

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO MENTAL VERTIDOS POR LA TRADICIÓN REFLEJADA EN LOS LIBROS DE ARITMÉTICA

Bernardo Gómez Alfonso.

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universitat de València. España.

Resumen

En este artículo se presentan los métodos de cálculo mental que se han obtenido a partir de un extenso análisis histórico bibliográfico. La finalidad del mismo es aportar un catálogo de los mismos, actualizado en su lenguaje y organizado con criterios estructurales, conducente a dar una visión de conjunto, global y unificadora.

Abstract

The aim of this article is to give a global synthesis of historical mental computation methods for the four operations, taken from the written tradition found in arithmetic textbooks.

1. Introducción

En primer lugar, se hace una breve exposición acerca de la motivación educativa actual del cálculo mental¹. Después se discuten los criterios que se han tomado en cuenta para el compendio y organización de sus métodos. Por último, se hace una presentación detallada, e ilustrada con ejemplos, de los métodos seleccionados.

2. Interés educativo del cálculo mental

El cálculo mental en el anterior currículum oficial español (MEC, 1970) no aparecía explícitamente, aunque se establecía entre los objetivos específicos del área de matemáticas el "Desarrollo de la agilidad mental", expresión cuyo significado no era explicada en el texto donde se recogía la propuesta.

Posteriormente, en los programas renovados del año 1981 (MEC, 1981), sí se mencionaba el cálculo mental, relacionándolo con la aplicación

de las propiedades de las operaciones y con la resolución de situaciones de la vida real, en un enfoque vinculado al cálculo rápido. Así queda reflejado en la cita siguiente:

Cálculo mental y rápido de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.
Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo de estas cuatro operaciones.
Aplicar las propiedades conocidas para simplificar y agilizar el cálculo mental.
(MEC, 1981)

En esta propuesta, de carácter funcional, no se explicitaban los métodos que había que enseñar. En cambio, en el nuevo modelo educativo español (LOGSE), donde se otorga al cálculo mental un renovado protagonismo, sí que se señalan (DCB 1989) algunos de ellos. Concretamente, en el cálculo mental aditivo: la conmutación, descomposición, redondeo, conteo y duplicado; y, en el cálculo mental multiplicativo: la distribución y la factorización.

Lo innovador del enfoque actual es que está orientado hacia el cálculo flexible, bajo una perspectiva que defiende la autonomía, la exploración y la reflexión sobre los procedimientos mismos (DCB 1989); se proyecta en la educación secundaria y se fundamenta en la valoración del papel que el cálculo mental tiene en la adquisición de los conceptos relacionados con las operaciones (DBR, 1990).

También en otros países la propuesta oficial u oficialista discurre por estos derroteros, así por ejemplo, la propuesta Norteamericana, plasmada en el documento "Standards" (NCTM, 1989), para los años 90 recomienda repensar el cálculo enfatizando más variación y menos predominio del cálculo escrito.

En definitiva, puede verse en los documentos oficiales que hay una serie de planteamientos innovadores en relación a la anterior propuesta del currículum donde el cálculo mental atendía a un requerimiento utilitario, centrado en el Ciclo Medio, que es la época del aprendizaje de las operaciones.

Para desarrollar este nuevo planteamiento, se requiere precisar dos puntos principales: uno es el del contenido que debe enseñarse, es decir, los métodos de cálculo mental que se deben considerar con interés educativo; y el otro es la forma de presentarlos, es decir, la secuencia didáctica de enseñanza que asegure su apropiación óptima por parte de los estudiantes, de acuerdo con los objetivos propuestos.

En relación con el primer punto se puede considerar, de acuerdo con Schubring (1987), que la enseñanza práctica no está tanto más determinada por los decretos ministeriales y programas oficiales como por los libros de texto usados para la enseñanza. Esto puede interpretarse en el sentido de que para establecer una lista de métodos de cálculo mental para la enseñanza, que pueda ser aceptada por el profesorado, debe tenerse en cuenta lo que ha sido la tradición vertida en los libros.

