matemáticas.

Desde el primer punto de vista se señala que la aportación del área tiene dos vertientes: una que es la formación inicial del profesorado y otra que es la difusión y mantenimiento social de la disciplina.

Desde el segundo punto de vista se describe como se ha articulado la Didáctica de las Matemáticas en el plan de estudios de Matemáticas de la Universitat de Valéncia, se comentan las dificultades que hay que vencer para abordar el trabajo en clase y se señalan los objetivos que dan forma concreta al quehacer con los estudiantes de matemáticas en la asignatura Didáctica de las Matemáticas.

LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EL SISTEMA UNIVERSITARIO

Es obvio decir que la calidad de un sistema educativo es esencial para el progreso de un país y que, por tanto, potenciar esta calidad debe ser un objetivo central de toda política educativa. Para este objetivo la política educativa utiliza varios referentes, uno de ellos es la formación del profesorado.

En la actualidad la formación inicial del profesorado esta integrada plenamente en el sistema universitario en una de sus partes, la que corresponde al nivel de primaria mediante los títulos de maestro; la otra parte, la que corresponde al nivel de secundaria está contemplada sólo parcialmente mediante los cursos de especialización en el denominado C.C.P[2] .

Antecedentes

El C.C.P. es tributario del anterior modelo de formación inicial del Profesorado de la ley Villar Palasí de 1970 que se realizaba después de la titulación científica respectiva mediante cursos intensivos a cargo de los Institutos de Ciencias de la Educación de las Universidades (art. 102). Este curso se calificaba como apto y no apto.

Como ha señalado Puig (2001), el C.C.P. es deudor de dos ideologías: una que se centra en la disciplina especifica y otra que se centra en la enseñanza[3].

La primera ideología entronca con una visión restrictiva de la formación en matemáticas que reniega del conocimiento didáctico bajo la máxima de que para enseñar es suficiente con un dominio de la disciplina[4].

La segunda entronca con una corriente que, en palabras de Bishop (1999, p. 219), se podría conceptualizar de una manera relativamente simplista, como una instrucción. Esto es, una corriente que orienta la formación de profesores a la resolución de los problemas que tienen que ver con la selección, temporalización, secuenciación y metodología pedagógica de los contenidos curriculares, aderezados con una pizca de motivación de los alumnos y control de una clase con eficacia, etc.

No es extraño que, para la puesta en práctica de este enfoque, se considere que sólo se necesiten educadores profesionales experimentados, miembros de las mismas instituciones que finalmente van a recibir a los estudiantes, esto es, profesores de Secundaria, que como miembros de más edad serán los encargados de desempeñar tan importante papel; es decir, que serán los responsables como colectivo ante la sociedad del éxito o fracaso de los profesores noveles.

Innovación

Bajo esta perspectiva irrumpe el C.C.P., en trámite final de aprobación en el momento de escribir estas líneas tras haber visto retrasada su puesta en marcha durante 12 años[5], y se postula como la respuesta oficial, como el intento de solución, a los retos que plantea el nuevo modelo educativo propugnado por LOGSE, en lo que es achacable a los aspectos relacionados con la formación como Profesores de Secundaria.

El CCP es innovador con relación al C.A.P. al menos en dos hechos que merecen ser destacados: uno es que brinda la oportunidad de integrar en los planes de estudio de las licenciaturas de Matemáticas asignaturas de Didáctica de las Matemáticas, implicando así a nuestra comunidad profesional de una manera directa en los estudios universitarios de segundo ciclo[6]; el otro es que asume que los retos señalados antes, en aquellos aspectos que son específicos de las matemáticas, son objeto de estudio de lo que llamamos la Didáctica de la matemática.

Esta asunción no hubiera sido posible si en los últimos años no se hubiera producido el tremendo crecimiento en investigación y desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un enorme trabajo que se ha materializado en el creciente reconocimiento de la importancia de esta área de conocimiento, en el mayor convencimiento de que la complejidad de la Educación Matemática va más allá del modelo simplista de instrucción señalado antes, en el deseo de buscar mejores maneras de educar a nuestros hijos y, como no, en la existencia de una importante comunidad profesional de didáctas de la matemática[7].

En este sentido, el reciente pronunciamiento de la Real Sociedad Matemática Española (2001) es bienvenido: "No es menos importante recomendar la inclusión, seria y rigurosa de contenidos de carácter didáctico en las materias de las Licenciaturas de Matemáticas para aquellos alumnos que deseen formarse como futuros profesores. Si no atendemos adecuadamente esta sentida necesidad, otras entidades liderarán un proceso de mayor atención en la Licenciaturas a la componente profesional del futuro profesor de Secundaria, que podría poner en peligro, de acuerdo con algunas propuestas recientes, el que las Licenciaturas de Matemáticas, como hoy las concebimos, continúen facultando, a medio plazo, para el ejercicio de la profesión de profesor de Secundaria".

Necesidad

El marco legal actual de la LOGSE ha introducido cambios en nuestro sistema de enseñanza que no sólo afectan a los contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación[8].

Estos cambios implican una modificación profunda en el papel del profesor. Al profesor, antiguamente considerado como técnico-especialista, encargado de transmitir los conocimientos en el proceso de enseñanza, se le exige que actúe como trabajador autónomo, con capacidad para tomar decisiones sobre la planificación, desarrollo y evaluación de su práctica educativa, que más que una situación técnica es una situación problemática, incierta, compleja y singular[9].

A los estudiantes de matemáticas, como futuros profesores, se les va a exigir conocer las matemáticas de una manera diferente a los otros matemáticos, no como un producto acabado sino como un producto en elaboración que se plantea desde una perspectiva o foco de atención que está caracterizada por el protagonismo de la edad de los estudiantes, comprometida con su proceso de aprendizaje, con su comportamiento y sus sentimientos, que son los que se deben conformar. Y se les va a exigir también una metodología diferente a la que están viviendo en las Facultades de Matemáticas, para lo que no reciben una formación específica, y no la reproducción de un modelo que les resultará cómodo por que es aquél con el que ellos se sentirán familiarizados[10].

