LA RAZÓN EN SEMEJANZA: EL CASO DEL PERRITO

Bernardo Gómez Alfonso. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

RESUMEN

Este artículo se enmarca en los estudios realizados por nuestro grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico. Se ubica en una corriente de investigación que considera la construcción de conceptos matemáticos como su objeto central de estudio, poniendo énfasis en señalar las dificultades que entrañan dichas construcciones.

El trabajo que se presenta aquí forma parte de un amplio estudio sobre razón y proporción, realizado mediante el análisis de las respuestas de estudiantes de distintos niveles educativos a un cuestionario de tareas específicas de esta temática. En particular, se describen las dificultades de comprensión de la razón en semejanza a partir del análisis de la tarea denominada "el perrito".

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS

Este artículo se enmarca en los estudios realizados por nuestro grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico, en el marco del convenio entre el Departamento de Didáctica de la Matemática de la *Universitat de València* y el Programa Nacional de Formación y Actualización del Profesorado y el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México.

Convenio, que de una forma colateral permitió, al que suscribe, iniciar una entrañable amistad con las personas de Jorge Cazares y su esposa, a la sazón miembro de un entusiasta grupo de maestras de la ciudad de Morelia a las cuales Jorge dirigía con gran cariño y dedicación, en un proyecto de innovación educativa denominado *La enseñanza y el aprendizaje de la aritmética en tercero de Preescolar*. Era Enero de 1995.

Nuestra posición teórica se podría ubicar en una corriente que tiene su origen en los cambios que se producen a mediados de los 70, cuando se toma consciencia de que la investigación conductista y la teoría conductista no daban cuenta de los procesos de aprendizaje en sí mismos de una manera convincente. Los cambios se orientaron hacia acercamientos constructivistas que provenían inicialmente de la corriente derivada de la epistemología genética de Piaget, los cuales "imprimieron a la tarea investigadora en educación matemática de la década de los 70 un sello particular, el de considerar la construcción de conceptos como su objeto central de estudio …, (poniendo) énfasis en señalar las dificultades que entrañan dichas construcciones" (Rojano, 1994, p. 46).

Una parte de los trabajos realizados (ej. la investigación del CSMS: Hart; Brown, y Küchemann, 1981) se plantearon para presentar una visión de la comprensión de las matemáticas de los niños que fuese representativa. Estos se sustentaron en la descripción de procesos de actuación de los estudiantes, a través del análisis de las respuestas a un cuestionario de tareas específicas de una misma temática o materia (métodos utilizados, errores que cometen, estrategias que conducen a las respuestas). Con el análisis se pretendía elaborar modelos locales explicativos de las realizaciones individuales en los diferentes niveles de desarrollo y establecer niveles o jerarquías de los temas y tareas de los tests que pudieran dar cuenta de lo que los estudiantes parecían entender, no estableciendo un simple orden de dificultad de las mismas sino buscando un método mediante el cual pudieran ser agrupadas para formar un "tipo".

Algunos de los resultados obtenidos, pusieron de manifiesto que, a diferencia, de lo que presuponía la ideología dominante hasta entonces, no hay una relación de transferencia simple de la enseñanza al aprendizaje, sino que ésta es más bien compleja. Esta complejidad se manifiesta, como se ha evidenciado, en "las características de los conocimientos construidos por los alumnos, que no están contenidas en el discurso de la enseñanza" (Laborde, 1992, p. 167). De ahí que, la preocupación de buena parte de los investigadores se enfocara a entender y evaluar esta complejidad.

En este marco investigador se desarrolla nuestro trabajo. Se centra en los conceptos de razón y proporción que se estudian en la escuela primaria y secundaria. Su importancia e interés radica en que razón y proporción intervienen en parte de los conocimientos de aritmética y geometría que se estudian en la escuela primaria y secundaria y constituye una base necesaria para acceder a la comprensión del álgebra y otras áreas de la matemática, en particular para explicar fenómenos en los que interviene la variación funcional, relacionados con la comprensión del mundo físico y social.

Los estudios que dan origen y sustentan el trabajo se realizaron inicialmente en México durante el período 1993-96 (ver Gómez, H., 1996, Jiménez de la Rosa, 1996 y Muñoz, 1996) en un proyecto de investigación, dirigido por la doctora Olimpia Figueras, diseñado inicialmente para entender mejor como los niños de la escuela primaria - seis a doce años - usan su conocimiento para resolver tareas de razón y proporción. Así como también, para identificar las dificultades que encuentran mientras los resuelven y tratan de explicar sus maneras de pensar.

Como los procesos de comparación son los componentes fundamentales para el razonamiento proporcional, el propósito principal de estos estudios fue explorar las percepciones particulares de los niños en tareas de un cuestionario asociadas con el cambio en diferentes contextos matemáticos propios del diseño curricular de la enseñanza primaria: transformaciones de cantidad, secuencias numéricas ascendentes y descendentes, regularidades y pautas numéricas, semejanzas, densidades, mezclas, velocidades, trueque, tablas de ingredientes de una receta, ...

Estos estudios obtuvieron un primer acercamiento a la identificación, categorización y evolución de clases de actuaciones de alumnos de una escuela primaria al resolver tareas vinculadas a la razón y proporción y nociones consideradas precursoras de éstas, que permitían derivar hipótesis de trabajo para fundamentar propuestas de enseñanza.

Durante mi visita en 1995 al CINVESTAV del IPN en México, contribuí a abrir nuevas perspectivas a este trabajo. En particular ayudando a articular un esquema de interpretación de las respuestas de los estudiantes que transitó de un modelo de descripción de actuaciones aisladas hacia otro de agrupamiento de tipos de comportamiento identificados de acuerdo con características comunes desde un enfoque relacional. Esto es, un enfoque que mira las relaciones en juego entre los elementos de la información numérica, verbal, gráfica y pictórica de la tarea propuesta y los aspectos en los que los estudiantes centran su atención para resolverla.

Este modelo permitió articular los datos en cuatro grandes categorías que agrupan a su vez, subcategorías y clases para diferenciar comportamientos de acuerdo a elementos particulares. A saber.