En cuanto al segundo punto, cabe admitir que cualquier acción de enseñanza de los métodos de cálculo mental siempre producirá un avance en su conocimiento, uso y aplicabilidad; pero no es esto lo único que interesa, sino, más bien, que el avance se produzca en una determinada dirección. En este sentido, lo que se persigue es que la enseñanza de los métodos de cálculo mental conduzca a conseguir una disminución del énfasis en los automatismos en favor del análisis y la expresión significativa de las acciones sobre las situaciones numéricas.

En consideración a lo dicho con relación al primer punto se ha procedido de la siguiente manera ²:

3. Criterios para la selección, organización y presentación de los métodos de cálculo mental

La lista o catálogo de métodos de partida

Las listas o catálogos de métodos de cálculo que recoge cada uno de los libros de aritmética revisados ³ son, vistas una a una, incompletas; esto es, ningún libro recoge todos los métodos. No obstante, todas ellas en

conjunto permiten elaborar una lista lo suficientemente exhaustiva para el propósito de este trabajo.

En la medida en que los métodos de cálculo mental no se pueden desligar de los métodos del cálculo escrito, ya que no hay una línea divisoria clara entre los que son para ser aplicados por escrito y los que son para ser aplicados mentalmente, cualquier lista que se elabore, a partir de poner juntos los métodos que aparecen en los diversos libros, ha de recoger tanto a los unos como a los otros.

Ahora bien, para elaborar esta lista es necesario establecer criterios para la presentación, organización y lenguaje de los métodos, que, siendo convincentes puedan ser admitidos por la comunidad de educadores, eviten redundancias o dobles inclusiones, permitan agruparlos para facilitar una visión de conjunto y contribuyan a la actualización y unificación del lenguaje.

Las diferentes formas de enunciar de los métodos

Una mirada detenida a los enunciados de los métodos tal y como aparecen recogidos en las Aritméticas revisadas muestra tres enfoques diferentes: métodos que se enuncian vinculándolos a una cifra particular como, por ejemplo, los métodos para multiplicar por 5, 25, 9, 45, etc.; métodos que se enuncian vinculándolos a condiciones particulares que cumplen los datos como, por ejemplo, ser próximos a la unidad seguida de ceros, ser parte alícuota de la misma, etc.; y, por último, métodos que se enuncian vinculándolos a principios generales de actuación, con independencia de cualquiera que sea el dato como, por ejemplo, los que se enuncian como métodos de descomposición en sumandos o en factores, o métodos que consisten en completar a la decena, centena, superior, etc.

Las relaciones notables que sustentan los métodos

Algunos autores (Lacroix, 1797, Bruño, 1932) han destacado que el cálculo mental debería basarse en el aprovechamiento de las relaciones

numéricas notables de los datos. Así, han sugerido basarse en el número redondo, operar cambiando multiplicación por división o viceversa, cuando esto haga más fácil obtener el resultado; reducir los números decimales a fracciones, o aprovechar el que un dato sea el doble, triple, mitad, etc., que el otro.

La estructura común

Los métodos de cálculo mental se basan, en gran medida, en la aplicación de las mismas propiedades de las operaciones y en el uso de los mismos hechos del sistema de numeración. Concretamente, se basan en la aplicación, sea cual sea la operación implicada, de las propiedades conmutativa, asociativa o distributiva y de los valores de orden de unidad de las cifras.

El lenguaje horizontal

Algunos autores (Smith, 1923, y Sánchez Pérez, 1949) han recurrido a abreviar la presentación de los métodos mediante su formulación algebraica, pero esto conlleva el riesgo de no dejar ver con facilidad la casuística a la que se aplican. Para solventar este problema, lo que se ha hecho en los textos escolares actuales es presentarlos con el lenguaje horizontal tomado del álgebra de igualdades y paréntesis, pero usando siempre ejemplos numéricos, en vez de expresiones estrictamente literales.

La presentación

En definitiva, los puntos que se acaban de señalar: lista exhaustiva, formas de enunciar, relaciones numéricas notables, estructura común y lenguaje horizontal, son elementos cuyo aprovechamiento conduce necesariamente a un determinado modelo de presentación: enunciado, orden y enlace de los métodos.

Previamente, es obligado hacer ciertas precisiones con el fin de eliminar ambigüedades y de disponer de terminología apropiada.

