

L'article analitza l'evolució del càlcul aritmètic i el seu ensenyament en la cultura occidental a través de la història fins als nostres dies.

L'evolució històrica del càlcul aritmètic i del seu ensenyament

Introducció

Els orígens històrics del càlcul aritmètic són tan antics com la humanitat ja que ha estat present en totes les cultures per conèixer l'hora, mesurar la terra, fer comptes, aplicar impostos, determinar distàncies o aixecar edificis.

Els antics grecs van arribar a una concepció del fenomen numèric que els va portar a distingir entre l'estudi teòric i el càlcul pràctic. El primer van anomenar-lo *aritmètica* i el segon *logística*. Molt més endavant, a l'edat mitjana, a partir dels segles XII i XIII es va començar a usar el terme *algorisme* per referir-se al càlcul a la manera indoaràbiga; i pels volts de l'aparició de la impremta es va imposar com a denominació general el terme *aritmètica*, el qual anava acompanyat de l'adjectiu *pràctica* o *teòrica/especulativa* per diferenciar-ne les dues branques.

A l'edat mitjana, però, els càlculs es feien amb l'ajuda dels àbacs, i això va propiciar que el nom d'aquest instrument es fes servir sovint per referir-se al que era una espècie d'aritmètica pràctica mercantil, fet que explica que alguns autors italians denominessin aquestes aritmètiques *llibres d'àbac*.

Bernardo Gómez
Departament de Didàctica
de la Matemàtica.
Universitat de València

14 Enterrem els algorismes aritmètics!

A partir del segle XIX, l'estudi de l'aritmètica pràctica i de l'aritmètica teòrica s'unificà i passà a ser considerada la branca de les matemàtiques que tracta dels números. El terme "teoria" es reservà per al plantejament de conceptes i propietats, al costat de la fonamentació, quan era possible, d'alguns procediments; per la seva part, la "pràctica" s'identificà amb l'aplicació i l'execució dels procediments de càlcul en la resolució de problemes i exercicis.

La difusió del càlcul aritmètic

L'aritmètica hindú i àrab va significar el desenvolupament del càlcul aritmètic tal com el coneixem avui. Els seus mètodes, lligats indissolublement al sistema de numeració decimal i de columnes, es van difondre a Europa entre la segona meitat del segle XII i el començament del XIII, a través del *Liber Abaci* (1202) de Leonardo de Pisa i la versió llatina dels dos tractats d'al-Khuwrizmi (825): l'un d'aritmètica i l'altre d'àlgebra.

Això no obstant, els textos que més han incidit en la divulgació i difusió d'aquest tipus de càlcul, a més dels dos citats, són els denominats algorismes en l'àmbit més culte o universitari¹ i els llibres d'àbac en l'àmbit vulgar o popular.

Un *algorisme* era un text que compendiava el conjunt d'informació que es necessita per operar les xifres indoaràbigues en el sistema de numeració decimal, a saber: el seu significat, la seva nomenclatura, la manera de llegir-les, la manera d'usar-les per escriure els números i per executar els seus càlculs. Aquests textos solien explicar les operacions d'addició, sostracció, duplicació, divisió per dos, multiplicació, divisió, les progressions i el càlcul d'arrels quadrades i cúbiques.

Els dos "algorismes" més antics que es coneixen són del segle XIII: el *Carmen de Algorismo* d'Alexander de Villa Dei i el *Tractatus de Arte de Numerandi*, també denominat *Algorismus vulgaris*, de Johannes Sacrobosco.

1. A l'edat mitjana l'Aritmètica s'ensenyava amb la Geometria, Astronomia i Música, que formaven el "Cuadrivium", primer a les escoles monacals i després a les universitats.

El *Carmen de Algorismo* (1202) està escrit en vers (imatge 1), i no mostra ni definicions ni consideracions teòriques, característica que mostra una determinada concepció de l'ensenyament que busca afavorir l'aprenentatge de memòria.

