UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE ÁREA DE SUPERFICIES PLANAS. ESTUDIO DE SU COMPRENSIÓN POR LOS ESTUDIANTES DESDE PRIMARIA A LA UNIVERSIDAD

Tesis presentada para la obtención del título de Doctor en Ciencias Matemáticas por: ROSA Mª CORBERÁN SALVADOR

Dirigida por: Dr. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Depositada en: Valencia, abril de 1996
Leída en: Valencia, diciembre de 1996

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA
DE LES MATEMÀTIQUES

Dr. D. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ, Catedrático de E.U. de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

HAGO CONSTAR:

1) Que la presente memoria titulada *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde Primaria a la Universidad* ha sido realizada bajo mi dirección por Dña. ROSA CORBERÁN SALVADOR, en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.

2) Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

Y para que así conste, firmo el presente documento.

En Valencia, a 23 de abril de 1996.

Fdo.: Ángel Gutiérrez R.

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las muchas personas que me han apoyado durante todo este tiempo y me han animado para la consecución de este trabajo. Mi gratitud para, también, las muchas personas que han colaborado en la realización de este estudio y en la elaboración de esta memoria. Sin la ayuda de todas ellas no hubiera sido posible la realización de esta tesis.

Gracias

La característica más notable, tanto del área como del volumen, es su rico contexto en la naturaleza, la cultura y la sociedad, por una parte, y la extrema pobreza de la instrucción sobre ella, por otra. En la educación -al menos en la primaria, en donde se adquieren y fijan las actitudes-, el área está minimizada a la expresión "longitud por anchura", disponiendo de una fórmula para el círculo, que no tiene longitud ni anchura (¿o sí?); [...]; y el cálculo alardea de una maquinaria para computar las áreas y los volúmenes de figuras fabricadas ad hoc. Este es -desde el más bajo al más alto nivel- un grado de pobreza que creo no se ha dado en ningún otro tema matematizable de instrucción.

Y hay más: ningún otro tema parece tan poco problemático con multitud de problemas ocultos al observador no cualificado; ninguno se ve afectado por una batalla tan rampante entre la conciencia matemática y didáctica como el área (y el volumen).

Hans Freudenthal

Didactical phenomenology of mathematical structures
Reidel Publishing Company (1983)

ÍNDICE

PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DE LA TESIS

El interés por el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área surge al observar a lo largo de la experiencia docente como profesores de matemáticas de secundaria, las serias dificultades con las que se enfrentan los estudiantes de este nivel educativo al resolver problemas en los que de forma directa o indirecta está implicado dicho concepto. Cualquier profesor de matemáticas de enseñanza media ha podido comprobar cómo el desconocimiento o la incomprensión de este concepto dificulta el aprendizaje de otros conceptos matemáticos y procedimientos habituales en el currículum de secundaria post-obligatoria (bachilleratos, (16 a 18 años)), como son entre otros, el de integral definida y los problemas de maximización y minimización.

Al analizar los trabajos publicados en los que se relacionan estudios dedicados a este concepto se constató que la práctica totalidad de los mismos se habían llevado a cabo en el extranjero. Por otra parte, se podría concluir que en todos ellos, de un modo u otro, los investigadores coincidían en llamar la atención sobre la incomprensión por parte de los alumnos del concepto de área, y en considerar como causa fundamental de ello el modo en el que se realiza su enseñanza, limitada comúnmente al uso de la unidad cuadrada, a la presentación de fórmulas para el cálculo de áreas y a la introducción de las unidades con múltiplos y submúltiplos.

Es importante resaltar el hecho de que este trabajo se plantea durante un período en el que nuestro sistema educativo estaba sufriendo un cambio, con la consiguiente reforma curricular que ello conlleva. En la nueva ley que regula la Educación en España denominada "Ley Orgánica General del Sistema Educativo" (LOGSE) se le reconoce a la geometría el importante papel que juega en la formación general y matemática de los estudiantes de primaria (6 a 11 años) y secundaria obligatoria (12 a 16 años), otorgándole en estos niveles educativos la misma importancia e incluso más que a otras áreas de las Matemáticas que hasta ahora habían tenido una mayor presencia en el currículum, como por ejemplo es el caso del álgebra. Disponer de un mayor espacio en el currículum es un hecho que propicia una mejora de la enseñanza de los conceptos geométricos y en particular del que aquí nos ocupa. Sin embargo, no hay que olvidar que para que se produzca un adecuado aprendizaje de todos ellos, se requiere que su enseñanza esté organizada de forma conveniente. Desgraciadamente al consultar materiales curriculares de diversas editoriales, correspondientes a los niveles de primaria y secundaria obligatoria del nuevo sistema educativo, no observamos importantes y necesarios cambios sobre el modo en el que hasta ese momento se planteaba la enseñanza del área. Por el contrario, comprobamos que existía una tendencia generalizada en la mayoría de estos materiales curriculares a plantear la enseñanza del área de la manera criticada por todos los investigadores.

De esta forma, la constatación del desconocimiento e incomprensión del concepto de área por parte de los alumnos, la ausencia de un estudio específico en nuestro país, junto con el momento de cambio que vivía nuestro sistema educativo, hizo que consideráramos interesante llevar a cabo el trabajo que se presenta en esta memoria con objeto de contribuir al estudio del proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de área, y con la esperanza de aportar sugerencias que mejoren su enseñanza.

Por otra parte, creemos que es esencial que los investigadores en Didáctica de las Matemáticas colaboren con los docentes, de todos los niveles educativos, en su labor diaria de enseñar a los alumnos el contenido matemático, realizando estudios que introduzcan elementos de reflexión que conduzcan al profesor a cuestionarse el modo en el que lleva a cabo la enseñanza y que aporten la información suficiente para permitirle reconducirla de forma adecuada. Ha sido precisamente esta idea la que ha determinado el enfoque del estudio.

Así pues el presente trabajo de tesis doctoral se ha realizado persiguiendo los siguientes objetivos principales:

i) Realizar un análisis didáctico del concepto de área de superficies planas.

ii) Estudiar el grado de comprensión que poseen los alumnos de este concepto al finalizar primaria -que es cuándo habitualmente finaliza la instrucción del área- y observar si este grado de comprensión experimenta algún tipo de evolución en los alumnos en relación al nivel educativo al que pertenecen.

iii) Diseñar, experimentar y evaluar una unidad de enseñanza para secundaria con objeto de corregir algunos de los errores detectados en los alumnos de este nivel y ampliar su formación sobre el área.

El estudio se planteó en etapas sucesivas, que a continuación se comentan brevemente.

Antes de abordar el análisis didáctico del concepto de área era necesario determinar el estado actual del tema. Para ello, en una primera etapa, se contactó con otros grupos de investigación y se procedió a una revisión de la literatura especializada. Los resultados de este estudio, se incluyen en el capítulo 1, y resultaron fundamentales tanto para la realización del análisis didáctico, como para determinar el contenido del test que sería utilizado para determinar el grado de comprensión de los alumnos del concepto de área.

En una segunda etapa se procedió al análisis didáctico del concepto de área (capítulo 2) para el que fue necesario realizar un estudio del concepto matemático y de su evolución a lo largo de la Historia. Nuestro objetivo era realizar un estudio global del área donde se tuvieran en consideración sus distintos aspectos y algunos relacionados con ella, especialmente aquéllos que son causantes de errores en los alumnos, como son la forma y el perímetro de una superficie. Este estudio permitió establecer el objetivo educativo de la enseñanza del área, y determinar qué aspecto/s se puede/n abordar en su enseñanza, y cuándo es el momento más adecuado para hacerlo.

Todo el estudio realizado hasta este momento permitió estructurar la tercera parte de la investigación denominada "etapa diagnóstica" (capítulo 3), que tuvo por objeto evaluar el efecto de la instrucción que habitualmente se da a los alumnos de primaria en la enseñanza del área, a corto, medio y largo plazo, es decir, al final de los distintos estadios educativos (primaria, secundaria y universidad), y de este modo, estudiar si el grado de conocimiento y comprensión que poseen los estudiantes de este concepto experimenta una evolución en relación a los diferentes niveles educativos y en qué medida influye la formación general (humanista) y la específica (matemática) que el alumno va adquiriendo a lo largo de su vida académica, y determinar qué aspectos del concepto y qué herramientas de medida deberían reforzarse en secundaria. Para ello se diseñó, realizó y analizó un test. El test se administró a un total de 521 alumnos, de 8° de Educación General Básica (E.G.B.) (13-14 años), 2° de Bachillerato Unificado Polivalente (B.U.P.) (15-16 años), Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.) de las especialidades de Ciencias y Letras (17-18 años), de 3° de la Escuela Magisterio (20-22 años), y finalmente de 5° de la Facultad de Matemáticas (22-24 años).

Los distintos aspectos del área que se trataron en el test diseñado son: concepciones del área, unidad de medida, conservación, relación entre el área y el perímetro de una superficie, relación entre el área y la forma de una superficie, bidimensionalidad, fórmulas para el cálculo, significado geométrico del Teorema de Pitágoras, papel de la percepción visual en tareas de comparación de áreas, relación entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la de un rectángulo, procedimientos utilizados en la resolución de problemas, y conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones.

A continuación se realizó un tratamiento estadístico de los resultados del test, y un profundo análisis de los resultados obtenidos, localizando y comentando las dificultades que encuentran los estudiantes en la comprensión de los conceptos estudiados.

Finalmente la última etapa del trabajo consistió en el diseño y experimentación de una unidad de enseñanza del área para estudiantes de secundaria (15-16 años) y en la evaluación de sus efectos. Todo ello se muestra en el capítulo 4. Con la secuencia de enseñanza se pretendía presentar a los alumnos el área, por un lado, disociada de la forma de la superficie y del número que la mide, y por otro, disociada del perímetro de la superficie. Esto último a partir del estudio de la variación y/o conservación del área y/o perímetro de una superficie cuando ésta está sometida a determinadas transformaciones.

La unidad de enseñanza se experimentó en un grupo de 24 alumnos de 4° curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (15-16 años). Como instrumento de evaluación se administró a estos alumnos antes y después de la secuencia de enseñanza el mismo test que fue diseñado y utilizado durante la etapa diagnóstica, en calidad de pre y post-test.

Finalmente indicar que el estudio aquí presentado es el resultado de varios años de trabajo, iniciándose éste formalmente en el curso escolar 1992-93, durante el que se desarrollaron la primera, segunda y tercera etapa de la investigación, aunque la búsqueda bibliográfica ya se había iniciado con anterioridad. La experimentación se llevó a cabo durante el curso escolar 1993-94. Después de todo ello han sido necesarios dos años más para poder elaborar la memoria que aquí se presenta.

CAPÍTULO 1

INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL ÁREA

1.1. INTRODUCCIÓN

La información que se expone en el presente capítulo es el resultado del análisis de los estudios realizados hasta el momento sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de área, procedentes de la búsqueda bibliográfica que realizamos con el fin de conocer los antecedentes de la problemática entorno al objeto de estudio y delimitar el alcance de este trabajo.

El objetivo de este capítulo es el de mostrar los resultados y conclusiones más interesantes, por su carácter general e influencia directa en nuestro trabajo, de las distintas investigaciones consultadas. En la sección 1.3. se exponen los correspondientes a los trabajos teóricos globales y en la 1.4. los de los estudios parciales. Sin embargo, con objeto de facilitar a las personas interesadas en educación matemática un poco más de información sobre el tipo de contenido de los trabajos realizados, hemos creido oportuno aportar algunos datos sobre determinadas características de éstos, que se exponen en la próxima sección 1.2.

1.2. CARACTERÍSTICAS DE LAS INVESTIGACIONES ANALIZADAS

La práctica totalidad de los mencionados trabajos han sido realizados en el ámbito de niños de edades comprendidas entre los 7 y 14 años. Sólo unos pocos han considerado también a alumnos de los primeros cursos de secundaria, como Carpenter et al. (1980), Hart, ed. (1981) y Hirstein (1981). Excepcionalmente, Mullen (1985) trabaja con profesores de la escuela elemental, Pace (1990) con una parte de la comunidad de adultos de escuelas pre-universitarias (college) y Tierney, Boyd y Davis (1990) lo hacen con futuros profesores de primaria.

Puesto que los fines perseguidos en los distintos trabajos son de distinta índole según el tipo de *objetivos* planteados, los hemos agrupado en tres categorías diferentes:

a) Estudios teóricos sobre el concepto de área que abordan el análisis didáctico de este concepto en su globalidad desde marcos teóricos diferentes. Tales como, Freudenthal (1983), Héraud (1989) y Perrin-Glorian (1992). Un resumen de estos trabajos se expone en la sección 1.3.

b) Investigaciones que tienen por objeto determinar el grado de comprensión de los alumnos en uno o varios aspectos íntimamente relacionados con el concepto de área, entre los que se encuentran por ejemplo, la unidad, la relación área-perímetro, y procedimientos de comparación, y a los que nos hemos referido como estudios parciales y de los que se exponen algunos de sus resultados más interesantes en la sección 1.4. de esta memoria. Dentro de todos ellos cabe diferenciar:

b.1 Los trabajos que se han realizado con muestras importantes y que normalmente forman parte de investigaciones con objetivos más amplios, de carácter nacional. Sus resultados proceden del análisis de las respuestas dadas por los alumnos al test que les es administrado, y que es diseñado ex profeso para cada investigación. Por ejemplo: i) Carpenter et al. (1980), Hiebert (1981), Hirstein (1981), y Kouba et al. (1988), muestran resultados de diferentes evaluaciones nacionales sobre el progreso en matemáticas (*National Assessment of Educational Progress*, NAEP). Estos estudios se realizan periódicamente en Estados Unidos y tienen por objeto determinar el grado de comprensión de los alumnos de diferentes niveles escolares acerca de conceptos matemáticos, en concreto algunos relacionados con el área, como por ejemplo la unidad de medida. Los resultados se expresan normalmente con porcentajes, y generalmente no van acompañados de extensos análisis. ii) El trabajo de Hart, ed. (1981), integrado en el programa de investigación acerca de conceptos de matemáticas y ciencia en secundaria (*Concepts in Secondary Mathematics and Science*, CSMS) fue llevado a cabo en Inglaterra durante los años 1974-79, período durante el cual se entrevistaron aproximadamente 10.000 alumnos de edades comprendidas entre los 11 y 15 años. Tuvo por objeto determinar niveles jerárquicos de compresión de los alumnos según el comportamiento mostrado por éstos en la resolución de tareas relativas a conceptos del currículum de secundaria. En particular incluye cuestiones sobre longitud, área y volumen. Una réplica de este trabajo se hizo en España en 1988, por un grupo de profesores de Almería. iii) La investigación de Hughes, Bell y Rogers (1975) y Hughes (1979) encargada por El Consejo de investigación de estudios escolares (*The Schools Council Research Studies*) que involucró alrededor de 1000 alumnos de la escuela primaria, de edades comprendidas entre los 7 y 11 años, y tuvo como objetivo analizar el desarrollo conceptual en área, peso y volumen para examinar las dificultades y proponer sugerencias para su enseñanza. Cabe mencionar que algunas tareas empleadas en este estudio, aparecen también en el trabajo de Hart, ed.

b.2 Los trabajos que para su realización han utilizado un número de estudiantes menor que los mencionados en el apartado anterior, pero no por ello menos interesantes, y que constituyen la mayor parte de las investigaciones que se han llevado a cabo a nivel internacional. En este caso, la metodología de investigación empleada ha sido diversa y ha consistido fundamentalmente en entrevistas clínicas, en experiencias en clase con grupos reducidos de alumnos, y en administración de tests.

c) Estudios cuyo único objetivo ha sido el de proponer actividades concretas o secuencias de tareas para la enseñanza de uno o varios aspectos relacionados con el área, y que no son resultado de una investigación previa. Para la investigación que se describe en esta memoria no ha sido esencial disponer de una relación completa de todos ellos. Se reseñan aquellos que de algún modo están relacionados con la indagación en cuestión. Citaremos a modo de ejemplo los que contienen tareas sobre: unidad de área y fórmulas (Battista, 1982); comparación (Clapponi, 1991-1992; Leutzinger & Nelson, 1980); relación entre el área y el perímetro de un rectángulo (Clayton, 1983); aproximación al área bajo una curva (Dreyfus, 1987); estimación de áreas de figuras irregulares (Horak & Horak, 1982); el geoplano como vehículo para el estudio del área de figuras poligonales sometidas a diversas transformaciones (Spitler, 1982), y el teorema isoperimétrico (Watkins, 1982). Destacar finalmente dos trabajos nacionales, el de Del Olmo, Moreno y Gil (1989) y el de Guillén (1983, 1985), en los que se realiza una propuesta didáctica, bastante similar, para la enseñanza del área. En los dos trabajos se sugiere una extensa relación de tareas secuenciadas con los objetivos que con ellas se pretenden alcanzar, dirigidas fundamentalmente al estudio de la conservación, comparación, medida a partir de la comparación de figuras con alguna tomada como unidad, diferentes procedimientos para determinar el área, aritmetización del área y estimación.

