

EL CASO DE LOG (-1)

Gómez, B., Depto. Didáctica de las Matemáticas de la U. de Valencia
Pardo, T.; Pastor, M.C. Estudiantes de Doctorado. Profesores de I.E.S.

RESUMEN

Como parte de un estudio sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de los números complejos, se hizo una revisión de tipo histórico-epistemológico con el fin de identificar algunas de las dificultades que los grandes matemáticos habían tenido que enfrentar y superar a lo largo de la evolución historia de estos objetos matemáticos. La intención era explorar si las dificultades identificadas se reproducen o están presentes en los estudiantes de hoy en día e incluso en sus profesores y en ese caso averiguar de qué modo las abordan.

Entre las dificultades identificadas es paradigmática la que está relacionada con la controversia suscitada en el siglo XVIII acerca de la existencia del logaritmo de los números negativos. En esta comunicación se aborda el caso de $\log(-1)$.

PROBLEMÁTICA

La controversia acerca de la existencia del logaritmo de los números negativos tiene su origen en un intercambio de correspondencia entre Leibniz y Johann Bernoulli, del 16 de Marzo de 1712 al 29 de Julio de 1713.

Usando las propiedades de los logaritmos Johann Bernoulli creía que $\ln(-x) = \ln x$. Su razonamiento, según Kline (1972, p. 545), era como este:

Dado que $(-x)^2 = x^2$, entonces $\ln(-x)^2 = \ln x^2$ $2\ln(-x) = 2\ln x$ $\ln(-x) = \ln x$ para cualquier $x > 0$.

En el caso $x = 1$, $\ln(-1)^2 = \ln 1^2$ $2\ln(-1) = 2\ln 1$ $\ln(-1) = \ln 1 = 0$

Bernoulli fortaleció su creencia con una demostración alternativa utilizando el cálculo diferencial. “Haciendo uso de la regla de la cadena, se tiene que $D_x [\ln(-x)] = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = D_x [\ln x]$ e igualando estas derivadas Bernoulli deduce que $\ln(-x) = \ln x$ ” (Dunham, 2000, p. 172).

Por otra parte, Leibniz “observó que si se hacía $x = -2$ en el desarrollo en serie de $\ln(1+x)$ $= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ el resultado era $\ln(-1) = -2 - 2 - 8/3 - 4 - 32/5 - \dots$ en consecuencia $\ln(-1)$ es la suma de infinitos números negativos y, por tanto, no vale cero como Johann Bernoulli había afirmado” (Dunham, p. 173).

En definitiva, Leibniz no admitía la existencia del logaritmo de los negativos, porque aceptar, por ejemplo, la existencia de $\ln(-1)$ supondría admitir la existencia de $\ln\sqrt{-1}$, ya

¹ El desarrollo de la serie $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ se había obtenido por aplicación del método de la división larga a $\frac{1}{1+x}$, seguido de la integración término a término. Se sabía ya, gracias a la obra de Gregory de St. Vicent, que el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$, desde $x=0$ a $x=x$, es igual a $\ln(1+x)$. Por lo tanto

$$\frac{x}{1+x} dx = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (\text{Ver Boyer, 1969, p. 486})$$

que por las propiedades de los logaritmos el primero es la mitad del segundo: $1/2 \ln(-1) = \ln(-1)^{1/2} = \ln \sqrt{-1}$, y esto era para él algo inexistente (Rey Pastor, 1985, 118); mientras que Bernoulli pretende que ese logaritmo sea real.

El tema de los logaritmos de los números negativos quedó sin resolver hasta que Euler encontró la respuesta definitiva.

Si bien, Euler pensaba que $\ln(-x)$ y $\ln x$ son diferentes y, en particular, que difieren en $\ln(-1)$, al parecer porque “tenía claro que $\ln(-x) = \ln[(-1)x] = \ln x + \ln(-1)$ ” (Dunham, p.173 y 174²).

Pero esto es desconcertante, ya que usando la misma propiedad de los logaritmos, la propiedad que dice que el logaritmo del producto es el producto de los logaritmos, Bernoulli y Euler llegaban a conclusiones contradictorias.

- Por un lado $\ln(-x) = \ln x$ porque $\ln(-x)^2 = \ln x^2$ $2\ln(-x) = 2\ln x$ $\ln(-x) = \ln x$
- Por otro lado $\ln(-x) = \ln x$ porque $\ln(-x) = \ln[(-1)x] = \ln x + \ln(-1)$.