Diferenciación entre estrategia, método, procedimiento, etc.

Aunque estrategia, método y procedimiento se usan en el cálculo unas veces como sinónimos⁴ y otras no⁵, según quien sea el autor, en este trabajo, se ha considerado (siguiendo la tendencia oficial del currículum español) por razones de organización y descripción, que son términos que se refieren a hechos diferentes. Así:

Las estrategias de cálculo mental son los principios directores generales de la resolución, y por lo tanto, que funcionan con cualquiera que sea la operación atendiendo a la manera de tratar los datos. Los métodos de cálculo mental son las formas en que se concretan las estrategias al tomar en cuenta las operaciones, los hechos y las relaciones numéricas involucradas en los datos⁶. Las modalidades de los métodos son sus diversas variantes según que se aplique a uno o al otro dato, o sobre una u otra operación. Y, por último, los procedimientos son las secuencias ordenadas y explícitas de cálculos que desarrollan los métodos hasta llegar al resultado.

4. Esquema global de los métodos de cálculo mental

Con la diferenciación entre estrategia (en mayúsculas) y método (en minúsculas) junto con los criterios señalados antes, se ha elaborado el siguiente esquema:

1. ARTIFICIOS

1.1 DE COLUMNAS

Además de los usuales, cuatro variantes en la resta (llevando, prestando, complementando y aditiva).

1.2 REGLAS

Multiplicación reglada de números terminados en ceros, de números formados sólo por unos, de números formados sólo por nueves, de los números de la Tabla Mayor, y, de números con coma decimal

Multiplicación por Complementos. Multiplicación Cruzada o Cruceta

1.3 FÓRMULAS

Cuadráticas y Numéricas

2. DESCOMPOSICIONES

2.1 DISOCIACIONES

A) DISOCIACIONES POR DESCABEZAMIENTO

De un dato: Agregar, segregar, distribuir

De los dos datos: Primeros Dígitos reagrupando, recuperando, cambiando

B) DISOCIACIONES SUBSIDIARIAS

Resta haciendo la misma terminación, resta prestando y resta por Patrones-
Hecho conocido

2.2 FACTORIZACIONES

A) FACTORIZACIONES SIMPLES

B) FACTORIZACIONES SUBSIDIARIAS

3. COMPENSACIONES

3.1 COMPENSACIONES INTERMEDIAS

Añadir y quitar, Promediar, Doble y mitad, Conservar y Alicuotar

3.2 COMPENSACIONES FINALES.

Redondeo

Incremento Subsidiario

4. RECUELTOS

4.1 CONTAR A SALTOS

Repetición de grupo

5. Catálogo de los métodos de cálculo mental, ilustrado con ejemplos.

A continuación, se detalla el esquema anterior ilustrando la casuística con ejemplos tomados de la literatura. El hecho de que no hayan ejemplos de todos los métodos en todas las operaciones debe entenderse como que los diversos autores no los han considerado relevantes.

1. ARTIFICIOS

1.1 DE COLUMNAS. Es la reproducción o emulación mental del algoritmo estándar de lápiz y papel, o algunas de sus variantes. Se actúa siempre en términos de posición, por columnas tomando las cifras o grupos de cifras aisladamente⁷.

Resta: 672-458

Llevando: "12 menos 8, 4; 7 menos 6, 1; 6 menos 4, 2. Total 214".

Natural o Prestando: "12 menos 8; 6 menos 5 y 6 menos 4".

Complementando: "el complemento de 8, 2; 2 y 2 son 4; el complemento de 5, 5; 5 y 6, 11; el complemento de 4, 6; 6 y 6, 12".

Aditiva: "8 y 4, 12, llevo una, 5 y 1, 6; 6 y 1, 7; 4 y 2 son 6".

1.2 REGLAS. Son las recogidas por la tradición escrita en las Aritméticas antiguas como tales.

Multiplicación de números terminados en ceros

Suma, cuando los sumandos terminan en ceros, sumando sólo las cifras significativas: $600+700+4500=$ "son $6+7+45$ cientos, 5800".