El interés que despierta el concepto de área en la investigación en educación matemática es patente no solamente por el elevado número de trabajos que se han realizado sobre él, sino también por las investigaciones en las que si bien su objeto no es propiamente el estudio del área, ésta es utilizada como contexto en el que se enmarcan otros estudios. Esto estaría en consonancia con el hecho de que en la práctica docente el área se emplea como base de modelos para la enseñanza de otros conceptos matemáticos. En nuestra búsqueda bibliográfica nos hemos encontrado con algunas de estas investigaciones, que muestran la aplicación del área en distintas parcelas de las Matemáticas, y si bien no tienen una implicación directa en nuestro trabajo, citaremos algunas de ellas a modo de ejemplo. Armstrong (1990, 1995) estudia el uso del número racional en tareas de comparación de áreas. Lowry (1987) estudia si el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele puede suministrar un marco para valorar el nivel de razonamiento de niños de 9 años de edad sobre los conceptos de área y perímetro. Rojano (1985) utiliza el área en algunas ocasiones para dar un significado geométrico a determinadas expresiones algebraicas.

¿EXISTE UNA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN COMÚN EN LOS TRABAJOS CONSULTADOS?

El primer estudio sobre el conocimiento de la medida del que tenemos referencia se trata del realizado por Piaget, en el que estableció los diferentes estadios de desarrollo de la comprensión por parte de los niños de los conceptos de longitud, superficie y volumen, y cuyos resultados recogió en su libro "La géométrie spontanée de l'enfant" en 1948, traducido al inglés en 1960, y presentado de forma resumida por Holloway (1986).

La mayoría de los trabajos realizados en la década de los setenta e inicio de la de los ochenta tienen una fuerte *componente psicológica*, como los realizados por Bang (1976), Hughes, Bell y Rogers (1975) y Hughes (1979), y Wagman (1982). Estos investigadores, influidos por el estudio realizado por Piaget, dedicaron gran parte de su atención a contrastar los resultados obtenidos por éste. Por ejemplo, **a)** Bang estableció tres estadios de desarrollo referidos a la conducta observada en alumnos de edades comprendidas entre los 8 y 14 años a los que entrevistó con objeto de estudiar la relación entre la intuición geométrica y la actividad operacional deductiva y ver cómo los estudiantes se desenvuelven para disociar las propiedades de área y perímetro al enfrentarse a la resolución de problemas en los que las figuras son sometidas a determinadas transformaciones que conservaban el perímetro pero no el área. **b)** Hughes, Bell y Rogers, a cuyo trabajo ya nos hemos referido anteriormente, entre otros resultados, confirmaron los estadios secuenciales de la operación mental descritos por Piaget, en estudiantes de edades comprendidas entre los 7 y 11 años, pero afirmaron no encontrar nada que les permitiera establecer una relación entre los estadios y las edades de los alumnos. **c)** Wagman entrevistó de forma individual a niños de 8, 10 y 11 años de edad con objeto de estudiar el desarrollo de la medida del área de regiones poligonales desde un punto de vista matemático. Para lo cual, sometió a estudio los axiomas de: área, aditividad, congruencia y unidad. Wagman identificó cuatro estadios en la consecución de la medida del área: i) "the attainment", ii) "the transitional", iii) "the beginnings", y iiii) "the pre-measurement". El primer estadio ("the attainment") se caracteriza por la habilidad de los alumnos para aplicar el conjunto completo de los axiomas en cualquier tipo de situación. En el segundo estadio, los niños pueden aplicar todos los axiomas en los casos sencillos, pero necesitan ayuda en los más complejos. En el siguiente estadio, los estudiantes son capaces de aplicar alguno de los axiomas pero no todos ellos, y finalmente, la pre-medida es el estadio más bajo en la medida del área, y en él los niños tienen algunas nociones sobre la conservación pero no son capaces de aplicarlas en todas las situaciones, no pudiendo éstos aplicar cualquier otro axioma de la medida del área. Wagman encontró que más del 50% de los niños de 8 años y la tercera parte de los de 10 y 11 años se encontraban en el penúltimo estadio "the beginnings", y aproximadamente el 50% de éstos últimos en el estadio "the transitional".

Así pues, se podría decir que hasta la década de los ochenta, existía una línea común de investigación, basada en un estudio crítico de los distintos estadios definidos por Piaget. En la mayoría de las investigaciones posteriores a esa época, la componente psicológica prácticamente no existe, siendo sus objetivos de muy distinta índole. Sin embargo, es común encontrar en gran parte de ellas alguna referencia al trabajo realizado por Piaget.

Tras la lectura de las distintas investigaciones se puede apreciar que no existe una línea de investigación común en todas ellas, sino que en su mayoría son estudios puntuales, lo que hace muy difícil hablar de una evolución en el estudio de la enseñanza y aprendizaje del concepto de área. También se observa al leer las referencias bibliográficas de cada una de ellas, que en una mayoría, sólo se han utilizado como antecedentes trabajos realizados por compatriotas, y en consecuencia se encuentran frecuentemente estudios realizados en países diferentes pero con contenidos y objetivos bastante similares. Resulta interesante comparar y analizar los resultados de estos estudios para sacar aquellas conclusiones que pueden resultar generales a nivel internacional. Cabe destacar los intentos de algunos investigadores como Dickson, Brown y Gibson (1988), y Del Olmo, Moreno y Gil (1989) de recopilar y reseñar los trabajos realizados hasta ese momento.

Todos estos trabajos, aún habiéndose realizado en países diferentes y con culturas y sistemas educativos muy distintos, tienen como denominador común su preocupación por mejorar la comprensión del concepto de área de los alumnos tanto de primaria como de secundaria. Puede extraerse como una primera conclusión de carácter general que la incomprensión del concepto de área por parte de los alumnos es un hecho puesto de manifiesto en los errores comunes que cometen al resolver tareas de comparación de áreas, y/o en su incapacidad de hacer frente a problemas de relativa sencillez de cálculo de áreas de superficies planas. La mayoría de los investigadores creen que la causa radica en la extrema pobreza e inadecuada instrucción con la que el tratamiento del área es planteada por profesores y libros de texto.

1.3. ESTUDIOS TEÓRICOS GLOBALES

De todos los trabajos realizados sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de área, sólo tres han abordado un estudio teórico del concepto, si bien apoyándose en teorías didácticas distintas: Freudenthal (1983), Héraud (1989) y Perrin-Glorian (1992).

Es importante señalar que existen diferencias también en el tipo de estudio desarrollado por estos tres investigadores. En tanto que Freudenthal realiza un estudio teórico sin concretar ninguna propuesta curricular, Héraud y Perrin-Glorian conducen sus investigaciones hacia la elaboración de una secuencia didáctica de enseñanza del área, concretada en el caso de la de Perrin-Glorian en una propuesta con actividades específicas. Sin embargo, mientras que el trabajo desarrollado por esta investigadora posee un carácter general y es aplicable al área de cualquier tipo de superficie, el realizado por Héraud se restringe al estudio del área del rectángulo, pudiendo ser éste extensible a la de los polígonos.

Por el propio interés de estos estudios y dado que han sido fundamentales para la consecución del análisis didáctico del concepto de área, mostrado en el capítulo 2, hemos creído conveniente realizar una breve exposición de cada uno de ellos, lo que constituye el contenido de esta sección.

1.3.1. HANS FREUDENTHAL

Este matemático alemán dedica en uno de sus libros más importantes Freudenthal (1983) un apartado a la fenomenología didáctica del concepto de área.

La mayor parte de su estudio de carácter teórico, lo dedica a reflexionar sobre el concepto de área desde la perspectiva de la matemáticas y de la teoría de la medida. Sin embargo, creemos que el objeto de Freudenthal al enfocar así su trabajo, no ha sido el de realizar un análisis matemático del concepto, ya que realmente los resultados que presenta son ya conocidos por los especialistas del tema, sino el de establecer de forma clara la gran separación que existe entre el objeto mental área y el concepto matemático, para lo que muestra lo dificultoso e incluso duro que resulta demostrar en ocasiones hechos matemáticos aparentemente evidentes, como por ejemplo, el que no es posible transformar un rectángulo, por un procedimiento de deshacer y recomponer en uno más pequeño, y para lo que recurre a una demostración nada trivial de Hilbert. Afirma cómo estas demostraciones requieren de esfuerzos y conocimientos que están por encima de lo que se puede pedir en los últimos cursos de secundaria.

Pensamos que el interés de mostrar la gran diferencia entre el objeto mental área y el concepto matemático está en consonancia con su posición didáctica de considerar que la constitución de los objetos mentales precede a la adquisición de conceptos, pudiendo suceder incluso, como en el caso del área, que no exista la necesidad de llegar a la adquisición del concepto, por la dificultad que en este caso concreto conllevaría. Los siguientes párrafos están extraídos de la sección 13.34 (Op. cit.; p. 388), donde Freudenthal realiza algunas afirmaciones que clarifican su posición al respecto de lo que acabamos de comentar.

> [...] Es de cajón que en el colegio, incluso a alto nivel, sólo unos pocos pasos pueden darse hacia la formación del concepto. Didácticos de las matemáticas que consideran el logro de los conceptos como el auténtico objetivo de la educación matemática, es muy probable que pasen por alto el tema del área o que lo admitan sólo en el estado de extrema pobreza. Cualquiera que esté convencido de la importancia de los objetos mentales para el pensamiento matemático, no lo evitará.

> [...] las áreas [...] están constituidas y son aceptadas como objetos mentales, y a posteriori, si es preciso, analizadas con el fin de llegar al logro gradual de un concepto.

Entendemos que el principal objetivo educativo en el caso concreto del área consistirá en la constitución del objeto mental, sin tener necesidad de llegar al concepto matemático mismo, y que la estrategia de enseñanza se centrará en el estudio de las aplicaciones del área antes que en el del propio concepto.

Para la constitución de un objeto mental, Freudenthal propone el análisis fenomenológico del concepto, consistente en describir el concepto en su relación con aquello (con los fenómenos) para lo que es un medio de organización. Sin embargo, en esta ocasión y como él mismo afirma (Op. cit.; p. 372), no aborda el enfoque fenomenológico del área misma, sino de la instrucción del área. Para llevar a cabo la fenomenología didáctica será pues necesario, conocer los fenómenos que solicitan ser organizados y enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Durante su análisis, se refiere a la riqueza fenomenológica del objeto mental área, e insiste sobre la dificultad que ocasiona la gran variedad de enfoques que posee, y que relacionamos a continuación:

- reparto justo
    - aprovechando las regularidades,

· estimando,
· midiendo;

- comparando y reproduciendo (en otra forma)
  · por inclusión,
  · por transformaciones de deshacer y recomponer,
  · por estimación,
  · por medición,
  · por medio de transformaciones, es decir, congruencias, afinidades, cizallamientos;

- midiendo
  · por agotamiento con una unidad de área con subunidades aún más finas,
  · por aproximaciones desde el interior y exterior con rejillas fijas con figuras adaptadas,
  · por conversión de transformaciones de deshacer y recomponer,
  · por medio de relaciones geométricas generales,
  · por medio de fórmulas generales,
  · por medio de principios, como el de Cavalieri,
  · por medio de transformaciones, esto es, congruencias, afinidades, cizallamientos.

Freudenthal recalca el hecho de que no es totalmente evidente que todos estos enfoques conduzcan al mismo resultado e indica que didácticamente todos son aceptables, si bien unos más que otros, pero que limitarse a uno de ellos para lograr pureza en el método, es una mala didáctica.

En su trabajo son una constante las críticas que realiza sobre el modo en el que se lleva a cabo la enseñanza del área, resaltando la extrema pobreza de su instrucción en contraste con su rico contexto en la naturaleza, la cultura y la sociedad. Comenta que en la educación primaria el área se reduce a la expresión "longitud x anchura", y a una fórmula para determinar el área del círculo, mientras que en secundaria el cálculo alardea de una maquinaria para computar las áreas. Al respecto de lo cual comenta:

> [...]. Si se enseñan las matemáticas del área, el enfoque, el método y el tema se apartan de los correspondientes objetos mentales por medio de los cuales se entiende el fenómeno del área en la vida diaria y en las aplicaciones matemáticas (Op. cit.; p. 389).

Finaliza su estudio, proponiendo las siguientes sugerencias para la instrucción:

- Realizar comparaciones entre áreas, ya que según él, esto es necesario para la constitución del área como magnitud en objeto mental.

- Realizar actividades que tengan por objeto diferenciar el área del perímetro, ya que en el caso de comparación de áreas, lo que provoca el error es el perímetro. Por ello sugiere plantear:

- ejemplos de figuras que, a pesar de desviaciones conducentes a error en las dimensiones lineales, tengan la misma área. Por ejemplo, paralelogramos de igual base y altura, y

- ejemplos de figuras que, a pesar de concordancias que conducen a error en las dimensiones lineales, tienen áreas diferentes. Por ejemplo, rombos que surgen de un cuadrado por flexión.