1. Percepción relacional de los elementos de la información
2. Percepción aislada de los elementos de la información
3. Dificultades en la descodificación
4. Respuestas singulares

El modelo, que ha sido pertinente para poder derivar conclusiones y supuestos sobre las tendencias del comportamiento y las competencias de los niños, ha constituido el punto de partida del desarrollo de una investigación posterior realizada en España durante el periodo 96-97 (Fernández, A.; Gómez B. y Margarit, J., 1997; Fernández, A.; Figueras, O.; Gómez, B. y Margarit, J., 1997; Fernández, A., Gómez, B., Figueras, O., Margarit, J., Puig, L., Monzó, O. y Ruiz, E., 1998), cuyo objetivo principal inicial era de tipo comparativo.

Se pretendía contrastar el desempeño de los niños de ambos países frente a las mismas tareas, relacionadas con las nociones mencionadas. La intención era encontrar evidencias para sustentar o desechar la hipótesis en la que se supone que diferencias en determinados aspectos, tanto de la enseñanza como de las formas de expresión, favorecen diferencias en las competencias que manifiestan los estudiantes.

Este estudio, que en otras palabras trataba conocer cuáles de los comportamientos identificados pudieran ser achacables a las características de las diferentes formas de enseñanza y cuáles serían independientes de la instrucción, abrió nuevas perspectivas que condujeron a una fase posterior de ampliación de las tareas del cuestionario y del estudio.

Como resultado de ello, se continuó la investigación, abordando aspectos vinculados a la razón y proporción que no habían sido tratados en el cuestionario de primaria y la prolongación del estudio con estudiantes de secundaria.

Tomando como referencia el marco teórico desarrollado por Freudenthal en la *Fenomenología Didáctica de las estructuras matemáticas* (1983, 2001), se observaron carencias en relación con los aspectos fenomenológicos que llevaron a una ampliación de los ítem para completar el estudio del desarrollo del "razonamiento proporcional" de los estudiantes.

Esta ampliación se centró, por una parte, en los problemas de densidad estudiados en la tesis doctoral de Alejandro Fernández, *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria*, leída en la *Universitat de València* en 2001 (ver Fernández, A. y Puig, L. 2002); y, por otra parte, se centró en los problemas de razón en semejanza que forman parte de la tesis doctoral en fase final a fecha de hoy de Juan Margarit (ver Margarit, Figueras, Gómez, 2001).

RAZÓN, PROPORCIÓN Y FUNCIÓN LINEAL

Razón y proporción

Como dice Freudenthal (1983, 2001), una razón se puede definir como una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. Pero, también los son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, aunque éstas lo son en sentido algorítmico: hay una receta para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado. Ciertamente, "la razón también puede obtenerse: transformándola en un cociente, esto es, leyendo como 3 es a 4 como si dijera 3 dividido por 4, pero esto es la violación de la razón". Si se hace, si se identifica a la razón con cociente, se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón.

"El significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir con sentido *a* es a *b* como *c* es a *d* sin anticipar que *a* es a *b* puede reducirse a un número o valor de magnitud". De esta manera, "el estatuto lógico de la razón en su contexto fenomenológico se parafrasearía como sigue: la razón es una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números (o valores de magnitud)".

La proporcionalidad se entiende como una proposición sobre razones, donde de la misma forma que la razón depende en principio de dos datos, la proporcionalidad depende de cuatro.

Los nexos de unión entre razón, proporción y función lineal.

Razón, proporción y función lineal son nociones que presentan nexos de unión, para ilustrar estos nexos, tomamos las ideas de Vergnaud (1991) en relación con la categoría de problemas de estructura multiplicativa que denomina Isomorfismo de Medidas.

Un espacio de medida puede considerarse como un par formado por un conjunto y una medida . Es pues, una estructura en la que intervienen: un tipo de objetos, una cualidad comparable de esos objetos (magnitud), una unidad (objeto elegido como elemento de comparación) y un proceso para asignar un valor numérico o medida a esa cualidad.

Un isomorfismo de medidas (IM), es una estructura que consiste en una proporción simple directa entre dos espacios de medida M_1 y M_2. En esta categoría entran en juego dos magnitudes y cuatro cantidades, dos son medidas de una magnitud y otras dos son medidas de la otra, todas ellas pueden ser números naturales, fraccionarios o decimales.

Para representar esta categoría de problemas Vergnaud utiliza la siguiente tabla de correspondencia

M_1	M_2
x	y=fx)
x’	y’=f(x’)

en la que la entran en juego cuatro cantidades, dos son medidas de una cierta clase y otras dos son medidas de otra clase, todas ellas pueden ser números naturales, fraccionarios o decimales. La función f: M_1 en M_2, es una función lineal.

Vergnaud (1994) señala varios enfoques de resolución en esta categoría, aquí nos interesamos por dos de ellos:

-. El enfoque de resolución interno o escalar consiste en buscar el operador que liga x con x’ en M_1 y transportarlo para pasar de y a y’ en M_2

M_1	M_2
x	y=fx)
x’/x $\downarrow$	x’/x $\downarrow$
x’	y’=f(x’)

Este operador es una razón escalar ya que es la razón de crecimiento o decrecimiento entre dos cantidades del mismo espacio de medida. Por tal motivo se denominan razones internas

Se sustenta en la propiedad característica de la función lineal : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, (garantiza que para pasar de f(x) a $f(\lambda x)$ basta con calcular $\lambda f(x)$). En el esquema de la tabla de doble entrada sería

M_1	M_2
x	f(x)
$\lambda \downarrow$	$\lambda \downarrow$
λx	$f(\lambda x) = \lambda f(x)$

y en términos de proporción sería:

$$\lambda x/x = \lambda f(x)/f(x) = f(\lambda x)/f(x)$$

-. El enfoque de resolución externo o funcional consiste en buscar el operador que liga x de M_1 con y de M_2, y transportarlo para pasar de x’ de M_1 a y’ de M_2.

M_1	M_2
x	$\xrightarrow{\cdot y/x}$ y

$$x' \;\Big|\; \xrightarrow{\cdot y/x} \; y'$$

Este operador es una razón funcional ya que representa el coeficiente de la función lineal de M_1 a M_2 , que es una constante que da la tasa o relación entre dos cantidades de diferente espacio de medida. Por tal motivo se denominan razones externas

Se sustenta en la propiedad característica de la función lineal: y/x = k cte., (garantiza que para pasar de x' a f(x') basta con calcular kx'. En el esquema de la tabla de doble entrada sería

M_1		M_2
x	$k\rightarrow$	kx
x'	$k\rightarrow$	kx'

Las estrategias de los estudiantes en tareas de razón y proporción

La tradición, o la costumbre consolidada durante años, ubicó la enseñanza de la razón y proporción en el marco de las magnitudes proporcionales y, en particular, en los problemas de regla de tres, bajo un enfoque que enfatiza más lo reglado (procedimientos en los que la justificación de sus pasos queda oculta) que lo conceptual. Como consecuencia muchos estudiantes aprendían o memorizaban las reglas que prescriben como manipular los símbolos numéricos en estas formas particulares de problemas, sin crear significados apropiados para las nociones de razón y proporción.

