El CÁLCULO FLEXIBLE[1]

Bernardo Gómez Alfonso

Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España

Bernardo.gomez@uv.es

Resumen

En esta ponencia se hace una propuesta alternativa de enseñanza del cálculo algorítmico. Para explicar esta propuesta se describen las distintas clases de cálculo, sus fundamentos y sus representaciones. Se justifica la propuesta con una reflexión teórica sobre el problema de fondo de la enseñanza del cálculo aritmético.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo aritmético se orienta al aprendizaje de los cuatro algoritmos tradicionales de las operaciones elementales, y se hace de un modo que los estudiantes sólo adquieren una competencia limitada en lo que se refiere a saber sumar, restar, multiplicar y dividir, ya que los estudiantes solo aprenden un algoritmo para cada una de las operaciones elementales, lo aprenden de forma reglada y solo aprenden el modo de hacerlo con lápiz y papel.

Los profesores suelen ignorar otras propuestas de enseñanza más flexibles, acostumbrados como están a reproducir un modelo metodológico en el que se sienten cómodos, porque es aquél con el que ellos aprendieron, o porque es el que el currículum oficial les ordena.

En esta ponencia se hace una propuesta alternativa, que aquí se denomina cálculo flexible. Para comprender esta propuesta se necesita profundizar en el conocimiento de las distintas clases de cálculo, sus fundamentos y sus representaciones. Además, para argumentar a favor de una determinada propuesta metodológica se necesita conocer el problema de fondo que se pretende resolver con esa propuesta.

En lo que sigue se glosan estos puntos, con reflexiones teóricas y ejemplos ilustrativos, con el fin de estimular al lector interesado a una reflexión que sin lugar a dudas no le dejará indiferente.

LAS DISTINTAS CLASE DE CÁLCULO ARITMÉTICO

La palabra cálculo procede del latín *calculus*, que quiere decir «guijarro» y, por extensión «bola» , «ficha», «peón». Hace referencia no sólo a las antiguas técnicas de cálculo sobre el ábaco, sino también al método, todavía más primitivo, del montón de piedras.

El cálculo aritmético es el que se realiza con números enteros o racionales; puede realizarse de cabeza, por escrito, o con la ayuda de materiales manipulativos como el ábaco, o electrónicos como la calculadora.

---

[1] Este trabajo se ha realizado gracias a la financiación del MEC . Ref.: SEJ2005-06697/EDUC

Cuando el cálculo se realiza de cabeza puede ser exacto, aproximado o estimado. Sólo al primero se le conoce como cálculo mental. Los otros se realizan con datos que no son exactos. El cálculo estimado se realiza con datos que proceden de un juicio o valoración, suelen ser números redondos, acabados en cero, para aprovechar las ventajas de nuestro sistema de numeración. El cálculo aproximado se realiza con datos que proceden de la medición, están condicionados por la inexactitud de los instrumentos de medida, lo que hace que a menudo números con cifras decimales, siendo un tipo de cálculo del que se puede conocer el margen de error.

Así, pues, el cálculo mental no debe confundirse con el cálculo estimado y éste no debe confundirse con el cálculo aproximado. Combinando los distintos tipos de cálculo se puede obtener el resultado de una "cuenta", anticiparla o juzgar su "razonabilidad".

Un ejemplo ilustrativo

El siguiente ejemplo es una adaptación de un mensaje con intencionalidad política que circuló por Internet, con él se pueden ilustrar las diferencias de los tres tipos de cálculo y también su aplicación práctica.

> Ejemplo. *Una noticia del informativo local de un determinado país anunció que el Partido de la oposición había recogido 4.000.000 de firmas en contra de una ley del Gobierno nacional, y que con gran espectáculo mediático había llevado estas firmas al Congreso de los Diputados en 10 llamativas furgonetas.*

La noticia para el periodista y para la mayoría de los ciudadanos se limitaba al interés del hecho en sí mismo, pero no todas las personas se enfrentan a las noticias del mismo modo. Hubo un ciudadano reflexivo que sospechó que el Partido de la oposición estaba inflando la noticia y que había exagerado al utilizar tantas furgonetas. Este ciudadano se hizo una pregunta clave: ¿Iban muy llenas las furgonetas?