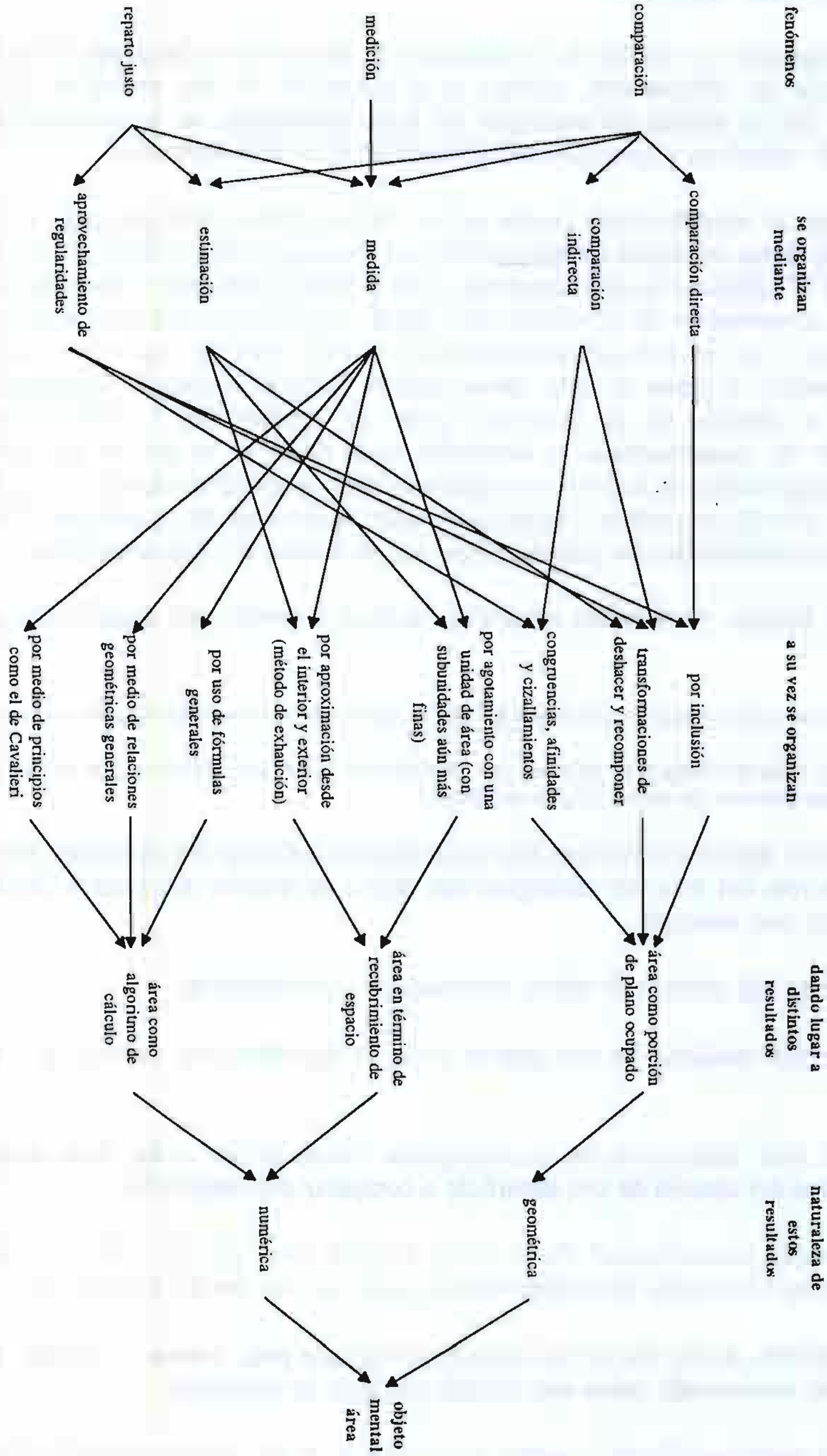
Algunas consideraciones sobre el trabajo de Hans Freudenthal

El trabajo de Freudenthal nos parece interesante porque introduce importantes elementos de reflexión acerca de qué puede y debería abordarse en la enseñanza del área en los niveles de primaria y secundaria. De forma contundente nos argumenta el por qué perseguir la constitución del objeto mental en lugar de la adquisición del concepto de área.

Dos hechos tratados por Freudenthal en su trabajo han sido fundamentales para centrar el análisis didáctico realizado en nuestro estudio, y que se expone en el capítulo 2 de esta memoria. El primero de ellos ha sido el que Freudenthal se refiriera al análisis fenomenológico de la *instrucción* del área, y el segundo que mencionara la existencia de *varios enfoques* y advirtiera que *no* todos ellos *conducen al mismo resultado*. Ello nos hizo comprender que debíamos dirigir nuestro interés hacia el estudio de los tipos de instrucción y de las consecuencias ocasionadas por cada uno de ellos. Finalmente ésto ha quedado plasmado en lo que en nuestro análisis didáctico del concepto nos hemos referido como diferentes tratamientos, que conducen a distintas interpretaciones del área.

Como personas interesadas en el proceso enseñanza-aprendizaje del área, y en el trabajo de Freudenthal lamentamos que éste no haya completado, en esta ocasión, este estudio expuesto con una aplicación práctica, consistente en una propuesta curricular concreta, o al menos en una secuencia didáctica y una relación de los criterios que debe satisfacer el objeto -área- para considerarlo como constituido mentalmente, y así mostrarnos, a modo de ejemplo, cómo debe ser un posible proceso de enseñanza-aprendizaje para la constitución del objeto mental área.

Finalmente y antes de cerrar la descripción del estudio realizado por Freudenthal queremos realizar una aportación a su trabajo. El siguiente esquema muestra nuestra propuesta de organización de los enfoques del objeto mental área propugnados por Freudenthal, en un intento de mostrar lo que creemos podrían ser los pasos a seguir para la constitución del objeto mental área. Sin embargo, para ello hemos realizado una reinterpretación de los enfoques relacionados por Freudenthal, sin poder asegurar que el sentido que nosotros les hemos dado coincida con el dado por él, ya que en su trabajo no se proporciona la necesaria información para ello. También es importante indicar que la distinta naturaleza de los resultados, geométrica o numérica, es un aspecto que nosotros hemos considerado pero que no es mencionado por Freudenthal.


fenómenos
se organizan mediante
a su vez se organizan
dando lugar a distintos resultados
naturaleza de estos resultados
comparación
medición
reparto justo
comparación directa
comparación indirecta
medida
estimación
aprovechamiento de regularidades
por inclusión
transformaciones de deshacer y recomponer
congruencias, afinidades y cizallamientos
por agotamiento con una unidad de área (con subunidades aún más finas)
por aproximación desde el interior y exterior (método de exhaución)
por uso de fórmulas generales
por medio de relaciones geométricas generales
por medio de principios como el de Cavalieri
área como porción de plano ocupado
área en término de recubrimiento de espacio
área como algoritmo de cálculo
geométrica
numérica
objeto mental área

1.3.2. BERNARD HÉRAUD

Héraud ha aplicado el modelo de comprensión de Herscovics y Bergeron (1982), modelo constructivista de comprensión referido a la formación de los conceptos, al área del rectángulo. En su trabajo ha mostrado las fases principales en la construcción de los conceptos de superficie y área para los alumnos de la escuela primaria.

Según Héraud el modelo consta de dos etapas: **a)** La primera tiene por objeto describir la comprensión de los conceptos físicos preliminares y consta de tres niveles: i) la comprensión intuitiva, ii) la comprensión procedimental, y iii) la abstracción lógico-física. **b)** La segunda describe la comprensión del concepto matemático y puede ser descrita en términos de tres componentes: i) la comprensión procedimental, ii) la abstracción lógico-matemática, y iii) la formalización. A pesar de esta estructuración, Héraud recalca la importancia de no interpretar el modelo en su conjunto, como un modelo lineal, comentando que la comprensión no necesariamente se desarrolla en el orden en el que se han expuesto los niveles y componentes de la primera y segunda etapa, pudiéndose abordar componentes de la segunda simultáneamente e incluso antes que algún nivel de la primera. Sólo parece aceptarse la existencia de una secuencialidad en los niveles de la primera etapa.

Durante su trabajo, y en varias ocasiones, destaca el interés del modelo afirmando que permite:

- situar y comprender mejor los obstáculos que los niños encuentran en su formación del concepto de área, y
- distinguir entre el concepto de superficie que proviene del dominio lógico-físico, y el de área propiamente dicho, que proviene del dominio lógico-matemático.

A continuación describimos brevemente cómo Héraud aplica las etapas citadas anteriormente al caso concreto del área del rectángulo con objeto de mostrar los pasos a seguir para la formación de este concepto.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FÍSICO PRELIMINAR: LA SUPERFICIE

La comprensión intuitiva. En este primer nivel, la superficie está asociada a la noción de extensión.

El niño se basa únicamente en su percepción visual de las cosas para emitir juicios aproximativos del tamaño de una superficie o comparar dos superficies.

La comprensión procedimental lógico-física. En este nivel, el niño utiliza estrategias más elaboradas que una simple estimación visual, como son los procedimientos de:

- superposición, donde uno de los objetos es utilizado para estimar el tamaño del otro, y puede ser considerado como una versión primitiva de la medida, y
- recorte y redistribución de las partes de una figura. El uso de este procedimiento requiere

que el niño posea ya una cierta abstracción de la noción de superficie que le permita admitir la invarianza de la superficie de una figura en relación al recorte de esta figura y a una redistribución de sus partes.

La abstracción lógico-física. El niño debe darse cuenta de que la superficie permanece invariante bajo el efecto de ciertas transformaciones geométricas que cambian el aspecto global de una figura pero no su área. En este nivel, la superficie de un rectángulo se asocia a la cantidad de espacio ocupado por éste y el nivel se caracteriza por la construcción de invariantes:

- Invarianza en relación a la orientación del objeto:
  - Dos rectángulos congruentes sometidos a una traslación o rotación, siguen ocupando la misma superficie.

- Invarianza en relación a la visibilidad del objeto.

- Invarianza en relación a la fragmentación del objeto.
  - Fragmentación de un rectángulo, sin reorganización de las partes. La superficie de un rectángulo que ha sido fragmentado en trozos no varía. El todo es igual a la suma de sus partes.
  - Fragmentación de un rectángulo, con reorganización de las partes. Una figura obtenida por la reorganización de los trozos obtenidos por la fragmentación de un rectángulo posee la misma superficie que éste.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO MATEMÁTICO: EL ÁREA

En esta etapa, la superficie es considerada bajo su aspecto cuantificable, numérico, es decir su medida, identificando el área con esta medida.

La comprensión procedimental lógico-matemática. En este momento, el niño conoce y sabe utilizar adecuadamente procedimientos más o menos evolucionados que le permiten encontrar el área de una superficie.

Hay diferentes modos de operar, según su orden de complejidad, en procedimientos basados en la iteración de una unidad:

- La elección de una unidad apropiada.

  - Elección de unidades idénticas. El niño es capaz de "medir" la superficie de un rectángulo dado, intentando recubrirla con superficies unidad de formas diversas. Surgen dificultades que pueden llevar al niño a considerar la posibilidad de utilizar unidades idénticas.
  - Elección de la unidad cuadrada. El niño debería ser enfrentado con situaciones diferentes, para finalmente llegar a descubrir la pertinencia de la unidad cuadrada.

- La iteración de la unidad cuadrada.

  Hecha la elección de la unidad cuadrada, consideramos algunos procedimientos que conducen a la simple iteración de la unidad:

  · recubrimiento a partir de un número suficiente de unidades,
  · recubrimiento por un número insuficiente de cuadrados, e
  · iteración a partir de una sola unidad. En este momento, la medida del área del rectángulo aparece como la expresión de una relación de un todo a una parte. Hablamos de medida iterada.

- Hacia la expresión A=FxC (Número de cuadrados por fila (F), y número de cuadrados por columna (C)).

  El niño utilizará una representación de las unidades y no las unidades verdaderas. Así pues se pasa a un nivel más abstracto, mediante la:

  · utilización de una malla cuadriculada completa, y
  · utilización de una malla cuadriculada incompleta.

- Hacia la expresión A=Lxl.

  El niño debe darse cuenta de que el número de cuadrados por fila y columna está ligado con las medidas de las longitudes de los lados. Algunos procedimientos a utilizar:

  · utilización de unidades de longitud concretas, y
  · utilización de una regla.

La abstracción lógico-matemática. La medida de la superficie permanece invariante sometida ésta a diferentes transformaciones.

Al igual que en la abstracción lógico-física la abstracción lógico-matemática se caracteriza por la construcción de invariantes:

- Invarianza del área en relación a diversas transformaciones figurales. (Las citadas ya anteriormente para la abstracción lógico-física).
- Relatividad del área en relación al tamaño de la unidad escogida.
- Relación inversa entre el número-medida y el tamaño de la unidad.

La formalización. Para el caso del área del rectángulo, la formalización se caracteriza por el establecimiento de la relación entre la expresión del área y el producto de las longitudes de los lados del rectángulo: A=Lxl. Expresión que establece una relación entre magnitudes de distinta naturaleza, una bidimensional y las otras unidimensionales.

No queremos finalizar esta breve exposición del estudio realizado por Héraud sin mostrar algunas de sus sugerencias para la instrucción del área, y que como a continuación podrá apreciarse representan una directa crítica al tratamiento que habitualmente recibe este concepto en la escuela:

- En los manuales escolares, se llega rápidamente a la utilización exclusiva del procedimiento consistente en iterar una unidad cuadrada. Este procedimiento, debe ser el resultado de un proceso de reflexión por parte del alumno. Para ello, el niño debería utilizar procedimientos que, si bien pueden ser más primitivos, son más naturales para él.

- Las unidades convencionales, como cm^2, dm^2 e incluso el m^2, deberían introducirse, cuando el niño haya alcanzado el nivel de formalización.

- La enseñanza de la noción del área no puede reducirse a un simple aprendizaje de una fórmula.

Algunas consideraciones sobre el trabajo de Bernard Héraud

El trabajo de Héraud nos parece interesante porque:

- de su estudio se puede extraer una propuesta seria de enseñanza del área de un rectángulo, pudiéndola extender al área de un polígono,

- proporciona argumentos para la reflexión acerca del interés de diferenciar los conceptos de superficie y área,

- de los diferentes significados que asigna a los términos superficie y área a lo largo del proceso, y que relacionamos a continuación, se observan distintas interpretaciones del concepto de área:

    · la superficie es asociada a la noción de extensión,
    · la superficie es asociada a la porción de espacio ocupado,
    · la medida del área aparece como la expresión de una relación de un todo a una parte, y
    · la medida del área aparece como el número obtenido a partir de una fórmula, que expresa la relación que existe entre las medidas correspondientes a magnitudes de diferente naturaleza, e

- introduce elementos de reflexión sobre la complejidad del significado de la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo.

Han sido precisamente las reflexiones planteadas por Héraud sobre la complejidad de las fórmulas y la dificultad que éstas encierran al representar relaciones entre magnitudes dimensionalmente diferentes, las que de un modo directo han influido en nuestro trabajo, en particular en nuestro estudio sobre la comprensión de los estudiantes acerca del carácter bidimensional del área, centrando nuestro interés en el estudio de la comprensión de los alumnos sobre el carácter bidimensional de las fórmulas para el cálculo de áreas.

Sin embargo, en nuestra opinión:

- Su trabajo, que en un principio manifiesta tener por objeto mostrar las fases de construcción del concepto de superficie y área, en algún momento de su estudio, en concreto cuando se refiere a la comprensión procedimental lógico-matemática, se convierte más que en un análisis teórico, en una sugerencia del tipo de tareas a realizar con objetivos determinados para la construcción del concepto de área del rectángulo, y por extensión a la de los polígonos.

- Su estudio es "pobre" en tanto que considera como único objetivo en la enseñanza del área el logro de las fórmulas, dado que su trabajo está totalmente enfocado a la consecución de la fórmula para el cálculo del área del rectángulo.