Por lo visto, la precariedad del enfoque escolar tradicional, como subraya Streefland (1985), constituye un grave obstáculo para el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción. Podría decirse que su enseñanza tiende a descuidar la comprensión inicial que los niños aportan y a explorar un solo tipo de conocimiento, el formal. Sin embargo, tal y como se desprende de algunas investigaciones (ej. Hart, 1981, Carraher, 1986, …), en vez de los métodos formales, los estudiantes parecen desarrollar una multitud de métodos informales, con diferentes grados de efectividad para abordar las tareas de razón y proporción. Un ejemplo bien conocido de estos métodos es la denominada "estrategia aditiva". Citando a Küchmann (1989, p. 119), esta estrategia es para Piaget indicativa de un nivel cognitivo, pero para Karplus et al (1974) es más indicativa de un estilo cognitivo, ya que el uso de las estrategias también depende de las diferentes características de la tarea planteada, en particular de los números y el contexto.

En consecuencia, se considera interesante plantear a los estudiantes una amplia y variada gama de tareas de razón y proporción, con el fin de que tengan la oportunidad de hacer emerger las diferentes estrategias que han construido, y hacerlas explícitas, tanto para el profesor como para él mismo. Esto brinda la oportunidad de que las estrategias sean evaluadas, se hagan compatibles o se eliminen, y se determinen cuales son o no apropiadas (p. 122).

LA RAZÓN EN SEMEJANZA

La razón en semejanza es harto conocida por su importancia y uso cotidiano como regla de representación a escala. Como tal, como factor de escala, la razón en semejanza es una razón externa, en el sentido señalado antes, aunque no lo es en el sentido griego.

También es conocida la importancia y uso en matemáticas de la razón en semejanza como pendiente o medida de la inclinación. Como pendiente es una razón interna, también en el sentido señalado antes.

Por último, la razón en semejanza es utilizada en la determinación de distancias inaccesibles. Esta aplicación práctica se sustenta en las propiedades de los triángulos en situación de Tales.

En los textos escolares y en el currículum de secundaria la razón en semejanza aparece pronto al estudiar las figuras semejantes –principalmente los triángulos semejantes- y se espera que los estudiantes aprendan qué es la semejanza, reconozcan cuando dos figuras son semejantes, conozcan sus propiedades y sepan usarlas en algunas de sus aplicaciones más comunes, como por ejemplo en la determinación de distancias inaccesibles.

Bien entendido que, de acuerdo con Hart, Brown y Küchmann (1981, p. 98 y 99, en su estudio CSMS con estudiantes de secundaria), en realidad la palabra "semejante" es una noción difícil, dado que para muchos estudiantes significa vagamente la misma forma La "misma forma" es también una noción difícil cuando se trata de figuras rectilíneas, ya que todos los triángulos tienen la "misma forma" en el sentido de que son todos triángulos.

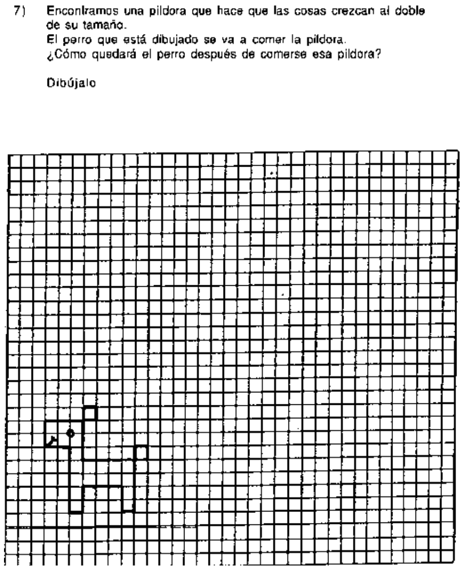
Con el fin de presentar una visión de la comprensión y uso de la razón y proporción en semejanza de los estudiantes, que sea representativa de la población escolar y de otros niveles superiores, nos planteamos la descripción y caracterización de sus procesos de actuación, a través del análisis de sus respuestas a un cuestionario de tareas asociadas a esta temática (métodos utilizados, errores que cometen, estrategias que conducen a las respuestas). Con este análisis se pretende dar cuenta de lo que los estudiantes parecen entender, y lo que pueden y no pueden hacer, agrupando sus respuestas en tipos de acuerdo con nuestro modelo de interpretación de las respuestas experimentado en nuestra investigación precedente. Creemos que esta caracterización nos servirá para, posteriormente, construir modelos de enseñanza consecuentes con los resultados obtenidos.

EL PERRITO

Descripción de la tarea.

Como ilustración de nuestra manera de trabajar, presentamos a continuación los resultados obtenidos con una de las tareas de nuestro cuestionario. Es el caso de la tarea denominada "el perrito".

"El perrito", es una tarea que fue planteada inicialmente para formar parte del cuestionario en el estudio realizado en México (Gómez, H., 1996; Jiménez de la Rosa, 1996 y Muñoz, 1996) y que, como ya se ha dicho, tuvo continuidad en Valencia. Cuestionario que se configuró a partir de la selección y adaptación de tareas procedentes de dos fuentes: las formuladas por los investigadores que han realizado estudios sobre razonamiento proporcional (Hart, K, 1985; Noelting, G. 1980; Karplus et al. 1983, …) y las que aparecen en los libros de texto mexicanos vigentes en 1992.