Multiplicación por números que terminan en ceros: $7 \times 1000=$ "son 7 y añado tres ceros, 7000". $7 \times 300=$ "son 7×3 y añado dos ceros, 2100".

División cuando el dividendo y divisor terminan en ceros, o sólo el divisor: $36000:500=$ "son $360:5$, 72 y resto 0".

Multiplicación reglada de números formados sólo por unos

Multiplicación por 11: $57 \times 11=$ "dejo el 7; sumo $5+7, 12$; dejo el 2 y llevo 1 al 5, que son 6. Total 627".

Multiplicación de 101 por un número de 2 cifras, y 1.001 por uno de tres: $58 \times 101=$ "a 58 le añado 58. Total 5858". $988 \times 1001=$ "988 y añado 988. Total 988988".

Multiplicación reglada de números formados sólo por nueves

$47 \times 99=$..."a 47 le quito 1, 46; luego $100-47, 53$. Total 4653".

Multiplicación de números de dos cifras o Tabla Mayor. Son las reglas que resultan al agrupar los factores comunes que resultan de aplicar la doble distribución a números comprendidos entre 10 y 100.

Los dos n^{os} son iguales en decenas: $(10a+b)(10a+c)=10a(10a+b+c)+bc$. "Uno más unidades del otro por decenas y añado unidades por unidades". $25 \times 27=(25+7) \times 2 \times 10+7 \times 5=675$. $13 \times 18=(18+3) \times 10+3 \times 8=234$.

$103 \times 106=(103+6) \times 100+3 \times 6=10918$. $1005 \times 1008=1013 \times 1000+5 \times 8=1013040$.

Los dos n^{os} son iguales en decenas, y sus unidades suman diez: $(10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc$. "Primero por siguiente y añado

unidades por unidades". $47 \times 43 = 40 \times 50 + 3 \times 7 = 2021$. $35 \times 35 = "12 \text{ y a\u00f1ado } 25" = 1225$.

Los dos n\u00fameros son iguales en unidades y sus decenas suman diez: $(10a+b)(10c+b) = 100(ac+b) + b^2$. "uno por otro m\u00e1s unidades y a\u00f1ado el cuadrado de las unidades". $34 \times 74 = (3 \times 7 + 4)100 + 4 \times 4 = 2516$.

Multiplicaci\u00f3n por Complementos. Son las reglas que resultan al apoyarse en el producto de los complementos aritm\u00e9ticos, cuando \u00e9ste es m\u00e1s f\u00e1cil que el producto de los dados.

Multiplicaci\u00f3n por la regla de "los Perezosos": $ab = (10-a)(10-b) + 10[a - (10-b)]$. $8 \times 7 = "10 - 8 = 2; 10 - 7 = 3; 8 - 3 = 5$, son las decenas, y $2 \times 3 = 6$ son las unidades. Total 56".

Multiplicaci\u00f3n por la regla de "San Andr\u00e9s": $ab = (100-a)(100-b) + 100[a - (100-b)]$. $89 \times 98 = "100 - 98 = 2, 100 - 89 = 11, 98 - 11 = 87$, esto son las centenas; $2 \times 11 = 22$, esto son las unidades" = 8722. $989 \times 998 = 11 \times 2 + (998 - 11) \times 1000 = 987022$.

Multiplicaci\u00f3n Cruzada o Cruceta. Consiste en sumar los parciales del mismo orden de unidad, al tiempo que se obtienen, para ahorrarse filas de las que salen en el algoritmo escrito. $17 \times 16 = "6 \times 7, 52, 2 \text{ y me llevo } 4. 6 \text{ y } 7, 13. 13 \text{ y } 4 \text{ que me llevo } 17, 7 \text{ y me llevo } 1. \text{ Siempre } 1 \text{ y una que me llevo son } 2. \text{ Total } 272"$.

1.3 F\u00d3RMULAS. Son las identidades literales o num\u00e9ricas conocidas.

Cuadr\u00e1ticas.