- No es apropiado el hecho de referirse al área como medida de la superficie, ya que ello le lleva a ligar el área al número, y por lo tanto le impide mostrar la invariabilidad del área cuando el número resultante de la medida cambie, como consecuencia de un cambio de la unidad escogida.

1.3.3. MARIE-JEANNE PERRIN-GLORIAN

El objeto de la investigación de Perrin-Glorian ha sido elaborar secuencias de enseñanza dirigidas a la construcción de la noción área para alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 11 años, como medio para dar cuenta del lugar ocupado por una superficie en el plano. Su propuesta ha sido el resultado de varios años de trabajo, durante los cuales ha ido haciendo públicos algunos de sus resultados, remontándose la primera publicación que disponemos a 1983. Su trabajo culmina en su tesis de doctorado de estado, defendida en 1992.

Dada la extensión de su trabajo, no es posible mostrarlo aquí con el necesario detalle. Esperamos que la exposición siguiente sea suficiente para dar a conocer las líneas generales de su investigación, tanto desde el punto de vista teórico como práctico.

La metodología de investigación consistió en:

a) La construcción de una ingeniería didáctica adaptada a las hipótesis didácticas planteadas, que más adelante se exponen, realización y posterior observación en un grupo de 24 alumnos de 10-11 años, que no habían estudiado la noción de área anteriormente.

Dos meses después de finalizada la experiencia y con objeto de verificar las adquisiciones y las dificultades que persisten al finalizar el aprendizaje, se procedió a:

b) Entrevistar a los alumnos en grupos de dos, con objeto de observar los conflictos que las concepciones les ocasionan en el uso de diferentes estrategias al resolver una tarea de comparación de áreas.

c) La administración de una prueba escrita que contenía algunas de las preguntas pertenecientes al cuestionario de Rogalski (1982), con el fin de comprobar si el trabajo desarrollado en la secuencia de enseñanza les facilita a los alumnos el embaldosado de superficies variadas y la respuesta a cuestiones clásicas referidas al área.

Los resultados de todo ello le llevó a formular una nueva hipótesis didáctica y a reconsiderar de nuevo su ingeniería didáctica, introduciendo algunas variaciones.

Perrin-Glorian organizó la enseñanza en clase según la hipótesis didáctica de Douady (1983): "dialectique outil-objet" y el "jeux de cadres". Creemos innecesario extenderemos aquí, ya que no es objeto de nuestro estudio. Sin embargo, explicamos a grandes rasgos el significado de estos términos. Douady con la "dialectique outil-objet" se refiere a la descomposición en 6 fases ("ancien", "recherche: nouveau implicite", "explicitation", "institutionnalisation: statut d'objet", "familiarisation-réinvestissement" y "complexification de la tâche ou nouveau problème") que se debe producir en el aprendizaje de un concepto matemático, con el fin de que en las situaciones-problemas (situaciones didácticas particulares) el concepto intervenga en primer lugar como útil implícito en la fase de construcción de la noción, y después sea reconocido como objeto después de una isntitucionalización. "Jeux de cadres" es el término con el que se refiere al medio de organizar en la enseñanza el juego de los desequilibrios - re-equilibrios, provocando cambios de marcos en la actividad de los alumnos mediante la elección de problemas apropiados. Su hipótesis es que la traducción de un problema en varios marcos -como en el caso del área, serían el marco geométrico y numérico- juega un papel en la producción de los nuevos conocimientos durante la fase de investigación.

Para poder elaborar la ingeniería didáctica, y con ello el diseño de los problemas que constituirían la secuencia de enseñanza, Perrin-Glorian aborda el estudio de la Transposición Didáctica, de los errores y dificultades más comunes observados en los alumnos y establece las hipótesis didácticas. De todo ello damos cuenta a continuación de forma resumida.

La TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA la aborda con objeto de caracterizar la distancia entre el objeto de enseñanza y el objeto de saber. Para ello plantea el estudio del proceso representado en el esquema:

objeto de saber ---- objeto a enseñar ---- objeto de enseñanza

fundamentalmente del último paso.

Este trabajo, que puede consultarse en Perrin-Glorian (1989-1990, 1992), se compone de tres estudios: a) uno sobre diferentes aproximaciones de la medida del área de superficies planas desde el punto de vista matemático, b) de los diferentes enfoques del área a lo largo de los distintos programas de enseñanza de los niveles de primaria y secundaria en Francia desde

1887 a 1985, y c) del tratamiento que se le ha dado a este concepto en los libros de texto desde 1951 a 1986.

A pesar del carácter restrictivo de los estudios b) y c) al estar enmarcados dentro del sistema educativo francés, presenta resultados extensibles a nuestro sistema educativo, ya que pueden observarse en cierto número de ocasiones, coincidencias con el tratamiento que el concepto de área recibe y ha recibido en nuestro sistema educativo, y libros de texto.

Tras el análisis de los programas y los libros de texto Perrin-Glorian encuentra que en la enseñanza del área y más concretamente de la medida los dos objetivos siguientes se manifiestan de forma muy desigual según las épocas, detectándose a partir de los años 70 un predominio claro del primero sobre el segundo:

- se trata de responder a la necesidad de la sociedad de proporcionar los conocimientos elementales sobre todo los concernientes al sistema métrico, útiles tanto para la vida cotidiana como la profesional de cualquier adulto;

- se trata de enseñar las nociones matemáticas que ocupan un lugar del edificio del saber y que serán retomadas más tarde para su generalización. En cualquier caso, se trata de preparar el terreno para la continuación de la enseñanza de las matemáticas.

Además, durante la consulta de los programas posteriores a 1980, Perrin-Glorian detecta la existencia de un objeto de enseñanza, hasta entonces no aparecido, que se refiere al término área designando la cantidad a medir, considerada como invariante de una clase de superficies, que permite distinguir el área a la vez de la superficie y del número que la mide. Sin embargo, este objeto de enseñanza no existe en el saber matemático, como justifica en su estudio del problema matemático, donde a pesar de su intento de dar otro sentido al término área independientemente de la unidad escogida, concluye que en definitiva desde el punto de vista matemático la comparación de superficies se reduce a la comparación de los números.

Es precisamente este objeto de enseñanza el que Perrin-Glorian considera como un objetivo de sus secuencias de enseñanza. Ello le lleva a diferenciar en su trabajo los términos superficie, área y medida, asociándoles los siguientes significados:

"superficie": designa una parte del plano,
"área": designa la magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie, y
"medida": designa el número que representa el lugar ocupado por la superficie del plano.

Con el fin de dar un fundamento matemático a esta consideración del "área como magnitud", define el área como una clase de equivalencia a partir de una aplicación medida. A continuación reproducimos una aclaración que Perrin-Glorian hace al respecto del significado con el que utiliza, a lo largo de su trabajo, la expresión "área como magnitud".

Utilizaremos el término "magnitud" en un sentido muy naïf que no intentaremos definir. Nos es suficiente saber que puede ser definida como una clase de equivalencia a partir de la función medida. No definiremos el área, sólo la expresión "tener igual área" a partir de recorte y pegado o de la medida. Es este aspecto el que llamamos área como magnitud. Un número seguido de una unidad es un medio de designar un área.

Finalizado el estudio correspondiente a la Transposición Didáctica, aborda el análisis de trabajos de otros investigadores para determinar cuales son los errores y las dificultades más habituales que poseen los alumnos al respecto del área, y que no relacionamos aquí por mostrarlos en la próxima sección 1.4.

El estudio realizado hasta el momento le permite establecer LAS HIPÓTESIS DIDÁCTICAS siguientes a partir de las cuales construirá su ingeniería didáctica:

- El desarrollo en la enseñanza del concepto de área como magnitud, permite a los alumnos establecer las relaciones necesarias entre los dos marcos, geométrico y numérico.

- Una identificación demasiado precoz entre las magnitudes y los números favorece la amalgama de las diferentes magnitudes -aquí longitudes y áreas-.

Fijadas las hipótesis didácticas aborda su trabajo de INGENIERÍA DIDÁCTICA, asentando en primer lugar las *elecciones didácticas*, es decir, lo que es susceptible en la enseñanza de generar los comportamientos que se desean suscitar, para luego concretar el *contenido de las secuencias* y posteriormente buscar los problemas adecuados.

Las *elecciones didácticas* que exponemos a continuación determinan el objetivo del proceso de aprendizaje:

- Construir la noción de área como magnitud autónoma. Ello, permitirá desligar el área de la forma, diferenciando área y superficie (dos superficies de formas diferentes pueden tener áreas iguales) y a distinguir el área del número (a una misma superficie, pueden corresponderle números diferentes según la unidad escogida, pero el área no cambia).

- Extender la aplicación medida a superficies S no pavimentables con la unidad A mediante:

  · el recorte y pegado, para fabricar una superficie S' de igual área que S y pavimentable con A.
  · aproximaciones desde el interior y exterior de S, utilizando para ello la unidad A, o subdivisiones de A, que permitan estimar el área de la superficie S.

- Señalar las diferencias y establecer las relaciones entre áreas y longitudes (perímetros) interesándose en sus variaciones respectivas en el transcurso de diversas transformaciones.

Para la consecución de las elecciones didácticas, considera tres etapas bien diferenciadas en el proceso de aprendizaje, ajustando los *contenidos de las secuencias*, que a continuación mostramos, a los objetivos perseguidos con cada una de ellas.

(1) Etapa geométrica, que consiste en realizar una aproximación al concepto de área independientemente de su medida, mediante:

- una fase de trabajo sobre papel cuadriculado para fijar los conocimientos anteriores que posee cada alumno, sobre los que apoyarse,
- una aproximación geométrica que permita extender a superficies dibujadas sobre papel blanco el sentido de la expresión "tener igual área", y
- actividades que intenten diferenciar las nociones de área y longitud, sin tener que recurrir a la medida.

(2) Etapa geométrica-numérica en la que se aborda la medida a través de la pavimentación, y se introduce la noción de la unidad de área, mediante:

- actividades de pavimentación de superficies variadas con la ayuda de diversos embaldosados,
- un estudio de la variación o de la conservación del área en el transcurso de algunas transformaciones geométricas, y
- la medida del área de superficies en función de una unidad de área fijada, y los cambios de unidad.

(3) Etapa numérica, en la que se procede a la medida del área de una superficie, con la ayuda de una unidad dada, aún en el caso en el que no se sepa pavimentar con exactitud la superficie, consistente en estudios sobre:

- el área de 1 cm^2,
- el área del rectángulo,
- las consecuencias que en el área posee la acción sobre el rectángulo de algunas transformaciones geométricas,
- las áreas de superficies usuales: paralelogramo, triángulo y trapecio, y
- "encadrements" de superficies para aproximar medidas.

El análisis de los resultados obtenidos tras la experiencia y especialmente que la confusión entre el área y el perímetro se muestra persistente, así como el hecho observado de que los alumnos consideran que tanto el perímetro como el área de una superficie no varían cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones, como son concretamente el abatimiento de un lado (conserva la longitudes de los lados y no el área) y el deslizamiento de un lado sobre un soporte paralelo al lado opuesto (conserva el área pero no la longitud de los lados), le lleva a añadir, pensando en la construcción de futuras secuencias didácticas, la hipótesis didáctica siguiente (referida al trabajo en el marco geométrico): "una interacción entre los puntos de vista estático y dinámico de la deformación es necesario en la conceptualización de la magnitud área y en su disociación de la longitud". Con el estudio del marco geométrico desde un punto de vista estático, Perrin-Glorian se refiere al que privilegia el aspecto descriptivo, y desde un punto de vista dinámico, al que privilegia los efectos de las deformaciones sobre las superficies.

Algunas consideraciones sobre el trabajo de Marie Jeanne Perrin-Glorian

El trabajo de Perrin-Glorian nos parece que aporta un enfoque de la enseñanza del área no considerado hasta ahora por investigadores en educación matemática, al menos con tanta claridad ni amplitud. En particular, su consideración de enseñar el área como magnitud autónoma, nos ha llevado a reflexionar sobre el interés de diferenciar el área de la superficie y del número. Consideración que hemos hecho nuestra creyendo sinceramente que ello ayudaría a evitar muchos de los errores que cometen los alumnos, colaborando de esa forma en una enseñanza más comprensiva de este concepto, como más tarde se expone en el análisis didáctico del concepto.

La advertencia de Perrin-Glorian sobre la reticencia de los alumnos a abandonar la mala entendida relación entre el área y el perímetro, junto con los resultados obtenidos del análisis en nuestra investigación en relación con este aspecto, nos llevaron a considerar un elevado número de tareas en la secuencia de enseñanza, que entre otros, tenían como objetivo, diferenciar el área del perímetro de una superficie, y estudiar la variación que experimentan cuando la superficie es sometida a determinadas transformaciones.

1.3.4. CONSIDERACIONES GENERALES

Tras el análisis que realizamos de estos tres trabajos, pudimos constatar que a pesar de las diferencias que existen entre ellos, algunas de ellas ya comentadas al inicio de la sección 1.3., principalmente la de haber sido desarrollados a partir de teorías diferentes, no existía incompatibilidad alguna entre sus resultados, ni discrepancias entre las propuestas y reflexiones realizadas por los tres investigadores. Pensamos que las diferencias que se detectan entre ellos, al contrario de lo que tal vez se podría esperar, no plantean enfoques contradictorios, sino diferentes aproximaciones que en lugar de ser incompatibles, se complementan. En determinados momentos hemos creído estar delante de propuestas similares de la enseñanza del área, diferentes únicamente por el vocabulario y terminología empleada. Creemos que todo ello es consecuencia de la peculiaridad del concepto a estudio, ya que a diferencia de otros muchos conceptos matemáticos, el objetivo educativo en los niveles de primaria y secundaria, está muy lejos de ser -por quedar fuera del alcance de las posibilidades de los estudiantes-, la adquisición del concepto matemático como ya se ha comentado anteriormente y como se explica en el análisis didáctico que se expone en el próximo capítulo 2. Pensamos que este hecho favorece el "acercamiento" de estos trabajos realizados a partir de corrientes diferentes en educación matemática.

Por ejemplo, cuando Freudenthal se refiere a la conveniencia de abordar el análisis fenomenológico de la instrucción del área y de pretender la constitución del objeto mental área frente a la adquisición del concepto, y Perrin-Glorian al estudio del último paso de la transposición didáctica "objeto a enseñar ---- objeto de enseñanza", y propone la enseñanza del área con un significado que ella misma advierte surge como objeto de enseñanza pero no existe en el saber matemático, pensamos que los dos investigadores, "a su manera", nos advierten del interés de centrar el estudio en la enseñanza del área, lejos ésta del concepto matemático actual. Por otra parte, mientras que Freudenthal nos advierte de la existencia de distintos enfoques de la enseñanza y de que no todos ellos conducen al mismo resultado, aunque no propone una secuencia concreta de actividades que se pueda llevar al aula, tanto Héraud como Perrin-Glorian entendemos que así lo reconocen desde el momento en el que realizan una propuesta concreta para la enseñanza del área, el primero aplicable al área de polígonos y la segunda con un ámbito de aplicación general, con objeto de mejorar la comprensión de este concepto por parte de los alumnos. Héraud y Perrin-Glorian optan por dos aproximaciones diferentes pero que podríamos decir se encuentran en la misma línea, que les permiten establecer un determinado orden en la instrucción del área. Héraud centra su trabajo en la importancia de diferenciar el concepto físico (superficie) del concepto matemático (concepto numérico de área), planteamiento que creemos queda completado con la aportación de Perrin-Glorian, al resaltar ésta la importancia que según ella tiene, diferenciar el área de la superficie y el área del número que la mide.