Para responder a esta pregunta se propuso calcular cuánto espacio ocupan 4.000.000 de firmas. Comenzó por hacer una estimación, supuso que las firmas se habían recogido en hojas tamaño folio o DIN A4, y que cada hoja admitía como mínimo diez firmas. Con esta cantidad de firmas por hoja, pensó que sin duda su estimación era favorable para el partido de la oposición. ¡Humm, se dijo, diez firmas por hoja! ¡Qué menos! ¡Y sólo por una cara!

Con esta estimación hizo un cálculo mental, dividió 4.000.000 ÷ 10 quitando un cero cada uno de los términos de la división, así llegó a la conclusión de que como máximo se necesitaron 400.000 hojas.

Inmediatamente se preguntó cuánto espacio ocupan 400.000 hojas. Para responder a esta pregunta no pudo medir las dimensiones de una hoja, ya que al ser las hojas muy estrechas el error era muy grande. En cambio, si que podía medir, aunque solo aproximadamente, las dimensiones de un paquete corriente de 500 hojas de los que se encuentran en el comercio.

Con esta idea en la mente se propuso cuántos paquetes corrientes, de 500 hojas, se necesitan para 400.000 hojas. Otro sencillo cálculo mental le dio el resultado.

¡Humm!, ¿400.000 ÷ 500? Esto se puede calcular sin más que suprimir dos ceros a ambos términos de la división, lo que da 4000 ÷ 5: y esto, a su vez, se puede calcular dividiendo 40 ÷ 5, que son 8, y añadiendo dos ceros al resultado; lo que da un total de 800 paquetes.

A continuación averiguó cuanto ocupan 800 paquetes, para lo cuál hizo un cálculo aproximado, ya que al medir las dimensiones de un paquete con una regla sólo obtuvo valores aproximados con un rango de error de ± 1 cm. Los resultados fueron 297, 210 y 55 cm., para cada uno de los respectivos lados. Con estos datos, calculó el triple producto: 297 x 210 x 55, aunque esta vez no se atrevió a hacerlo de cabeza, por lo que optó entre el lápiz y papel o la calculadora. Lo importante es que halló que el volumen de un paquete es 3430350 cm^3.

Sólo quedaba por averiguar la capacidad de una furgoneta mediana. Rápidamente encontró en una página de Internet que una furgoneta de segmento medio tiene una capacidad aproximada de 7’3 m^3. Entonces se preguntó: ¿Cuántas furgonetas de 7,3 m^3 se necesitan para transportar los 800 paquetes que ocupan 3430350 cm^3.

Como el volumen de la furgoneta venía dado en m^3 y el volumen de cada paquete lo tenía en cm^3, decidió homogeneizar las unidades. Un nuevo cálculo mental contando el número de saltos para pasar de una unidad a otra y una estimación por redondeo le dio como resultado que 3430350 cm^3 era poco más de 0,0034 m^3.

Para saber cuánto ocupan los 800 paquetes, ya solo faltaba multiplicar 0.0034 x 800. Aunque dudó entre el cálculo estimado, el mental, el escrito y la calculadora, optó por un cálculo estimado y halló que 800 paquetes de 500 hojas ocupan entre 2’4 y 3’2 m^3. ¡Menos de la mitad de la capacidad de carga de una furgoneta! ¡De las 10 furgonetas, 9 y ½ iban vacías!

El siguiente cuadro sintetiza el proceso seguido por el ciudadano ejemplar.