Encontramos una píldora que hace que las cosas crezcan al doble de su tamaño.
El perro que está dibujado se va a comer la píldora.
¿Cómo quedará el perro después de comerse esa píldora?.
Dibújalo

En “el perrito”, la información de la tarea se presenta en forma gráfica, se pide dibujar una figura lineal formada por rectángulos sobre una retícula. Se trata de una figura bidimensional en forma de perro del que se pueden determinar sus dimensiones. Se demanda reproducirlo teniendo en cuenta que la razón entre los *tamaños* es 2 a 1. La tarea pone en juego diversas nociones más o menos vinculadas a la semejanza: forma, similitud, tamaño, engrandecimiento, factor de escala, razón entre áreas. La razón de cambio viene dada explícitamente bajo la forma verbal “el doble”, para evitar tecnicismos. Por el contrario se utiliza *tamaño* por ser una forma más coloquial que otras que podrían inducir una respuesta automática producto de una enseñanza previa.

La figura del perrito no alienta la aplicación puramente mecánica de la técnica que consiste en aumentar una figura utilizando un centro de engrandecimiento. Por otra parte se ha huido de utilizar explícitamente las palabras semejante y forma, dado que como se ha dicho antes son nociones difíciles. Semejante porque para muchos significa vagamente la misma forma. Y porque la “misma forma” es confusa cuando se trata de figuras rectilíneas, ya que todos los rectángulos tienen la “misma forma” en el sentido de que son todos rectángulos. También la palabra “tamaño” es difícil, pero esta no se ha podido evitar, dado que se asocia unas veces a longitud, otras a área y otras a volumen.

La tarea *el perrito* ha sido presentada para su resolución a estudiantes de distintos niveles educativos: desde Primaria a los últimos cursos de la Licenciatura de Matemáticas, y también a estudiantes de CAP, estudiantes de doctorado y profesores en ejercicio. La metodología para su aplicación ha variado en función del tipo de estudiantes. En primaria se hizo un muestreo aleatorio de diez estudiantes por curso, mientras que en los cursos de licenciatura CAP y doctorado se sometió a todos los estudiantes presentes en el aula, dado que son grupos reducidos. Dado que lo interesa es identificar comportamientos y no establecer porcentajes, evitaremos dar cifras con las frecuencias obtenidas en cada caso. Los datos de primaria proceden del estudio realizado en el proyecto de investigación *Razón y proporción: Precursores de los conceptos, tendencias cognitivas de los alumnos, resolución de problemas y* *acercamientos metodológicos. Un estudio con alumnos de la enseñanza obligatoria*. PB 96-0790, 1997-2000.

Métodos y estrategias de los estudiantes

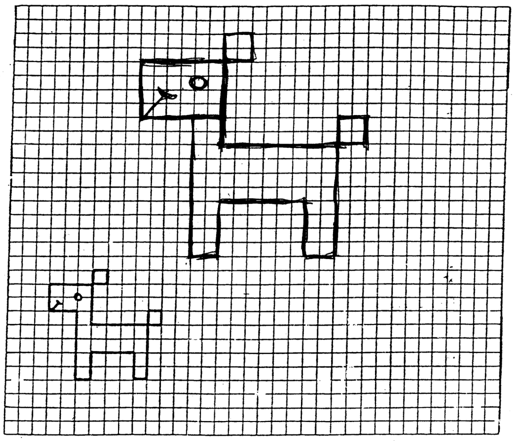
La respuestas observadas en los estudiantes de Primaria fueron agrupadas inicialmente bajo el esquema de interpretación de nuestro grupo. Al observar que algunas de estas respuestas se reproducían en sujetos de formación superior se profundizó en el análisis de los métodos y estrategias que conducen a las respuestas observadas. Estos son:

1.Métodos de escala lineal

Bajo este epígrafe agrupamos las respuestas de los estudiantes que interpretan el enunciado como un problema de escala.

1.1 Aumento de los lados de la figura al doble de su longitud

En esta estrategia los estudiantes efectúan un aumento bidimensional, donde lo que mide uno de alto o ancho en el original en el dibujo mide dos.



En nuestro estudio esta respuesta apareció desde segundo de Primaria, en los primeros cursos esporádicamente y aumentando de frecuencia a medida que aumentaba el nivel académico. Sin pensar más, se podía interpretar como respuesta correcta ya que implica el uso de una estrategia académica basada en un procedimiento enseñado en los problemas de escala.

1.1 Aumento de la figura sensible al contexto

En esta estrategia los estudiantes efectúan un aumento bidimensional del cuerpo del perro, no así de la oreja y la cola, que por ser cuadrados unitarios generan dificultades al contradecir el pensamiento discreto donde el doble de uno es dos y no cuatro como resultaría siendo coherente con lo realizado en el resto del cuerpo.

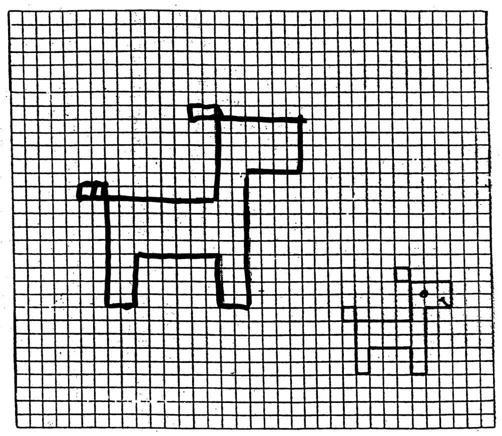


fig. 1

En esta estrategia el estudiante debe decidir cual es la orientación correcta de la oreja y el rabo, lo que da lugar a respuestas alternativas, como se evidencia en as imágenes siguientes:

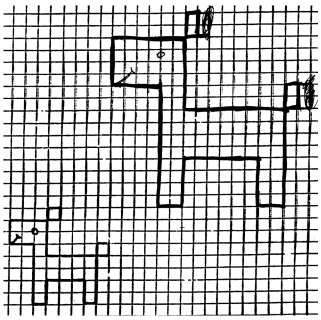


fig. 2

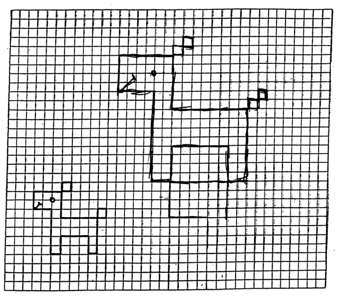


fig. 3

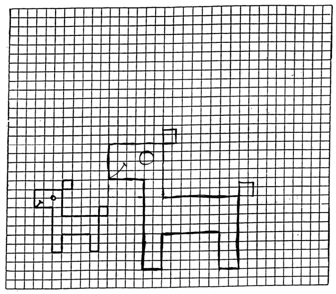


fig. 4

Cuando se preguntó a los estudiantes qué criterio habían seguido para optar por una u otra orientación, intentando así provocarles la desestabilización cognitiva necesaria para ver si modificaban su respuesta en un sentido más coherente con el aumento realizado en el cuerpo y patas del perrito, se manifestaron de diversas formas: uno dijo que la orientación era irrelevante ya que el perro suele mover las orejas; otros, los que dibujaron la oreja y rabo en diagonal (fig. 3) dijeron que lo que importa es que el perro dibujado alcance altura y anchura doble; por último, hubo quien evitó este problema dibujando una oreja y rabo algo mayor, evitando así la métrica de la retícula (fig. 4).