Estos tres trabajos, como ya hemos explicado en cada uno de ellos, han jugado un papel decisivo en las distintas etapas de nuestra investigación, especialmente a la que corresponde al análisis didáctico del concepto, que ha resultado ser el "pilar" de nuestro estudio, en cuanto que a partir de él se han diseñado tanto el test utilizado en la etapa diagnóstica, como la secuencia de enseñanza, que se detallan respectivamente en el capítulo 3 y 4 de esta memoria.

1.4. ESTUDIOS PARCIALES

El objetivo de la presente sección es el de mostrar los aspectos y resultados de las investigaciones correspondientes a estudios sobre el concepto de área centrados en uno o varios aspectos de éste, que han resultado relevantes para nuestro trabajo. Como ya hemos comentado anteriormente, son precisamente este tipo de estudios los que constituyen la mayoría de los realizados sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del área. Todos ellos poseen características bien diferentes, de entre las que cabe destacar el hecho de que están enmarcadas en sistemas educativos distintos, con marcos teóricos, metodologías de investigación y tamaños de muestra diferentes. Sin embargo, para el desarrollo de nuestro trabajo no consideramos esenciales estas diferencias. Nuestro interés estaba fundamentalmente orientado a disponer de información acerca de los niveles educativos en los que se había centrado el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje del área, los aspectos estudiados de este concepto, así como los resultados obtenidos y las conclusiones extraídas. Con objeto de presentar esta información con la mayor claridad posible, la hemos clasificado como se indica a continuación, intentando organizar con la mínima intersección el conjunto de conceptos estudiados e indicando brevemente en cada caso los resultados obtenidos, así como las opiniones y sugerencias más importantes de los investigadores.

Los conceptos y aspectos relacionados con el área que han sido estudiados en las distintas investigaciones consultadas son:

- concepciones del área,
- unidad de medida,
- conservación de área,
- área y perímetro,
- bidimensionalidad del área,
- utilización de fórmulas en el cálculo de áreas,
- percepción en la comparación de áreas,
- terminología empleada, y
- sugerencias para la enseñanza del concepto de área.

Es importante comentar que esta información extraída de la literatura analizada ha influido de una manera clara y directa en nuestra investigación. Así, los distintos conceptos y aspectos relacionados con el área, mencionados anteriormente, fueron considerados para el diseño del test utilizado en la etapa diagnóstica de este trabajo, como puede comprobarse de la lectura del apartado 3.1.2. donde se detalla el contenido de éste. Las diferentes conclusiones extraídas que posteriormente fueron corroboradas en nuestro estudio, permitieron determinar los errores que comúnmente cometen los alumnos, los cuales se tuvieron en cuenta en el diseño de la secuencia de enseñanza que se expone en el capítulo 4. Globalmente todos los trabajos analizados han contribuido en el análisis didáctico del concepto de área expuesto en el capítulo 2 de esta memoria, al introducir elementos de reflexión sobre las consecuencias de abordar de una determinada manera su enseñanza.

Concepciones del área

En las investigaciones consultadas hemos encontrado algunos resultados relativos a la concepción que los alumnos poseen sobre el área. Todos ellos coinciden al afirmar que la mayoría de los alumnos desarrolla casi exclusivamente una concepción numérica del área. Para los estudiantes, el área es un número que se calcula. De ahí la fuerte tendencia que tienen a recurrir a los números y por ello, reducen la comparación de las áreas de superficies a la comparación de números, (Perrin-Glorian, 1992; Tierney, Boyd & Davis, 1990).

Se ha comprobado que incluso para algunos alumnos el área se reduce a la fórmula "longitud x anchura". Tierney, Boyd y Davis (1990) en su trabajo con futuros profesores de primaria, al preguntarles sobre lo que enseñarían a niños de 10 años sobre el área, encontraron que el 80% de ellos dibujó un rectángulo y escribió "L x A" cerca de éste.

Perrin-Glorian (1992) advierte de que la concepción de área como un número que se puede calcular se manifiesta como un obstáculo para el desarrollo del área como una propiedad que se conserva por recorte y pegado.

Maher y Beattys (1986) encontraron que la mayoría de los estudiantes de 11 a 13 años no aplicaron el concepto de área para describir el tamaño de una región y Hiebert (1981) tras el análisis de resultados procedentes de algunos *National Assessment of Educational Progress* (NAEP) constató que una mayoría de los niños de 9 años no comprenden que la medida del área viene dada por el número de unidades que recubren exactamente la región, al comprobar que más de 2/3 de estos niños fracasaron al dar el área de un rectángulo, cuando sólo necesitaban contar las unidades cuadradas que lo recubrían.

También algunos investigadores detectaron que los alumnos tienen algunas concepciones erróneas del área, ocasionadas por la confusión área-perímetro, que les lleva asociar el área a una longitud, y área-superficie.

Así pues, la mayor parte de los alumnos con los que se han realizado los estudios han elaborado una concepción errónea del área, o una pobre concepción numérica, asociando el área a una fórmula de cálculo.

Unidad de medida

Se ha detectado que un gran número de estudiantes olvida la importancia de la unidad utilizada para realizar la medida del área, y que una mayoría de ellos utiliza unidades incorrectamente. Es común que los alumnos den como unidades de área el "cm" y "cm^3". Resultados de este tipo se recogen en los estudios de Figueras y Waldegg (1984) y Hart, ed. (1981), realizados con alumnos de secundaria.

Resultados similares a los anteriores también se encuentran en el trabajo de Tierney, Boyd y Davis (1990). Éstos detectaron, en los futuros profesores de primaria, un uso incorrecto de unidades al no cambiar las unidades lineales a cuadráticas cuando utilizan la fórmula "L x A" para calcular el área.

En todos estos estudios, no sólo se ha observado la incomprensión y casi completo desconocimiento de los niños sobre la unidad de medida de área en general y de sus propiedades, sino que se ha constatado lo mismo para la unidad estándar de área "cm^2", objeto central en la enseñanza de la medida del área de una superficie. De las diferentes investigaciones se deduce que tanto el modo como es introducido el "cm^2" como el momento en el que se hace no son los apropiados. Ello se pone de manifiesto no sólo por la incomprensión de los estudiantes, sino por los errores que su uso ocasiona, y que queda recogido en las siguientes citas:

> Un sistema de medida fijo se introduce demasiado pronto en el currículum de la escuela elemental creando de este modo una barrera para la completa comprensión del concepto unidad (Figueras & Waldegg, 1984).
>
> Si el cm^2 es introducido en un temprano estadio de conceptualización, algunos alumnos piensan sobre la medida del área en términos de "cuadrados" (Hughes, Bell & Rogers, 1975).
>
> La notación cm^2 tiene un gran inconveniente para los alumnos: no ayuda a distinguir unidad de área y unidad de longitud, y les induce a recaer en la costumbre que consiste en tratar por longitudes un problema que se trata de áreas (Kouba et al., 1988).
>
> La unidad de medida cm^2 aparecía singularmente poco operativa, muy mal conectada con la bidimensionalidad de la superficie, y transmitiendo propiedades de la unidad de medida lineal de la que ella está compuesta (Rogalski, 1982).

En general en los distintos estudios se sugiere la necesidad de que los alumnos realicen tareas que les permitan familiarizarse con una variedad, cuanto mayor sea ésta mejor, de unidades no estándares de medida, con objeto de que comprendan el papel que juega la unidad en la medida y posteriormente puedan abordar el estudio de las estándares. En ellos se nos advierte del error que supone limitarse únicamente a la unidad cuadrada, hecho éste bastante habitual en la enseñanza. Las tareas deberán estar cuidadosamente escogidas con el fin de que conduzcan a los alumnos a una elección racional de la unidad cuadrada. Héraud (1987) concluyó tras su estudio en el que observó cómo los niños de 8 y 9 años de edad recubren diferentes figuras, utilizando variedad de formas, que no podemos pretender que el cuadrado aparezca de forma natural como una unidad de área, al observar que el tipo de forma escogida para recubrir la superficie está ligada a la forma de ésta.

Algunos investigadores se han referido a la necesidad de que las propiedades de la unidad de medida sean conocidas por los alumnos para que éstos puedan alcanzar un buen nivel de comprensión sobre la unidad de medida de área. Hiebert (1981), que dedicó su trabajo al estudio de la unidad de medida y de algunas de sus propiedades, constató que éstas, a diferencia de lo que se puede pensar, no resultan fáciles de comprender para los niños, al observar que estudiantes de 9 años y un poco mayores que ellos:

- no comprenden que una unidad de medida puede representar más (o menos) que una simple entidad,

- creen que las unidades deberían ser simples entidades discretas, lo que les lleva a ignorar las fracciones de las unidades, o a considerarlas como unidades enteras, y

- no comprenden la relación entre el tamaño de la unidad y el número de unidades.

En todos los trabajos que han dedicado una parte de su estudio a la unidad de medida, ya sea éste de mayor o menor extensión, se encuentra una referencia a la necesidad de que los alumnos posean un correcto conocimiento del concepto unidad para poder abordar con comprensión el proceso de medida.

Conservación del área

Los investigadores ponen de manifiesto en sus trabajos la necesidad de que los alumnos posean un buen conocimiento de la conservación del área para que puedan comenzar a comprender la medida de ésta. En la realidad esto no sucede así, ya que en estas mismas investigaciones se ha encontrado que la idea de que el área de una superficie no cambia por desplazamiento o recorte y pegado de los "trozos" en los que ésta puede ser divida no está completamente asumida ni por la mayoría de los alumnos de primaria, ni por la totalidad de los de secundaria, como puede deducirse, entre otros, de los resultados obtenidos en los trabajos de Figueras y Waldegg (1984) y Hart, ed. (1981) con alumnos de secundaria, y en los de Hughes, Bell y Rogers (1975) y Maher y Beattys (1986) con estudiantes de primaria.

Área y perímetro

Sin duda alguna, la mala comprensión de la "relación" entre los conceptos de área y perímetro y la confusión que entre ellos existe es el resultado más común obtenido a nivel internacional, detectado y puesto de manifiesto en la práctica totalidad de los trabajos consultados, ver por ejemplo los de Carpenter et al. (1980), Douady y Perrin-Glorian (1989), Figueras y Waldegg (1984), Freudenthal (1983), Hart, ed. (1981), Hirstein, Lamb y Osborne (1978), Kouba et al. (1988), Perrin-Glorian y Douady (1988), Perrin-Glorian (1992), Ramalho y Correia (1995), y Tierney, Boyd y Davis (1990).

El error más común se produce en los ejercicios de cálculo de áreas, en los cuales los estudiantes confunden las fórmulas de cálculo de área y perímetro.

También se ha observado que el perímetro es considerado por gran número de estudiantes como otra medida del área, llegando éstos a juzgar el área de una figura según sus dimensiones lineales.

Algunos investigadores como Bang (1976), Douady y Perrin-Glorian (1983, 1985, 1989), Perrin-Glorian y Douady (1988) y Perrin-Glorian (1992), han dedicado una gran parte de su trabajo al estudio de la variación área-perímetro cuando una superficie es sometida a transformaciones de diferente naturaleza, y han constatado que para los alumnos existe una íntima relación entre el área y el perímetro. Es decir, si el perímetro de una superficie aumenta, su área también (y recíprocamente) y si dos superficies tienen el mismo perímetro, tienen la misma área (y recíprocamente).

Douady y Perrin-Glorian afirman que muchos alumnos amalgaman 3 transformaciones:

- el "paralelogramo articulado", que conserva longitudes de los lados pero no las áreas,
- el "deslizamiento" de un lado sobre un soporte paralelo al otro lado, que conserva el área pero no las longitudes de todos los lados, y
- la rotación alrededor de un vértice que conserva a la vez las longitudes y áreas.

Respecto a una transformación del tipo "paralelogramo articulado", Bang afirma que los niños no perciben la variación del área como continua, y que piensan que el área permanece constante en toda una región alrededor de la posición central, y que disminuye solamente cuando se aproxima a la posición límite.

Bidimensionalidad del área

En todas las investigaciones que de algún modo han estudiado el carácter bidimensional del área, independientemente del nivel educativo de los alumnos en los que se ha llevado a cabo el estudio, se ha encontrado que los estudiantes extienden la misma variación sufrida por las dimensiones de una superficie al área. Es decir, si las dimensiones de una superficie son multiplicadas por un número K, el área también queda multiplicada por el mismo número.

De entre todos los trabajos consultados cabe destacar en este apartado los de Rogalski (1982) y Vergnaud et al. (1978) que tenían como único objetivo el estudio de la dimensionalidad de las medidas y las estructuras multiplicativas.

Rogalski realizó un estudio con alumnos de edades comprendidas aproximadamente entre los 10 y 14 años con el fin de estudiar las dificultades que éstos poseen en lo concerniente a la adquisición de las dimensionalidad de medidas espaciales. Nos advierte de la complejidad del campo conceptual de éstas y del papel determinante que en ellas juegan las estructuras multiplicativas.

Durante su trabajo constata la gran dificultad que poseen los alumnos en dejar atrás un modelo lineal, que según ella funciona de modo relativamente precoz, e ir hacia un tratamiento multidimensional apropiado a las medidas de superficie y volumen. También afirma cómo las fuertes interacciones que observa entre las operaciones mentales de los estudiantes y las propiedades de las figuras o de las transformaciones dificultan la apropiación de las nociones de bidimensionalidad de la "medida-superficie", que se revela como un proceso largo y complejo.

Vergnaud et al. realizaron una experiencia con alumnos de 11-12 años con objeto de estudiar las dificultades que éstos muestran relativas a las estructuras multiplicativas. Por estructura multiplicativa ellos se refieren a "la estructura del isomorfismo de medidas", correspondiente a la relación de proporciones entre dos tipos de magnitudes, y a "la estructura del producto de medidas", correspondiente al producto de 2 dimensiones, y de la que el área es el caso más simple de entre las magnitudes físicas. Las dificultades mostradas por los alumnos durante este estudio les llevaron a reclamar de los profesores una respuesta pedagógica que debería desarrollarse durante todo el primer ciclo de secundaria.

Utilización de fórmulas en el cálculo de áreas

Los errores cometidos por los alumnos en el uso de las fórmulas para el cálculo de áreas es usual, así como su dificultad e incluso en algunas ocasiones incapacidad de saberlas utilizar para determinar el área de superficies poligonales sencillas.

Es frecuente observar cómo los alumnos extienden la fórmula para calcular el área de un rectángulo a otras figuras planas. Parece que para los alumnos el computo de áreas se reduce a la multiplicación de las longitudes. Así por ejemplo: para el paralelogramo realizan el producto de las "2 dimensiones", y de las "3 dimensiones" para el triángulo (Douady & Perrin-Glorian, 1986; Perrin-Glorian et Douady, 1988; Tierney, Boyd & Davis, 1990).