¿Cuántas firmas por hoja?	10 firmas	Estimación
¿Cuántas hojas se necesitan para 10.000.000 de firmas?	4.000.000 x10=400.000	Cálculo mental
¿Cuántos paquetes de 500 hojas se necesitan?	400.000 x 500=800	Cálculo mental
¿Cuánto ocupa un paquete de 500 hojas?	297x210x55=3430350 cm^3	Cálculo escrito o con calculadora
¿Cuánto cabe en una furgoneta	7’3 m^3	
¿Cuántos m^3 son 3430350 cm^3?	0’0034 m^3	Cálculo mental y estimación
¿Cuánto ocupan 800 paquetes de 500 hojas?	0,0034 x 800 es menos de 3’2 m^3	Cálculo estimado
Cuántas furgonetas de 7,3 m^3 se necesitan	¡Menos de ½ furgoneta!	Cálculo estimado

Cuadro resumen de las distintas formas de usar el cálculo en el ejemplo anterior

LOSFUNDAMENTOS Y LAS REPRESENTACIONES

Mucha gente cree que los métodos de cálculo aritmético son diferentes según sean de cálculo mental, de cálculo estimado o de cálculo escrito. Esa es una percepción que merece un comentario, ya que en realidad nada hay en los métodos de cálculo que permita decir que "éste es un método de cálculo mental" o "éste es un método de cálculo escrito".

Los siguientes ejemplos pueden ayudar a explicar esta afirmación. El primero (fig. 1) está tomado de una serie escolar que comenzó a editarse en el periodo de transición siglo XIX al XX, aunque la edición utilizada aquí es de 1944. Como se puede ver, el texto utiliza un lenguaje "de columnas" para explicar un método de cálculo para multiplicar por un número formado sólo por nueves.

728. *Cuando uno de los factores se compone de un número formado por uno o más nueves, la operación de multiplicar puede suplirse por una resta*

Multipliquemos: 1.º, 875 × 9; 2.º, 2496 × 99; 3.º, 4620 × 999.

1.º	8750	2.º	249600	3.º	4620000
	— 875		— 2496		— 4620
Producto....	7875	Producto....	247104	Producto....	4615380

Fig. 1. Dalmau Carles, 1944

El segundo texto (fig. 2) , procede de una serie escolar de la primera mitad del siglo XX. En él se utiliza un lenguaje "retórico" para introducir "la regla" para multiplicar por números formados también solo por nueves, después el autor pone un ejemplo de aplicación usando el lenguaje horizontal, y finalmente explica el fundamento del método como realización de la equivalencia entre 99 y 100-1.

50. **Multiplicación por 9, 99, 999, etc.** — Esta multiplicación puede reducirse a una resta. Se añaden al multiplicando tantos ceros como nueves tiene el multiplicador y de este número se resta el multiplicando.

Ejemplo: 178 × 99. — Cálculo: 17.800 — 178 = 17.622.
Al proceder así, multiplicamos 178 por (100 — 1), cantidad igual a 99.

Fig. 2. Edelvives, 1934

En estos dos ejemplos se aborda un mismo problema, la multiplicación por números compuestos solo de nueves. Cabe preguntarse si son los mismos métodos, con apariencias diferentes, o son métodos diferentes. Desde el punto de vista del análisis de los fundamentos conceptuales la respuesta es que son los mismos métodos, y desde el punto de vista del análisis de las representaciones la respuesta es que son diferentes.

Los fundamentos y las representaciones son aspectos claves para el análisis de los algoritmos de cálculo.

Aunque la noción de representación es compleja, aquí se puede entender como un medio de expresión y simbolización especializado: signos, reglas, convenios sintácticos, disposiciones prácticas, etc. Los sistemas de representación que usan los algoritmos de cálculo son básicamente el de columnas y el horizontal de igualdades y paréntesis. Mientras que las representaciones de los números son las posicionales, las multiplicativas o las de orden de unidad:

- posicional, 234;
- posicional completada con ceros, 200+30+4;
- multiplicativa, 2x100+3x10+4;
- multiplicativa, polinómico-científica, $2x10^2+3x10+4$; y
- ordenes de unidad, 2 centenas, 3 decenas y 4 unidades.

En la representación intervienen dos entidades, el objeto representado y el representante. Los objetos matemáticos no deben confundirse con la representación que se hace de ellos, ya que la complejidad de cada objeto matemático no se agota en un sólo sistema de representación, y cada sistema de representación pone de manifiesto unas propiedades y oscurece o dificulta otras.