L'*Algorismus* de Sacrobosco (imatge 2 esquerra) hi afegeix els principis del sistema decimal i les definicions de les operacions abans de donar les instruccions per al desenvolupament dels càlculs. Aquestes definicions seran recollides en els llibres posteriors sense a penes cap modificació i s'hi han mantingut fins no fa gaire (imatge 2 dreta).

74

CARMEN DE ALGORISMO.

Se decies: aursum procedas multiplicando.
 Post predicta scias breviter quod tres numerorum
 Distinctæ species sunt; nam quidam digiti sunt;
 Articuli quidam; quidam quoque compositi sunt.
 Sunt digiti numeri qui semper infra decem sunt;
 Articuli decupli digitorum; compositi sunt
 Illi qui constant ex articulis digitisque.
 Ergo, proposito numero tibi scribere, primo
 Respicias quis sit numerus; quia si digitus sit,
 Una figura satis sibi; sed si compositus sit,
 Primo scribe loco digitum post articulum; atque
 Si sit articulus, in primo limite cfram,
 Articulum vero tu in limite scribe sequenti.
 Quolibet in numero, si par sit prima figura,
 Par erit et totum, quicquid sibi continuatur;
 Impar si fuerit, totum sibi fiet et impar.
 Septem⁴ sunt partes, non plures, iatus artis;
 Addere, subtrahere, duplareque dimidiare;
 Sextaque dividere est, sed quinta est multiplicare;
 Radicem extrahere pars septima dicitur esse.
 Subtrahis aut addis a dextris vel mediabis;
 A leva dupla, divide, multiplicaque;

Imatge 1.

Alexander de Villa Dei. 1202,² p. 74

III.—Subtractio.

Subtractio est, propositis duobus numeris, majoris ad minorem excessus inventio: vel sic,

Johannes de Sacrobosco, 1240. p. 6

DE LA SUSTRACCION.

12. El objeto de la sustraccion es hallar el exceso de un número sobre otro mas pequeño. Este exceso se llama resto ó diferencia.

Bourdon, 1843, p. 30

VI.—Multiplicatio.

Multiplicatio est numeri per se vel per alium, propositis duobus numeris, est tertii inventio qui contineat alterum illorum quot continentur unitates in reliquo. In multiplicatione duo sunt numeri necessari, scilicet, numerus multiplicandus et numerus multiplicans. Numerus multi-

Johannes de Sacrobosco, 1240. p. 12

DE LA MULTIPLICACION.

17. Multiplicar un número por otro es (véase n.º 9) formar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad; y cuando los números propuestos son enteros, su multiplicacion se reduce á tomar el primero tantas veces como unidades contiene el segundo.

Bourdon, 1843, p. 35

Imatge 2

Està escrita en prosa i utilitza un llenguatge retòric (sense símbols) i reglat (sense raons), sense exemples que il·lustrin la disposició pràctica de columnes pròpia dels algorismes elementals (imatge 3).

2. Per als que no coneixen el vocabulari aritmètic utilitzat en aquesta època, cal dir que *species* indica una cosa semblant a 'tipus' o 'temes', tot i que en certa manera podria interpretar-se com a 'operacions'; *duplicar* i *demediar* és la multiplicació i divisió per dos; *figures* o *digitus* indica xifra o número compès entre 1 i 9; *article* indica un múltiple de 10 i *compositus* és un número més gran que 10 i no múltiple de 10.

16 Enterrem els algorismes aritmètics!

convertitur multiplicando. Sunt autem sex regule multiplicationis, quarum prima talis est: quiviam digitus multiplicat digitum, subtrahendus est minor digitus ab articulo suae denominationis per differentiam majoris digiti ad denarium, denario simul computato. Verbi gratia, si vis scire quot sunt quater in octo, vide quot sunt unitates intra octo et decem, denario simul computato, et patet quot sunt duo: subtrahatur ergo quaternarius a quadraginta bis et remanent