En otras palabras, lo que se espera de la preparación específica ideal para el futuro profesor de matemáticas es que tenga una componente diferente de la de las otras personas implicadas exclusivamente en la cultura matemática formal, por lo tanto, es necesario producir cambios en la forma en que están viviendo su formación los estudiantes de matemáticas futuros profesores, y para esto es necesario el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas.

¿QUÉ PUEDE APORTAR LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS A LA LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS?

Lo anterior delimita lo que la Didáctica de las Matemáticas puede aportar a la Licenciatura de Matemáticas en el terreno de la formación de profesores. A falta de otro marco institucional autónomo que posibilite esta formación, lo que se aporta desde la didáctica de las Matemáticas es un dominio de conocimientos para llevar a cabo una formación inicial del profesorado que, como han señalado Rico, Sierra y Castro (2000, p. 389), "es uno de los ámbitos de actuación de nuestra disciplina con mayor riqueza y variedad de problemas y, por tanto, con mayor potencialidad para el desarrollo y la consolidación de la disciplina Didáctica de la Matemática".

Pero, no se debería identificar la presencia de la Didáctica de la Matemática en la Licenciatura de Matemáticas con la formación de profesores de matemáticas, también se debe pensar en la formación en Didáctica de las Matemáticas como disciplina, cuyo objetivo en la Licenciatura es ampliar el rango de formación de los estudiantes de matemáticas (Llinares, et. al. 2001). En este sentido, lo que aportan las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas a la Licenciatura es un dominio privilegiado para hacer que la Educación matemática sea materia de reflexión y estudio para los estudiantes de matemáticas[11] .

Sin embargo, no se puede ignorar que las asignaturas de Didáctica de las matemáticas han sido acogidas con reticencias por una parte del colectivo de matemáticos, profesores universitarios, que siguen sin aceptar que en la Licenciatura de Matemáticas se inmiscuya la Didáctica de las matemáticas. Estos profesores argumentan que van contra el perfil de la carrera y, mientras asisten con perplejidad, no sin preocupación, a la crisis de identidad de su trabajo docente y a la pérdida de estudiantes año tras año, ignoran que la Didáctica de la matemática tiene un ámbito de actuación que va más allá de la formación de profesores.

Este ámbito de actuación se ocupa de la difusión y mantenimiento social de la disciplina, se trata pues de una función social que asigna responsabilidades que a los matemáticos les interesa asumir y que no pueden asumir seriamente mas que desarrollando la Didáctica (Brousseau, 1991,p. 18).

Como bien han dicho Rico, Sierra y Castro (2000, p. 26). “ninguna disciplina puede mantenerse como planta de invernadero, aislada del medio social en el cual se incardina. Cuando esto ocurre es muy fácil que su desarrollo dependa de coyunturas circunstanciales, del favor y de la arbitrariedad de los políticos y administrativos de turno, y termine por agostarse. Por ello la difusión de la cultura matemática en todos los niveles y estamentos sociales, para ciudadanos de todas las edades y condiciones, es requisito irrenunciable de su progreso y desarrollo. No es posible imaginar (salvo contadísimas excepciones) un premio Nobel en un pueblo analfabeto, no se ha dado un genio de la música en pueblos sin cultura y tradición musical. Igualmente, no es posible mantener una alta producción investigadora en matemáticas sin una sociedad que valore estos conocimientos y los ponga en práctica en todos los ámbitos de la vida cotidiana”.

En palabras de la Real Sociedad Matemática Española (2001): “sin jóvenes de talento realizando sus estudios en la Universidad, no habrá profesores ni investigadores en el futuro en unos departamento universitarios que hoy están formados por personas con una edad media relativamente alta y concentrada en torno a esa media, lo que los hace más vulnerable ante el inevitable recambio generacional que, de modo masivo, tendrá lugar dentro de no muchos años. Lo mismo ocurrirá en el seno de los centros de enseñanza secundaria o primaria, de continuar el escaso atractivo social de la profesión de maestro o profesor de secundaria y la escasísima o nula renovación de plantilla. Una ojeada a lo ocurrido en muchos países de nuestro entorno, hace algunos años, muestra que esta premonición no es una simple conjetura”.

Otro argumento, que no por evidente, debe dejar de mencionarse, es que la Didáctica de las Matemáticas debe ser objeto de estudio por parte de los matemáticos, porque para hacer didáctica de las matemáticas hace falta conocer las matemáticas que se quieren enseñar, porque son los matemáticos quienes han de responsabilizarse de lo que se hace en su nombre, y porque son a quien se invita, más pronto o más tarde, en última instancia a zanjar los significados y la validez de lo que se hace en su nombre (Brousseau, 1991, p. 19).

Para finalizar este apartado, es preciso señalar que, ahora y aquí, no es cuestión de iniciar un debate entre dos posiciones polarizadas sino de aunar los esfuerzos de los diversos colectivos (Departamentos de Matemáticas, Departamentos de Didáctica de las Matemáticas y profesores matemáticas en los niveles no universitarios), para hacer frente a la necesidad fundamental de que la Sociedad española atienda adecuadamente a la difusión, enseñanza y al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

¿CÓMO SE HAN ARTICULADO ESTOS DOMINIOS EN LA LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS?

Acogiéndose al Decreto 1692/1996 que regula el C.C.P., los dominios de trabajo de la Didáctica de las matemáticas señalados antes se incorporaron al plan de estudios del 90 de la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València, con el propósito de atender a un triple objetivo:

— Comenzar la preparación para profesor de secundaria ya durante la licenciatura de Matemáticas.
— Hacer posible que esa formación fuera convalidable con el CCP, una vez se implantara.
— Integrar la Didáctica de las Matemáticas como área de conocimiento en la Facultad de Matemáticas, con el consiguiente reconocimiento académico y científico.