Se ha comprobado que los alumnos que han memorizado las fórmulas básicas para calcular áreas tienen grandes dificultades para aplicarlas con éxito a la resolución de problemas relativamente sencillos y que simplemente pueden requerir algo más que una sustitución de un número dentro de una fórmula. Como ejemplo de ello veamos los resultados siguientes procedentes de algunos de los estudios consultados:

- sólo el 1% de los niños de 7 años y medio y el 14% de los de 10 años resolvieron con éxito una tarea en la que debían calcular el área de un cuadrado y un rectángulo (Hughes, Bell & Rogers, 1975),

- existe un porcentaje demasiado alto de alumnos de edades comprendidas entre los 10 y 17 años que no son capaces de calcular correctamente el área de un rectángulo (Carpenter et al., 1980),

- un problema tan sencillo como determinar el área de un cuadrado conocido el lado, no está al alcance de un gran número de alumnos de 13 y 17 años (Carpenter et al., 1980; Kouba et al., 1988), y

- una mayoría de alumnos es incapaz de calcular, por ejemplo, el área de una región compuesta por rectángulos, o de una región obtenida a partir de la recombinación (sin superposición) de las partes en las que ha sido dividido un rectángulo, dadas las dimensiones del rectángulo original (Hart, ed., 1981; Kouba et al., 1988).

La percepción en la comparación de áreas

Investigadores como Douady y Perrin-Glorian (1983, 1984) y Hughes, Bell y Rogers (1975) han observado cómo los alumnos se dejan guiar por su percepción visual a la hora de emitir juicios en tareas de comparación de áreas, llevándoles en la mayoría de las ocasiones a conclusiones erróneas. Concretamente éstos últimos, que trabajaron con estudiantes de primaria comprobaron que rara vez los niños utilizan argumentos lógicos en tareas donde un elemento físico de una superficie cambia (por ej. una dimensión), pesando realmente en ellos su percepción.

Terminología utilizada

Pocas, pero algunas, son las referencias realizadas al respecto de la confusión que puede ocasionar en determinadas situaciones la habitual terminología empleada en relación al concepto de área.

Se ha podido constatar que los términos técnicos de medida no son en realidad parte del vocabulario normal del niño, y que éste se confunde por el uso de determinadas palabras, (Hart, ed., 1981). También Perrin-Glorian (1992) menciona los problemas que ocasiona el vocabulario utilizado en la enseñanza del área, refiriéndose a los diferentes significados con que los términos, área y superficie aparecen en los programas y manuales franceses de los últimos años.

Douady y Perrin-Glorian (1983, 1985, 1989) mencionan los errores que puede ocasionar el uso de una terminología no apropiada para designar algunos conceptos. Concretamente se refieren al ocasionado por la usual designación de 1 cm^2 como el área de un cuadrado de lado 1 cm, que propicia en los alumnos su extensión a 1/2 cm^2, considerándolo como el área de un cuadrado de lado 1/2 cm.

Si bien lo comentado hasta ahora son breves apuntes de estos investigadores en la globalidad de sus trabajos, cabe destacar el realizado por Hughes, Bell y Rogers (1975) que dedican una parte importante de su estudio al análisis de los problemas que la terminología empleada, tanto por los investigadores como por los profesores, puede ocasionar en el proceso de enseñanza-aprendizaje del área. Éstos estudiaron el efecto que producía en los niños de 7 a 11 años el uso de términos abstractos como por ejemplo "cantidad de superficie" frente al de términos más reales y concretos, como "cantidad de hierba en un campo", encontrando que todos los niños obtenían mejores resultados en las cuestiones donde se habían empleado este último tipo de términos. Ello les lleva a criticar las conclusiones extraídas por algunos investigadores a partir de sus interpretaciones sobre preguntas donde han utilizado terminología abstracta, ya que según ellos resulta a veces difícil descubrir si las respuestas erróneas de los alumnos son debidas a una mala interpretación de estos términos o a una falta de comprensión del concepto.

Estos últimos investigadores también se refieren a la necesidad de considerar como uno de los objetivos de la enseñanza en los estadios tempranos de conceptualización, animar a un uso correcto de la terminología, evitando los términos ambiguos, y sugieren que en la escuela primaria la palabra "área" se introduzca en un estadio temprano del trabajo, asociándola al principio con la frase: "cantidad de superficie".

Sugerencias para la enseñanza del concepto de área

Hershkowitz et al. (1990) concluyen del estudio realizado de los trabajos del grupo de psicología de la educación matemática (*Psychology of Mathematics Education*, PME) que la conservación de área, significado de la unidad de medida y fórmulas para calcular la cantidad a medir son las etapas que se deberían seguir en un aprendizaje significativo de la medida geométrica. El análisis que hemos realizado de las diferentes investigaciones confirma que en efecto existe unanimidad entre los investigadores al considerar estas tres etapas como fundamentales para el aprendizaje de la medida del área, y nos permite exponer a continuación a grandes rasgos las orientaciones generales que han considerado más importantes para la enseñanza de este concepto.

CONSERVACIÓN DEL ÁREA. Se insiste en la necesidad de que los niños del nivel elemental realicen experiencias que les ayuden a desarrollar y reforzar la conservación de área. Es necesario que comprendan que el área de una figura se conserva cuando ésta se parte y reagrupa para formar una figura diferente, o que el área no cambia por desplazamiento.

UNIDAD DE MEDIDA. Existe unanimidad en afirmar que el proceso de medida no podrá ser alcanzado por los alumnos si éstos no desarrollan de forma individual y correctamente el concepto de unidad de medida. Para ello:

a) Se cree necesario que los alumnos comprendan:
   - el carácter iterativo y de recubrimiento de la unidad de área,
   - que la unidad puede ser rota en partes para facilitar la medida de una cantidad, y
   - la relación entre el tamaño de la unidad y el número de unidades medidas.

b) Se sugiere comenzar la medida de áreas utilizando unidades de área con variedad de formas, con el fin de conducir al niño a una elección racional de la unidad cuadrada, ya que se ha constatado que el "cuadrado" no aparece de forma natural en él.

c) En el proceso de medida, la selección de la unidad de área es de gran importancia, por lo que se considera interesante enfrentar a los estudiantes a tareas en las que debieran seleccionar ellos mismos la unidad de área (no estándar) y medir el área de la superficie en unidades congruentes.

d) No se cree adecuado introducir la unidad estándar de área hasta que los alumnos no hayan tenido importantes experiencias trabajando con una variedad de unidades no estándar de área. Incluso algunos investigadores, como Héraud (1989) sugieren la conveniencia de no introducir las unidades estándar hasta después de abordar la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo.

CÁLCULO DE ÁREAS. En los distintos estudios los investigadores han constatado que las fórmulas para el cálculo de áreas es el método de medida mayoritariamente enseñado a los alumnos, y que su empleo va acompañado de numerosos errores y falta de comprensión por parte de los estudiantes. Tras la recopilación y análisis de los resultados y recomendaciones realizadas en los diferentes trabajos podemos extraer como conclusiones globales que los investigadores: i) consideran necesario que además de las fórmulas los alumnos estén familiarizados con otras técnicas de medida, y con tareas de estimación, ii) critican lo inadecuado del momento y del modo en el que las fórmulas se enseñan a los alumnos, y iii) recomiendan enfrentar a los alumnos con el cálculo de áreas, no sólo de las figuras poligonales sencillas, sino también de figuras irregulares. A continuación ampliamos un poco más lo que acabamos de indicar, acompañándolo con sugerencias concretas de algunos investigadores.

- Es peligroso que los niños se familiaricen sólo con un único modo de medida de áreas, ya que su limitada comprensión del concepto de área no les permitirá desarrollar un adecuado método de medida. Por ello, se sugiere que los niños utilicen una variedad de técnicas de medida (Hughes, Bell & Rogers, 1975). El trabajo de Padilla (1990) presenta algunos resultados interesantes sobre procedimientos como partición y reconfiguración.

- Las matemáticas escolares se limitan con demasiada frecuencia a medidas donde la precisión prima de forma absoluta, dificultando a los alumnos adquirir un profundo conocimiento del proceso de medida (Dickson, Brown & Gibson, 1988). Otros investigadores, como Hiebert (1981) y Hildreth (1983) sugieren la conveniencia de que los niños realicen tareas de estimación, ya que éstas les ayudará a desarrollar una estructura mental referida al tamaño de las unidades de medida y les permitirá familiarizarse con propiedades básicas de la medida.

- Es importante que los estudiantes de primaria realicen actividades que les proporcionen técnicas para encontrar áreas de figuras irregulares (Horak & Horak, 1982; Hughes, Bell & Rogers, 1975).

- No es adecuado el momento en el que se presenta a los alumnos las fórmulas, ya que normalmente se produce mucho antes de que éstos hayan tenido la oportunidad de construir el concepto de área (Maher & Beattys, 1986). Este hecho provoca que en la mayoría de las ocasiones los alumnos se limiten a memorizarlas sin comprenderlas, por lo que al recordarlas son habituales los errores (Figueras & Waldegg, 1984).

- El hecho de que tanto el momento cómo el modo de introducir las fórmulas a los alumnos no es el adecuado, no sólo provoca en los alumnos un uso inadecuado o erróneo de ellas, sino que además Freudenthal (1983) y Hughes, Bell y Rogers (1975) han observado que con la enseñanza de las fórmulas se origina un proceso de empobrecimiento en los alumnos, en tanto que éstos abandonan otras técnicas de medida que utilizan con éxito en favor de las fórmulas, antes que la comprensión real de su uso haya sido alcanzada.

- No es adecuado el modo en el que los libros de texto y los profesores de matemáticas acometen a menudo el estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas, ya que los ejercicios que plantean se reducen a simples cálculos aritméticos (Hirstein, 1981).

- Héraud (1989) advierte de la complejidad de las fórmulas y del nivel cognitivo que se requiere para su compresión.

Si anteriormente se han expuesto sugerencias para un aprendizaje significativo de la medida del área de una superficie, no se debe pasar por alto la sugerencia dada por algunos investigadores, que advierten de la necesidad de diferenciar el concepto de área del de superficie y especialmente del de perímetro durante todo el proceso de medida.

La mayoría de los investigadores se refieren también de forma más o menos extensa, al tratamiento de la enseñanza del área en sus respectivos países. Existe unanimidad en afirmar que en la mayor parte de las escuelas, la aproximación al área se realiza a través de lo indicado en los libros de texto, donde el área es comúnmente introducida por una simple exposición limitada a la unidad cuadrada y la presentación de una fórmula para su cálculo. La patente diferencia que existe entre el tratamiento que los investigadores proponen para abordar el aprendizaje del área y el tratamiento que los profesores realizan en la práctica es, en su opinión, la causa del alto grado de incomprensión que los alumnos poseen sobre el concepto de área.

Todas las recomendaciones anteriormente citadas han sido extraídas, además de los trabajos ya indicados de los que a continuación se relacionan: Beattys y Maher (1985), Biggs (1987), Hart, ed. (1981), Héraud (1987), Hirstein, Lamb y Osborne (1978), Hughes (1979), Perrin-Glorian (1992) y Peterson (1973). Cabe destacar que además de las sugerencias señaladas se aportan otras no recogidas aquí, no porque carezcan de interés sino porque se refieren a resultados muy particulares y por lo tanto no pueden ser generalizados.

También de los trabajos que se han dedicado al estudio del papel que juega la estimación en el proceso de medida se puede extraer la recomendación de desarrollar y potenciar la habilidad de los alumnos para estimar áreas y medidas en general. En trabajos como los de Del Olmo, Moreno y Gil (1989), Bright (1976) y Hildreth (1983) se recogen resultados en esta línea, y se explican los motivos que recomiendan la inclusión de la estimación en el currículum.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL CONCEPTO DE ÁREA

2.1. INTRODUCCIÓN

Es cierto que tras el estudio de los trabajos realizados por otros autores, comentados en el capítulo anterior, se consigue recopilar un considerable número de resultados interesantes sobre diferentes aspectos y conceptos relacionados con el área, y de los que se pueden extraer sugerencias importantes para la enseñanza de este concepto. Pero en su mayoría, estos son resultados desconexos, ya que proceden de estudios puntuales. Después de haber procedido al estudio de cada una de estas investigaciones se echa de menos un *estudio global* del concepto de área en el que se consideren los posibles enfoques con sus respectivos objetivos y consecuencias, así como su relación con otros conceptos. Éste ha sido nuestro objetivo al planteamos el análisis didáctico del concepto de área. Para ello y con objeto de poseer un conocimiento más amplio sobre el concepto de estudio antes de abordar su análisis didáctico, nos planteamos la conveniencia, de realizar el estudio del concepto matemático del área, y el de su evolución a lo largo de la historia. Sin embargo, no consideramos necesario ni oportuno presentarlos aquí, ya que realmente no podríamos aportar nada nuevo a estos temas, quedando nuestra exposición reducida a una repetición de resultados ya conocidos por los expertos en el tema. Sólo indicaremos, aunque de forma breve, aquellos resultados que consideramos importantes para nuestro trabajo y que de alguna forma han influido en él.

En este capítulo se muestran las argumentaciones que nos han conducido a determinar el objetivo de enseñanza del área, a considerar el tratamiento cualitativo y cuantitativo que puede recibir el área, y a comprender que cada uno de ellos conduce a diferentes interpretaciones de este concepto, cuyo grado de dificultad está ligado a las características del tipo de procedimientos utilizados para la comparación y/o medición del área.

2.2. OBJETIVO EDUCATIVO DE LA ENSEÑANZA DEL ÁREA

Cuando se estudia el concepto del área en la Matemática, se constata que el concepto de área que es enseñado tanto en la escuela primaria como en la secundaria está muy lejos del concepto matemático, concepto que por otra parte, dada su complejidad, no podría ser abordado en toda su magnitud ni siquiera en secundaria. Así pues a diferencia de otros muchos conceptos, parece claro que el objetivo de la enseñanza del área no debe ser la construcción del concepto matemático.

La historia nos muestra que fueron muchos los siglos que debieron transcurrir hasta poder obtener la primera definición matemática de área, alcanzada en el siglo XIX gracias a la definición de límite dada por Cauchy.

> El primer tratamiento completo de análisis matemático basado desde el principio en una definición razonablemente clara del concepto de límite fue el dado por Cauchy: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo tal que al final la diferencia se hace tan pequeña como uno quiere, éste último (valor fijo) se llama el límite de los otros. Así, por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos a él" (Edwards, 1991; p. 310).

Con Cauchy se plantea la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis infinitesimal y se comienza la puesta en orden lógico del Cálculo (González, 1992; p. 279).

Sin embargo los antiguos griegos no necesitaron formular una definición de área para abordar el problema de la cuadratura del círculo, como tampoco los matemáticos que a lo largo de la historia han intentado resolver este problema y buscar un método general de cuadraturas, problema que resolvieron Newton y Leibniz a finales del siglo XVII, y al que González (1992) se refiere como el descubrimiento final del Cálculo.

Parece que todos ellos admitieron que toda superficie limitada tiene un área y se centraron en su cálculo. Para ello utilizaron las propiedades del área que, como sabemos, no se pueden demostrar mientras no se precise qué se entiende por área, hecho que por otra parte parece no haberles supuesto contrariedad alguna.

> Lo que Euclides y cientos de los mejores matemáticos de las generaciones posteriores hicieron fue emplear propiedades que las figuras sugerían como evidentes, o intuitivamente tan evidentes que no podían darse cuenta de que las estaban utilizando (Kline, 1992; p. 126).