Igual que en el caso 1.1, este tipo de respuestas se observaron desde el primer ciclo de Primaria, aunque sólo se dieron con una frecuencia significativa en los niveles académicos superiores.

2.Métodos de área

Aquí agrupamos las respuestas de los estudiantes que centran su atención sobre el área y sobre una de las dos direcciones, evidenciando un patrón de aumento unidimensional.

2.1 Aumento en una dimensión hasta obtener otra figura de área doble

En esta estrategia los estudiantes dibujan un perrito de área 46 (cuadritos), que es el doble del área de la figura original que es 23 (cuadritos). Es coherente con la idea de que un perro de tamaño doble no debe ser tan grande como el dibujado en el caso 1, pero, en cambio, los perritos dibujados parecen perder la forma.

2.1 Aumento de un lado de la figura hasta obtener otra de área doble :.

En una variante de esta respuesta se presentan figuras de área doble del original en las que la orientación de la oreja y el rabo son coherentes con el sentido del aumento. En el ejemplo de la izquierda el aumento es en horizontal y en el la de la derecha en vertical con un posible error en el cuello que no aumenta.

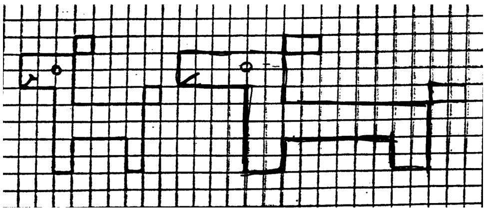


fig. 5

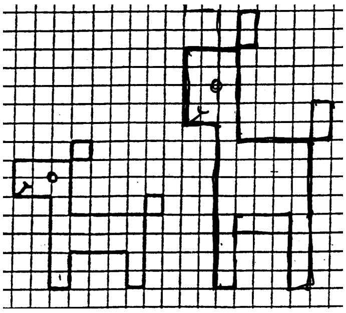


fig. 6

En otra variante, la orientación del rabo y de la oreja no es coherente con el sentido del aumento.

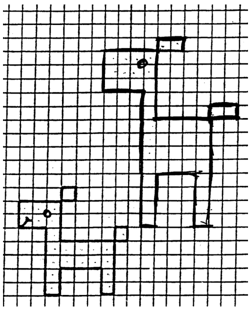


fig 7

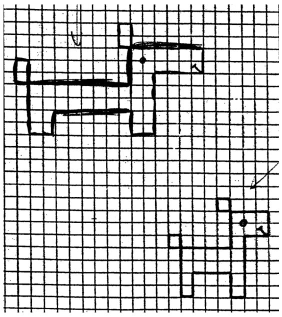


fig 8

Este comportamiento, en sus dos variantes, se observó en los estudiantes de nivel educativo superior, en ningún cado en los estudiantes de primaria.

2.2. Aumento arbitrario de las dos dimensiones hasta obtener otra figura de área doble.

En el perrito dibujado no se considera necesario guardar la y no se observa un patrón de crecimiento lineal o bidimensional.

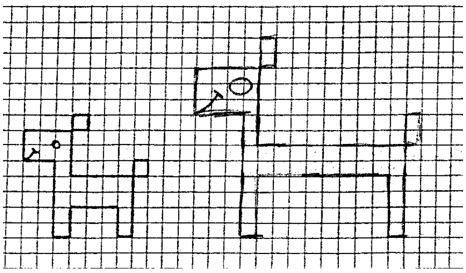


fig 9

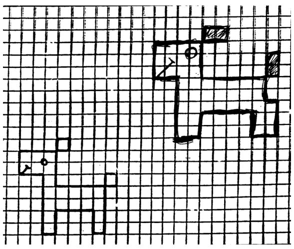


fig 10

El perrito de la figura 9 ha perdido del todo el referente de la forma, no así el de la figura 10, aunque para obtener el doble de área se han eliminado dos cuadritos de la parte trasera dando como resultado una joroba. Este tipo de respuestas tampoco han sido observados en primaria.

2.3. Aumento de la figura hasta obtener otra de área aproximadamente el doble

Esta estrategia parece ser el resultado del intento de conjugar el aumento de área doble, la conservación de la forma y la métrica inducida por la retícula, pero como el estudiante no logra opta por hacer un dibujo que sólo es una aproximación de la respuesta deseada.

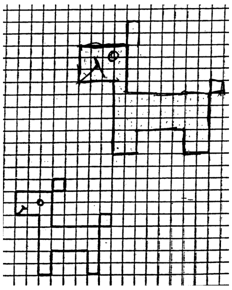


fig. 11

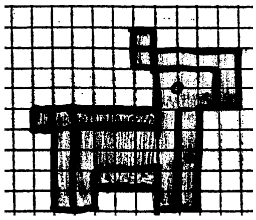


fig 12

El perrito de la figura 11 mide 48 cuadritos más del doble del original (46). El de la figura 12 mide 47 cuadritos y parece que se realiza engrandeciendo el dibujo original como en la proyección de una diapositiva, desde un foco, tal vez el perrito original. Persisten las dificultades con la forma de la oreja y el rabo. Estos comportamientos no han sido observados en primaria.

2.4.Aumento aditivo hasta obtener una figura de área doble

En esta estrategia se efectúa un aumento sistemático de un número fijo de unidades en cada una de las dos direcciones, alto y ancho, que marca la retícula.