Por tanto, la introducción de las asignaturas de didáctica de las matemáticas había de tener en cuenta tres currículos:

— el de la licenciatura de la que va a formar parte,

— el de la parte del sistema educativo en que los alumnos que se pretende formar tendrán que ejercer su profesión de profesores y

— el del curso que la LOGSE prevé para su formación.

Es decir, …

— El plan de estudios de la licenciatura de Matemáticas de la Universitat de València.

— Los currículos de Matemáticas de la Educación Secundaria de la Comunitat Valenciana.

— El Curso de Cualificación Pedagógica (CCP).

Contenidos

Se partió de la idea básica de que como cualquier curso de formación inicial de profesores, deberían estar presentes dos tipos de contenidos:

— uno, los contenidos de la materia que los alumnos cuando sean profesores tendrán que enseñar a sus alumnos;

— el conjunto de conocimientos que proporciona la didáctica.

En relación con los primeros, es claro que esos contenidos no iban a ser enseñados a nuestros alumnos porque se les supone su conocimiento disciplinar, pero no dejan de ser contenidos a considerar en nuestro plan por varios motivos. Obviamente, es preciso saber en primer lugar cuáles son, pero, sobre todo, ha de saberse en qué sentido están concebidos (Puig, (2001).

Organización docente

Las asignaturas de Didáctica de la Matemática” se situaron en el segundo ciclo de la titulación, formando parte de los créditos optativos, con los títulos y créditos siguientes:

—Didáctica de las matemáticas de la educación secundaria I (7’5 créditos)

—Didáctica de las matemáticas de la educación secundaria II (7’5 créditos)

El plan de matemáticas del 2000

El plan 2000 que substituye al del 93 tiene un carácter menos abierto, con cursos en vez de ciclos y menos optativas. Las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas estuvieron, como todas las optativas, en el ojo del huracán, en las discusiones que condujeron a la elaboración final de este plan 2000. Finalmente se han articulado en el plan mediante una reserva de optativas de 18 créditos. La articulación y desarrollo de esta reserva esta pendiente de la publicación definitiva del decreto del CCP.

Hasta aquí se resume la intención que anima, que hace necesario nuestro trabajo en la titulación de matemáticas. Un trabajo que no es fácil, que tiene reticencias, obstáculos y dificultades.

DIFICULTADES

Para abordar el trabajo en clase de las asignaturas de didáctica de las matemáticas hay al menos dos dificultades principales que vencer: Una tiene que ver con los creencias, actitudes y conductas de los estudiantes, la otra tiene que ver con las expectativas que despierta la palabra didáctica.

1.En el sistema de enseñanza los estudiantes futuros profesores no sólo adquieren conocimientos, sino también hábitos, creencias y actitudes sobre la matemática y su enseñanza.

1.1 Estudios realizado sobre con estudiantes inscritos en matemáticas de programas de trayectoria académica para futuros universitarios evidencian, en relación con las creencias, que: "los estudiantes creen que la materia puede ser dominada si trabajan en ella, y cuando salen bien creen que han tenido éxito porque han trabajado duro" (Schoenfeld, 1989 p. 66), y a la inversa.

1.2 En relación con las actitudes, interesa señalar de acuerdo con Bishop (1991, p. 18) que "la mayoría de los (estudiantes) que tienen éxito nunca ponen en duda su conocimiento matemático o las matemáticas que han aprendido: después de todo, no hace ninguna falta si tienen éxito" , bien entendido que esto no quiere decir que estén satisfechos con la cantidad y suficiencia de las matemáticas que han aprendido.

Sin embargo, añade Bishop, "la situación es bastante diferente para la mayoría de los jóvenes que no tienen éxito. Siguen creyendo que las matemáticas son importantes, pero también que son difíciles –imposibles para muchos - , misteriosas, sin sentido y aburridas. No tratan de nada y provocan sentimientos de opresión y de estar bajo el dominio de alguien, no se sabe quién. No es probable que estas personas pongan en duda las matemáticas mismas, pero seguramente pondrán en duda, criticarán y vilipendiarán la llamada educación matemática que han recibido. Culpan a los enseñantes de no haberlos comprendido nunca, culpan al currículo de matemáticas por todos sus ejercicios irrelevantes y soporíferos y, naturalmente, culpan al sistema educativo por haberlos engañado. El sistema les hizo creer que el estudio de las matemáticas era, y es, importante, y el sistema les ha fallado. El sistema creó la necesidad pero ha sido incapaz de satisfacerla" (p. 18)[12]

1.3 En relación con los hábitos, la evidencia empírica pone de manifiesto que los aspirantes a profesores tienden a repetir los procedimientos de sus antiguos profesores sin tener claro la idoneidad de dichos procedimientos y de su significado (Blanco, y otros, 2001)[13]. Estos aspirantes, emplazados a preparar por primera vez un trabajo escolar, y al no tener otra experiencia, tienden a organizarse de acuerdo con sus últimas vivencias, y preferentemente tenderán a presentar las matemáticas separadas en dos partes: la teórica y la práctica. La primera es la de las definiciones, teoremas y demostraciones, la segunda es la de los problemas, algoritmos y reglas. Esta dualidad, explica las actitudes, tanto de los estudiantes como de los profesores, la teórica es la matemática del profesor, que los alumnos han de escuchar sin intervenir; la práctica es la del alumno, que es en la que ellos han de participar. Por tanto, la prioridad de los profesores será el discurso lo conceptual, mientras que la de los alumnos será la ejercitación en lo procedimental.

2. Para los estudiantes de matemáticas, las expectativas que despierta la palabra didáctica son frustrantes, existen varias razones para ello.

2.1 Una de ellas es que las nociones didácticas son complejas, de comprensión lenta y vinculadas estrechamente a la experiencia de su puesta en práctica[14]., motivo por el cual terminan por despertar poco interés.

Para los estudiantes de matemáticas, futuros profesores, las cuestiones y problemas didácticos no son tales cuestiones y problemas para ellos, sino hipotéticos problemas "de los demás", porque su interés todavía está centrado en el dominio de los contenidos. Difícilmente un problema educativo es un problema para el que no tiene la necesidad de tener que enfrentarse irremediablemente con él.

