**Seminario: Manuales Escolares. XIII SEIEM.** Cantabria Septiembre de 2009

# EL ANÁLISIS DE MANUALES Y LA IDENTIFICACIÓN DE PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia.
Bernardo.gomez@uv.es

*La ambigüedad del signo radical es un problema con raíces históricas que ha quedado recogido en una tradición de enseñanza reflejada en los manuales escolares. Aunque desde las matemáticas el problema no existe, no se puede decir lo mismo desde la didáctica. Por el contrario, el signo radical presenta sutilezas conceptuales y operatorias cuya omisión en los manuales es a menudo causa de malentendidos y conflictos fuertemente arraigados. Algunos de esos malentendidos son un producto de la enseñanza tradicional reflejada en los manuales que ignora los desarrollos matemáticos actuales.*
**Palabras clave**: manuales escolares, radicales.

## INTRODUCCIÓN

A pesar de su importancia e influencia los manuales escolares no han merecido la debida atención de los investigadores en educación matemática hasta fechas recientes.
Su importancia es tal que desde su nacimiento a finales del siglo XVIII[1] se han convertido en elementos omnipresentes en la escuela, como principal apoyo y fuente de información, indispensable e inseparable, de profesores y estudiantes.
Es tan influyente que hablar de los manuales escolares es hablar del paradigma del saber institucionalizado en el sistema educativo, del curriculum realmente implementado y del modelo de organización y planificación de la enseñanza dominante en el tiempo en el que han estado vigentes.
No debe extrañar pues, que desde siempre haya estado en el centro del debate educativo, como objeto de polémica y confrontación entre los defensores y detractores de su bondad pedagógica; y también, como objeto de manipulación ideológica, de control político o de abuso en su comercialización (Gómez, 2000, p. 77; 2008).
Bajo estos distintos aspectos, que caracterizan su importancia e influencia, se puede enfocar el análisis de los manuales escolares, como una línea más de la investigación en didáctica de las matemáticas. Pero, con ser aspectos importantes, que justifican por sí mismos el esfuerzo investigador, no dicen gran cosa acerca del principal problema de la educación matemática, el problema que para Freudenthal (1980) es el verdadero y más importante problema, el más urgente en educación matemática, el que se formula con esta pregunta: ¿porqué hay tantos niños que no aprenden las matemáticas como deberían?
Para intentar responder a esta pregunta, gran parte del esfuerzo investigador de las últimas décadas se ha orientado a facetas del paradigma cognitivo centradas en la observación de procesos de aprendizaje. Pero, entre los aprendices, el más grande es la humanidad, que también es un aprendiz (Freudenthal, ob. cit. p, 137). Para observar su proceso de aprendizaje, no hay más remedio que dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del análisis de textos y manuales escolares, para identificar problemas de enseñanza y aprendizaje.
A tal fin, en esta ponencia tras unas breves consideraciones generales para contextualizar el análisis de los manuales y libros de texto como fuente de problemas de enseñanza y aprendizaje, se aborda el caso de los radicales como ejemplo ilustrativo de esta faceta de la investigación educativa.

[1] Ente los primeros textos seleccionados por una Comisión nacional destaca el de Condorcet, a raíz del Informe Arbogast ante la Convención Nacional francesa en 1792 (Sierra, Rico y Gómez 1997, p. 376).

## CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LOS MANUALES

### Del libro de texto al manual escolar

En un sentido amplio, un libro de texto es una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién van dirigido.

A partir de la implantación del sistema público de enseñanza surge el género más conocido de los libros de texto: el de los manuales escolares. Un manual es pues un libro de texto que es utilizado en la Escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. Además, es un libro de texto que tiene una estructura, un diseño editorial y un sistema de comercialización específico.

Su estructura se caracteriza por una forma de presentar y organizar el contenido textual que atiende a una combinación de elementos entre los que sobresalen: a) un modelo de agrupación temática con denominación propia, a saber: *lecciones*, *temas*, *unidades*, *actividades*; b) un modelo de codificación que usa diferentes tipos de letras, párrafos numerados, y epígrafes resaltados; c) unas formas específicas de expresión literaria como son las definiciones, explicaciones, demostraciones, preguntas y respuestas, diagramas; etc.; y e) unos modos de orientación al lector mediante el uso de ejemplos, ejercicios, problemas, cuestiones, o actividades.

Bajo estas consideraciones se puede decir que un ejemplo de libro de texto sería el “álgebra” de Euler (1770), y un ejemplo de manual escolar sería cualquiera de los libros de Primaria o Secundaria, de uso común en los centros escolares.