Cuadrado de un n\u00b0 por la f\u00f3rmula del binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: $31^2 = (30+1)^2 = 30^2 + 2 \times 1 \times 30 + 1 = 961$. $18^2 = (20-2)^2 = \dots$ $1001^2 = (1000+1)^2 \dots$

Multiplicaci\u00f3n por la f\u00f3rmula de la diferencia de cuadrados: $axb = \left[\frac{a+b}{2} \right]^2 - \left[\frac{a-b}{2} \right]^2$, en los casos de cero o de cinco central: $19 \times 21 = 20^2 - 1 = 399$. $6,5 \times 7,5 = 7^2 - 0,5^2 = 49 - 0,25 = 48,75$. $64 \times 66 = 65^2 - 1 = 4224$.

Cuadrado de n\u00fameros comprendidos entre 25 y 50, por el m\u00e9todo de las diferencias a 25 y 50: $a^2 = 100x(a-25) + (50-a)^2$. $46 \times 46 = "46 - 25 = 21; 50 - 46 = 4. 21 \times 100 + 4 \times 4 \text{ \u00f3 a } 21 \text{ le a\u00f1ado } 16. \text{ Total } 2116"$.

Num\u00e9ricas

Suma de secuencias n°s naturales limitadas: $1+2+\dots+n$, o trozos de ella por la fórmula correspondiente: $1+2+3+\dots+40=40 \times 41 : 2 = 820$.
 $61+63+65+67+69=5 \times 65 = 325$.

2. DESCOMPOSICIONES. Uso de cantidades menores que las dadas.

2.1 DISOCIACIONES. Son las descomposiciones en sumandos.

A) DISOCIACIONES POR DESCABEZAMIENTO. Cuando los sumandos son los que resultan al completar las cifras con sus ceros correspondientes o con sus órdenes de unidad.

Descabezamiento de un dato

Agregar, o sumar sucesivamente empezando por la cifra de orden superior completada: $63+45=63+40+5=108$.

Segregar, o restar sucesivamente empezando por la cifra de orden superior completada: $894-632=894-600-30-2=262$.

Distribuir, o multiplicar sucesivamente empezando por la cifra de orden superior completada: $46 \times 32 = (40+6) \times 32 = 40 \times 32 + 6 \times 32$.

División sucesiva de los diversos órdenes de unidad del dividendo: $1500:25=1000:25+500:25=60$.

Descabezamiento de los dos datos o por "primeros dígitos"

Resta descabezando y recuperando: $725-443=((700-400)+25)-43$.

Suma descabezando y reagrupando: $154+26=(150+20)+(4+6)$.

Resta descabezando y cambiando el signo de la resta parcial cuando la parte que hace de sustraendo es mayor que la que hace de minuendo: $725-443=(700-400)-(43-25)$.

B) DISOCIACIONES SUBSIDIARIAS. Descomposición de uno de los datos en función del otro.

Resta haciendo la misma terminación: $461-166=461-161-5=295$.

Resta prestando: $13-8,25=(12-8)+(1-0,25)$.

Suma, resta, multiplicación o división por patrones o hechos conocidos:

Dobles, $25+28=25+25+3=53$. Complementos, $54+48=54+46+2=102$. Cuadrados, $25 \times 26=25 \times (25+1)=650$. Cuartos, $36 \times 1,25=36 \times (1+1/4)=45$.

Mitades, $38 \times 1,5 = 38 \times (1 + 1/2) = 57$. tercios, $27 : 0,75 = 27 \times (1 + 1/3) = 36$. Otros, $46 \times 22 = 46 \times (20 + 20/10) =$ "Doble de 46, 92, 920 y añado su décima parte". Análogamente, con 33, 44 ... , 110.

Multiplicación de 5, 25, 35,... por un número no par:
 $25 \times 17 = 25 \times (16 + 1) = 50 \times 8 + 25 = 425$.

Multiplicación por 25, 1215, 1125, 75, 175, 15, 150, 155:
 $34 \times 25 = 34 \times (10 \times 2 + 10/2)$. $36 \times 125 = 36 \times (100 + 100/4)$. $36 \times 1125 = 36 \times (1000 + 100 + 100/4)$. $36 \times 75 = 36 \times (50 + 25) = 36 \times (100/2 + 50/2)$. $38 \times 15 = 38 \times (10 + 10/2)$.