2.2 Otra razón, es que el estudiante, adscrito a la ideología dominante que, de acuerdo con Laborde (1992, p. 167), presupone la existencia de una relación de transferencia simple de la enseñanza al aprendizaje, espera encontrar la solución a problemas que ha percibido en su experiencia personal como sujeto de la docencia. Por eso, cuando entra cuando comienza a conocer el trabajo en educación matemática, cuando se le anima a consultar algún documento recomendado para un determinado tema, es muy probable que lo encuentre decepcionante, porque no le diga nada o porque no le da respuesta a su problema o porque la respuesta le parezca trivial.

El problema es que este es un punto de vista erróneo debido a la complejidad de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje. Esta complejidad se manifiesta, como ha evidenciado la investigación en didáctica de las matemáticas, por "las características de los conocimientos construidos por los alumnos, concernientes a nociones aritméticas, algebraicas o geométricas que no están contenidas en el discurso de la enseñanza: estos conocimientos son locales, parciales e incluso erróneos". (Laborde, 1992, p. 167), y también por la dificultad del estudio de los problemas educativos en general, y los de la enseñanza de las matemáticas en particular, "de ahí que la preocupación de buena parte de los investigadores esté enfocada aún en entender y plantear los problemas, en desarrollar criterios confiables para evaluar sus eventuales avances y su pertinencia, etc. , resultando difícil que abunden los resultados directamente aplicables al aula. (Cambray, Sánchez y Zubieta, 1992).

EL TRABAJO EN CLASE

Para llevar adelante la tarea propuesta son muchos los aspectos que se pueden abordar y que en forma de objetivos dan forma concreta al trabajo de clase. A título de ejemplo señalaré algunos de ellos que son especialmente interesantes, a saber:

Mostrar la subjetividad de la práctica en la enseñanza de las matemáticas, a través de la reflexión y la crítica de los procesos de toma de decisión.

El futuro profesor, que toma decisiones y reflexiona sobre su práctica, se ve influido por múltiples factores. Además del poderoso impacto de sus creencias, su pensamiento, su conocimiento y sus experiencias previas mientras aprendió matemáticas, es determinante el mayor o menor conocimiento acerca de como piensan y resuelven las tareas los aprendices.

La investigación reciente ha mostrado que cuando los profesores poseen un conocimiento detallado acerca de cómo piensan y resuelven problemas los estudiantes, su conocimiento del proceso de pensamiento y su planeamiento de la instrucción se ve profundamente afectado (Sowder, 1993, p. 241).

Una manera por lo cual los futuros profesores pueden adquirir este conocimiento es la reflexión sobre su propio pensamiento, procesos de resolución de problemas y estrategias de aprendizaje. Su comprensión de cómo ellos mismos aprendieron les sirve de ayuda para comprender como aprenderán sus alumnos y guiarán sus decisiones acerca de la enseñanza de las matemáticas en el aula.

Descubrir la insuficiencia de la enseñanza

En la medida en que el aprendiz es un constructor activo de su propio conocimiento, las presentaciones claras no son suficientes y adecuadas, por lo que éste con ideas correctas adquirirá conocimientos locales, parciales, vagos e incluso incoherentes o erróneos. Se sabe que también los profesores mismos construyen este tipo de malentendidos que son resistentes y difíciles de erradicar. Estos profesores continuarán llevando sus malentendidos a sus clases. Los profesores no pueden saber que los poseen, ellos creen que dominan el tema, quizá porque son algorítmicamente competentes, y no se cuestionan acerca de lo que saben.

Los aportes de la Didáctica de la Matemática permiten anticipar muchos de los malentendidos típicos de los estudiantes de matemáticas. Por ejemplo, los que tiene que ver con las concepciones previas que parecen persistir y pueden interferir en las situaciones posteriores de aprendizaje. Las que se derivan de la confluencia de los sistemas de representación que están involucrados en los procesos de simbolización (dibujos, diagramas, símbolos escritos, etc.) y de la complejidad de sus procesos de "traducción"; o, de la separación entre el conocimiento conceptual y el conocimiento de las rutinas algorítmicas o reglas sintácticas que prescriben como manipular símbolos en formas particulares de problemas.

Desenmascarar la relatividad del currículum que se enseña en la escuela. Haciendo ver que es una obra inacabada, resultado de decisiones humanas, que evoluciona y obedece a las leyes que rigen su desarrollo interno, que funciona como un sistema dependiente de selecciones y sujeto a restricciones (Laborde, 1992, p. 167) y que, por lo tanto, está conformado con elementos que no son incuestionables[15].

Y poniendo de relieve las características principales que deben poseer los objetos de estudio de una disciplina para formar parte del currículum obligatorio, a saber: que la sociedad considere su estudio interesante por sí mismo y que ayuden a acceder a otras disciplinas. En el caso que nos ocupa hay que ser especialmente cuidadosos para evitar:

— que las matemáticas enseñadas, en tanto que presuntas vías de acceso a otras obras sean en sí mismas inaccesibles para muchos jóvenes;

— que las matemáticas enseñadas no conduzcan a ninguna parte, es decir, que se pierdan las cuestiones a las que dichas matemáticas responden y que, por tanto, aparezcan como una obra cerrada, muerta (Chevalard, Bosch y Gascón, 1997. p. 117 y 118).

Romper con el modelo simplista que tiende a enfocar el trabajo del profesor casi exclusivamente desde el punto de vista de la instrucción[16].

Este modelo parte del supuesto de que el profesor ya sabe los contenidos matemáticos seleccionados en el currículum, con lo cual la única cuestión problemática son las variables asociadas al acto de enseñar: secuenciación de contenidos, temporalización, metodología pedagógica y evaluación. Como se ha señalado antes (p.3), desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas esta formulación del problema está cuestionada en la medida en que resulta insuficiente[17].