### Requisitos que cumplen los manuales

Los manuales escolares nacieron en respuesta a los requerimientos del sistema general de enseñanza. Su implantación hizo necesario un tipo de libro polivalente que sirviera para:

1. Suplir la falta de profesores suficientes con la formación necesaria. Para lo cual tenían que asumir la tarea de garantizar su formación y actualización científica y pedagógica; en otras palabras, los manuales tenían que servir tanto para informar a los profesores como para apoyarles y guiarles en su trabajo diario.
2. Dar respuesta al modelo de enseñanza simultánea frente al individual. Con esto, lo que se pretendía era asegurar la igualdad educativa y fomentar la democratización social. Para ello todos los estudiantes tendrían que tener acceso al mismo tipo de información y al mismo tiempo, ajustándose a unos programas comunes (normalizar) necesariamente reducidos para ajustarse al limitado tiempo escolar, pero suficientes para contener los elementos básicos del conocimiento (elementalizar)[2].
3. Adaptarse a las características de los estudiantes en sus diferentes niveles educativos. Para ello tenían que reorganizar la forma tradicional de presentar el conocimiento, poniéndolo de forma graduada, racional y metódica; esto es, distribuyendo el conocimiento por cursos, ciclos o etapas, y poniéndolo en el mejor orden y de la manera más racional, clara y sencilla posible

### La autoría de los manuales

Los requisitos y las demandas de la institución escolar modelan el contenido y la estructura de los manuales (Schubring, 1987) de una determinada manera, como libros normalizadores,

[2] No deben confundirse los elementos básicos del conocimiento para su enseñanza, con los elementos básicos que se siguen de la lógica interna de una ciencia. Estos últimos no entrañan ningún problema didáctico, lo que no ocurre con los primeros. Desgraciadamente, la idea de que los manuales han de ser textos elementales se interpretó en alguna época en el sentido de “abreviación”, para condensar un texto voluminoso en otro más corto, a base de recortarlo y de prescindir de rigor y coherencia.

elementalizadores, metódicos, formativos y didácticos, a través de una propuesta curricular, de un programa y de la inercia de una tradición reflejada en los manuales que ya existen en la institución particular, de los que con frecuencia toman prestado o directamente copian.
Así, el conocimiento escolar se vuelve una especie de conocimiento comunitario, una propiedad común que no tiene derechos de autor, por lo que raramente se dice qué parte del texto es original o de producción propia, y cuál se ha tomado o copiado de otro autor, haciendo de los manuales una obra de autoría colectiva más que de una sola persona, de tal modo que sería más propio hablar de desarrolladores de manuales que de autores de manuales.
Este conocimiento comunitario es muy importante para los profesores, porque es lo que se considera el saber institucional, entendido como el saber refrendado por la comunidad científica, de modo que gran parte de su trabajo dependa de éste conocimiento.

**Los profesores y los manuales**

Los profesores tienen que decidir qué manual les parece más adecuado, después deben decidir qué parte o partes de ese libro son las que van a usar, y finalmente deben decidir cómo van a hacer para usar esa parte o partes seleccionadas, en función de las capacidades de sus alumnos y de los objetivos de su enseñanza.
Esta decisión está mediatizada por las posiciones pedagógicas dominantes y por las estrategias de comercialización. En relación con las primeras, se enfrentan la posición de los que sostienen que los manuales son un buen medio de enseñanza, que salva las deficiencias formativas del profesorado y garantiza los soportes científicos que deben normalizar el conocimiento colectivo nacional; con las de los que sostienen que la enseñanza no es un trabajo automático, ni el maestro un eco de pensamientos ajenos, y que los manuales son “textos muertos”, que dan la ciencia hecha y la enseñan dogmáticamente, desarrollan la pasividad en los docentes, la memorización en los estudiantes y provocan el estancamiento en la enseñanza.
En cualquier caso, los profesores necesitan tener un buen conocimiento y comprensión de lo que aportan los manuales sobre los que deben decidir; no solo en su contenido, sino también en relación con las capacidades de sus estudiantes y con la planificación, objetivos y metas de su enseñanza. Sin embargo, como señala Van Dormolen (1986, p. 142), aunque *en algunos casos los profesores son capaces de decir por qué usan un libro y cómo lo usan, muchos de ellos no tiene una comprensión clara de las características del texto que están usando, y* tienden a dar por bueno su contenido ignorando los condicionantes que los han modelado, lo que a menudo se traduce por acción o por omisión en una verdadera fuente de problemas de enseñanza y aprendizaje.

