Ponencia presentada en el XIV Encontro de Investigaçâo em Educaçâo Matemática. Números e Álgebra Na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores. Sociedade Portugesa de Ciências de Eduacaçâo. Secçâo de Educaçâo e Matemática. Caminha. Portugal. 17, 18,1 9 de Abril.

COMPONENTES DE LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO (PNA)

Bernardo Gómez Alfonso.
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia
SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Resumen
En esta ponencia se presenta un marco teórico y metodológico para la investigación en Didáctica de las Matemáticas, que ha sido utilizado por una parte de los miembros de nuestro grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia. La ponencia tiene dos partes, en la primara se explica el modelo y en la segunda se muestra un ejemplo ilustrativo del mismo.

NUESTRO MODELO

CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

Para contextualizar teóricamente nuestra línea de investigación nos situamos en el enfoque constructivista que trasciende el ámbito de la investigación en psicología y alcanza el campo de la didáctica de las matemáticas.

En este campo, el enfoque investigador ha desviado la atención de las teorías del aprendizaje matemático derivadas de las teorías del aprendizaje general y neutral respecto del contenido, a las teorías del aprendizaje matemático derivadas de los procesos de aprendizaje específicos de un contenido.

Nuestro enfoque investigador tiene como meta favorecer un aprendizaje de las matemáticas de calidad. La noción de calidad la asociamos a una enseñanza basada en la comprensión.

Aunque existen numerosas cuestiones relacionadas con la comprensión que son fuente de estudio y discusión en distintas área de conocimiento, nosotros nos centramos en su caracterización. Intentamos caracterizar la comprensión del conocimiento matemático, utilizando una metodología de observación y modelización del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta metodología utiliza la recogida de datos externos, obtenidos de los distintos instrumentos empleados para la recogida de información, en una triple dimensión: una interpretativa, otra explicativa y otra predictiva. La primera, porque entendemos que para comprender las acciones de un sujeto hemos de ser capaz de poder dar una interpretación racional de las mismas, la segunda porque hemos de ser capaz de explicarlas y la tercera porque hemos de poder predecir las que podría realizar en las mismas condiciones y sugerir pautas de actuación educativa (Ver el ejemplo al final del documento).

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS

Los estudios que dan origen y sustentan el trabajo realizado arrancan al comenzar los 90, con la puesta en marcha del primer programa de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia y el convenio firmado entre este Departamento y el Programa Nacional de Formación y Actualización del Profesorado y el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. Este convenio facilitó el intercambio de profesores y de conocimientos de cuyas consecuencias merecen destacarse dos hechos: uno es la asunción del esquema de investigación de Filloy denominado *Modelos Teóricos Locales* (MTL), y el otro la puesta a punto de lo que llamamos el *Esquema de interpretación para el análisis de tareas*.

MARCO TEÓRICO DE LOS MTL

Filloy (1999) dice que para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de la enseñanza y el aprendizaje, hemos de tener un marco teórico y metodológico (MTL) que nos permita interpretar y organizar tales fenómenos y proponer nuevas observaciones que pongan en evidencia las relaciones que hay entre los cuatro componentes que entran en juego.

1) Componente de enseñanza del MTL o abreviado Modelo de enseñanza.
2) Componente de cognición del MTL o Modelo para los procesos cognitivos.
3) Componente de competencia formal del MTL o Modelo de competencia formal.
4) Componente de comunicación del MTL o Modelo de comunicación.

La noción de Modelo Teórico Local conlleva una determinada manera de organizar la investigación, en la que se distinguen dos partes principales relacionadas: una teórica y otra empírica. El desarrollo de la parte teórica, con la cual se constituye el modelo teórico local inicial, se configura a lo largo de varios ejes que se caracterizan por utilizar, por separado o en combinación, metodologías que tienen que ver con:

- *El análisis histórico y epistemológico*, a fin de poder identificar las principales concepciones y dificultades que ha entrañado la construcción de un determinado objeto matemático hasta llegar a su formulación actual.
- *el análisis de libros de texto,* como registro que son de la evolución científica, curricular y pedagógica en los diversos momentos de la historia.