Introducir el uso de la historia de las ideas matemáticas para el análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje en su enseñanza.

Este acercamiento esta lejos del uso de la historia como un pasatiempo, en el que se presentan anécdotas del pasado, biografías o descripciones de hechos ordenados cronológicamente, sino más bien de lo que se trata es de utilizarla de otras maneras (ver Sierra, 1999). En particular, mostrando el proceso constructivo del conocimiento matemático en su progreso evolutivo a través de:

—la presentación de desarrollos históricos de los objetos de estudio, como por ejemplo, el desarrollo histórico de los algoritmos, de las formas de la numeración, de las primeras nociones algebraicas o de las nociones del análisis elemental;

—la explicación de los cambios en las concepciones epistemológicas hasta llegar al concepto en su formulación actual, como ocurre, por ejemplo, en las nociones de función, límite o de número, unidad, cantidad y magnitud;

—la discusión de los avances, retrocesos y controversias en la aceptación de las objetos en uso, como, por ejemplo, ocurre con los negativos y su aceptación o no como cantidades con entidad propia, más allá de las restas indicadas donde el substraendo era menor que el minuendo; o las discusiones que provocó la extensión del orden de los naturales al llevar a establecer que los negativos eran menores que "nada"[18];

—la exploración de errores del pasado, incluso los errores cometidos por importantes matemáticos como, por ejemplo, ocurrió en el caso de la sucesión 1, - 1, 1, -1, ... $(-1)^{n-1}$,

..., donde autores del siglo XVII y XVIII como Bernouilli, Leibnitz o Euler, sostenían que la suma debería ser 1/2[19] .

En suma se trata, pues, de mostrar un terreno privilegiado que ayuda a poner de manifiesto, a comprender y a resolver dificultades en el aprendizaje de las matemáticas; un terreno en el que podemos observar y describir un paralelismo con las tendencias cognitivas de los niños de hoy en día cuando están tratando de ser competentes en las matemáticas que se les enseña en la Secundaria.

“Esto permite trazar hipótesis plausibles para poder ir a observarlas en los comportamientos de los sujetos actuales cuando se está tratando de que hagan un uso competente de los sistemas de signos actuales en los que se articulan los mensajes con los que se comunica la matemática educativa en nuestros tiempos” (Filloy, 1999,p. 54).

Finalmente, solo resta por decir que, aunque son muchos otros los aspectos que se podrían haber abordar, los anteriores son los que resumen nuestro trabajo en la titulación de matemáticas. Un trabajo que e responsabilidad de la comunidad de matemáticos, entendida ésta en el sentido amplio que incluye a los profesionales de la Didáctica de la Matemática. Gracias por su atención.

REFERENCIAS

Blanco, J. ; Azcárate, C. ; Ortega, T. (2001). Posición del área de conocimiento Didáctica de la matemática ante la Formación del Profesorado de Matemáticas en Educación Secundaria. En F. Moreno, F. Gil, M. Socas y D. Godino (Eds.). *Documentos de trabajo del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). Almería.

Bishop. A. J. (1999*). Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural. Temas de educación*. Barcelona: Paidós. 1991

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las ciencias*. 8 (3), 259-267.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las ciencias*. 9 (1), 10-21.

Cambray, R.; Sánchez, E. Y Zubieta, G. (1992). *Antología en Educación matemática*. Educación matemática 1. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de matemática educativa. CINVESTAV. México, D. F.

Chevalard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori/ICE Universitat de Barcelona. (Hay una edición de 1998 del SEP- Cooperación Española. Fondo Mixto de Cooperación Técnica y Científica México – España).

Goffre, F. (2001). Trabajando en la educación en matemáticas. En Ernesto Sánchez (Ed.). *Hans Freudenthal. Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* Departamento de matemática Educativa. CINVESTAV. México D. F.

Gómez, P. (2001). Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas: El caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación. En F. Moreno, F. Gil, M. Socas y D. Godino (Eds.): *Documentos de trabajo del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). Almería.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. I y II. Madrid: Alianza. 1972.

Laborde, C. (1992). *Audacia y razón de las investigaciones francesas en didáctica de las matemáticas*. (Hardiesse et Raison des Recherches en Didactique des Mathematiques. Proceedings (1989). PME 13. 46 – 61. Versión en inglés: "Audacity and Reason: French Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* 9(1989) 31-36. Versión en español de Rodrigo Cambray Núñez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.): *Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de matemática educativa. CINVESTAV. México, D. F.

Llinares, S.; Sánchez, V.; García, M y Escudero, I. (2001). Didáctica de la matemática y la formación de profesores de matemáticas de secundaria. En Antonio Martinón (Ed): *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*. Madrid: Nivola. 211-214.

Puig, L. (2001). Observaciones sobre la formación inicial de los profesores de secundaria en didáctica de las matemáticas. En F.J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, l. Rico, y J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* Granada: Grupo Editorial Universitario. 221-243.

Rico, L.; Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En Luis Rico Romero y Daniel Madrid Fernández (Eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculare*s. Madrid: Síntesis. 351-410**.**

Real Sociedad Matemática Española (RSME) (2001). Sobre la situación de la enseñanza de las matemáticas. En R. Crespo, S. Guerrero, M. León, T. Recio, M. Socas, E. Zuazua. *Comisión de Enseñanza de la Real Sociedad Matemática Española*. Borrador.

Rico, L. sierra, M. y Castro. E. (2000). *Didáctica de la Matemática*. Borrador. Granada. Universidad.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 338-355. Versión en español de A. Sánchez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.)*Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de matemática educativa. CINVESTAV. México, D. F.

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (1999). Exposición de motivos de la proposición sobre el año mundial de las matemáticas 2000. En Luis Rico, José R. Pascual y P. Martín Socas (Eds.). *Boletín informativo nº 5*. Anexo, Marzo.Granada: SEIEM.

Sierra, M. (1999). Uso de la historia de las matemáticas en el aula. Tomás Ortega (Ed.). *Temas controvertidos en educación matemática E.S.O. y Bachilerato*.Universidad de Valladolid.