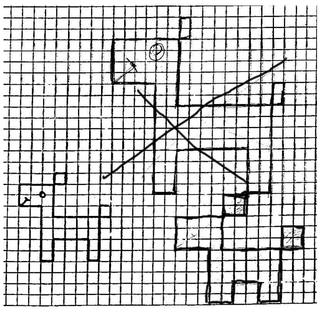


fig. 13

Obsérvese que la pauta de aumento es de una unidad en las dos dimensiones, salvo en las patas que sólo aumenta en el ancho y el cuello que lo pierde para lograr que el área sea doble de la original, 46 cuadritos. En la imagen reproducida aparece tachado el dibujo realizado con la estrategia 1 que produce *el perrote*, lo que es una distorsión seria para el estudiante, quien consciente de que es demasiado grande, lo tacha y responde con un método aditivo.

Esta estrategia podría corresponder al nivel II de respuesta descrito por Piaget (1968), y observado por el equipo del CSMS en Secundaria, en el capítulo dedicado a razón y proporción, (Hart, Brown y Küchmann, 1981), pero difiere en que el aumento tiene como referencia el área doble.

Dado que en nuestro estudio esta respuesta corresponde a un estudiante de nivel universitario, cabe pensar que estamos ante un estilo cognitivo más bien que ante un nivel cognitivo.

2.5. Aumento de la figura hasta obtener otra de área aproximadamente el doble renunciando a la métrica inducida por la retícula

Aquí agrupamos las respuestas de los estudiantes que interpretan que hay que aumentar el área al doble y al mismo tiempo conservar la forma, pero como encuentran dificultades para conjugar estas dos condiciones renuncian a la métrica de la retícula y hacen un dibujo que es una aproximación de la respuesta deseada.

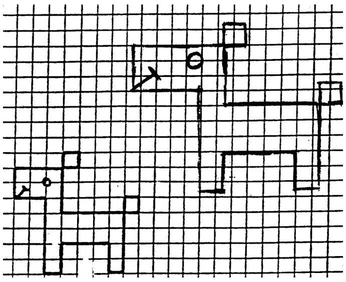


fig 14

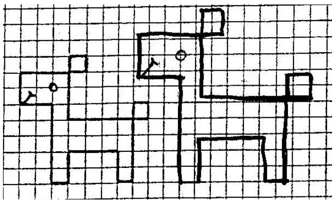


fig 15

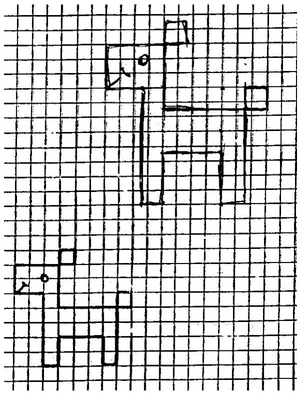


fig 16

Este tipo de respuestas no han sido observadas en Primaria.

3. Métodos ingenuos

Las respuestas más cándidas e ingenuas fueron aquellas en las que los estudiantes sólo tenían en cuenta que había que aumentar la figura, sin más criterio.

3.1 Aumento aditivo parcial

En esta estrategia se efectúa un aumento sistemático de un número fijo de unidades, “sumar uno”, en partes de la figura. No necesariamente en las dos direcciones que marca la retícula.

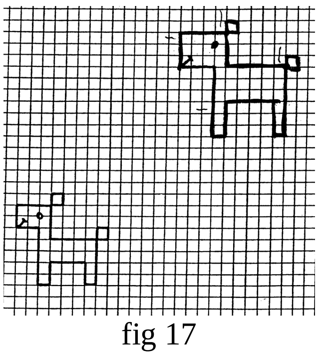


fig 17

El perito dibujado presenta aumentos de una unidad: la cabeza y el tronco aumentan 1 unidad en alto y en acho, las patas una unidad solo en alto, el cuello desaparece y la oreja y el rabo permanecen invariantes. Sólo se ha observado en 2º ciclo de Primaria.

Esta estrategia de “sumar uno” es coherente con lo observado por Piaget (1968) y con lo observado en el estudio realizado por el equipo del CSMS con estudiantes de Secundaria, en el capítulo dedicado a razón y proporción (Hart, Brown y Küchmann, 1981, p. 97). Piaget la describe como una respuesta típica de un niño al nivel concreto tardío.

3.2.*Aumento lineal*

En esta estrategia se aumenta la figura indiscriminadamente en una sola de las dos direcciones: alto o ancho, sin tener en cuenta la conservación de la forma, ni el área, ni el carácter bidimensional que se infiere de la retícula.

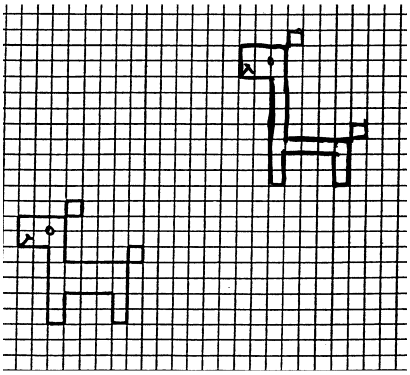


fig. 18

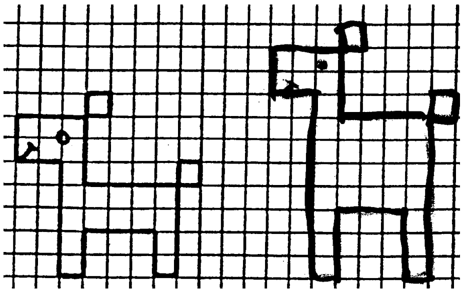


fig 19

Estas respuestas (2º y 3º de Primaria) son figuras en las que se ha incrementado sólo la altura sin ningún patrón observable. También se ha observado este comportamiento en un estudiante de 5º de licenciatura)

3.3. Aumento de altura doble

En esta estrategia se aumenta la figura hasta lograr el doble de altura, sin considerar ni área ni forma.

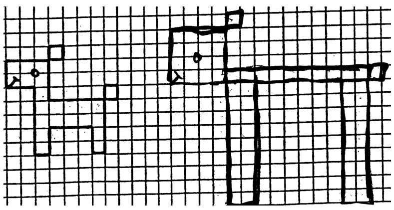


fig 20

La respuesta es un dibujo de un perro que es el doble de alto, pero ha diferencia del caso anterior, 3.2, también ha aumentado el ancho. Sólo se ha observado este comportamiento en primer ciclo de primaria

3.4. Aumento arbitrario

En esta estrategia el aumento es arbitrario sin ningún patrón observable.