División, descomponiendo el dividendo en sumandos que son múltiplos del divisor:
 $792 : 11 = (770 + 22) : 11 = 770 : 11 + 22 : 11 = 72$.

2.2 FACTORIZACIONES. Descomposición de uno o ambos datos en factores.

A) FACTORIZACIONES SIMPLES

Multiplicación por 12, 15, 22, 33, 44, ... :
 $37 \times 12 = 37 \times 3 \times 4 = 111 \times 4 = 444$. $18 \times 15 = 9 \times 2 \times 5 \times 3 = 27 \times 10 = 270$.
 $26 \times 33 = (26 \times 11) \times 3$.

División descomponiendo el divisor en factores: $75 : 15 = 75 : 3 : 5 = 5$.

B) FACTORIZACIONES SUBSIDIARIAS

División descomponiendo el dividendo en factores:
 $1500 : 25 = 15 \times (100 : 25) = 15 \times 4 = 60$.

3. COMPENSACIONES. Es servirse del incremento de uno o los dos datos compensando adecuadamente el resultado.

3.1 COMPENSACIÓN INTERMEDIA. Compensar antes de operar los parciales.

Añadir y quitar. Añadir a un dato unidades que se quitan al otro.

Suma completando decenas: $81 + 59 = 80 + 60$.

Suma doblando el número central, conocida como procedimiento del "número misterioso" (Green, 1985): $34 + 36 = 35 + 35 = 70$.

Promediar. Hallar la media de productos equidistantes:
 $60 \times 25 = \dots 60 \times 20 = 1200$, $60 \times 30 = 1800$. Luego $60 \times 25 = (1200 + 1800) / 2 = 1500$.

Doble y mitad. Doblar un dato y dividir el otro simultáneamente.

Multiplicación de 15, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, por un número par:
 $28 \times 35 = 14 \times 70 = 980$.

Multiplicación por un número que es potencia de 2:
 $16 \times 36 = 8 \times 72 = 4 \times 144 = 2 \times 288 = 576$.

Conservar. Sumar o restar el mismo número al minuendo y al sustraendo, para hacer decenas, centenas, ..., completas.

Resta sumando a los datos el complemento del sustraendo: $46 - 18 = 48 - 20 = 28$.

Alicuotar. Aplicar las relaciones alícuotas (ser divisor) de un dato.

Multiplicación por 5, 2 y $1/2$ o 2,5, 25, 125, 75, 375, 625, 875 etc., o cualquier otro número que sea parte alícuota de 10, 100, 1000:
 $420 \times 5 = 420 \times 10 / 2$; $82 \times (2 \text{ y } 1/2)$ ó $82 \times 2,5 = 82 \times 10 / 4$; $64 \times 25 = 64 \times 100 / 4$;
 $36 \times 75 = (36 : 4) \times 3 \times 100$; $72 \times 125 = 72 \times 1000 / 8$; $64 \times 375 = 64 \times 3000 / 8$, $64 \times 625 = 64 \times 5000 / 8$, $64 \times 875 = 64 \times 7000 / 8$.

División por 5; 25; 125; 75; 0,50; 0,25; 0,125; 0,75; 1,25; 1,5; etc., y en general cuando el divisor es parte alícuota de 10, 100, ... : $48 : 5 = 48 \times 2 / 10$;
 $2400 : 25 = 2400 \times 4 / 100$.

Multiplicación por 0,5; 0,25; 0,2; 0,125: $28 \times 0,5 = 28 \times (1/2)$; $36 \times 0,25 = 36 \times (1/4)$; $18 \times 0,2 = 18 : 5$.

División por 0,5; 0,25; 0,2; 0,125: $36 : 0,5 = 36 \times 2$; $38 : 0,25 = 38 \times 4$; $18 : 0,2 = 18 \times 5$

Multiplicación por 0,75; 1,25; 1,5: $28 \times 0,75 = (28 : 4) \times 3$; $24 \times 1,25 = 24 \times 5 / 4$;
 $34 \times 1,5 = (34 : 2) \times 3 / 2$.

División por 0,75; 1,25; 1,5: $69 : 0,75 = (69 : 3) \times 4$.