**El análisis de los manuales**

El análisis de manuales se puede hacer “a priori”, como posible medio de instrucción, o “a posteriori”, para comparar su propuesta curricular con los resultados del aprendizaje (van Dormolen, 1986) y para conocer las adaptaciones de las formas textuales de la disciplina a la retórica escolar.
En el análisis “a posteriori”, los manuales se convierten en documentos imprescindibles para indagar acerca de lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que los libros de texto son los únicos registros disponibles del conocimiento matemático que la institución escolar ha transmitido.
Esto se puede hacer siguiendo dos líneas principales: una es el análisis textual, para describir, evaluar o caracterizar un/el contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica; y la otra es el análisis epistemológico, para conocer cómo se han concebido, configurado y establecido las matemáticas escolares, en diferentes momentos de la historia.

En relación con el análisis textual, no se puede afirmar que haya un marco teórico comúnmente aceptado con el cual analizar los manuales, aunque si que es posible encontrar en la revisión bibliográfica estudios que analizan textos desde el punto de vista de un contenido matemático concreto, para hacer inferencias estableciendo y comparando tablas de categorías en relación con:

- Definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos, problemas, ejercicios, algoritmos y reglas, representaciones, signos y convenciones, etc.
- Los otros aspectos que determinan la presentación del contenido matemático seleccionado para la enseñanza que son consecuencia de las disposiciones oficiales curriculares y pedagógicas, tales como objetivos, procesos de aprendizaje, directrices, orientaciones, secuenciaciones, etc.

Los estudios que hacen un análisis epistemológico, se suelen apoyar en la historia de las matemáticas de la enseñanza, tal y como ha quedado reflejada en los libros de texto y más específicamente en los manuales, como una herramienta útil para:

- identificar problemas de enseñanza y aprendizaje, analizando concepciones, ambigüedades, omisiones, inconsistencias, dificultades, etc., ligadas al desarrollo de un concepto y que previsiblemente se pueden presentar en los estudiantes.

Para ilustrar esta línea de análisis se ha elegido como ejemplo el problema denominado "la ambigüedad del signo radical".

LA AMBIGÜEDAD DEL SIGNO RADICAL:

Sorprende encontrar comentarios de los grandes matemáticos que derivan en problemas de enseñanza y aprendizaje que han trascendido al paso del tiempo. Un ejemplo, de este tipo de comentarios se encuentra en el que se ha considerado el mejor libro de texto de matemáticas del siglo XVIII. El "álgebra" de Euler, publicada por primera vez en 1770, bajo el título de *Vollstandige Anleitung zur Algebra* [*Instrucción completa de Algebra*]. En el volumen 1 de dicho texto Euler (1770, p.62) afirma que:

| | |
|---|---|
| 150. (…) *la raíz cuadrada de cualquier número tiene siempre dos valores, uno positivo y el otro negativo; esto es que* $\sqrt{4}$ *, por ejemplo, es igualmente 2 y -2, y en general, se puede adoptar tanto* $-\sqrt{a}$ *como* $+\sqrt{a}$ *para la raíz cuadrada de a.* | 150. Da nun aber nach der Anmerkung (122) die Quadratwurzel jeder Zahl immer einen doppelten Werth hat, nämlich so wohl negativ als auch positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ so wohl $+2$ als auch $-2$ ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$, als auch $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dies auch bei den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist so wohl $+\sqrt{-a}$, als auch $-\sqrt{-a}$, wobei man die Zeichen $+$ und $-$, welche vor das Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt werden, von dem Zeichen, das hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß. |

En este comentario aparece la ambigüedad del signo radical, ya que el mismo signo se asocia al conjunto de dos valores, +2 y -2, en $\sqrt{\boldsymbol{4}}$; y se asocia a un solo valor en $\sqrt{a}$ , por lo que para distinguir las dos resultados de la raíz de *a* se le hace preceder del signo positivo o del signo negativo.

El texto refleja también el cambio de significado del signo radical como consecuencia de la extensión de su dominio de aplicación de la aritmética al álgebra. En aritmética se trabaja con números determinados, como 4, y la operación raíz cuadrada de cualquiera de esos números determinados existe y se puede calcular exactamente si el radicando es un número cuadrado perfecto o aproximadamente si no lo es. Mientras que en álgebra se trabaja con números genéricos, expresados mediante una letra, y cómo la raíz cuadrada de una letra no se puede calcular se usa el signo radical para indicar el resultado genérico de esa operación.

El doble significado del signo radical, como operación indicada o como resultado, se puede explicar a la luz de la teoría de Sfard (1991) sobre la naturaleza dual, operacional/estructural, de las concepciones matemáticas y su papel en la formación de conceptos.

Sfard (1991) sustenta su teoría en el hecho de que una entidad matemática puede ser vista como un objeto y como un proceso. El tratamiento de una noción matemática como objeto conduce a un tipo de concepción que llama estructural, mientras que interpretar una noción como proceso implica una concepción que llama operacional. De esta manera, si se percibe $\sqrt{\boldsymbol{4}}$ como operación indicada la concepción del símbolo radical sería operacional; mientras que si se percibe $\sqrt{a}$ como resultado de esa operación la concepción del signo radical sería estructural.