Con estos ejes, profundizando mas o menos en cada uno de ellos según interese a la indagación, y con ayuda de la revisión de *la investigación afín* para conocer el estado de la cuestión, se pretende arrojar luz sobre las preguntas que sustentan la parte empírica o segunda etapa del trabajo. Ésta toma como metodología:

- *El análisis de tareas*, para ofrecer información acerca de las realizaciones individuales de los estudiantes al responder a tareas específicas propias de los temas de los currícula de enseñanza.

METODOLOGÍA

Un análisis histórico-epistemológico de una determinada noción se usa en la Didáctica de la Matemática, no para reintroducir el método histórico – cronológico en la enseñanza, sino para realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una hipótesis de trabajo, en el análisis histórico epistemológico, es que los problemas identificados pueden guardar paralelismo con los que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en las matemáticas del curriculum.

Se acepta que hay diferencias entre el desarrollo histórico de una noción y su aprendizaje escolar, pero se considera que identificar dificultades y concepciones en la historia permite diseñar modelos didácticos de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes.[i].

El análisis de los libros de texto[ii] es una fuente privilegiada de información para el investigador en Didáctica de las Matemáticas[iii]. En ellos se puede buscar información sobre

- La evolución curricular y pedagógica: los contenidos seleccionados para la enseñanza; los enfoques conceptuales, las actividades, problemas y ejercicios que se enfatizan; sus secuenciaciones, y, en definitiva, sus acercamientos metodológicos
- La plasmación escolar de los planes, directrices, cuestionarios y programas oficiales, como instrumentos propios de una política centralizada, que resultan de decisiones administrativas que atienden a concepciones dominantes de política científica y social.

- La relación del desarrollo de los contenidos de enseñanza en un momento determinado de la historia con sus antecedentes y su proyección en el futuro,
- Problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a la luz del análisis histórico y epistemológico realizado en los libros de texto del pasado

El análisis de tareas, permite ofrecer *ricas* descripciones de tipo instantáneo y estáticas sobre las realizaciones observables de los estudiantes, en un momento determinado de su desarrollo, o en diferentes niveles de desarrollo, al resolver tareas específicas propias de los temas de los currícula de enseñanza.

La descripción de las realizaciones de los estudiantes se articula mediante la identificación y categorización de clases de comportamientos y competencias en los que se presta atención a los procedimientos empleados, estrategias de solución, y errores que se desprenden de sus respuestas.

En una fase posterior, sirven para establecer niveles de dificultad asociados a las tareas propuestas; para señalar tendencias cognitivas en la evolución de los comportamientos observados; para efectuar estudios comparativos entre estudiantes de países diferentes; para poner de manifiesto las limitaciones en la comprensión del conocimiento matemático e, incluso, para la elaboración de modelos teóricos ex profeso explicativos de las actuaciones observadas[iv]. El análisis de tareas requiere de la elaboración de un cuestionario y un esquema de interpretación.

El cuestionario se extrae a partir de un amplio repertorio preliminar seleccionado como resultado del estudio teórico. Tras elegir y adaptar algunas de las cuestiones a los requisitos de la investigación se configura una primera versión del cuestionario, que se va refinando mediante *pilotaje*s sucesivos.

El esquema de interpretación se sigue de la identificación de características comunes y patrones de comportamiento en el desempeño de los alumnos. Se utiliza para agrupar las respuestas y así facilitar una clasificación de la información en categorías descriptivas del comportamiento[v].