División por un número al que a su inverso le falta una parte alícuota de 1, 10, 100, ... : $65 : 1,25 = 65 \times (1 - 1/5)$; $93 : 1,5 = 93 \times (1 - 1/3)$.

3.2 COMPENSACIÓN FINAL. Compensar al acabar las operaciones parciales.

Redondeo. Completar la decena, centena, ..., inmediata superior de alguno de los datos.

Suma añadiendo a cualquiera de los sumandos para hacer una cantidad exacta de decenas, centenas, ... : $56 + 17 = (56 + 20) - 3$

Resta añadiendo al sustraendo para hacer una cantidad exacta de decenas, centenas, ... : $265-199 = 265-200+1$.

Multiplicación por un número cualquiera de nueves: 9, 99,... : $84 \times 9 = 84 \times (10-1) = 840-84$; $47 \times 99 = 47 \times (100-1) = 4700-47$.

Multiplicación por un número próximamente menor que un número múltiplo 10, 100, 1000: $34 \times 19 = 34(20-1)$; $25 \times 47 = 25 \times (50-3)$.

Multiplicación por un número próximamente menor que 10, 100, 1000 al que le falta un número que es parte alícuota de alguno de éstos: $36 \times 7,5 = 36 \times (10-1/4 \text{ de } 10)$; $32 \times 75 = 32 \times (100-1/4 \text{ de } 100)$; $48 \times 0,75 = 48 \times (1-1/4)$; $64 \times 87,5 = 64 \times (100-1/8 \text{ de } 100)$; $48 \times 875 = 48 \times (1000-1/8 \text{ de } 1000)$.

División cuando al dividendo le falta un múltiplo del divisor para ser 100, 1000, ... : $975:25 = (1000-25):25$.

Multiplicación por un número al que le falta 1/10 de su decena inmediata superior: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 91: $67 \times 18 = 67 \times (20-1/10 \text{ de } 20)$.

Incremento Subsidiario . Suplir un dato por otro mayor que tiene un método vinculado o da lugar a un hecho de resultado conocido.

Multiplicación por 7, 6, 4, 45: $256 \times 4 = 256 \times (10/2 - 1)$.

4. RECUELTOS

4.1 CONTANDO A SALTOS

Repetición de grupo. Es servirse de actuaciones aditivas repetitivas que involucran a las pautas recurrentes de la secuencia numérica.

División restando del dividendo múltiplos del divisor:

$570:38 = 570-38 \times 10$, que son 570-380, 190, y 190 son 5×38 Total $10+5$;
 $1500:25 = 4$ veces 25 son 100, 1000 serán 40, y 500 la mitad, 20. Total 60.

Notas

1. El cálculo Mental es el cálculo de cabeza o de memoria (sin ayuda externa) y con datos exactos. Esto incluye tanto a la emulación o adaptación mental de los artificios estándar de columnas como a cualquier otro método alternativo. Debe entenderse que el cálculo Mental es diferente del cálculo Estimado, del cálculo Abreviado y del cálculo Aproximado, aunque para algunas personas éstas sean denominaciones

sinónimas. En efecto, el cálculo Estimado es el cálculo cuando los números que se operan son aproximaciones subjetivas de los datos para obtener una respuesta razonablemente cercana del resultado real. El cálculo Aproximado es el cálculo cuando los números que se operan son aproximaciones objetivas, por restricciones obligadas o limitaciones derivadas de una medida, acotación o magnitud del error acordada. Por último, el cálculo Abreviado, es el escrito con datos exactos pero con métodos alternativos, o adaptaciones particulares de los algoritmos estándar que ahorran o simplifican tarea.

2. El segundo punto ha sido abordado en una fase posterior a la que aquí se presenta, en el marco de un trabajo de investigación que ha sido reflejado en la tesis doctoral del autor.

3. La metodología seguida para la revisión fue la de consultar varios textos renombrados de tres clases cronológicas de aritméticas: Textos anteriores al siglo XIX, textos del siglo XIX y textos del siglo XX. Fundamentalmente se ha trabajado sobre la información documentada por Smith (1923) y Sánchez Pérez (1949), y sobre los textos de Treviso (1478), Juan Pérez de Moya (1563), José Mariano Vallejo (1813), Sylvestre François Lacroix (1797), Dalmáu Carles (1898), Bruño (1932), Anaya (1986) y Santillana (1982 y 1988).