Para Sfard, la habilidad para ver una entidad matemática como un objeto y un proceso es indispensable para un entendimiento profundo de las matemáticas, de modo que "la formación del concepto implica que ciertas nociones matemáticas deberían ser consideradas totalmente desarrolladas solamente si pueden ser concebidas tanto operacionalmente como estructuralmente" (p. 23).

A tal fin Sfard conjetura que cuando una persona logra conocer una nueva noción matemática, la concepción operacional es a menudo la primera en desarrollar, mientras que la concepción estructural sigue un proceso prolongado y difícil que necesita intervención externa, de un profesor o de un libro de texto, por lo que es muy dependiente del modelo de enseñanza.

Esta afirmación apunta, a que para conocer la influencia del modelo de enseñanza sobre la conceptualización del signo radical por los estudiantes y profesores, la investigación debería sustentarse en una revisión de manuales y libros de texto, en su condición de verdadero curriculum implementado.

**La ambigüedad del signo radical como problema matemático y como problema didáctico.**

La ambigüedad del signo radical plantea un problema matemático y un problema didáctico. El problema matemático es debido a que pone en entredicho la racionalidad y la coherencia interna de las matemáticas, lo que obliga a optar por una sola de las dos opciones posibles:

A) $\sqrt{\boldsymbol{4}} = \pm\boldsymbol{2}$

ó

B) $\sqrt{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{2}$ .

Optando por una de las dos opciones el problema de la ambigüedad del signo radical dejaría de existir desde el punto de vista de las matemáticas formales; no así el problema didáctico, ya que los estudiantes no solo aprenden de lo que se les dice, sino que también aprenden cuando están intentando dar sentido a las situaciones matemáticas que encuentran (Roach, Gibson y Weber, 2004).

Y las situaciones que encuentran parece que les lleva a pensar que $\sqrt{\boldsymbol{4}} = \pm\boldsymbol{2}$ . Al menos es lo que contestan cuando se les pregunta cual de las dos opciones A o B anteriores es la respuesta correcta. En diferentes encuestas informales (Buhlea y Gómez, 2008; Roach, Gibson y Weber, 2004) con estudiantes y profesores de diversos niveles educativos la mayoría contestó que la respuesta correcta es la A.

Esta respuesta, a la vista de lo que dicen y omiten los manuales sobre raíz y radical podría ser un producto de la enseñanza (Buhlea y Gómez 2008 y 2009, Gómez y Buhlea, 2009).

RAÍZ Y RADICAL EN LOS MANUALES

**Raíz y radical son la misma cosa**

Los manuales suelen identificar raíz y radical dado que afirman que el radical de un número es la raíz indicada de ese número (figuras 1 y 2) o que el símbolo $\sqrt{a}$ representa de modo abreviado la raíz n-ésima de un número real $\boldsymbol{a}$ definida como solución de la ecuación $x^2=a$ (figura 3).

**¡Presta atención!**

El término **radical** designa, indistintamente, el **símbolo radical**, $\sqrt[n]{\ }$, y la **raíz indicada**, $\sqrt[n]{a}$.

Fig. 1: Oxford (2003). 4º Secundaria, p. 27

Radical de número es la raíz indicada de ese número.
En el radical $\sqrt[n]{a}$, n se llama **índice** y a es el **radicando**.
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, n es número natural.

Fig. 2: SM (2003). 4º Secundaria, Algoritmo. Opción b, p. 21

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número $a$, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número $b$ que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**; $a$, **radicando**, y $n$, **índice** de la raíz.

Fig. 3: Anaya (2004). 4º Secundaria, Opción a, p. 52

Esta identificación entre raíz y radical junto con la definición de raíz a través de la ecuación $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$, tiene consecuencias que están relacionadas con el problema de la ambigüedad del signo radical.

Una de ellas es que al considerar los números negativos la definición de raíz cuadrada contiene dos valores, ya que la ecuación $b^2=a$ tiene dos soluciones opuestas. Así, cuando $a$ es un número determinado, como por ejemplo 4, su raíz cuadrada, el número b, vale +2 y -2, y lo mismo ocurre con su radical, lo que se escribe de modo abreviado, con el doble símbolo ±, (figuras 4 y 5)

**Raíces de índice par**

$$\sqrt{9} = \pm 3, \text{ ya que } \begin{cases} 3^2 = 9 \\ (-3)^2 = 9 \end{cases}$$

Fig. 4: McGraw (1997), Matemáticas 3º ESO, p. 25

RADICAL CUADRÁTICO

Índice → $\sqrt[2]{36} = \pm 6$ ← Raíces cuadradas

Radicando

Fig. 5: SM. (2004). 3º Secundaria, Algoritmo. p. 36

Otra consecuencia es que se favorece la idea de que raíz y potencia (por ejemplo raíz cuadrada y elevar al cuadrado) son operaciones inversas (figuras 6, 7 y 8).