¿Quién está en lo cierto y quién no? ¿Y por qué? ¿Qué es correcto en sus argumentaciones y qué es lo que no es correcto? ¿Acaso $\ln(-1)$ es cero y en ese caso ambos tendrían razón?

Antes de contestar a estas preguntas hacemos un paréntesis para contextualizar el problema del logaritmo de un número negativo en el ámbito escolar.

LOS LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS EN SECUNDARIA

En los textos de Bachillerato del curriculum actual los logaritmos de los números negativos aparecen en la “unidad” dedicada a las Ecuaciones logarítmicas del bloque temático “Álgebra”. En este contexto se presentan como objetos cuya existencia se niega o no se pueden hallar, dado que se trabaja en el contexto de los números reales

“Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo...”

Se resuelven teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos. Es conveniente comprobar las soluciones en la ecuación inicial, teniendo en cuenta que el logaritmo de un número negativo no existe...

$$2\log x = \log(10-3x)$$

$$\log x^2 = \log(10-3x) \quad x^2 = 10-3x \quad x^2 + 3x - 10 = 0 \quad x_1 = 2, x_2 = -5$$

La solución $x_2 = -5$ no es válida porque en la ecuación original aparece $\log x$ y no se puede hallar el logaritmo de un número negativo.

Por tanto, la solución única es $x_1 = 2$

(Si la ecuación inicial fuera $\log x^2 = \log(10-3x)$, serían válidas las dos soluciones”).

(Anaya. 2000. Bachillerato. Matemáticas I. p.61)

Nos quedamos con dos frases del autor. La afirmación de que : *sólo existe el logaritmo de números positivos*, y el comentario entre paréntesis: *Si la ecuación inicial fuera $\log x^2 = \log(10-3x)$, serían válidas las dos soluciones.*

¿No merecen ambas una explicación?

² Euler también rechazó la demostración alternativa de Bernoulli al señalar que derivadas iguales no garantizan funciones iguales, para ello apoyó su razonamiento en que de $D_x [\ln(2x)] = D_x [\ln x]$ no se sigue que $2x = x$. La conclusión correcta es, por supuesto, que funciones con derivadas iguales difieren en una constante, como $\ln(2x) = \ln x + \ln 2$. De forma análoga tenía claro que $\ln(-x) = \ln[(-1)x] = \ln x + \ln(-1)$. La constante en la que $\ln(-x)$ y $\ln x$ difieren era el escurridizo $\ln(-1)$ (Dunham, p.173 y 174).

En la resolución de la ecuación el autor se sitúa en el planteamiento de Leibniz, cuando rechaza la solución negativa. Pero cuando dice que si la ecuación inicial fuera $\log x^2 = \log (10-3x)$ serían válidas las dos soluciones, entendemos que es porque considera que entonces como $(-5)^2$ es un número positivo su logaritmo existe.

Es decir, que en la segunda expresión el log afecta a un cuadrado $(-5)^2$ que es un número positivo para el cual si que está definido el logaritmo, mientras que en la primera afecta a un número negativo (-5) donde el logaritmo no estaría definido.

Bajo esta argumentación, el primer paso del razonamiento de Bernoulli: $\ln(-1)^2 = \ln 1^2$

$2 \ln(-1) = 2 \ln 1$ no sería aceptable por indefinición del logaritmo de un número negativo.

¿Será esta la explicación que buscamos? Pero, si lo es, tampoco sería correcta la argumentación de Euler porque empieza escribiendo $\log(-x)$.

Por otra parte, presentado el problema a los estudiantes de un curso de la asignatura Didáctica de la Matemática de la licenciatura de Matemáticas, uno de ellos, se sintió estimulado a averiguar que pasaba, y preguntó a una profesora de Secundaria en ejercicio que opinaba del razonamiento de Bernoulli: $\ln(-1)^2 = \ln 1^2 \Rightarrow 2 \ln(-1) = 2 \ln 1 \Rightarrow \ln(-1) = \ln 1$. La profesora le contestó que el razonamiento era incorrecto de la misma manera que si de $(-2)^2 = (2)^2$ se deduce $(-2) = (2)$ entonces $-2 = 2$.