Sowder, J. (1993). Using priciples from cognitive psychology to guide rational number instructional prospective teachers. En T. P. Carpenter, et al. (eds.), *Rational numbers. An integration of research.* Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates.

---

[1] se usa aquí en uno de los sentidos señalados por Brousseau (1990, p. 260): “es un investigador, que se distingue en su disciplina porque su objetivo de estudio tiene que ver con la enseñanza de las matemáticas.

[2] Siglas del Curso de Cualificación Pedagógica, cuya realización permite obtener el Título profesional de especialización didáctica, necesario para impartir enseñanzas en Educación Secundaria

[3] Aquélla según la cual un sólido conocimiento de los contenidos matemáticos es suficiente para garantizar su buena enseñanza (presente, en general, entre los matemáticos), y aquélla que la veía como una combinación de didáctica general más eso que desde la general se llamaba didáctica “específica” y que venía a estar compuesta por metodología más práctica guiada por los prácticos.

La primera de ellas sustentaba la inexistencia en las Facultades de Matemáticas —salvo excepciones singulares— de asignaturas de didáctica de las matemáticas. La segunda, sustentaba la organización del Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP) (Puig, 2000).

[4] Dos ideas , que han subsistido a lo largo del tiempo, siguen condicionando a situación actual . Así, en la formación del profesorado de Educación Secundaria se ha mantenido la máxima de que para enseñar es suficiente con el dominio de la disciplina, lo que ha dado lugar a que el profesor de ESO y Bachillerato tenga una fuerte formación científica y una casi nula formación sobre otros elementos profesionales necesarios para ejercer la profesión de profesor (Blanco y otros, 2001).

---

[5] Ley orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (BOE 238/90 de 4 de octubre de 1990), artículo 2. Real Decreto 1692/1995, de 20 Octubre.

[6] Sin lugar a dudas, la institucionalización de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento en la Universidad es un dato clave para entender su consolidación como disciplina científica y académica a partir de 1984 (Rico, et al. 2000, p. 366).

[7] A medida que esta comunidad (ahora) internacional se ha ido desarrollando, ha empezado a ejercer su influencia de maneras que van más allá de lo que cabría esperar de una formación de enseñantes inicial y permanente . Quizá lo más significativo sea que, ahora, los Educadores Matemáticos son los mediadores de las influencias potenciales dirigidas hacia los currículos, los libros de texto y los exámenes que antes recibían una influencia más directa de personas que no eran enseñantes. Ahora, en algunos países, cada vez es más difícil que alguien sin las credenciales de la Educación Matemática influya directamente en alguna de estas áreas" (Bishop, 1999, p. 220).

[8] El marco legal actual de la LOGSE ha introducido cambios sustanciales en nuestro sistema de enseñanza. Por ejemplo: La ampliación de la escolarización obligatoria hasta los 16 años (esto es, un incremento de dos años de escolarización obligatoria). La modificación profunda de los objetivos y métodos y de la organización de las enseñanzas (por ejemplo, la comprensividad, el requerimiento a los docentes para que participen activamente en el desarrollo curricular, la importancia dada a los procedimientos y actitudes en clase de matemáticas, etc.)

Los cambios introducidos en la LOGSE están repercutiendo ya, tanto en los modos de aprendizaje como en sus resultados. La existencia de modificaciones en la cantidad y en la calidad de la formación matemática de los alumnos de nuestro país parece incuestionable, al menos entre los docentes del nivel secundario o de la enseñanza superior (en este caso, sobre todo para aquellos en contacto más directo con los alumnos procedentes de Bachillerato). La discusión radica, entonces, en como valorar el sentido - positivo o negativo – de tales modificaciones, y cuáles han de ser las posibles acciones que corrijan los fallos que se detecten (SEIEM, nº 5, marzo. 1999).

[9] Tanto si se opta por el mantenimiento de la comprensividad y el reforzamiento de la atención a la diversidad dentro de un itinerario único, como por la creación de

itinerarios curriculares diversos y cierta especialización a partir de determinadas edades, es urgente plasmar de alguna forma la atención a la diversidad de intereses, capacidades y situaciones de los alumnos en la etapa obligatoria. No se favorece la solución a los problemas de convivencia ... mediante la simple imposición por decreto de una mayor demanda de esfuerzo, de una mayor exigencia matemática y de una presentación más académica de sus contenidos. En un reciente documento suscrito por todos los Consejos Escolares Autonómicos y del Estado ... se señala que los problemas de convivencia en los centros se deben , en parte , al componente académico – contenidos, enfoque, modo de presentación – que aún subsiste en muchas disciplinas, lo que es una fuente de desinterés, frustraciones y problemas para los alumnos que no estén en condiciones de afrontar dicho enfoque y que estén obligatoriamente escolarizados (RSME, 2001).

[10] El conocimiento de Matemáticas que necesitará un Profesor de Matemáticas en Secundaria deberá ser diferentes del conocimiento de matemáticas que necesita un profesional (por ejemplo, un estadístico), o aquellos que necesitan de las aplicaciones de las Matemáticas (por ejemplo, un ingeniero o un físico). Esta unicidad curricular no parece acertada ya que los profesores requieren de un conocimiento práctico y específico, relacionado con el contexto y con el propio proceso de enseñanza/aprendizaje, para llevar a acabo su trabajo de manera eficaz (Blanco, y otros, 2001).

En mi opinión, lo ideal sería que la conociera de una manera tanto global como local; en otras palabras, debería tener una perspectiva global de la cultura Matemática y, al mismo tiempo, conocer los detalles de temas concretos dentro de la materia. Debe conocer las relaciones existentes entre temas diferentes además de las diversas secuencias de esas relaciones que permiten la necesaria ordenación del currículo para la enseñanza. Debe ser consciente de los valores culturales de las Matemáticas, comprender su contribución real y potencial a la sociedad. Debe conocer algo sustancial de la historia cultural de las Matemáticas (Bishop, 1999, p. 203).