La potenciación tiene una operación inversa: la radicación. En ella se conocen la potencia y el exponente y tenemos que encontrar la base.

Figura 6: Santillana (2005).4º Secundaria, p. 30

Calcular la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado:

$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$

Figura 7: Anaya (2005).1º Secundaria, p. 52

La **radicación** es la operación inversa a la potenciación, es decir, la radicación consiste en hallar la base de una potencia conociendo su valor y el de su exponente natural.

Figura 8: Oxford (2003). 4º Secundaria, p. 27

En coherencia con esta concepción del radical, algunos desarrollos algebraicos, como por ejemplo el de la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas, se concretan con formulaciones donde al despejar la x el radical no lleva doble signo: $\boldsymbol{x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2}$ (figura 9).

Ejemplos:

- Resolvemos la ecuación $2x^2 - 8 = 0$, despejando $x$: $x^2 = 8/2 = 4$; $x = \sqrt{4} = \pm 2$. La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Fig. 9: Santillana (1999). Matemáticas, 4ª Secundaria, Opción b, p. 64

**Raíz y radical no son la misma cosa**

Otros manuales suelen diferenciar raíz y radical, de tal modo que restringen el valor del radical a un solo valor, el valor positivo de la raíz. De este modo, aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, $\boldsymbol{\sqrt{4}}$ solo se refiere a la positiva: $\boldsymbol{\sqrt{4} = 2}$ (figura 10), y para representar las dos raíces cuadradas de un número se ponen los signos mas y menos delante del radical (figuras 11 y 12).

- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, con $\sqrt{4}$ nos referimos solo a la positiva: $\sqrt{4} = 2$. En general, un número positivo, $a$, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$

Fig. 10: Anaya (2004). 4º Secundaria, Opción A, p. 52

**Número de raíces**

Si el **índice n es par** se pueden presentar tres casos:

**Radicando positivo**: existen dos raíces opuestas.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 9 puede ser +3 y −3.

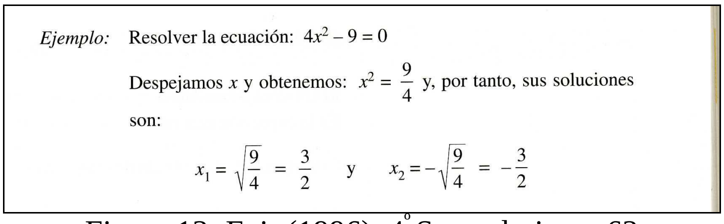
Para distinguir las dos raíces se escribe: $\sqrt{9} = 3$ y $-\sqrt{9} = -3$

Fig. 11: SM (2003). 4º Secundaria, Algoritmo. Opción b. p. 21

- Todo número real positivo, $a$, tiene dos raíces de igual índice, una positiva y otra negativa, que se representan por $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$:
  - Las raíces cuartas de 16 son $\sqrt[4]{16} = 2$ y $-\sqrt[4]{16} = -2$, debido a que $2^4 = (-2)^4 = 16$.
  - Las raíces cuadradas de 3 son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, que se dejan indicadas

Fig. 12: Oxford (2003). 4º Secundaria, p. 27

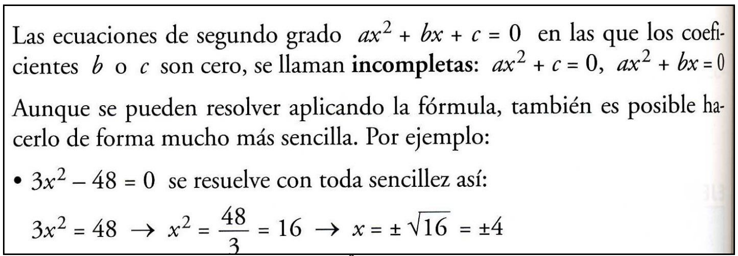
En coherencia con esta concepción restringida a un solo valor del signo radical, el desarrollo algebraico de, por ejemplo las ecuaciones de segundo grado incompletas, lleva los signos mas y menos o el doble signo delante del radical al despejar la x: $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ (figuras 13 y 14).