Johannes de Sacrobosco, 1240, p. 12

32, et haec est summa totius multiplicationis. Similiter quando digitus multiplicat seipsum. Quando autem digitus multiplicat numerum compositum, ducendus est digitus in utramque partem numeri compositi, ita quod digitus in digitum per primam regulam, et digitus in articulum per secundam regulam; postea producta conjungantur simul, et erit summa totius multiplicationis. Quando articulus multiplicat articulum, ducendus est digitus a quo denominatur ille articulus in digitum a quo denominatur reliquus. Quando articulus multiplicat numerum compositum, ducendus est digitus articuli in utramque partem numeri compositi; conjungantur producta, et patebit summa totius. Quando numerus compositus multiplicat numerum compositum, ducenda est utraque pars numeri multiplicantis in utramque partem numeri multiplicandi et sic ducetur digitus bis, quia semel in digitum et semel in articulum. Articulus similiter bis, quia semel in digitum et iterum in articulum: hic tamen ubique articulus non ad principales extenditur articulos. Si igitur velis aliquem numerum vel per se vel per alium multiplicare, scribe numerum multiplicandum in superiori ordine per suas differentias, numerum vero multiplicantem in inferiori per suas differentias, ita tamen quod prima figura inferioris ordinis sit sub ultima superioris. Hoc facto, ducenda est ultima multiplicantis in ultimam multiplicandi. Ex illo igitur ductu aut exerescit digitus, aut

Johannes de Sacrobosco, 1240, p. 13

Imatge 3

per rebaixar la dificultat, per evitar errors, per comprovar resultats, per ser ràpids, o senzillament perquè en matemàtiques sempre s'ha considerat que és més elegant i brillant agafar el camí més curt que no l'innecessàriament més llarg.³

3. En matemàtiques s'han cercat mètodes per abreujar el càlcul, no solament per estalviar temps, sinó també per reduir la possibilitat de cometre errors. Hi ha un altre motiu per reduir la quantitat de treball quan es fa un càlcul. Els matemàtics s'enorgulleixen d'agafar el camí més curt quan emprenen un "viatge". Troben elegant una solució curta d'un problema i matussera una d'innecessàriament llarga (Bowers i Bowers, 1961).

Un llibre d'àbac no és un manual per ensenyar l'ús d'aquest instrument, sinó un text que, seguint l'empremta del *Liber Abaci* de Leonardo, està organitzat com una sèrie d'exercicis pràctics, la major part d'interès mercantil. Aquests textos van coexistir amb els *algorismes* i encara que compartien amb aquests l'ús de les xifres indoaràbigues i els mètodes de càlcul de llapis i paper, solien mantenir l'ús de la numeració romana i prestaven una atenció especial a l'ús de les fraccions. Incloïen un apartat dedicat a la regla de tres i les seves aplicacions en els problemes de companyies, d'al·ligació, canvi, bescanvi, etc.; també dedicaven un capítol als problemes que es resolen mitjançant les regles d'una i dues falses posicions i que avui resolem mitjançant equacions de primer grau. Ja a la seva època tardana, es completaven amb un apartat dedicat a una àlgebra sincopada que servia per resoldre problemes que avui considerariem d'equacions de primer i fins i tot de segon grau.

Els llibres d'àbac s'esforçaven a presentar una gran varietat de mètodes de càlcul (imatge 4), perquè en una època en què no hi havia calculadores, un bon calculista no solament havia de saber calcular bé i amb seguretat, sinó que havia de fer-ho el més ràpidament possible. Això podria explicar l'interès que van tenir els autors de mostrar les formes i els mètodes pràctics més còmodes, senzills, segurs i breus possibles, ja fos per estalviar temps,

Coincidint amb l'aparició de la impremta, es produeix una gran expansió i difusió dels coneixements. Amb la integració del pensament matemàtic d'aquesta època en els usos i costums socioeconòmics es va propiciar la popularització de les aritmètiques mercantils impreses i escrites en les llengües vernacles.