¿Qué enigma encierra este argumento? ¿Nos quiere decir la profesora, que con los logaritmos pasa lo mismo que con los radicales, que si no se tiene cuidado con algunas transformaciones se pierden valores y se llega a una contradicción?

LOS LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS EN LAS CALCULADORAS

En un trabajo reciente de Kahan y Richgels (2003) publicado en *Mathematics Teacher* aparece un problema relacionado con la controversia que nos ocupa. Esta vez en el contexto de las calculadoras. Es el caso de un estudiante de Secundaria que pregunta a su profesor “¿qué significa cuando la calculadora te da un número para el logaritmo de otro negativo? El profesor, con casi treinta años enseñando que el logaritmo de un número negativo no está definido, le pidió la calculadora al estudiante para ver qué pasaba, era una TI-86, tecleó LOG -1, después la dió a la tecla = y la calculadora mostró en la pantalla 0,1.36437635384.

Su idea de que el logaritmo de un número negativo no está definido no era ingenua ya que la afirmaba de distintas maneras: recurriendo a la representación gráfica de la función $y=10^x$ y a la observación de su asíntota horizontal, argumentando que 10 elevado a una potencia nunca puede dar como respuesta -1, o incluso, mirando la gráfica de $y = \log x$ dibujada en los libros de texto.

EXPLICACIONES

¿Qué significa que $\log(-1)$ sea 0,1.36437635384?

Espoleado por la cuestión que se le planteaba, el profesor se interesó por encontrar una explicación y un camino o estrategia de enseñanza de la misma que pudiera ser entendido por sus estudiantes.

Un aspecto a tener en cuenta, dice, es que la calculadora TI-86 trabaja en “modo complejo”, por lo que el par (a, b) en la TI-86 representa $a+bi$, por eso cuando la calculadora dice que $\log(-1) = 0,1.36437635384$ lo que significa realmente es $\log(-1) = 1.36437635384i$ o, lo que es lo mismo, que $10^{1.36437635384i} = -1$.

Para entender esto hay que tener en cuenta que en la notación anglosajona no se usa la coma sino el punto para separar la parte entera de la parte decimal. Es decir, que $0,1.36437635384i$ lo que significa es $0 + 1'364...i$

¿Qué significa $\log(-1) = 1'36437635384i$?

Para contestar a esta pregunta, el profesor dice, recordé la famosa igualdad $e^{i\pi} = -1$, de donde se sigue que $\ln(-1) = i\pi$. Si aquí se considera la fórmula que permite pasar de logaritmo neperiano a logaritmo decimal: $\log a = \ln a / \ln 10$ y se tiene en cuenta que $1/\ln 10$ es aproximadamente $0,4343$, se tendrá que aproximadamente $\log(-1) = \ln(-1)/\ln 10 = 0'4343 \ln(-1) = 0,4343 i = 1'364i = 0 + 1'364i$, que escrito en la forma $0,1.364...i$ es el resultado que da la calculadora.

Con esto lo que queda establecido es que el logaritmo de los números negativos existe, aunque en el campo complejo, por eso la afirmación de que solo existen los logaritmos de los números positivos, sólo es cierta en el campo real.

Con esto ya se puede decir que la afirmación de Bernouilli $\log(-1) = \log(1) = 0$ es falsa.

Pero, ¿cuál es el fallo de la argumentación de Bernouilli?

Llegados a este punto, dejamos al profesor y regresamos al siglo XVIII. Aparentemente Cotes (1682-1716) y De Moivre ya conocían la relación $\ln(\cos\theta + isen\theta) = i\theta$ (Boyer, 1986, pp. 558), de donde se sigue la importante fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$ atribuida a Euler y que por tanto, lleva su nombre, probablemente porque fue el primero en darla de forma exponencial moderna.

Sin embargo, parece ser que Euler obtuvo la fórmula por otro conducto. Euler era conocedor de los desarrollos en serie

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Sirviéndose de esto y haciendo $z = ix$, para x un número real, en el desarrollo de e^z , obtuvo la famosa fórmula que relaciona las funciones exponenciales y trigonométricas³

$$e^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) = \cos x + i \sen x$$

Aunque la fórmula es correcta, el razonamiento de Euler para obtenerla no constituye en absoluto una demostración, la objeción que cabe hacer, señala Courant y Robbins (1946, p. 488), es que el desarrollo en serie de e^z fue deducido en la hipótesis de que z era real, por lo que requiere una justificación la sustitución $z = ix$. Una justificación rigurosa precisa de los resultados de la teoría de funciones de variable compleja.