*Ejemplo:* Resolver la ecuación: $4x^2 - 9 = 0$

Despejamos $x$ y obtenemos: $x^2 = \frac{9}{4}$ y, por tanto, sus soluciones son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$$

Figura 13: Ecir (1996). 4º Secundaria, p. 63


Las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ en las que los coeficientes $b$ o $c$ son cero, se llaman **incompletas**: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$

Aunque se pueden resolver aplicando la fórmula, también es posible hacerlo de forma mucho más sencilla. Por ejemplo:

- $3x^2 - 48 = 0$ se resuelve con toda sencillez así:

$$3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = \frac{48}{3} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Figura 14: Anaya (2004). 4º Secundaria, Opción A, p. 110

En resumidas cuentas, para unos manuales el desarrollo correcto de la ecuación $x^2=4$ es $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, y para otros es $x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$

**Lo que omiten los manuales**

Después de esta constatación, lo inmediato sería aclarar cuál es la concepción correcta; es decir, cuál es el verdadero significado matemático del signo radical, pero los manuales no lo dicen, ni tampoco dan razones que permitan averiguarlo. Además de no justificar sus definiciones ignoran que las sutilezas que presenta el signo radical son a menudo fuente de conflictos cognitivos que se manifiestan en forma de incoherencias, falsedades o paradojas.

Un ejemplo de estas incoherencias es que si se asigna un doble valor al radical, como en $\sqrt{4} = \pm 2$, se viola la importante propiedad de equivalencia de radicales: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Esto es así, porque al aplicarla a $\sqrt[6]{3^2}$ y $\sqrt[3]{3}$ se obtiene que ambos radicales son iguales. Sin embargo, atendiendo a su valor no lo son, puesto que al ser el índice del primer radical par éste tiene dos raíces cuadradas (una opuesta de la otra) y como el índice del segundo radical es impar éste solo tiene una raíz. Entonces, ¿son equivalentes?

Si por el contrario se asigna un solo valor al radical, en la siguiente paradoja, entresacada de un libro de recreaciones matemáticas de 1907, la explicación que da el autor carecería de sentido.

| | |
|---|---|
| *Se tiene idénticamente 4 – 10 = 9-15, 4 es el cuadrado de 2; 10 es igual a 2 veces el producto de 2 por 5/2; igualmente, 9 es el cuadrado de 3 y 15 es igual a dos veces el producto de 3 por 5/2; completemos los cuadrados añadiendo a los dos miembros el cuadrado de 5/2 o 25/4, y tendremos así: $(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$.* <br> *Extrayendo las raíces cuadradas de los dos miembros (2 – 5/2) = (3 – 5/2). Y, por consecuencia 2=3.* <br> *El absurdo viene de la omisión del doble signo al extraer la raíz" (Rouse Ball, 1907, 1992, p. 103).* | $4 - 10 = 9 - 15 \leftrightarrow$ <br> $2^2 - 2\cdot\frac{5}{2} = 3^2 - 3\cdot 2\cdot\frac{5}{2} \leftrightarrow$ <br> $2^2 - 2\cdot\frac{5}{2} + \frac{25}{4} = 3^2 - 3\cdot 2\cdot\frac{5}{2} + \frac{25}{4} \leftrightarrow$ <br> $\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \leftrightarrow$ |

| | |
|---|---|
| | $\left(2-\frac{5}{2}\right)=\left(3-\frac{5}{2}\right)$ <br> $\leftrightarrow 2=3$ |

Lo que el autor sugiere en el texto es que el paso correcto es como sigue:

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2 \leftrightarrow \sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2} \leftrightarrow \pm\left(2-\frac{5}{2}\right)=\pm\left(3-\frac{5}{2}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \pm\left(-\frac{1}{2}\right)=\pm\left(\frac{1}{2}\right)$$

Obsérvese que en esta explicación se da a entender que $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\pm\left(2-\frac{5}{2}\right)$, pero esto va en contra de la idea de que raíz cuadrada y elevar al cuadrado son operaciones inversas.

**La opinión de los expertos.**

Los matemáticos han decidido asignar a la expresión radical $\sqrt[n]{x}$, x≥0, una sola de las raíces de x, la no negativa, a la que denominan raíz principal o aritmética. Así que, para ellos, lo correcto es $\sqrt{4}=2$.

> Cada número real no negativo a tiene una raíz cuadrada no negativa única. Nota: Si a≥0, su raíz cuadrada no negativa se indicará por $a^{1/2}$ o por $\sqrt{a}$ (Apostol, 1990. p. 36).
>
> El símbolo $\sqrt{z}$ para $z \geq 0$ denota aquél número no negativo cuyo cuadrado es z (Courant, R. y John, F., 1979, p. 38).
>
> Si A es un número real positivo, la única raíz positiva de $x^n - A = 0$ se escribe $x=\sqrt[n]{A}=A^{1/n}$ (Lentin, A., Rivaud, J., 1969, p. 164).
>
> Acordamos denotar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada positiva, y llamarla simplemente raíz cuadrada de a. Así, $\sqrt{4}$ es igual a 2 y no -2, aunque $(-2)^2 = 4$ (Lang, 1974. p. 10).