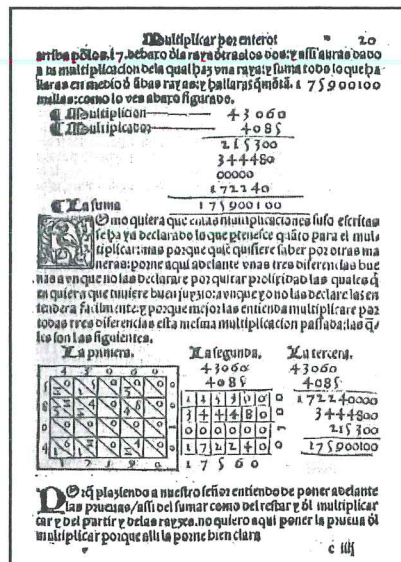
En el llarg període que comprèn des del naixement de la impremta fins a la darrerria del segle XVIII, el càlcul en les aritmètiques a penes mostra diferències notables. A partir del segle XIX, la necessitat d'adaptar la forma de presentació del coneixement aritmètic al nou model educatiu emergent —centralitzat, general i públic— va estimular la producció de manuals per a la infància, concebuts com a mitjà privilegiat per a la transmissió del saber i per controlar i uniformar la instrucció.

Aquests manuals, que pretenien exposar el coneixement de manera metòdica, concisa, clara i precisa per fer-lo ensenyable, van assentar les bases per a l'establiment d'un currículum obligatori comú per als estudiants d'un mateix nivell educatiu, i són la clau per entendre la manera com s'ha configurat l'aritmètica escolar de l'actualitat.

Tres aspectes mereixen ser destacats:

1. L'adopció del sistema mètric decimal, a partir de la llei de juliol de 1849 que l'implanta a Espanya i en fa obligatori (art. 11) l'ensenyament des de l'1 de gener de 1852.

Aquesta llei obligà a reestructurar els llibres de text, els quals van guanyar en simplificació i brevetat en virtut de la unificació de mètodes de càlcul que va significar la introducció dels números decimals. Així, en perdre importància els tediosos capítols dedicats als diferents sistemes de pesos i mesures i al càlcul amb complexos, va anar disminuint el seu temps escolar i augmentant el d'altres continguts.



Imatge 4.

Juan de Ortega, 1542, p. 20

18 Enterrem els algorismes aritmètics!

2. L'adaptació de l'ensenyament al principi que prescriu que tots els estudiants han de rebre el mateix ensenyament i han d'aprendre les mateixes coses en el mateix nivell educatiu, va requerir l'establiment d'un programa comú per als estudiants, un programa de mínims que tots havien d'aprendre. Això es va traduir, en el cas dels mètodes de càlcul, en l'ensenyament d'un sol mètode per a cada una de les operacions, el millor i el més general en cada cas.

En posar l'èmfasi en l'aprenentatge d'un únic algorisme per operació, la resta de mètodes alternatius van perdre en valoració i en la majoria dels casos es van deixar de banda. D'aquesta manera s'imposà com a percepció general que el càlcul aritmètic es reduïa a "quatre regles".

3. L'assumpció d'alguns dels mitjans de l'àlgebra (parèntesi, el signe igual, els signes de les operacions, el llenguatge horitzontal) per explicar les operacions d'una manera "metòdica" i en relació amb les seves propietats (imatge 5), amb els consegüents augment en la brevetat i pèrdua de retòrica.

Profesores: ¿Por qué introducir en los ELEMENTOS DE ARITMÉTICA nociones que les son estrañas, y que mas bien pertenecen al Algebra? Diré en primer lugar, para justificarme, que aquellos autores que han querido dar á conocer ciertas propiedades de los números, sin emplear los signos algebraicos, no han podido presentarlos sino de un modo incompleto y nada metódico; aun habiéndose visto precisados á usar signos abreviados de las operaciones aritméticas, cuando por el contrario el método que yo he observado, me ha permitido establecer una verdadera relación entre estas propiedades y sus mas importantes aplicaciones. Y en segundo lugar, que estas propiedades, cuyo conocimiento es indispensable á cuantos quieran poseer á fondo la Aritmética, no podrian entrar á formar parte de los Elementos de Algebra, si destruy la relación ó encadenamiento que hay entre las teorías que constituye esta parte de las Matemáticas.