En el caso del cálculo aritmético los sistemas de representación habituales: el de columnas y el horizontal, y su coordinación mutua, desempeñan un papel central en la enseñanza.

En el ejemplo siguiente (fig. 3), procedente de un texto de Primaria español, se muestra un intento de coordinar las representaciones numéricas, por un lado la representación con ordenes de unidad y por otro la forma completada con ceros, 65=60+5, con los sistemas de representación de los algoritmos, aquí el de columnas y el horizontal, 540+45= =60+5.

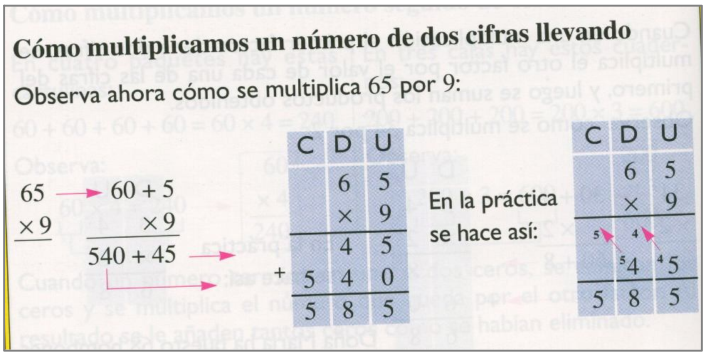

Fig. 3 Anaya, 1993. Serie

Tampoco es fácil explicar que son los fundamentos conceptuales ya que éstos pueden ser de muchos tipos. En cualquier caso, aquí se relacionan con los hechos básicos del sistema de numeración, los principios que rigen el cálculo y las propiedades de las operaciones que rigen la operatoria, lo que se puede o no se puede hacer. Más concretamente:

- Hechos básicos: el criterio de agrupamiento de base diez, las nueve cifras y su valor de posición, el cero con su significado de “columna vacía” y los equivalentes numéricos: 9=10-1, 5=10/2, 0’25=1/4,…
- Propiedades: las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva.
- Principios: se sintetizan en el principio general que consiste en reducir el caso que se quiere calcular a uno más fácil que ya se sabe resolver.

Atendiendo a los fundamentos conceptuales es relativamente fácil comprobar que los métodos presentados en los ejemplos anteriores se sustentan en los mismos hechos, propiedades y principios. Estos son, el principio es transformar una multiplicación en una resta que es más fácil de hacer; la realización de la propiedad distributiva y la equivalencia numérica entre 99 y 100-1 como hecho básico de la numeración.

Atendiendo a las representaciones se observa que estos dos métodos involucran cada uno una disposición práctica diferente, una es la de columnas para calcular por escrito y la otra es la horizontal, más susceptible de hacerse de cabeza; pero sobre todo más significativa, en la medida que une o junta lo que es la descripción del método, el ejemplo de aplicación y su fundamento como realización de las propiedades de las operaciones y de los hechos de la numeración.

EL PROBLEMA DE FONDO

Parece ser que las dificultades en el aprendizaje de los algoritmos son, a menudo, el resultado de esta falta de comprensión de los fundamentos conceptuales en los que se basan los procedimientos; pero también lo es que cuando los fundamentos básicos se han comprendido bien la mayoría de los estudiantes continúa sin relacionarlos con los procedimientos de cálculo (Resnick, 1982, p. 136). Es como si hubiera una separación infructuosa entre los dos aspectos del conocimiento matemático, el conocimiento conceptual del estudiante y su conocimiento de los procedimientos rutinarios con símbolos.

Esta separación ha sido motivo de debate durante años para los profesionales de la Ecuación Matemática. Inicialmente, la cuestión de fondo era saber en donde se debería poner más énfasis, si en uno o en el otro. Más recientemente se ha pasado, de ver a estos dos aspectos del conocimiento como si fueran independientes, a verlos como si estuvieran interrelacionados. Al aceptar esta interrelación la atención se ha dirigido a conocer cómo comprensión conceptual y destrezas se apoyan e influyen mutuamente. De este modo, lo que es crucial no es la comprensión o el procedimiento, sino la relación entre ambos aspectos del conocimiento matemático. Aceptar esto supone, entre otras cosas que hay que hacer cambios en el modelo de enseñanza con el propósito de hacer más explícita esta relación.