Esta restricción es necesaria para no violar un requisito necesario para la definición de exponente racional: $a^r$, $r\in$Q, y es que éste no debe depender del representante de $r$ elegido para ese número racional.

Si se aceptara el doble valor del radical la propiedad $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$ sería falsa, como se ha mostrado en el caso de $\sqrt[6]{3^2}$ y $\sqrt[3]{3}$. Entonces, la definición de $a^r$, con $r=\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}$, no sería posible, ya que no se cumpliría que $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{km}{kn}}=\sqrt[kn]{a^{km}}$.

Por otra parte, en coherencia con el criterio de asignar un solo valor al radical los matemáticos consideran que $\sqrt{x^2}=|x|$, con lo cual no violan el concepto formal de operación, ya que a diferencia de los que ocurre con la adición y la multiplicación, que establecen funciones biyectivas: x→x+a , x→x·a, a≠0 que tienen inversas únicas, la operación x→ $x^2$, no establece biyección, ya que $x^2 = (-x)^2$.

Para que la función $x^2$ sea biyectiva hay que restringir el conjunto de argumentos a la media recta x≥0, así en este conjunto su función inversa es $\sqrt{x}$. Análogamente, restringiendo los

argumentos a la mitad negativa del eje X obtendríamos $-\sqrt{x}$ como función inversa. Por consiguiente, la función $x^2$ considerada en todo el eje X no tiene una función inversa única, aunque puede decirse que la inversión de esta función tiene dos "ramas" (después de la restricción adecuada del conjunto de estos argumentos) (Kuratowski, 1981, p. 79).
En consecuencia, para que la función $x \rightarrow x^2$ tenga inversa tiene que confinarse a una de sus ramas, $x \geq 0$. Análogamente para que la operación inversa $\sqrt{x}$ sea única tiene que confinarse al conjunto imagen de los números positivos.
Una consecuencia de todo esto es que en sentido estricto en R no se puede ni se debe decir que raíz cuadrada y elevar al cuadrado son operaciones inversas, ya que esto solo es cierto cuando el radicando es un número positivo (figura 15)

Si $a$ es un número positivo, *la raíz cuadrada* de $a$ es un número positivo cuyo cuadrado es $a$. Se escribe $\sqrt{a}$, el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical* y $a$ es el *radicando.*

Además: si $a$ es un número positivo $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{(-a)^2} = a$

si $a$ es un número negativo $\sqrt{a^2} = -a$

*Ejemplos:* $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{13^2} = 13$; $\sqrt{(-2{,}5)^2} = 2{,}5$; $\left(\sqrt{3{,}2}\right)^2 = 3{,}2$

Figura 15: Ecir (1996). 4º Secundaria, p. 11

No debe entenderse que esto da la razón al argumento usado en la paradoja anterior de que $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2} = \pm\left(2-\frac{5}{2}\right)$; la explicación que corresponde a los desarrollos matemáticos actuales es que el absurdo viene de la no consideración de que $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2} = \left|2-\frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$ y que $\sqrt{\left(3-\frac{5}{2}\right)^2} = \left|3-\frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$

## IMPLICACIONES EDUCATIVAS

A lo largo de esta ponencia se han mostrado algunas de las sutilezas que presenta el signo radical y que pasan desapercibidas por los desarrolladores de libros de texto, profesores y estudiantes.
Estas sutilizas afectan a la distinción entre "raíz" y "radical", al doble uso del signo como operación y como resultado de una ecuación, a los requisitos y restricciones para definir las potencias racionales y, también a la necesidad de ser coherentes con la concepción funcional de las operaciones y sus inversas.
De acuerdo con Tirosh y Even, es una buena idea, que casos problemáticos como el mencionado puedan ser utilizados en la formación de profesores, para facilitar su conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza, contestando a cuestiones como, por ejemplo: ¿cuáles son las razones que hay detrás de la elección de una cierta definición?
Pero lo que parece más importante es aprovechar el valor que tienen estos casos para señalar que en matemáticas el aprendizaje no debe confiarse exclusivamente a lo que está escrito en los manuales. Hay casos, como los que se han discutido aquí, en que es obvio que producen confusión, por omisión de información o por la misma información que reproducen.

Por eso, el análisis de manuales trasciende a su consideración como herramienta para el análisis didáctico y adquiere el carácter de componente crucial en la investigación en didáctica de las matemáticas, que no puede quedar reducida a una interpretación del paradigma cognitivista exclusivamente volcado en lo que piensan los estudiantes o los profesores.