Imatge 5. Bourdon, 1843, p. 14

En l'actualitat, els textos espanyols integren els distints llenguatges que han anat apareixent en el transcurs de la història (retòric, de columnes i horitzontal) en un model que es completa amb diagrames i fletxes que expressen missatges implícits tàcitament acordats (imatge 6).

Com multipliquem un número de dues xifres portant

Observa ara com es multiplica 65 per 9:

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 9 \\ \hline 540 + 45 \\ \hline \end{array}$$

C	D	U
	6	5
	x	9
	4	5
5	4	0
5	8	5

A la pràctica es fa així:

C	D	U
	6	5
	x	9
	4	5
5	4	0
5	8	5

Imatge 6

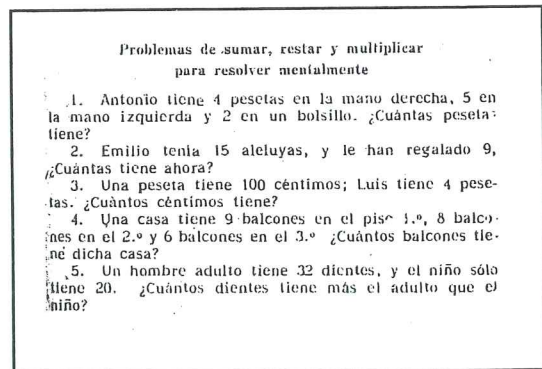
La irrupció del càlcul mental

En els llibres de text del final del segle XIX recobra força la vella teoria de la psicologia de les facultats.⁴ Aquesta teoria considera que la ment està constituïda per diverses facultats, com imaginació, memòria, percepció i raonament, i que aquestes facultats són, en certa manera, anàlogues als músculs i d'acord amb aquesta condició es formen i s'enforteixen amb l'exercitació, com més dura i fatigosa millor.

En l'àmbit de l'ensenyament de les matemàtiques, això va impulsar un corrent que insistia en l'ensinistrament en l'aritmètica mental, que consistia en el fet que l'estudiant resolgués llargues llistes de feines sense permetre-li el recurs al llapis i el paper. Des de llavors, l'aritmètica mental serà una presència comuna en els llibres de text escolars, fet que originà un canvi radical respecte a les aritmètiques precedents, on ni s'esmentava.

A Espanya s'aplicaren els adjectius "oral" i "mental" a una gran varietat de qüestions per ser resoltes de cap: exercicis de comptar, de calcular, problemes d'enunciat, preguntes en relació amb les alteracions de les dades pel resultat, preguntes relacionades amb la comprensió de l'artifici de les operacions (imatge 7).

El declivi de la teoria de "les facultats mentals" sembla que va començar quan, a partir de la dècada de 1920, es va constatar el nul efecte de l'ensinistrament en una disciplina sobre una altra de diferent.⁵ Més tard, noves investigacions van permetre concloure que la memorització de



Imatge 7. Dalmau, 1898, p. 43.

4. Atribuïda al filòsof i matemàtic alemany Christian Wolf (1679-1754) i descrita en la seva obra *Psychologia Rationalis* (1734) (NCTM, 1970b).

5. El declivi d'aquesta teoria de la "disciplina mental" va començar quan, a la dècada de 1920, Thorndike va presentar els resultats de la seva investigació amb test d'intel·ligència on comparava estudiants que havien estudiat "disciplines" amb estudiants d'Educació Física: les puntuacions obtingudes eren similars (Ausubel, 1969).

20 Enterrem els algorismes aritmètics!

fets d'un tipus determinat (poesia) no millora l'habilitat per memoritzar fets d'un altre tipus.⁶

Aquest fenomen va anar acompanyat d'un canvi en la concepció segons la qual el càlcul mental interessa pel seu valor com a disciplina, pel fet de considerar-lo (imatge 8) com a complement del càlcul escrit per a les aplicacions a la vida real.