La terminología: lo sintáctico y lo semántico

No hay un acuerdo general en relación con la terminología que se debe usar en el debate para referirse a esta dicotomía de conocimientos, ya que como señala Skemp (1989, p. 2), por ejemplo, en la vida corriente comprensión no sólo se refiere a lo conceptual, ya que lo que muchos estudiantes y profesores entienden por comprensión es la posesión de las reglas y la habilidad para usarlas. En consecuencia Skemp, sitúa el problema en términos de comprensión conceptual y comprensión procedimental.

Otros investigadores, como Resnick, (1982), se refieren a conocimiento sintáctico y conocimiento semántico. Un algoritmo, como el de la suma, es por naturaleza totalmente sintáctico. Así, por ejemplo, en la suma 27 + 36, las reglas sintácticas son las que las prescriben cómo hay que escribir los datos, el orden en que hay que operarlos y qué símbolos hay que poner en cada posición.

$$\begin{array}{r} 2^{1}7 \\ \underline{+3\ 6} \\ 6\ 3 \end{array}$$

Mientras que el conocimiento semántico es el que permite justificar la sintaxis, de modo que permite decir que el 1 que se "lleva" al efectuar la suma de 6+7, es en realidad un diez o una decena que hay que reagrupar con las decenas 2 y 3.

Aunque la sintaxis refleja una semántica subyacente, o significado, un algoritmo no necesita incluir ninguna referencia a la semántica para ser ejecutado con éxito (Resnik, 1982, p. 137).

Los aspectos sintácticos y los semánticos del cálculo aritmético.

Con el conocimiento sintáctico se abarca tanto al sistema de representación simbólica, numérico y algorítmico, como a las convenciones sintácticas para la combinación de símbolos para expresarse y operar con ellos de forma aceptable, sin necesidad de argumentación que lo justifique.

El que posee este tipo de conocimiento puede reconocer, por ejemplo, que la expresión 35÷ ☐ = 2 es sintácticamente aceptable, mientras que 35+ = ☐x2 no lo es; o puede discernir cuál de las siguientes expresiones es sintácticamente aceptable

6+4x5, 6+x45, 3 ½ ÷ 2 ¼ × 1 ½ o 3 ½ ÷ 2 ¼ de 1 ½

y, cuál es el signo que se debe usar primero en los siguientes casos:

6+4×5, 6–4÷2, 24÷4×2

Con el conocimiento semántico se abarca al entramado conceptual que da fundamento a los métodos de cálculo, de modo que el que posee este tipo de conocimiento puede ver el significado subyacente de los símbolos.

Así, por ejemplo, en el método de cálculo para sumar números formados solo por nueves, el conocimiento semántico identifica la equivalencia de 99 y 100-1, autoriza a intercambiar ambas formas numéricas por que no se altera el resultado y reconoce que ese intercambio es pertinente porque permite transformar una suma en una suma y un resta más sencillas.

Por su parte, el conocimiento sintáctico lo que permite es formular la equivalencia y operar:

$$243+99 = 243 + (100-1) = 243+100 - 1$$

LA PROPUESTA DEL CÁLCULO FLEXIBLE

En un problema ordinario pueden estar involucrados distintos tipos de cálculo: mental, estimado, aproximado, escrito o con calculadora (como en el ejemplo introductoria de las firmas del partido de la oposición). La propuesta del cálculo flexible parte de esta realidad y trata de reorientar la enseñanza desde el enfoque tradicional orientado a "las cuatro reglas", hacia un enfoque integrador donde haya espacio para tomar decisiones en relación con las diferentes opciones y métodos alternativos de cálculo.