El pilotaje del cuestionario se hace mediante sucesivas evaluaciones: una es interna, corresponde a los especialistas, en este caso los miembros del equipo de investigadores del proyecto; y otras son externas, sometiendo a prueba las preguntas con profesionales y estudiantes allegados a los investigadores con el fin de ver si se ajustan a las expectativas y objetivos para los que fueron pensadas; y también, con profesores de los cursos en los cuales se va a aplicar el escrutinio para realizar la investigación, para ver si son adecuadas al nivel académico de sus estudiantes.

La recogida y análisis de datos se hace sometiendo el cuestionario definitivo a todos los estudiantes de los cursos elegidos, en su ambiente natural, de donde, si procede, se selecciona muestra representativa[vi]. A continuación dos o tres revisores proceden al análisis de las respuestas obtenidas en las hojas de trabajo del cuestionario de modo independiente. Una vez terminada la revisión se hace una puesta en común, en una sesión conjunta. Si es el caso, se seleccionan ejemplares para realizar entrevistas clínicas que permitan contrastar o fundamentar la interpretación y explicación realizada durante la fase de análisis. Llegados a este punto, se procede a volcar los resultados obtenidos en tablas que permitan hacer inferencias y obtener conclusiones finalistas de la investigación.

UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

En un trabajo reciente, realizado bajo mi dirección por Pardo (2004) dentro del Programa de Doctorado de la Universidad de Valencia, sobre los problemas en la enseñanza/aprendizaje de los números complejos, se tomó como hipótesis teórica a contrastar la siguiente:

- Es posible que algunas dificultades e inconsistencias[vii] conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos, a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismo con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia.

Esta hipótesis delimitó el marco teórico situándolo en la componente formal, y dentro de ella en *el análisis histórico y epistemológico*. El programa de observación experimental se centró en la componente cognitiva, mediante el procedimiento denominado *análisis de tareas*.

Una trabajo previo de revisión histórica nos había permitido identificar cuatro grandes etapas caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos:

- *Algebraica*. Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas cómo raíces inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos.
- *Analítica*. Generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos, o nulos. Por eso, se las llama cantidades imaginarias porque sólo existen en la imaginación[viii].
- *Geométrica*. Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1[ix] y consideración de los imaginarios como vectores del plano.
- *Formal*. Formalización de los números complejos y consideración de los mismos como pares ordenados de números reales.

Estas etapas se tomaron como referencia para organizar la búsqueda y selección de cuestiones relevantes para contrastar la hipótesis, contextualizándolas en una concepción epistemológica[x]. Con estas cuestiones se procedió a la elaboración y al pilotaje de un cuestionario para su posterior aplicación a un grupo de estudiantes de primer curso de de la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Valencia, en su ambiente normal de clase el último mes del curso académico.

Aunque el cuestionario sometido a los estudiantes constó de cinco tareas, aquí sólo vamos a comentar una de ellas, puesto que de lo que se trata es de ilustrar la metodología y no de presentar los resultados de la investigación.

TAREA- *Las operaciones,*

4

Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5} =$.

Explica tu respuesta

....

....

....

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} =$

Explica tu respuesta

....

....

....