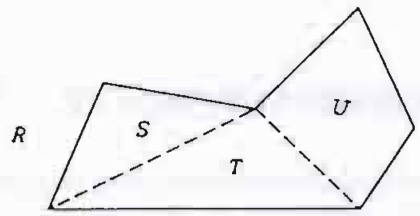
Tal vez lo descrito anteriormente pueda justificar el hecho de que se puede abordar el cálculo del área de superficies planas sin necesidad de precisar de un modo formal qué se entiende por ella. En la misma línea se manifiesta Freudenthal cuando comenta:

> Las áreas están constituidas y son aceptadas como objetos mentales, y a posteriori, si es preciso, analizadas con el fin de llegar al logro gradual de un concepto (Freudenthal, 1983; p. 389).

Por lo tanto, el objeto de la enseñanza del área en los niveles de primaria y secundaria no se debe centrar en la búsqueda de la definición de área, sino en el estudio de los diversos procedimientos que permiten medir y comparar áreas de superficies planas. Procedimientos que utilizan implícitamente las propiedades que satisface el área considerada como una función y que permiten determinar la medida del área de superficies planas. Propiedades que, como ha sucedido a lo largo de la historia, serán utilizadas sin necesidad de ser demostradas rigurosamente, y que según O'Daffer y Clemens (1977) son:

Propiedad Aditiva. Si una región R se puede descomponer en un número finito de regiones, el área de la región completa es la suma de las áreas de las regiones separadas.

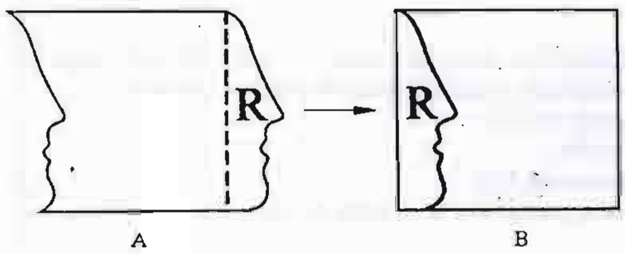
$$A(R) = A(S) + A(T) + A(U)$$



Propiedad de Invarianza. Si dos regiones R y S son congruentes, entonces A(R) = A(S).

Propiedad de la Unidad. El área del cuadrado unidad es 1.

Propiedad de la Disección. Si una región puede ser diseccionada en partes y esas partes reorganizadas para formar otra región, entonces las dos regiones tienen áreas iguales.



Como puede observarse, la mayoría de estas propiedades hacen referencia a la conservación del área de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones. Como ya se ha comentado anteriormente en el capítulo 1, la conservación del área no es una característica evidente para todos los alumnos, contrariamente a lo que se podría pensar, así pues para que los alumnos hagan un uso comprensivo de los distintos procedimientos será necesario que conozcan y comprendan cada una de las propiedades anteriores. Ello no significa que se deban convertir en objeto mismo de enseñanza, sino que su estudio se deberá abordar de forma indirecta en tareas de comparación y medición de áreas, planteadas en situaciones diversas.

Consideramos necesario realizar un análisis de las características de los distintos procedimientos disponibles para la comparación y cálculo de áreas ya que como más adelante se muestra conducen a interpretaciones diferentes del área, que originarán concepciones distintas de este concepto en los alumnos. Así pues, el grado de comprensión que los alumnos posean del área estará íntimamente ligado con la riqueza de la concepción que posean, debiendo la enseñanza proporcionar al alumno el mayor número posible de enfoques diferentes con objeto de enriquecer y completar en la medida de lo posible, su formación sobre el área.

Sin embargo, antes de iniciar el estudio de los tipos de procedimientos nos parece importante plantear una reflexión sobre los usos de los términos superficie y área para mostrar los diferentes significados que les son atribuidos, las confusiones que ello provoca en los alumnos, y clarificar nuestra posición.

2.3. USO DE LOS TÉRMINOS SUPERFICIE Y ÁREA

Tras la lectura de los diversos trabajos mencionados en el capítulo anterior, hemos observado que no existe unanimidad en el significado de los términos utilizados por los diferentes investigadores y matemáticos para referirse a superficie y área. A veces se utiliza la palabra superficie para referirse al área, y a veces el área para referirse a la misma medida del área. Para algunos el área es un número, y para otros es algo distinto del número que la mide. Como ejemplo para ilustrar esta situación se exponen algunas citas extraídas de las tres investigaciones comentadas en la sección 1.3., que nos permiten comprobar cómo estos investigadores utilizan estos términos con significaciones diferentes.

Freudenthal (1983)

- El área es una magnitud que mide objetos más variados que otras magnitudes.
- Para formar una magnitud en una categoría de cosas se requiere:
  - una relación de equivalencia,
  - una relación de orden,
  - una operación de composición.
- Las medidas del área presuponen la elección de una unidad de medida.

Héraud (1989)

- [...] el modelo empleado hace la distinción entre el concepto físico de superficie y el concepto numérico del área.
- La superficie es asociada a la porción de espacio ocupada.
- [...]. Nosotros la consideraremos desde ahora bajo su aspecto cuantificable, numérico,es decir su medida, que nosotros llamamos área.

Perrin-Glorian (1992)

Términos utilizados:
"Superficie" designa una parte del plano.
"Área" designa la magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie.
"Medida" designa el número asociado cuando se ha hecho la elección de una superficie unidad".

Como puede observarse mientras que Freudenthal y Perrin-Glorian diferencian el área de su medida, Héraud la identifica con ella. También Freudenthal y Perrin-Glorian se refieren al área como magnitud, concepto no mencionado en ningún momento por Héraud. Por otro lado, mientras Héraud y Perrin-Glorian utilizan el término superficie, Freudenthal no lo hace y se refiere en todo momento al área de las figuras.

Por otra parte, hemos podido comprobar las consecuencias que ocasiona la imprecisión con la que los profesores suelen utilizar estos términos, ya que mientras que para algunos alumnos superficie y área representan lo mismo, para otros poseen significados diferentes. A continuación incluimos las respuestas dadas por algunos de los alumnos que fueron entrevistados durante la etapa diagnóstica de esta investigación, al preguntarles acerca de lo que ellos entendían por superficie y área.

- Superficie donde tú vas a medir el área. Es distinto. (Alumno nº1 de 5º curso de la Facultad de Matemáticas (5º F.M.)).

- Utilizaría indistintamente superficie y área. (Alumno nº15 de 5º F.M.).

- El área es lo que engloba una figura, o sea lo de dentro de la figura. La superficie es lo de fuera (la línea). (Alumno nº16 de 5º F.M.).

- Área es una medida de cuánto se expandiría una figura o cualquier otra cosa. Superficie: un paisaje, una cosa que pudiésemos tocar. (Alumno nº8 de 5º F.M.).

- Superficie y área son prácticamente iguales. Te refieres a superficie cuando hablas de terrenos y área más a las figuras geométricas. (Alumno nº2 de 3º curso de la Escuela de Magisterio (3º E.M.)).

- Superficie: espacio que ocupa. Área: lo que mide el espacio. (Alumno nº14 del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.), opción letras (C.O.U.-L)).

- Superficie y área: el tamaño del interior. (Alumno nº12 de 2º curso de Bachillerato Unificado Polivalente (2º B.U.P.)).

- Superficie es un trozo de terreno. Área es una superficie. No es lo mismo área y superficie, porque el área se puede medir. (Alumno nº21 de 2º de B.U.P.).

- El área es lo que ocupa una cosa determinada. La superficie es lo que ocupa una fábrica, un pueblo, un terreno en m^2. (Alumno nº22 de 8º de Educación General Básica (8º E.G.B.)).

Tras la lectura de estas afirmaciones es patente la disparidad de opiniones en lo que al uso de los términos superficie y área hacen los alumnos. Es curiosa la asociación que en cierto modo hacen algunos de ellos entre superficie y terreno tal vez condicionados por los usos que de estos términos se hace en la vida cotidiana.

Así pues, acabamos de ver cómo estos términos son empleados por especialistas con significados diferentes y cómo son entendidos por los alumnos de forma distinta. Consideramos que es esencial determinar el significado con el que serán utilizadas estas palabras, ya que como intentaremos mostrar a lo largo de este capítulo, ello está asociado con los diferentes enfoques del área, y en consecuencia está íntimamente ligado con el conocimiento y comprensión que los alumnos posean de este concepto. En consecuencia, pensamos que es necesario que un profesor delimite el significado de "superficie" y "área", ya que ello plantea objetivos distintos de enseñanza y por tanto condiciona el tipo de instrucción a diseñar y llevar a la práctica.

Antes de exponer nuestra opción y con objeto de aportar más información sobre el tema, reproducimos a continuación un párrafo en el que Lebesgue (1975) opina, desde el mundo de las matemáticas, sobre el significado de "área":

> [...]. ¿No es, en realidad, un asunto del espacio ocupado por una región independientemente de su posición en el espacio y de la disposición de sus partes? Este espacio es el área, y el número del que hemos estado hablando es simplemente la medida del área, una medida que no debe confundirse con el área misma.
>
> Aquí, a pesar de la banalidad de la palabra "espacio", reconocemos una presentación metafísica que se parece a la presentación de los enteros que hemos criticado. Un entero es la propiedad común de todas las colecciones derivadas de una única colección mediante el cambio de orden y naturaleza de los objetos que lo componen. Área es lo que es común a todos los dominios derivados de un único dominio mediante el cambio de posición y disposición de las partes que le pertenecen. Un entero metafísico tenía una notación decimal. Un área metafísica debería tener una medida; ésta sería un número metafísico que podría expresarse en el sistema decimal.
>
> Y cuando se piensa en lo que es un número metafísico no entero, se puede ver hasta qué punto estas entidades están superpuestas. Pero, al ser todo esto matemáticamente inútil, esta presentación metafísica de la definición nunca se presenta con franqueza. Para muchos, no obstante, ha seguido siendo diferente del número que mide. En cuanto a mí, el uso de la palabra "medida" en la expresión "medida de áreas" tiene el mismo sentido que en la expresión "medida de longitudes". Este uso nos recuerda que debemos haber utilizado una unidad para poder hablar de área o longitud siendo números estas últimas cantidades. Son sólo estos números los que se utilizan en matemáticas. Cada uno es libre de añadir nociones metafísicas a estas nociones matemáticas, pero las primeras no deberían estorbar la enseñanza ni deberían usarse para juzgar el valor lógico de una teoría.

Si bien como matemáticos compartimos las reflexiones realizadas por Lebesgue en cuanto a una teoría de medida se refiere, como docentes consideramos que sería más interesante presentar en un principio a los alumnos, el área disociada del número que la mide. Estaríamos hablando, utilizando los mismos términos empleados por Lebesgue, de una enseñanza en la que subyace una presentación metafísica del área. Sin embargo no creemos que esto sea incompatible con lo expuesto por Lebesgue, ya que nos movemos en mundos diferentes, en el de la matemática y en el de la enseñanza de niveles primario y secundario. Por el contrario, pensamos que esto ayudará a una mejora en la comprensión de los alumnos, facilitándoles el camino hacia una correcta concepción numérica del área.

Entendemos que el área es una propiedad más de una superficie que puede ser medible, y por lo tanto se le puede asociar un número resultado de su medida. Creemos que es fundamental para la consecución de una buena comprensión del concepto área, iniciar a los alumnos en su estudio, buscando la disociación entre área y forma de la superficie, y área y número, que es lo nosotros hemos denominado, como lo hace Perrin-Glorian (1992), **área como magnitud autónoma**. Pensamos que la disociación del área de la forma de la superficie colaborará en la disociación del área de otra propiedad de la superficie, el perímetro, que como ya se ha comentado en el capítulo anterior, es la confusión más habitual entre los alumnos y causante de numerosos e importantes errores. Por otra parte, el hecho de que un alumno acepte que el área de una superficie puede tener asociada diferentes números procedentes de la medida realizada con unidades de medida distintas es una pieza clave en la comprensión del papel que juega la unidad en la medida, y en consecuencia en la comprensión del proceso de medida.

El hecho de considerar el área como magnitud autónoma nos lleva a diferenciar la superficie del área y de la medida de ésta, asignando a estos términos significados diferentes, que serán utilizados con el sentido que les da Perrin-Glorian (1992), ya indicado anteriormente en el apartado 1.3.3.

Aclarada nuestra posición didáctica procedemos a describir los distintos enfoques que posee el concepto de área, que surgen del tratamiento cualitativo o cuantitativo que puede recibir el área.

2.4. TRATAMIENTOS CUALITATIVO Y CUANTITATIVO DEL ÁREA

En esta sección se muestran los resultados del análisis realizado de los distintos procedimientos que permiten comparar y/o medir áreas. Este estudio nos ha llevado a considerar el tratamiento cualitativo y cuantitativo que puede recibir este concepto, y a concluir que los distintos tipos de procedimientos utilizados en cada uno de estos tratamientos conducen a diferentes interpretaciones del área.

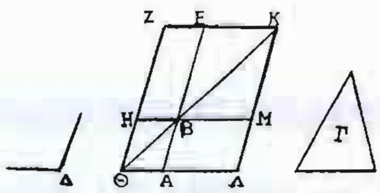
Los distintos procedimientos los hemos clasificado atendiendo a su naturaleza geométrica o numérica, ya que la consideramos una característica fundamental en tanto que determina tratamientos del área de carácter diverso, y con objetivos diferentes: *tratamiento cualitativo y cuantitativo.*

Los procedimientos de naturaleza geométrica son aquellos que utilizan métodos puramente geométricos donde el número está ausente de cualquier razonamiento. El objetivo no es cuantificar el área sino comparar áreas de superficies sin necesidad de recurrir a un número para ello, y por lo tanto su utilización conduce a un tratamiento cualitativo del área. Este tipo de tratamiento fue el recibido por la geometría por los matemáticos griegos del período clásico (de Thales (640 - 543 a.C) a Eudoxo (408 - 355 a.C)). El descubrimiento de los números irracionales y en consecuencia el de la inconmensurabilidad de las magnitudes les condujo a establecer la diferencia entre número y magnitud ante su imposibilidad de aceptar y conceptualizar los irracionales como números. Ello les obligó a no asignar números a las figuras y por lo tanto a tratar el área como una magnitud, realizando comparaciones de áreas, estableciendo razones entre ellas. El mejor exponente de este tipo de procedimientos lo tenemos en los problemas conocidos como de "aplicación de áreas", de los que aquí mostramos el correspondiente a la proposición 44 del libro primero de los Elementos de Euclides, y del que Kline (1992) se refiere a él como el primero de los problemas de aplicación de áreas.

Proposición XLIV. Libro primero de los Elementos de Euclides.

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que AB soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite AB et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ. Dans un angle EBH égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme BEZH égal au triangle Γ (42), plaçons la droite BE dans la direction de la droite BA, prolongeons la droite ZH vers Θ, par le point A conduisons AΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BH, EZ (31), et joignons ΘB. Puisque la droite ΘZ tombe sur les parallèles AΘ, EZ, les angles AΘZ, ΘZE sont égaux à deux droits (29); donc les angles BΘH, HZE sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits, se recontrent (dém.5); donc les droites ΘB, ZE étant prolongées, se recontreront; qu'elles soient prolongées (dém.2), et qu'elles se recontrent en K; par le point K, conduisons KΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites EA, ZΘ (31), et prolongeons les droites ΘA, HB vers les points Λ, M.