4. "Método de cálculo o estrategia es un procedimiento esquemático que descompone su trabajo en una preorganizada secuencia de pasos" (Hunter, 1978).

5. "... el aprendizaje de una serie de métodos y estrategias que permitan al alumno operar" (DCB, 1989)

6. Se han utilizado estos hechos y relaciones para agrupar los métodos y asignarles nombre, guardando en lo posible correspondencia con lo que son denominaciones históricas, más o menos reconocidas.

7. En esta estrategia sólo se han encontrado métodos alternativos del tipo de columnas en el caso de la resta, en la suma, multiplicación y división sólo aparece el método usual

Referencias bibliográficas

Anaya: *EGB. AZIMUT*. Equipo Signo. Madrid. Ediciones Anaya. 1986. Serie reeditada.

Bruño: *Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada. Curso Sup. (2ª. Ed.) y Solucionario*. Madrid, Barcelona. Ed. "La instrucción popular". S. A. 1932.

Dalmáu Carles, J.: *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*. Libro del alumno. Grado profesional. Barcelona, Madrid y Gerona. 1898. Serie reeditada.

D. B. R.: *Documento Base para la reforma de la EGB*. Valencia. Consellería de Cultura. E. y C. de la C. Valenciana. 1990.

D. C. B.: *Documento Diseño curricular base*. Madrid. Ministerio de educación y Ciencia (MEC). 1989.

Gómez, Alfonso, B.: Cognición y competencia en cálculo mental. En Joao Pedro da Ponte y Joao Filipe Matos. *Actas del XVIII congreso internacional del PME* (vol. 2, pp. 9-15). Lisboa. 1994. 29 Julio-3 Agosto.

Gómez Alfonso, B.: *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos*. Doctoral dissertation, Universidad de Valencia-España. 1994.

Green, G.: Math-Facts Memory Made Easy. *Arithmetic Teacher* 33, 21-25. 1985.

Hunter, I. M. L.: The role of memory in expert mental calculations. In M. M. Gruneberg; P. E. Morris y R. N. Sykes (eds.), *Practical aspects of memory*. Londres. Academic Press, 339-345 (Cit. Hope, 1984). 1978.

Lacroix, S. F.: *Tratado elemental de Aritmética*. Traducción española de Rebollo Morales. Edición de 1846. Madrid. Imprenta Nacional. 1797.

MEC. Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la Educación General Básica. *Magisterio Español*. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia. 1970

MEC . Programas Renovados de E.G.B. Ciclo Medio y Ciclo Superior. *Escuela española*. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia. 1981.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation. Standards for School Mathematics*. Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

Pérez de Moya, J.: *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía, y Philosophia natural*. Alcalá de Henares. 1573.

Sánchez Pérez, J. A.: *La Aritmética en Roma, en India y en Arabia*. Madrid. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Patronato Marcelino Menéndez y Pelayo. Instituto Miguel Asín. 1949.

Santillana: Libros de texto para la EGB. 1982, 1988. Serie reeditada.

Schubring, G.: On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author *For the learning of mathematics*. vol 7, nº 3, 41-51. 1987.

Smith, D. E.: *History of Mathematics*. New York. Dover P. 1923 (Reed. 1958).

"Standards" (NCTM, 1989)

Trafton, P. R.: Estimation and mental Arithmetic: Important Components of Computation. En M. N. Suydam y R. E. Reys (eds.), *Developing Computational Skills: 1978 Yearbook*. 196-213. Reston, VA. NCTM. 1978.

Treviso: Aritmética (Trad. de D. E. Smith). En Frank J. Swetz, *Capitalism y Arithmetic. The New Math of the 15 th Century*. (1987, ed 1989). La Salle, Illinois. Open Court. 1478.

Vallejo, Jose M.: *Tratado Elemental de Matemáticas. Tomo I*. Madrid. 1813 (4ª Ed. 1841).