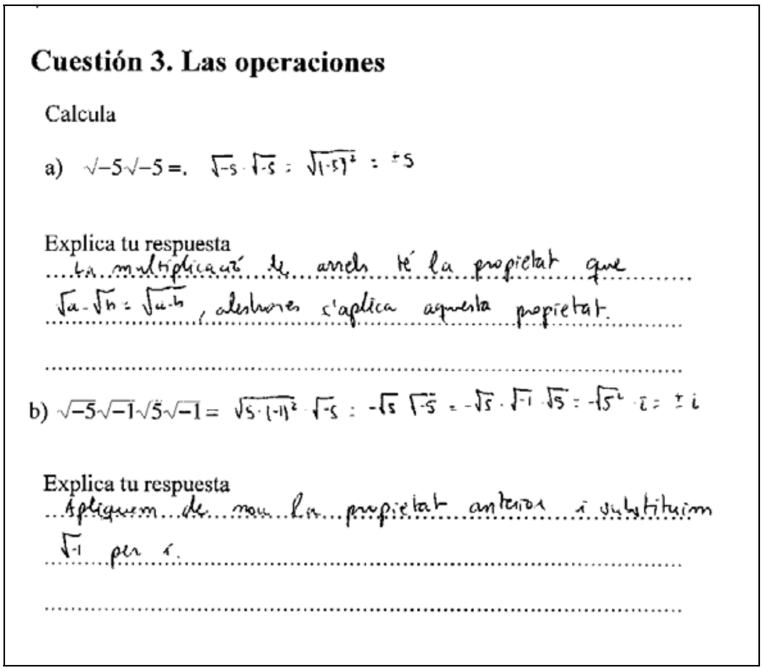
Esta tarea la ubicamos en la etapa analítica y está basada en anotaciones de Vallejo (1841, p. 242)[xi], sobre el cuidado que hay que tener al multiplicar expresiones imaginarias para no caer en resultados contradictorios. El objetivo de la tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes ante la multiplicación de raíces con radicando negativo, dado que si se aplica la regla general de la multiplicación*: la raíz del producto es el producto de las raíces*; se obtiene un resultado contradictorio con la regla para multiplicar los números imaginarios. La respuesta adecuada implica el reconocimiento de que las regla general de la multiplicación (la raíz del producto es el producto de las raíces) no funciona en el producto de raíces con radicando negativo[xii].

Finalmente, se ha aplicado la metodología del “análisis de tareas”, lo que ha permitido realizar una descripción y categorización de las actuaciones de los estudiantes en torno a un modelo de interpretación validado en otros trabajos precedentes de miembros de nuestro grupo de P.N.A.

ANÁLISIS DE RESULTADOS: INTERPRETACIÓN, EXPLICACIÓN Y PREDICCIÓN.

El cuestionario se sometió a estudiantes de la Facultad de Matemáticas en su ambiente natural de clase, un día de finales de mayo del 2004. A continuación se presenta una muestra de los dos tipos de respuestas incorrectas más relevantes de los estudiantes al resolver la tarea *las operaciones*[xiii] y del tipo de análisis que hemos hecho de las mismas.

Ejemplo 1:



Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5}=$. $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$

Explica tu respuesta

La multiplicació de arrels té la propietat que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, aleshores s'aplica aquesta propietat.

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5\cdot(-1)^2}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\,\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\,\sqrt{5} = -\sqrt{5^2}\cdot i = \pm i$

Explica tu respuesta

Apliquem de nou la propietat anterior i substituim $\sqrt{-1}$ per i.

Transcripción

a)“ $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$. *La multiplicación de raíces tiene la propiedad que* $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ *, entonces se aplica esta propiedad.*

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5\cdot(-1)^2}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{5^2}\cdot \mathrm{i} = \pm\mathrm{i}$

Aplicamos de nuevo la propiedad anterior y sustituimos $\sqrt{-1}$ *por i.* ”

Explicación: El estudiante, en el apartado a), aplica la regla general para multiplicar radicales, calcula la raíz cuadrada del resultado, y acompaña la respuesta con el doble signo ±.

En el apartado b) parece que aplica la misma regla general que antes, aunque lo que escribe bajo el radical no se corresponde con ella, ya que extrae un signo menos, por lo que cabe suponer que aplica la regla $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}$ = -1. Esta interpretación queda reforzada por su actuación posterior, donde extrae la forma imaginaria $\sqrt{-1}$ que escribe después como *i*. La parte real del resultado la obtiene como en el apartado a), calculando la raíz cuadrada con el doble signo ± aunque olvida escribir el 5.