Deben utilizarse el cálculo mental y el escrito; ambos son indispensables en toda actividad matemática y se complementan. Conviene que el niño se acostumbre a la indicación ordenada de las operaciones en la resolución de los problemas que, sobre todo en los primeros años, tiende a resolver mentalmente.

Imatge 8. Cuestionarios nacionales para la enseñanza primaria, 1953, p. 64

Més endavant, en les orientacions oficials per al currículum espanyol de Primària de la dècada de 1970, la idea que preval és formulada quan es diu que un dels objectius específics de l'Àrea de Matemàtiques ha de ser el desenvolupament de l'agilitat mental en el càlcul (*Folletos del Magisterio Español*, 1970, p. 30), i més tard, en els programes renovats dels anys vuitanta, s'amplia i concreta aquesta idea en termes de càlcul mental i ràpid de sumes, restes, multiplicacions i divisions (*Programas renovados*, 1981a, p. 21; 1981b, p. 7), perquè el càlcul mental és un aspecte a tenir en compte per a l'automatització de les operacions (*op. cit.* p. 72). Com a activitats per desenvolupar l'agilitat mental en el càlcul de les operacions es proposa que s'apliquin les propietats conegudes per simplificar i agilitar el càlcul mental (*op. cit.* 1981b, p. 145).

Tot això en un marc d'ensenyament cíclic (tornar al tema augmentant l'ordre de dificultat en cursos següents), en el qual es distribueixen les tasques de càlcul mental al llarg del llibre de text de cada curs i es procedeix a donar-los un tractament de períodes de temps curts però intensius.

6. Williams James investigà si aprendre una cosa podria ajudar a aprendre'n una altra i trobà que la memorització de certes classes de poesies no milloraven l'habilitat per memoritzar-ne d'altres. James va concloure que la retentiva no es podia millorar amb l'exercitació (Payne, 1966).

Actualment, els textos escolars espanyols actuen amb total llibertat metodològica i s'hi troben combinacions de tres tipus principals de llenguatges: el retòric reglat (imatges 9 i 10), el dels diagrames amb fletxes, i l'horitzontal d'igualtats. Aquest darrer, que és simbòlic i contret, prové de la sintaxi de l'àlgebra i permet unificar la descripció, l'exemple i la fonamentació dels mètodes com una realització de les propietats fonamentals de les operacions.

Multipliquem un número per 99

$$42 \times 99 = 42 \times (100 - 1) = \\ = 4.200 - 42 = 4.158$$

Per multiplicar un número per 99 s'afegeixen dos zeros i després es resta aquest número.

Imatge 9

$$426 + 398 = (426 + 400) - 2$$

$$426 + 400 \rightarrow 826 \\ 826 \text{ menys } 2 \rightarrow 824$$

Imatge 10

Epíleg: propostes alternatives i de futur

De poc temps ençà han sorgit veus a favor d'una aritmètica mental que insisteixi en els fets del sistema de numeració i nocions del valor de posició i en el significat i naturalesa de les quatre operacions (Plunkett, 1979). També s'ha suggerit que s'ha de plantejar l'ensenyament del càlcul mental de manera integrada amb l'algorisme escrit, fins i tot abans que es domini l'algorisme per evitar que influeixi negativament en el càlcul mental. Aquesta última idea va especialment dirigida contra la pràctica escolar d'exercitar el càlcul mental després del càlcul escrit, perquè això fa que molts alumnes, en particular aquells que són destres en càlcul escrit, tendixin a resoldre el problema de càlcul mental utilitzant les tècniques del càlcul escrit (Hazekamp, 1986). A més, si es pot operar satisfactòriament amb l'emulació en el càlcul escrit, els estudiants no s'adonaran de l'avantatge o la necessitat de desplegar estratègies del càlcul mental, o simplement no faran l'esforç que comporta tot nou aprenentatge.