Con el cálculo flexible no se pretende buscar la rapidez, la inmediatez de la respuesta o la uniformidad en el método (todos usando siempre el mismo método); más bien, lo que se intenta es aprovechar la variedad de alternativas de cálculo disponibles, en un contexto de aprendizaje que supere la separación “escolar” entre las dos clases de conocimiento matemático, el procedimental y el conceptual.

Como se ha visto en los dos ejemplos extraídos de los textos de Dalmau y Edelvives, el sistema de representación horizontal es más significativo que el sistema de representación de columnas, en la medida que deja ver aspectos sintácticos y semánticos que en el sistema de representación de columnas permanecen ocultos.

Por eso en la propuesta del cálculo flexible se plantea como objetivo enseñar los métodos de cálculo ligando sus aspectos sintácticos y semánticos, y apoyando su presentación con ayuda del sistema de representación horizontal.

Otro objetivo del cálculo flexible es desarrollar la capacidad y preparación para usar métodos alternativos de cálculo. Esto supone cierta capacidad para identificar las formas equivalentes de una expresión numérica y las alteraciones invariantes de una operación aritmética. Y también supone cierta preparación o habilidad para discriminar de entre todas las expresiones equivalentes y las alteraciones invariantes las que son relevantes para la tarea.

Con el siguiente ejemplo, se quiere ilustra en qué consiste esta capacidad y habilidad.

Ejemplo. *¿De cuántas maneras diferentes se puede resolver 25 x 48?*

Ante esta pregunta pueden emerger distintos equivalentes numéricos, de ellos son relevantes para la tarea: 25=20+5, 48=40+8, 25=100/4, 48=50-2, 25=5.5, 48=6x8, ya que cada uno de ellos da lugar a un método diferente. A saber:

Descomponer y distribuir:

25x48 = 25 x (40 + 8) = 25 x 40 + 25 x 8 = ...

25x48 = (20 + 5) x 48 = 20 x 48 + 5 x 48 = ...

25x48= (20+5)x(40+8) =20x40+5x40+20x8 + 5x8

Transformar el producto en división:

25x48 = 100x(48:4) = 100x12 ...

Redondear :

25x48=25x (50-2) =25x50-25x2= ...

Factorizar:

25x48= 5x5x6x8 =5x6x5x8=30x40 = ...

Además pueden emerger alteraciones invariantes, como por ejemplo, la que sustenta el siguiente método:

“Doble y mitad”:

25x48= 50x24 = 100x12 = …

Lo interesante de estos métodos es que son susceptibles de ser métodos mentales. El lector puede intentarlo probando a efectuar la multiplicación 25x64 0 64x48 con ellos.

EPÍLOGO

En los párrafos anteriores se ha presentado una propuesta de enseñanza del cálculo elemental. Para explicarla se han glosado algunos aspectos relacionados como son la dualidad del conocimiento aritmético y el entramado de sus fundamentos y representaciones. Aquí sólo se ha aportado una pincelada, un primer acercamiento a una temática que ocupa la mayor parte del tiempo escolar y que es obviamente incompleta. Queda mucho por hablar, debatir, cuestionar, desarrollar, etc. sobre le mejora de la enseñanza del cálculo aritmético; pero lo importante es que la audiencia no permanezca indiferente. Sobre esta temática, lo único que se pude decir con rotundidad es que los tiempos han cambiado, y que no se puede seguir enseñando el cálculo como si las necesidades del mundo de hoy fueran las mimas que las del pasado

Referencias

ANAYA (1993). Serie de libros de texto. *Matemáticas 4º Primaria*. L. Ferrero, I. Gaztelu, Mª J. Luelmo, P. Mastín y L. Martínez. Madrid: Grupo Anaya.

Edelvives (1934). Serie de libros de texto. *Aritmética*. (J. E. Gerorge Brouillette). Segundo Grado. Séptima Edición. Zaragoza: Luis Vives.

Dalmáu Carles. J. (Serie. Ed de 1944). *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*. Nueva Edición corregida y aumentada. Libro del alumno. Grado profesional. Gerona: Dalmáu Carles. 1898.

Resnick, L. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. Carpenter, J. Moser, T. Romberg (ed.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 136-155.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. London. Routledge.