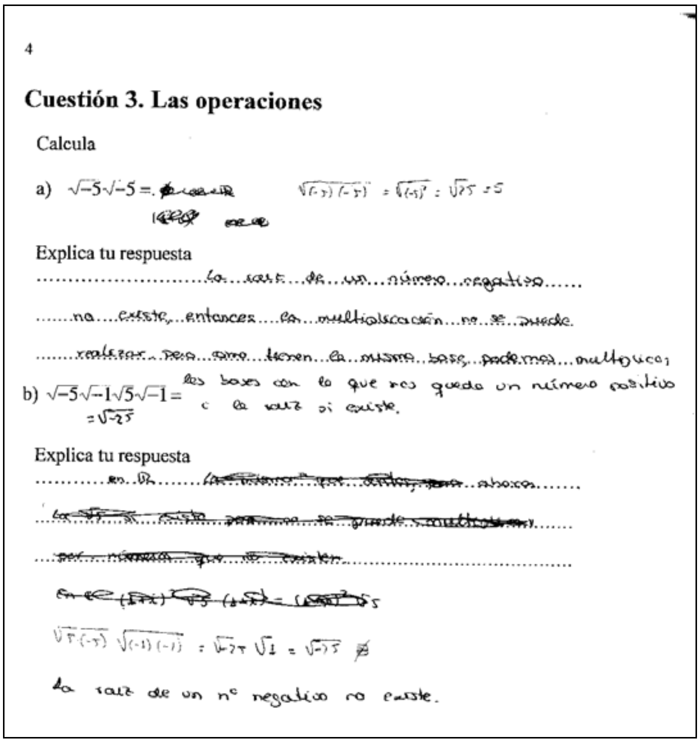
Interpretación: En la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En el apartado a) no tiene en cuenta que los datos corresponden a expresiones imaginarias, lo que le hubiera llevado a $\sqrt{5}\,i^2$, a diferencia de lo que hace en el apartado b) donde si que lo tiene en cuenta.

Otro aspecto llamativo es el uso del doble signo ±. Esta es una respuesta aritmética ya que parece leer el signo radical como la orden de calcular la doble raíz cuadrada de un número, lo que es inconsistente con el uso algebraico del signo radical[xiv], en el campo real donde se define como la solución positiva de $x^2=a$, $a>0$, para evitar contradicciones y ambiguedades.

Predicción y sugerencias: El estudiante evidencia un cierto conocimiento y manejo de las reglas para operar radicales, raíces cuadradas y expresiones imaginarias, pero encuentra dificultades para decidir cuando estas reglas están permitidas y cuando no. Por otra parte el estudiante utiliza una concepción aritmética del signo radical que le lleva a confundirlo con la orden de calcular la doble raíz cuadrada.

En consecuencia, podemos esperar que el estudiante repetirá este tipo de comportamiento con problemas análogos y entendemos que son un producto de la enseñanza, que no ha tomado cuidado advirtiendo de las restricciones de las reglas y de los cambios de significado al pasar de la aritmètica al álgebra, y de los reales a los complejos. Así, entendemos que es necesario revisar la distinción entre radical y raíz cuadrada, y justificar mejor por qué $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}$ no se le puede aplicar la regla general para multiplicar raíces.

Ejemplo 2:


4

Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5}=$

Explica tu respuesta

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1}=$

Explica tu respuesta

Transcripción

a) $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{(-5)(-5)}=\sqrt{(-5)^2}=5$. *La raíz de un número negativo no existe, entonces la multiplicación no se puede realizar, pero como tienen la misma base, podemos multiplicar las bases con lo que nos queda un número positivo y la raíz si existe.*

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{-25}$.

$\sqrt{5(-5)}\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-25}\sqrt{1}=\sqrt{-25}$. *No existe. La raíz de un nº negativo no existe.*

Explicación: El estudiante, en el apartado a), aplica la regla general para multiplicar radicales y calcula la raíz cuadrada del resultado. En el apartado b) hace lo mismo y deja como resultado una raíz con radicando negativo.