[11] Trabajar en la educación en matemáticas quiere decir estar interesado en educación, pensar acerca del aprendizaje de las matemáticas y contribuir al desarrollo educativo (Goffre, 2001, p. 147) .

[12] Schoenfeld (1989) señala también que los estudiantes ponen en evidencia clara que conocen ciertas matemáticas pero proceden actuando como si las ignoraran completamente (p. 55), y que "los estudiantes esperan tareas típicas y problemas de examen para que sus esfuerzos den resultado en un minuto o dos, y la mayoría de ellos llega a creer que cualquier problema que no pueda resolver en 12 minutos de trabajo resultará ser un problema imposible ....

A pesar de sus afirmaciones (de los estudiantes) de que las matemáticas ayudan a pensar lógicamente y de que se puede ser creativo en matemáticas, afirman que las matemáticas se aprenden mejor por medio de la memorización y en el caso de la memorización practican lo que afirman que creen.

Quizá el aspecto más problemático del presente estudio es la sugerencia de que estos estudiantes han llegado a separar las matemáticas escolares –las matemáticas que conocen y experimentan en sus salones de clase – de las matemáticas abstractas, la disciplina de la creatividad, la resolución de problemas y el descubrimiento, acerca de los cual se les habla pero no han experimentado. Si ocurre así, el hecho de que los estudiantes se adhieran a la retórica favorable acerca de las matemáticas abstractas y quizá crean en ella, nos ofrece muy poco consuelo. Lo que cuenta en las situaciones de resolución de problemas es la conducta de los estudiantes, y esa conducta parece estar mucho más dirigida por las experiencias de los estudiantes que por las creencias que profesan" (p. 66 y 67).

[13] Los futuros profesores de Secundaria han recibido la mayor parte de su formación universitaria desde profesores dedicados a la transmisión de los contenidos formales, quienes, en su mayoría, equiparan enseñar a instruir, hecho que sólo ha potenciado la forma natural de aprendizaje que se desarrolla en nuestro sistema universitario (la imitación desde la observación. Este tipo de aprendizaje no ha permitido proveer a los futuros profesores de modelos o formas alternativas de pensar sobre los problema de enseñanza/aprendizaje. De hecho, la evidencia empírica pone de manifiesto que los aspirantes a profesores tienden a repetir los procedimientos de sus antiguos profesores sin tener claro la idoneidad de dichos procedimientos y de su significado (Blanco, y otros, 2001).

[14] Las nociones de la didáctica de la matemática son nociones complejas. Su comprensión y puesta en práctica por parte de futuros profesores que tienen una experiencia didáctica reducida es un proceso lento que pasa por diversas fases en las que se pueden encontrar obstáculos difíciles de superar. Los alumnos no superan estos obstáculos si lo único que se les ofrece es la definición de estas nociones y algunos ejemplos de las mismas. Ellos tienen que vivir experiencias en las que pongan en práctica sus significados parciales y puedan comparar sus producciones con las de sus compañeros y recibir críticas a sus trabajos (Gómez. P. 2001, p. 176)

[15] El hombre no crea obras de forma gratuita: las obras humanas responden a un conjunto de cuestiones, de necesidades, aunque éstas pueden haberse perdido u olvidado con los años.

Tanto la escuela como lo que en ella se enseña (el currículo) son obras abiertas, siempre inacabadas, que evolucionan con la sociedad. Ahora bien, aunque el hecho de que en la escuela se enseña el Teorema de Pitágoras y no la elasticidad es el resultado de decisiones humanas; la forma concreta como aparece el Teorema de Pitágoras en el currículo actual es, a su vez, una consecuencia de las leyes que rigen el desarrollo interno del currículo de matemáticas.

Resulta así que el currículo no es arbitrario, como tampoco lo es la manera en que se transforma la matemática en el seno de una institución escolar. Del mismo modo, los elementos que constituyen actualmente el currículo de matemáticas (como el Teorema de Pitágoras o la noción de función) no son incuestionables: la naturalidad del currículo de matemáticas es una ilusión. Desde una perspectiva histórica parece razonable suponer que los objetos matemáticos que hoy forman parte del currículo puedan desaparecer en un futuro más o menos próximo; incluso el hecho de que las matemáticas se mantengan siempre del currículo obligatorio resulta cuestionable (Chevalard, Bosch y Gascón, 1997. p. 117 y 118) .

[16] La tarea de la escuela y, en particular, de los profesores es la de crear las mejores condiciones posibles para que los alumnos puedan estudiar – y por lo tanto aprender – los contenidos presentados en el currículo. Para ello, los centros docentes disponen de un rico conjunto de dispositivos … Pero queda, sin embargo, la cuestión de la estructuración del contenido del estudio, es decir, del diseño, a partir de la lista de

contenidos curriculares que les encomienda la sociedad, de un verdadero programa de estudios para sus alumnos.

No es extraño entonces que el problema de la elaboración del currículo se tienda a enfocar, casi exclusivamente, desde el punto de vista de la enseñanza. Se presenta en primer lugar como un problema de *selección de contenidos*: … Posteriormente, y en estrecha relación con el problema de la selección, se plantea el problema de *secuenciar* estos contenidos … , así como el problema de la *temporalización* o distribución de dichos contenidos a lo largo del tiempo … También se plantea simultáneamente, el problema de la *metodología de enseñanza*, es decir de las acciones o "gestos" profesionales que debe realizar el profesor para guiar el proceso de estudio de sus alumnos (Ibid. P. 121).

[17] Porque la *enseñanza* es sólo un medio para el estudio y, por tanto, el problema del currículum debería poderse plantear en términos del *proceso de estudio de las matemáticas* y no sólo del proceso de enseñanza.

Porque la didáctica de las matemáticas problematiza el conocimiento matemático en lugar de tomarlo como transparente y establecido de una vez por todas…

Por esta razón el problema de la elaboración del currículo no puede plantearse como un mero problema de selección y secuenciación de obras matemáticas presuntamente no problemáticas...