Una perspectiva, que sembla ser una tendència actual en els currículums, que ubica el càlcul mental en una situació important, per bé que no com la panacea que resoldrà la problemàtica del desenvolupament del pensament numèric, en particular allò relacionat amb les relacions numèriques que descobreixen dreceres convenients per al càlcul; i amb la motivació recreativa que enriqueix l'experiència numèrica.

Bibliografia

- ANAYA (1990). *Matemáticas: 4º E.G.B.: AZIMUT*. Equipo Signo. Madrid: Grupo Anaya.
- ANAYA (1993). *Matemáticas: 3º. Primaria*. Madrid: Grupo ANAYA (Dolores Castañeda, Luis Ferrero, Ignacio Gaztelu, M^a Jesús Luelmo, Pablo Martín, Leopoldo Martínez).
- *Matemáticas: 4º. Primaria*. Madrid: Grupo ANAYA (Luis Ferrero, Ignacio Gaztelu, M^a Jesús Luelmo, Pablo Martín, Leopoldo Martínez).
- AUSUBEL, D. P.; ROBINSON, F. G. (1969). *School Learning. An introduction to Educational Psychology*. Londres, Nova York: Holt, Rinehart & Winston.
- BOURDON. M. (1843). "Elementos de Aritmética". A *Curso Completo de matemáticas puras. Traducido de la 19.ª edición francesa por D. Calisto Fernández Formentany*. Madrid: Librería de los Srs. viuda e hijos de Calleja.
- BOWERS, H.; BOWERS, J. (1961). *Arithmetical Excursions. An enrichment of Elementary Mathematics*. Nova York: Dover.
- BRUÑO (1933). *Primeras nociones y primeros ejercicios de aritmética: Libro del alumno*. 6a edició. Madrid-Barcelona: "La Instrucción Popular".
- Cuestionarios nacionales para la enseñanza primaria* (1953). Madrid: Dirección General de Enseñanza Primaria. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación Nacional.
- DALMAU, Carles (1898). *Resumen de las lecciones de Aritmética: Libro del Alumno: Grado Medio: Nueva Edición*. Girona-Madrid: Dalmau (reed.).
- DE SACROBOSCO, JOHANNES (1240). "Tractatus de arte numerandi". A J. O. Halliwell (ed.). *Rara Arithmetica, a collection of treatises on the mathematics and subjects connected with them, from ancient inedited manuscripts*. 2a edició. Londres: Samuel Maynard, S., 1841, p. 1-26.
- DE VILLA DEI, Alexander (1202). "Carmen de Algorismo". A J. O. Halliwell (ed.). *Rara Arithmetica, a collection of treatises on the mathematics and subjects connected with them, from ancient inedited manuscripts*. 2a edició. Londres: Samuel Maynard, S. 1841, p. 73-82.
- FOLLETOS DEL MAGISTERIO ESPAÑOL (1970). *Educación General básica: Nuevas orientaciones: Primera etapa*. 12a edició. Madrid: Magisterio Español.
- HAZEKAMP, D. W. (1986). "Components of Mental Multiplying". A H. L. Schoen; M. J. Zweng (eds.). *Estimation and mental Computation: 1986 Yearbook*. P. 116-126. Reston, VA: NCTM.
- Programas Renovados de Educación preescolar y Ciclo Inicial* (1981a). Madrid: Escuela Española.
- Programas Renovados de la Educación General Básica. Ciclo Medio* (1981b). Madrid: Escuela Española.
- NCTM (1970b). *A History of Mathematics Education in the United States*

and Canada. Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics.

ORTEGA, Juan de (1542). *Tratado subtilissimo de aritmética y geometría*.

PAYNE, J. F. (1966). "An experimental study on the effectiveness of instruction in mental computation in grade V. Doctoral Dissertation, University of Northern Colorado". *A Dissertation Abstracts International*, 27A, 0608.

PLUNKETT, S. (1979). Decomposition and All That Rot. *Mathematics in School*. 8(3), 2-5.

WENTWORTH, G. A. (1893). *Aritmética práctica*. Boston: Ginn and Company (1900).