Interpretación: La respuesta del alumno es inconsistente, ya que su resultado entra en conflicto con la pregunta y su explicación es contradictoria en sí misma. En lugar de reconocer la mutua incompatibilidad de lo que verbaliza parece que se centra en el procedimiento, que en este caso toma de la operatoria con números reales. En ningún caso da señales de reconocer que está en presencia de números imaginarios.

Predicción y sugerencias: Entendemos que el estudiante no tiene en cuenta el significado de una raíz con radicando negativo y tampoco las restricciones de la operatoria.

En consecuencia, como ocurría con el estudiante anterior, podemos esperar que este estudiante repetirá este tipo de comportamiento en situaciones análogas porque entendemos que son un producto de la enseñanza. Para evitarlos podemos sugerir una revisión de las pautas de enseñanza en relación con las raíces de de radicando negativo que señale claramente sus restricciones y significados.

CONCLUSIONES

Nuestro modelo es una herramienta válida para llevar a cabo la investigación planteada. Ésta pone de manifiesto que los alumnos manifiestan dificultades e inconsistencias al responder a las tareas del cuestionario que permiten aventurar que se confirman la hipótesis histórico-epistemológicas de partida. Esto es, que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta dificultades e inconsistencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen, y en algunos casos agravadas.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des Mathématiques*,. 2, pp. 37-128.

Cardano, Girolamo (1663). *Opera Omnia* ... Lugduni.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria*. Valencia. Tesis doctoral. Universitat de Valencia.

Fernández, A. Figueras, O, Gómez B. y Margarit J. (1997). Algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionario de tareas relacionadas con razón y proporción. *VIII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas).* Salamanca. Septiembre, pp. 429-433.

Fernández, A.; Gómez, B.; Figueras, O.; Margarit, J.; Puig, L.; Monzó O. y Ruiz, E. (1998). Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y proporción. Documento interno. Departament de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valencia.

Fernández, A. Gómez B.; y Margarit J. (1997). Comportamientos relevantes observados en las respuestas incorrectas de estudiantes de primaria en tareas de razón y proporción. *III Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana,* Valencia.

Ferrirós, J. (1998). El problema de la aritmética en perspectiva histórica. En José Ferreirós (Ed.) *Richard Dedekind. ¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Alianza Editorial

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 2, 3, pp. 303-346.

Gómez, B. (1994). *El cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Memoria de Tesis Doctoral. Universitat de València.

Gómez, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Mathema. Granada: Comares.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de los libros de antiguos: el caso de los problemas de compañías. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*. Vol. 2. Nº 3, Noviembre, pp. 19-29.

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En Antonio Martinón (Ed*.).Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Madrid: Nivola (pp. 77-80).

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?. En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de*

la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada. Universidad de Granada. (Pgs. 257-275). ISBN 84-338-2752-9
Gómez, B., Pardo, T y Pastor, C. (2003). El caso de los (-1). En … *XI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*. Canarias.. Pp. ¿?. .ISBN
Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional.* Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría. No publicada. México, D. F.
Hart, K. M. ; Brown, M. L. y Küchemann D. E…. (The CSMS Mathematics Team)) (1981). *Chlidren's Understanding of Mathematics: 11-16*. Oxford, London and Northampon. John Murray.
Jiménez de la Rosa, E (1996): *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Méjico.
Margarit, J.; Figueras, O.y Gómez, B. (2001). Ratio Comparison: Performance on Ratio in Similarity Tesk. *Proceedings of the 25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education).* Vol. I, 340 Utrech The Netherland.
Muñoz, E (1996): *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Méjico.
Pardo, T. (2004). *La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio con estudiantes de matemáticas en el nivel universitario.* Memoria de tercer ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.
Sierra, M., Rico, L. Y Gómez, B. (1996). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Agustín Escolano (Ed.) *Historia ilustrada del libro escolar en España*. Vol. 2. Fundación G. S. Ruipérez.
Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* .escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. (Primera edición 1813).