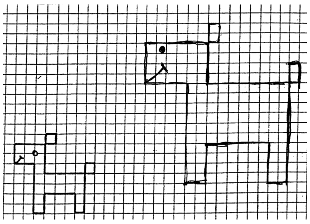


fig. 21

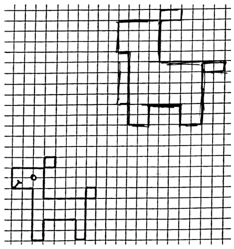


fig. 22

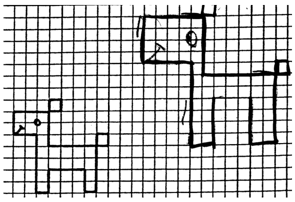


fig 23

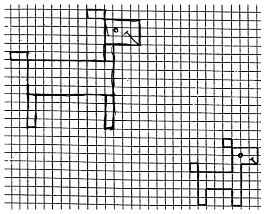


fig 24

Este comportamiento se ha observado significativamente en segundo de primaria y disminuyendo de frecuencia a medida que se avanzaba de curso y de nivel, aunque todavía se observó esporádicamente en el nivel académico superior al que corresponde la figura 24.

4. Métodos idiosincrásicos

Bajo este epígrafe agrupamos las respuestas de los estudiantes que interpretan la pregunta de una manera singular. Suelen ser comportamiento cándidos propios de estudiantes de primer ciclo de Primaria.

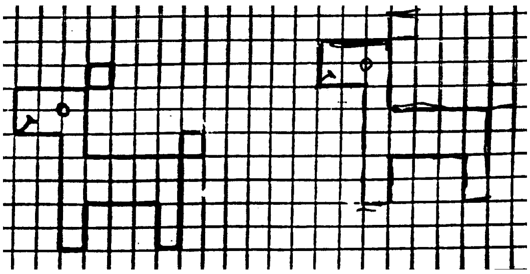


fig 25

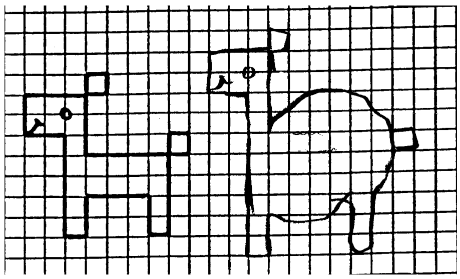


fig 26

En la figura 25 hay dibujado un perro que es igual que el original, el estudiante se centrado en la idea de que la mención que hace el enunciado de la tarea a el doble se refiere a hacer una réplica o copia, por analogía tal vez con el uso coloquial del término cuando se habla del doble de un actor. Este comportamiento sólo se ha observado en 1º de Primaria y una vez en un estudiante universitario.

En la figura 26, el dibujo es una imagen totalmente distorsionada que deja invariantes la cola, oreja, cabeza y patas, mientras que el tronco aparece dibujado con líneas curvas. Al parecer la idea es que, como se comió la galleta, lo que le ha crecido es la panza (3º de Primaria).

5.Métodos formales. Razón de semejanza $\sqrt{2}$

En esta estrategia los estudiantes efectúan un aumento bidimensional utilizando la diagonal del cuadrado unitario. Dado que ésta mide $\sqrt{2}$ el área del perrito dibujado es exactamente el doble del original

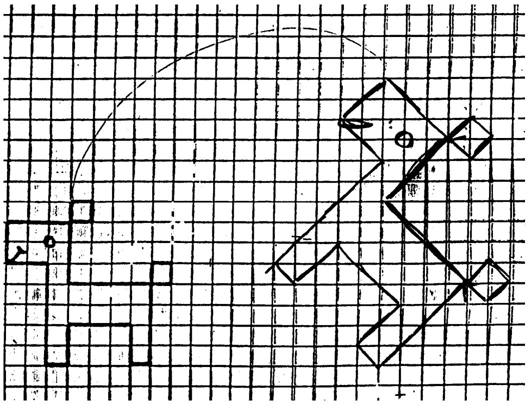


fig 27

Esta interpretación corresponde a una estrategia académica de estatus matemático elevado, que sólo apareció dos veces entre las múltiples veces que ha sido sometida la tarea para su resolución, y corresponde a dos estudiantes del nivel académico superior.

CONCLUSIONES

Formay tamaño

Cuando tienen que cambiar el tamaño de un figura rectilínea formada por rectángulos, como se les pide en la tarea del perrito, muchos estudiantes consideran que no es necesario conservar la forma.

Esto es coherente con algunas de las conclusiones del estudio sobre razón y proporción del CSMS (Hart, Brown y Küchman, 1981)) con estudiantes de secundaria:

> "al aumentar figuras existe el peligro de que el niño esté tan concentrado en el método que ha de utilizar que ignore el hecho de que las figuras resultantes tienen que tener la misma forma que la original, …
>
> Cuando el aumento implica dibujar figuras, los niños son muy a menudo incapaces de comparar la forma de la nueva figura con la del original y producen figuras que muestran considerable desemejanza" (p. 103).

Lo que ha evidenciado este estudio es que este comportamiento persiste con estudiantes de los niveles educativos superiores.

Niveles de comprensión

De los datos obtenidos no creemos que pueda derivarse la existencia de niveles de comprensión, dado que las estrategias que explican las respuestas de los estudiantes se observaron prácticamente en todos los niveles educativos, si bien con diferencias significativas de frecuencia, por lo que nos inclinamos a pensar más bien en un estilo cognitivo, reflejo de un estado momentáneo o parte de la secuencia de comprensión .

En lo que parece un estilo cognitivo sorprende la persistencia de las dificultades asociadas a los cuadrados unitarios de la oreja y el rabo que está presente en todo el espectro de edades estudiado.

De la misma manera que la estrategia aditiva descrita por el equipo del CSMS (Hart et al, 1981) se basa en sumar una cantidad fija teniendo en cuenta el valor a-b en un problema de razón a/b, en la tarea el perrito se observó una estrategia consistente en sumar una cantidad fija, teniendo en cuenta que el área final fuese el doble de la del perrito original.

Implicaciones educativas

Las nociones de razón en semejanza que se usan en la tarea "El perrito" se asocian a significados diferentes que propician una amplia gama de respuestas. Estas están asociadas a una variedad de estrategias, que las usan indistintamente sujetos de un amplio abanico de edades y de formación, que va desde el nivel de la Primaria hasta el nivel superior de los licenciados en matemáticas y estudiantes de CAP y doctorado.