No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen el cada obra en base a las cuestiones a las que éstas responde. Se trata en definitiva de una verdadera reconstrucción creativa de las obras que forman el currículo" (Ibid, p. 122 - 127).

[18] El uso cada vez más general de las expresiones numéricas con signo negativo a partir de los inicios del álgebra trajo consigo la necesidad de explicar qué cosa eran. Pero, éstas, no encajaban con la idea que se tenía de cantidad y de número, vinculadas al mundo físico. Era difícil aceptar la idea de cantidad negativa aislada, por eso inicialmente sólo se las admitía dentro de las restas indicadas, como cantidades con un signo de "afectación" o signo indicador de si una cantidad se ha de juntar con otra o afirmar de ella

Al generalizarse el uso del álgebra estas expresiones con signo + o - ,fueron cada vez más frecuentes y se les llamó cantidades algebraicas, para diferenciarlas de las aritméticas. Estas cantidades estaban realmente determinadas por un par: el valor numérico y el signo. Sólo se consideraba número a la primera parte del par, ¿pero que cosa era la segunda?.

Una manera de explicarlo fue asociarlo a una cualidad de las cosas, el sentido. Es decir aquella cualidad que las divide en dos clases opuestas, como el tiempo que es pasado o futuro, el dinero que se posee o que se debe, el movimiento hacia adelante o hacia atrás. Así, se afirmaba que para determinar las cantidades algebraicas no basta con su medida, como ocurre con las áreas o las longitudes, sino que es preciso considerar un nuevo aspecto, el sentido, y para ellos era necesario un signo que actuara calificando su significado, así como ocurre con los adjetivos que actúa calificando el significado de los sustantivos.

Siendo que las cantidades algebraicas se explicaban ligadas a acciones o transformaciones opuestas: disminuir por incrementar, retroceder por avanzar, adeudar por cobrar, … , se entendía que las cantidades positivas eran opuestas de las negativas, porque siendo de la misma especie una disminuía o anulaba a la otra.

Pero, las cantidades algebraicas aparecían en el cálculo con entidad propia, ya que podían venir aisladas o independientes de la sustracción. Además, al querer conservar el orden numérico había que aceptar que cualquier cantidad negativa tenía que ser menor que cualquier cantidad positiva. Se planteaba así una nueva ordenación de las cantidades donde los negativos son las cantidades menores que cero o “nada” que era su significado en la época.Esto se puede ve con un ejemplo sencillo. Dados dos números cualesquiera, como 3 y 5, y restando el mayor a ambos lados de la desigualdad que forman, $3 < 5$, se tiene: $(3 - 5 = -2) < (5 - 5 = 0)$.

Pero, ¿cómo podía admitirse esto? ¿Cómo podía aceptarse la existencia de cantidades menores que nada?

Por una parte, aceptar la existencia de cantidades menores que cero suponía una ruptura con la concepción del cero absoluto: aquello por debajo de lo cual no hay nada; por otra parte, al considerar que las cantidades tienen un valor y un sentido hay que pensar en el cero relativo u origen, aquello que separa las cantidades en negativas y positivas y que se marca arbitrariamente sobre un eje orientado en la representación gráfica lineal. Lo que era absurdo de hacer con el cero absoluto: sustraer una cantidad más grande de materia de una más pequeña, era perfectamente legítimo con el cero - origen.

Este absurdo está en el origen de dos planteamientos epistemológicos diferentes que darán lugar a acaloradas discusiones. En este sentido son bien conocidos los absurdos lógicos señalados por Wallis (1655) y Carnot (1753-1823):

El razonamiento de Wallis es el siguiente: Con b positivo, a medida que b disminuye tendiendo a 0, $\frac{1}{b}$ tiende a ∞. Si b sigue disminuyendo, porque pasa de positivo a negativo, $\frac{1}{b}$ seguirá creciendo lo que le situará por encima de ∞. Pero por otra parte cuando b es negativo 1/b es también negativo y por tanto menor que cero. Luego esto significa que un número negativo, como $\frac{1}{b}$ cuando $b<0$, es a la vez mayor que el infinito y menor que cero.

Carnot, por su parte, argüía: si las cantidades negativas son cantidades menores que las positivas: $-3 < 2$, mientras que $(-3)^2 > 2^2$; es decir que entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más pequeña será mayor que el cuadrado de la más grande.Y, si dos cantidades, la una positiva y la otra negativa, son igual de reales la una que la otra y sólo difieren en su posición (al ser opuestas), ¿porqué la raíz de una sería una cantidad imaginaria , mientras que la raíz de la otra sería efectiva?

[19] Una sucesión cuya sumabilidad provocó gran discusión y controversia, todavía hoy entre los estudiantes, es 1, - 1, 1, -1, ... $(-1)^{n-1}$, ... Parece claro que escribiendo su serie derivada en la forma (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... , la suma debería ser 0. Igual de claro resulta que escribiendo la serie como 1 - (1 - 1) - (1 -1) - (1 - 1) + ..., la suma debería ser 1. Esto podría ser un argumento suficiente para decir que no existe el límite de $S_n = 1-1+1-1+ ...$, cuando $n \to \infty$. Sin embargo, autores del siglo XVII y XVIII como Bernouilli, Leibnitz o Euler, sostenían que la suma debería ser 1/2. Kline (1992, p. 591-593), relata como era su argumentación:

Bernouilli consideró que si se denota la suma por S, entonces igualando las dos formas anteriores se tendría que $S = 1 - S$, de donde $S = 1/2$.

Leibniz argüía que si toma el primer término, la suma de los dos primeros, la suma de los tres primeros y así sucesivamente, se obtiene 1, 0, 1, 0, 1, 0, ..., de modo que 1 y 0 son igualmente probables y por lo tanto habría que tomar su media aritmética, que es también el valor más problable, como valor de la suma.

Euler decía que, dado que $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, entonces, cuando $x = -1$, se tendrá que $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2$.