[i] Un ejemplo paradigmático de este tipo de análisis se tiene al estudiar la evolución de los conceptos de número. En este sentido son una referencia los trabajos realizados por Brousseau (1981) sobre los decimales y Glaeser (1981) sobre los negativos. Ejemplos desarrollados por nosotros se pueden encontrar en en Gómez (2001) y Gómez, Pardo, y Pastor (2003).

[ii] Una caracterización de los libros de textos y de su evolución se puede encontrar en Sierra, Rico y Gómez (1996); y Gómez, (2000).

[iii] Ejemplos de análisis de libros de texto, que responde a los tres primeros puntos, se pueden encontrar en Gómez (1994, 1995 y 1999). Ejemplos del cuarto punto se pueden encontrar en Gómez (2001) y Gómez, Pardo, y Pastor (2003).

[iv] Una referencia en este tipo de análisis son los trabajos realizados por el equipo del CSMS bajo la dirección de Kat. Hart en el Chelsea College de la Universidad de Londres (Hart, et. al., 1981). Ejemplos más recientes, desarrollados por nosotros se pueden encontrar en Fernández, Gómez y Margarit (1997); Fernández, Figueras, Gómez y Margarit (1997); Fernández, Gómez, Figueras, Margarit, Puig, Monzó y Ruiz, (1998); Margarit, Figueras, Gómez (2001).

[v] Nuestro *esquema de interpretación*, es el fruto de un trabajo de colaboración con la Doctora Olimpia Figueras, del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México, a raíz de un proyecto mejicano diseñado para entender mejor como los niños de la escuela primaria usan su conocimiento para resolver tareas de razón y proporción (Gómez, H., 1996, Jiménez de la Rosa, 1996 y Muñoz, 1996; Fernández, A., 2001). En este trabajo articulamos las respuestas de los estudiantes de acurdo con un modelo que transitó de la descripción de actuaciones aisladas hacia el agrupamiento de tipos de comportamiento identificados de acuerdo con características comunes desde un enfoque relacional. Esto es, un enfoque que mira las relaciones en juego entre los elementos de la información dada en la tarea propuesta y los aspectos en los que los estudiantes centran su atención para resolverla.
El modelo, que fue pertinente para poder derivar conclusiones y supuestos sobre las tendencias y patrones del comportamiento y las competencias de los niños en razón y proporción, ha constituido el punto de partida del desarrollo de investigaciones posteriores realizadas en España.

[vi] Para ello, las hojas de trabajo del cuestionario recogidos en la prueba se numeran de acuerdo con el orden de entrega, de esta forma, el cuestionario codificado con el número 1, corresponde al estudiante que entregó primero su examen y así sucesivamente. Finalmente, usando una tabla de números aleatorios se extraen, de cada curso, 10 de éstos cuestionarios, que son los que realmente se analizan.

[vii] Inconsistencia es la falta de consistencia. En matemáticas, se dice de un conjunto de axiomas que es consistente cuando no hay ninguna posibilidad de deducir de ellos teoremas contradictorios. En didáctica de las matemáticas, se dice de las ideas conflictivas que incorporan los estudiantes en la construcción de los conceptos matemáticos, que pueden ejercer una profunda influencia en la resolución de problemas.

[viii] *Y, puesto que todos los números que podemos concebir son mayores o menores que cero, o son el mismo cero, es evidente que no podemos ubicar la raíz cuadrada de un número negativo entre los números posibles y, por lo tanto, debemos decir que estos son cantidades imposibles. De esta manera estamos encaminados a la idea de números que por su naturaleza son imposibles; y por tanto, son números que llamamos cantidades imaginarias, porque sólo existen en nuestra imaginación* (Euler, 1984, p. 43)

[ix] Así, en el plano de ejes real e imaginario un vector queda representado por a+bi; y $\sqrt{-1}$ actúa como rotación de 90º alrededor de O, es decir como un signo o índice de perpendicularidad.