Estas actuaciones revelan también una problemática ligada a la forma en que los sujetos interpretan la tarea, que suele estar fuertemente interiorizada y que no es de fácil eliminación. Plantearles que están equivocados y decirles que su respuesta no es la correcta es insuficiente. No podemos esperar que abandonen su método o modifiquen su forma de pensar, si no tienen una experiencia frustrante ante la percepción de que su estrategia no funciona como ellos creían, por eso una posible estrategia de erradicación consiste en mostrar las distorsiones o incoherencias de su respuesta

Una consecuencia evidente es que la enseñanza tradicional en el caso de la razón en semejanza se revela insuficiente y sus efectos pasan desapercibidos incluso entre estudiantes que alcanzan un nivel de matemáticas superior. Esto pone de manifiesto que es necesario actuar sobre esta enseñanza para, aprovechando la riqueza del razonamiento visual, favorecer la construcción de objetos mentales más cercanos al concepto de razón en semejanza

Otra consecuencia es que la comunicación, entre los profesores, los estudiantes, y los profesores y los estudiantes entre ellos, es compleja y plantea la necesidad de compartir significados, para evitar los diferentes modos de interpretar un mismo enunciado, según las circunstancias en las que sirve y según la persona que se sirve de él.

Finalmente, una tercera consecuencia interesante de este tipo de estudios para avaluar la comprensión de las nociones de razón y proporción es que aportan tareas originales para la instrucción, es decir, tareas que pueden ser utilizadas además de para la investigación para el trabajo en el aula, .

La tarea presentada aquí muestra un camino para crear situaciones que hagan emerger las concepciones de los estudiantes, sorprendiendo y provocando el conflicto y la discusión con sus juicios iniciales, su crítica y su corrección.

El reto, para nosotros como profesores, es saber aprovechar esta información para desarrollar una instrucción más eficaz, insistiendo en aquellos aspectos donde se esperan fallos, anticipándose a las respuestas y diseñando estrategias para la corrección de las mismas.

REFERENCIAS

Carraher, T. (1986). Rated Addition: A Correct Additive Solution for Proportion Problems. Proceedings of the Tenth International Conferfence of Psychology of Mathematics Education. London. University of London Institute de Education.

Fernández, A. 2001. *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Fernández, A.; Gómez B. y Margarit, J. 1997. Comportamientos relevantes observados en las respuestas incorrectas de estudiantes de primaria en tareas de razón y proporción. *III Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana,* Valencia, Mayo.

Fernández, A. ., Gómez, B., Figueras, O., Margarit, J., Puig, L., Monzó, O. y Ruiz, E. (1998). *Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y proporción.* Documento interno. Departament de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.

Fernández, A.; Figueras, O.; Gómez, B. y Margarit, J. 1997. Algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionario de tareas relacionadas con razón y proporción. *VIII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas).* Salamanca. Septiembre.

Fernández, A. y Puig, L. 2002. Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 5, núm. 2.

Freudenthal, H. 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. 2001. Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. 2ª edición aumentada. Cap. 2: El método. Cap. 5: Fracciones. Cap. 6: Razón, y proporcionalidad. Cap. 16: El lenguaje algebraico. Traducción introducción y notas de Luis Puig. México, DF: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Figueras, O; Gómez, B.; Fernández, A. y Margarit, J. (1997): *Comportamientos y tendencias cognitivas de los alumnos en la resolución de tareas de razón y proporción. Un estudio con alumnos de enseñanza obligatoria*. Documento interno, no publicado. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV. México.

Hart, K. M. ; Brown, M. L. y Küchemann D. E. (The CSMS Mathematics Team)) (1981). "Chlidren's Understanding of Mathematics: 11-16. Oxford, London and Northampon. John Murray.

Hart, K. (1981). Ratio. En K. Hart (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics.* 11-16. London. John Murray.

Jiménez de la Rosa, E. (1996): *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV. México.

Karplus, E.F., Karplus, R. Y Wollman, W. (1974). Intellectual Development Beyond Elementary School IV: Ratio, The Influence of Cognitive Style. *School Science and Mathematics*, 74, (Octuber), pp. 476-82.

Karplus, R.; Pulos, S.; Stage, E.K.(1983) Early Adolescents Proportional Reasoning on Rate Problems. *Educational Studies in Mathematics*. Vo. 14, No. 3., pp.219-233.

Karplus, R.; Pulos, S.; Stage, E.K.(1983) Proportional Reasoning of Early Adolescents. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*(pp.45-90). New York: Academic Press.

Karplus, R.; Karplus, E.; Formisano, M. and Paulsen, A-C (1975). Proportional Reasoning and Control of Variables in Seven Countries. *Advancing Education Through Science Orientated Programs. Report ID-65*. June (citado en Hart; Brown y Küchemann 1981).

Küchmann, D. (1989). Learning and Teaching Ratio: A Look at Some Current Texbooks. En Paul Ernest (ed.). *Mathematics Teaching. The State of the Art.* New York. The Falmer Press.119-135.

Laborde, C. (1992). *Audacia y razón de las investigaciones francesas en didáctica de las matemáticas*. (Hardiesse et Raison des Recherches en Didactique des Mathematiques. Proceedings (1989). PME 13. 46 – 61. Versión en inglés: "Audacity and Reason: French Research in Mathematics Education. *For the*

Learning of Mathematics 9(1989) 31-36. Versión en español de Rodrigo Cambray Núñez. En R. Cambray; E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.) *Antología en Educación matemática. Educación matemática 1*. Grupo de estudios sobre enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. Sección de matemática educativa. CINVESTAV. México, D. F.

Margarit, J.; Figueras, O. and Gómez, B. (2001). Ratio Comparison: Performance on Ratio in Similarity Tasks. *Proceedings of the 25 PME (25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education).* Vol. I, 340 Utrecht, The Netherland.

Muñoz, E. (1996). Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV. México.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics* 11, 2. pp. 217-353.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem-Structure at succesive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring*Educational Studies in Mathematics* 11,3. pp. 332-363

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias,* 12(1), 45-56.

Streeflan, L. (1984-85) Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process(parte I y II). *Educational Studies in Mathematics.* Vo.15,No.4,5.

Vergnaud G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la realité.* Problémes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. 4ª Ed. Berne-Frankfurt-New York-Paris. Peter