**Referencias**


Apóstol, T.: 1990, *Calculus*. Vol.1. Barcelona: Reverté.

Anaya (2004). *Matemáticas 4º Secundaria*. Opción A. José Colera Jiménez, Rosario García Pérez, Ignacio Gaztelu Albero, Mª del Mar Martínez Alonso, Mª José Oliveira González. Madrid. Grupo Anaya

Anaya (2005). *Matemáticas 1º Secundaria*. José Colera Jiménez, Ignacio Gaztelu Albero. Madrid. Grupo Anaya.

Buhlea, C. y Gómez, B.: 2008, Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania). En Ricardo Luengo, Bernardo Gómez, Matias Camacho, Lorenzo Blanco (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*. 217-239. Badajoz: SEIEM, SPCE y APM.

Courant, R. y John, F.: 1979, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Vol. I, México: Limusa.

Freudhental, H.: 1981, 'Major Problems of Mathematics Education', *Educational Studies in Mathematics, 12*(2) 133-150.

Gómez, B.: 2000, Los libros de texto de matemáticas. En Antonio Martinón (Ed.). *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, 77-80. Madrid: Nivola.

Gómez, B.: 2008, Pasado y presente de los manuales escolares. En Associação de Professores de Matemáticas - APM (Eds.), *Actas do SIEM - 2007. XVIII SIEM. Seminário de Investigação em Educação Matemática. Painel: Avaliação de Manuais Escolares*. 1-8. CD

Gómez, B. y Buhlea C.: 2009. The ambiguity of the sign √. *6th CERME - Congress of The European Society for Research in Mathematics Education*. Pre-congress publication. Papers in the website of the congress: Research Report. Working Group 4 Algebraic thinking. Lyon, France. ERME (European Society for Research in Mathematics Education). Univ. Lyon.

Kuratowski, K.: 1981, *Introducción al cálculo*. México: Limusa.

L. Euler: 1770, *Vollst¨andige Anleitung zur Algebra*, Vol I. Kays. Acad. der Wissenschaften, St. Petersburg.

Lang, S.: 1971, *A first course in calculus*. Third Edition. Addison-Wesley. Readding Massachusetts

Lentin, A. y Rivaud, J.: 1969, *Álgebra moderna*, Madrid: Aguilar.

McGraw: 1997, *Matemáticas 3º ESO*. Antonio Pérez, Carlos Amigo, Pilar Peña, Ana Rodríguez y Fernando Sivit. Madrid: McGraw

Oxford: 2003, *Matemáticas 4º Secundaria*. Proyecto Exedra. Juan Luis Sánchez González, Juan Vera López. Estella: Oxford University Press España, S. A.

Roach, D., Gibson, D. y Weber, K.: 1994, 'Why Is $\sqrt{25}$ Not ±5', *Mathematics Teacher*, Vol. 97, Nº 1.

Rouse Ball, W. W.: 1992, *Récréations Mathématiques et Problèmes des Temps Anciens et Modernes. Première Partie. Arithmétique, Algèbre et Théorie des Nombres*. Deuxième édition française, traduit d'après la quatrième édition anglaise par J, Fitz-Patrick. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann, 1907. Rèimpresion. Sceaux: Éditions Jacques Garay. (1ª ed. 1892).

Santillana (1999). *Matemáticas, 4º Secundaria. Orbita. 2000.* Opción b. José Almodóvar, Pilar García, José Gil, Carmen Vázquez, Daniel Santos, Andrés Nortes Checa. Madrid. Santillana

Santillana (2005). *Matemáticas, 4º Secundaria. Orbita. 2000.* Opción b, Cristina de la Haza, Miguel Marqués Andrés Nortes. Madrid. Santillana

Schubring, G.: 1987, 'On the Methodology of Analysing historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor'. *For the Learning of Mathematics* 7, 3, 41-51.

Sfard, A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in mathematics* 22, 1-36.

Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B.: 1997, El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Agustín Escolano (Ed.) *Historia ilustrada del libro escolar en España*. Vol. 2. 373-398. Fundación G. S. Ruipérez.

SM (2003). *Matemáticas 4º, Secundaria. Algoritmo*. Opción B. José Ramón Vizmanos Buelta, Máximo Anzola González. Ediciones SM. (

SM (2004). *Matemáticas 3º, Secundaria. Algoritmo*. José Ramón Vizmanos Buelta, Máximo Anzola González. Ediciones SM.

Tirosh, D. y Even, R.: 1997, 'To define or not to define: the case of $(8)^{1/3}$', *Educational Studies in Mathematics* 33: 321-330.

Van Dormolen, J.: 1986, Chapter 4. Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson, and M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education*. 141-171. D. Reidel Publishing Company