[x] En el sentido en el que se usa en la corriente francesa de la Didáctica de las Matemáticas, ligado a la génesis histórica de un determinado concepto matemático: una tipología de conocimiento existentes en un cierto período histórico.

[xi] *Para multiplicarlas, las descompondremos antes en sus dos factores, y después ejecutaremos nuestra operación como en los radicales; de manera que para multiplicar $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$ descompondremos antes a $\sqrt{-a}$ en $\sqrt{a}\sqrt{-1}$, y a $\sqrt{-b}$ en $\sqrt{b}\sqrt{-1}$; y la multiplicación la haremos en esta forma:*
$\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\sqrt{b}(-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = \sqrt{ab}(-1)^1 = \sqrt{ab}(-1) = -\sqrt{ab}$.
Observando este resultado, echamos de ver que el producto de dos imaginarias es una cantidad real, y que el signo que nos resulta es contrario al que obtendríamos por las reglas generales de la multiplicación; pues teniendo $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ los signos positivos, o un mismo signo fuera del radical, debería salir el producto positivo, y vemos que es negativo […] Si se tuviese que multiplicar $\sqrt[6]{-a}$ por $\sqrt[6]{-b}$, obtendríamos $\sqrt[6]{-a}\sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{-1}\sqrt[6]{a}\sqrt[6]{-1}\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{(-1)^2}\,\sqrt[6]{ab} = \sqrt[3]{-1}\,\sqrt[6]{ab} = -1\sqrt[6]{ab} = -\sqrt[6]{ab}$.
Hemos tenido muy buen cuidado de no efectuar la operación en $\sqrt[6]{(-1)^2}$; porque de otro modo, hubiéramos podido incurrir en alguna exactitud. En efecto, si en vez de $\sqrt[6]{(-1)^2}$, hubiéramos ejecutado el cuadrado que se indica debajo del radical, se hubiera encontrado $\sqrt[6]{1}$; y si considerando aislado este valor supusiéramos después que $\sqrt[6]{1} = 1$, se hubiera encontrado
$\sqrt[6]{-a}\sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{(-1)^2}\,\sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{1}\,\sqrt[6]{ab} = 1\sqrt{ab} = \sqrt[6]{ab}$.
Resultado contrario al que sacamos antes: por lo que, debemos repetir, que se necesita mucha cirscunpección acerca de este particular: pues de otro modo, se podría llegar a obtener resultados contradictorios y aun absurdos (Vallejo, 1841, 242).

[xii] Si se pudiera aplicar la regla general en la multiplicación de complejos, la ecuación $x^2+1 = 0$ no podría tener solución en C, ya que x^2 sería un número no negativo y al sumarlo con 1 no se podría obtener cero. Para resolver este contratiempo se define i de tal modo que $i^2+1 = 0$, o lo que es lo mismo que $i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ y no 1 como se sigue de la regla general de la multiplicación.

[xiii] La frecuencia de los tipos de respuestas en esta tarea por categorías se resume en la siguiente tabla:

Utilizan correctamente la regla para operar imaginarios	9/19
Utilizan la regla para operar imaginarios con errores de descuido	4/19
Combinan la regla general de multiplicar radicales y la forma imaginaria. Unas veces sí y otras no.	3/19
Aplican exclusivamente la regla general de multiplicar radicales	2/19

[xiv] A) Inconsistente con la definición : x es raíz cuadrada de 4 si es solución de la ecuación $x^2=4$. Entonces se escrbe que $x=\pm\sqrt{4}$. Si a su vez $\sqrt{4}$ fuera ±2, entonces x sería ±(±2).
B) Inconsistente con la operatoria: si $\sqrt{4}$ fuera ±2, entonces $\sqrt{4}+\sqrt{4}$ sería 2, 0 y -2, y también $\sqrt{4}-\sqrt{4}$ sería 2, 0 y -2, y en consecuencia se tendría que x+x = x-x.