De esta fórmula, Euler concluye que el logaritmo de -1 no es real, como había creído Jean Bernouilli, sino imaginario, pues para $x = \pi$, $e^{i\pi} = -1$, y por tanto $\ln(-1) = i\pi$.

Razonando de forma análoga:

- para $x = +2k\pi$ se tiene que $e^{i(2k\pi)} = 1$, y $\ln(1) = 2k\pi i$.
- para $x = 0 + 2k\pi$ se tiene que $\ln 1 = 2k\pi i$, siendo k cualquier número entero.

³ Esta fórmula se puede obtener por otros conductos, por ejemplo a partir de la fórmula de DeMoivre, como se puede ver en Courant y Robbins (1946, p. 487-488).

En definitiva, Euler, dedujo que logaritmo de -1 tiene infinitos valores imaginarios: $+2k i\pi = (2k+1) i$, y que el logaritmo de 1 tiene también infinitos valores imaginarios $2k i$ y además un valor real (cuando $k=0$).⁴.

Ahora ya estamos en condiciones de explicar el fallo en el razonamiento de Bernoulli. De la fórmula de Euler se deduce que:

- (i) $\ln (-1)^2 = \ln 1 = 2k \quad i = \{ \dots, -2 i, 0, 2 i, 4 i, 6 i, 8 i, 10 i, \dots \}$
- (ii) $\ln (-1) = (2k+1)i \quad i = \{ \dots, -i, i, 3i, 5i, 7i, 9i, 11i, 13i, \dots \}$
- (iii) $2 \ln (-1) = 2(2k+1)i \quad i = \{ \dots, -2i, 2i, 6i, 10i, 14i, 18i, 22i, \dots \}$

Al comparar (i) y (iii) se observa que el conjunto de valores de $2 \ln (-1)$ constituye solo una parte del conjunto de valores de $\ln (-1)^2$. En consecuencia, la primera implicación del argumento de Bernoulli es falsa: $\ln(-1)^2 = 2\ln(-1)$, como dejaba entrever la profesora en su argumentación con los radicales. Razonando análogamente, se tiene que $\ln(1)^2 = 2\ln(1)$.

En términos formales, lo que significan estas desigualdades es que el teorema o propiedad de la adición para logaritmos es peculiar en la variable compleja. En efecto, como hemos visto la función exponencial para argumentos complejos es periódica : $e^{(z+2k i)} = e^z$, y tiene el periodo $2 i\pi$. Por lo tanto,

“para cualquier $z \neq 0$ la ecuación $e^z = e^z$ es equivalente a $z = \log e^z + 2k i$. Para dos complejos cualesquiera z_1, z_2 que no se anulan, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} = e^{\log e^{z_1} + \log e^{z_2}}$ y, por otra parte, $e^{z_1+z_2} = e^{\log e^{z_1+z_2}}$.

De aquí que $\log e^{z_1+z_2} = \log e^{z_1} + \log e^{z_2} + 2k i$, donde k es un entero (Courant, 1978, 874-875).

Por último para desafiar a los lectores interesados, planteamos una nueva cuestión : ¿Puede ser el $\sin x = 4$? La solución está en la variable compleja.

Referencias.

Anaya. 2000. Bachillerato. Matemáticas I (Libros de texto). Madrid. Grupo Anaya
 Boyer, C (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza U., 1968.
 Courant, R. y Robbins, H. (1944). *¿Qué es la matemática?*. Madrid: Aguilar. 1979.
 Courant, R. y John F. (1978). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Vol. II. México. Limusa.
 Cardano y Tartaglia. *Las matemáticas del Renacimiento italiano*. Nivola.
 Dunham, W.(2000) *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Madrid. Nivola.
 Kahan, J. y Richgels G. (2003). My Calculator Is Broken; It says the log of (-1) Is ... *Mathematics Teacher*. Vol. 96, N° 2. February
 Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. II*. Madrid. Alianza Universidad. (1992)

⁴ Euler demostró de una manera análoga que, una potencia de exponente imaginario de un número imaginario puede dar como resultado un número real. A partir de $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ resulta, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $e^{i\pi/2} = i$, luego $(e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$, de donde $i^i = e^{-\pi/2}$.