La figure ΘΛKZ est un parallélogramme, ΘK est sa diagonale, et autour de ΘK sont les parallélogrammes AH, ME, et les parallélogrammes ΛB, BZ, qu'on nomme compléments; donc ΛB est égal à BZ (43). Mais BZ est égal au triangle Γ; donc ΛB est égal à Γ. Et puisque l'angle HBE est égal à l'angle ABM (15), et que l'angle HBE est égal à l'angle Δ, l'angle ABM est égal à l'angle Δ.

Donc à la droite donnée AB, et dans l'angle ABM égal à Δ, on a appliqué le parallélogramme ΛB égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire. (Euclides, 1819)[1].

No podemos dejar de manifestar nuestra admiración hacia los procedimientos utilizados por estos matemáticos que, con gran habilidad y rigor en el razonamiento, dieron solución a problemas de áreas sin recurrir en ningún momento a número alguno. Retornando a la época actual y al campo de la enseñanza está claro que no se pretende el uso de razonamientos de esta envergadura aunque sí de esta naturaleza, ya que aunque pudieran parecer "deficientes" desde el momento que no proporcionan la medida del área y sólo permiten establecer entre las áreas relaciones de igualdad o de menor/mayor, juegan un papel fundamental en la comprensión de este concepto como más adelante se justificará.

Los procedimientos de naturaleza numérica son diversos y entre sí muy distintos aunque la filosofía de todos ellos es la misma, asignar un número al área de una superficie con el objetivo de cuantificarla, bien sea para comparar áreas de superficies o bien para determinar la medida del área de una superficie. El empleo de métodos numéricos conducirá a un tratamiento cuantitativo del área, único tratamiento que recibe el concepto matemático.

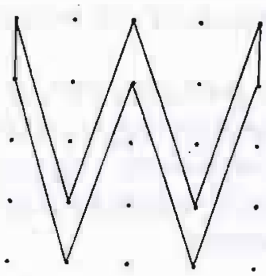
Con el fin de poder valorar el calibre de la operación mental y el nivel de abstracción de los razonamientos, así como el de los conocimientos matemáticos que requieren los distintos procedimientos numéricos, hemos considerado el *carácter de finitud o infinitud del proceso y el carácter unidimensional o bidimensional de la operación* que conduce finalmente al número que proporciona la medida del área, como las características fundamentales a partir de las cuales clasificar los diferentes procedimientos numéricos. Pensamos que esto debe

(1) Existe una edición de los Elementos (1991) en castellano. Esta edición presenta algunas diferencias con la de Peyrard, ya que los traductores han utilizado manuscritos diferentes.

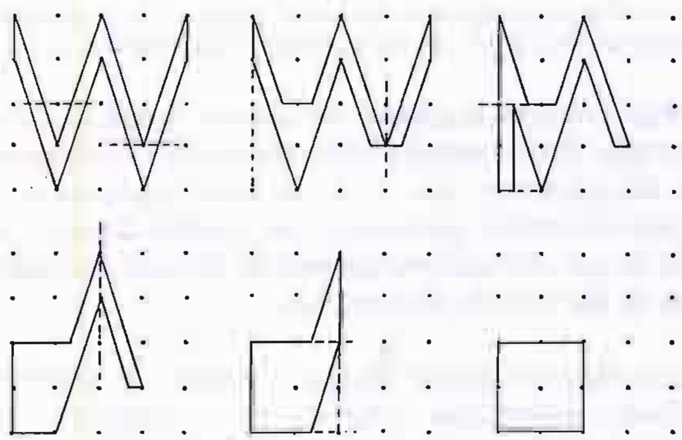
conducir a una reflexión acerca de la idoneidad de la enseñanza de los diversos procedimientos numéricos en cuanto al momento y orden de presentárselos a los alumnos.

Aunque en determinadas situaciones para resolver problemas de áreas se combinan métodos geométricos y numéricos, no dejan de ser en realidad de naturaleza numérica, en tanto que su fin es cuantificar el área. Lo que se hace es utilizar como herramienta de trabajo métodos geométricos, normalmente para simplificar o facilitar el cálculo mediante alguna transformación geométrica. De ahí que sólo hayamos considerado procedimientos de naturaleza geométrica o numérica. A continuación mostramos el trabajo realizado por un alumno de secundaria para determinar el área de un polígono representado sobre una trama de puntos, extraído de Corberán et al. (1989), en el que se puede apreciar cómo el estudiante consigue transformar la superficie original, cuya área resulta difícilmente cuantificable, en otra equivalente fácilmente medible. Para ello elaboró estrategias de descomposición de la superficie en "trozos" y posterior encaje por complementariedad de formas.

Actividad 7. Encuentra el área de cada polígono sin utilizar ningún artilugio de medida ni fórmulas.



2



2.4.1. PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS

El interés que ha existido y existe todavía en asociar el área con un número, ha dirigido la enseñanza únicamente hacia procedimientos puramente numéricos, ocasionando de esta forma una formación incompleta del alumno en este concepto al no permitirle familiarizarse con situaciones geométricas, y en consecuencia con procedimientos geométricos que en algunas ocasiones, como hemos podido comprobar, resultan muy útiles al resolver o simplificar situaciones numéricamente imposibles o complejas. Creemos que es necesario que en una primera etapa el alumno realice tareas de comparación de áreas de superficies planas sin necesidad de recurrir para ello a los números, permitiéndole familiarizarse con el **área como espacio ocupado por una región**. Los procedimientos geométricos facilitan la comprensión de la conservación del área de una superficie y en consecuencia propician un estudio comprensivo de las propiedades del área. También colaboran en la disociación del área de la forma y del perímetro de la superficie, ya que pueden plantearse tareas en las que mediante el uso de procedimientos geométricos se estudien las posibles variaciones que pueden experimentar estas tres propiedades: forma, área y perímetro, cuando la superficie se somete a determinadas transformaciones. Por último pensamos que este tipo de procedimientos además de enriquecer la formación del alumno en el concepto que nos ocupa juega un papel esencial para la comprensión de las interpretaciones numéricas del área.

Sería un error pensar que este tipo de procedimientos son en cierta forma intuitivos y que las diferentes reconfiguraciones posibles de las figuras geométricas resultan obvias, y que por lo tanto no requieren ser enseñados a los alumnos. Algunos investigadores se refieren a ello, pero cabe destacar las aportaciones que al respecto realiza Padilla (1990) en su trabajo, del que mostramos algunas de sus conclusiones:

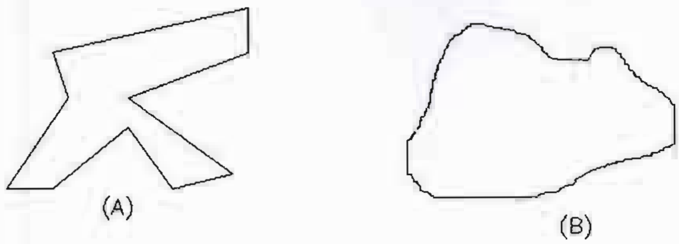
> "Ver" sobre una figura es un paso complejo que depende de una aprendizaje cuya importancia permanece demasiado a menudo ignorada.
>
> [...] La intuición que da una figura geométrica no depende solamente de las leyes gestálticas de la percepción. Dependen también de otras "appréhensions" como la operatoria o la discursiva [...].

También nosotros hemos obtenido resultados en nuestra investigación que nos llevan a conclusiones del mismo tipo. Tras el análisis de las respuestas a determinados ítemes del test utilizado en la etapa diagnóstica y que en el capítulo siguiente se muestran, hemos comprobado que los procedimientos geométricos no estaban disponibles para la práctica totalidad de la población estudiantil, independientemente del nivel educativo, incluso para los alumnos de 5° curso de la Facultad de Matemáticas.

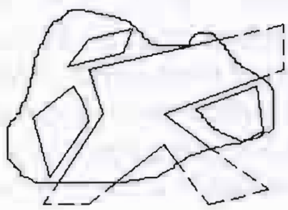
Así pues, en una primera etapa se debería plantear el estudio de diferentes procedimientos geométricos en situaciones geométricas diversas. En la enseñanza los procedimientos geométricos más frecuentes son los que se basan en una comparación directa o indirecta de las superficies. La primera consiste en una simple superposición de las superficies, siempre claro está que una de ellas quede incluida perfectamente en la otra, y la segunda se basa en un recorte en "trozos" de una de las superficies, o de las dos, según convenga, para una posterior reorganización de estos que permita la comparación de las áreas de las superficies que en un principio no fue posible. A continuación mostramos a modo de ejemplo, diferentes situaciones que requieren proceder, en cada caso, de forma distinta, pero utilizando siempre en todas ellas procedimientos geométricos basados en un recorte en piezas de alguna de las superficies dadas.

Ejemplo 1

Compara el área de la dos superficies siguientes.

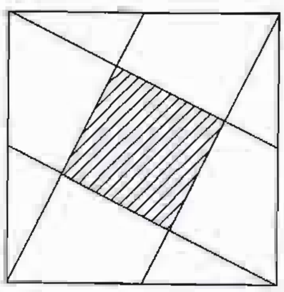


Para su resolución es necesario *partir* la superficie (A) *en "trozos" para poder superponerlos* sobre la (B), y así poder emitir un juicio. En el siguiente dibujo se muestra una posible partición.



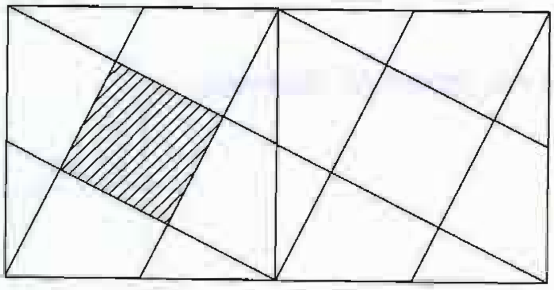
Ejemplo 2

Compara el área del cuadrado interior S (sombreado) con la del cuadrado grande. El cual está determinado por la unión de cada vértice del cuadrado unidad con los puntos medios de sus lados no adyacentes.



Nota.- Problema extraído de Milauskas (1987).

Su resolución requiere una *reconfiguración por complementariedad de formas* de las partes en las que queda dividido el cuadrado, como se indica a continuación:

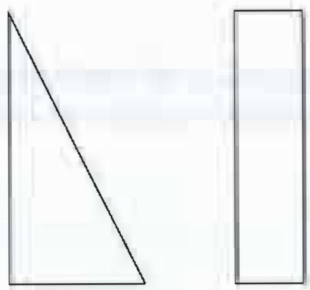


Ejemplo 3

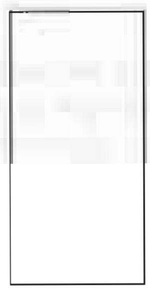
En Sikinia la gente es pobre, pero todo el mundo posee un perro feroz. Estos perros rompen las ropas de los transeúntes. Todo aquel al que le hacen un agujero, lleva la ropa para arreglar al sastre.

Nuestro sastre vive de arreglar todos los agujeros, pero su sueño es hacerse rico remendando abrigos de pieles. Una señora llegó un día con una chaqueta de piel de visón que tenía dos agujeros, uno en la espalda con forma triangular y uno en el delantero con forma rectangular. Nuestro sastre desesperado, ya que como no había arreglado otros abrigos de visón, no tenía más que una pieza con forma rectangular en casa; por tanto, tenía que sacar el triángulo y el rectángulo a partir de esa pieza que disponía. ¿Podéis ayudar al pobre sastre?

Forma de los agujeros

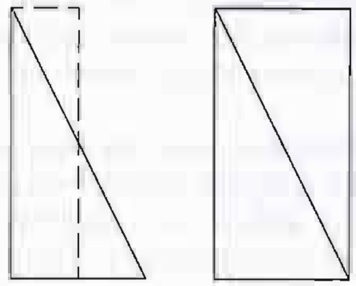


Forma de la pieza



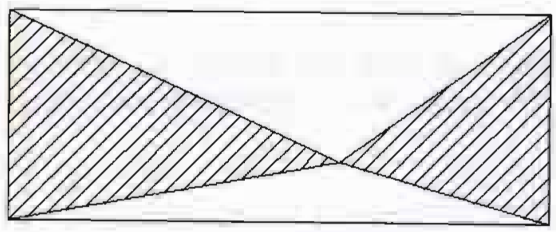
Nota.- Problema extraído de Guillén (1983).

Su resolución requiere una *partición* conveniente de la pieza de tela rectangular, *y una posterior reconfiguración por complementariedad de dos de los "trozos"*, como se indica en el dibujo.



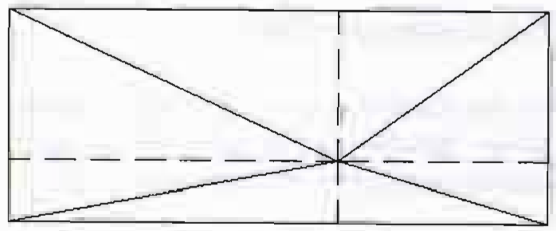
Ejemplo 4

Compara el área del rectángulo y la de la zona sombreada.



Nota.- Problema extraído de O'Daffer y Clemens (1977).

Su resolución requiere *una descomposición conveniente* del rectángulo que permita la comparación de las áreas.

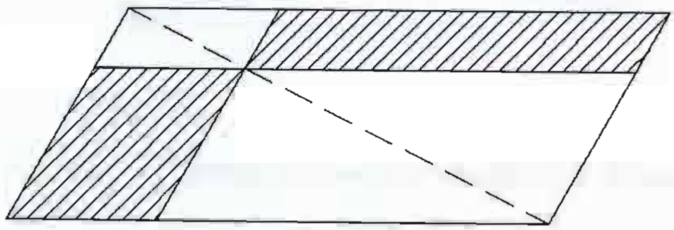


En estas cuatro situaciones analizadas se han establecido relaciones entre las áreas de las distintas superficies a partir de descomposiciones y/o reconfiguraciones por complementariedad de formas. Problemas todos ellos no abordables mediante el uso de procedimientos numéricos. Si bien todas estas tareas están planteadas en contextos geométricos -en ausencia de cualquier número- es de desear que el conocimiento de los alumnos de este tipo de procedimientos sea tal, que los utilicen también para simplificar las resoluciones de problemas planteados en contextos numéricos.

Además de considerar los procedimientos aquí descritos como geométricos, también consideramos como tal el que permite comparar áreas de superficies a partir del análisis de los elementos de los que depende el área de las superficies en cuestión. Este tipo de razonamiento permite por un lado, el uso comprensivo de las fórmulas para el cálculo de áreas y por otro, analizar las posibles variaciones que puede sufrir el área de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones en un contexto geométrico. Está claro que este tipo de proceder requiere del conocimiento de la fórmula, por lo tanto no podrá utilizarse hasta que no se haya abordado el estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas. El razonamiento empleado en este tipo de procedimiento es de un nivel superior al que requieren los procedimientos geométricos descritos anteriormente. A continuación mostramos la resolución de un problema empleando un razonamiento como el aquí descrito.

Ejemplo 5

Por un punto de una diagonal de un paralelogramo (ver figura) se trazan las paralelas a los lados de esta figura. Demuestra que los paralelogramos obtenidos son equivalentes.



Nota.- Problema extraído de Castelnuovo (1981).

Se podrá demostrar que los dos paralelogramos de la figura tienen igual área al justificar que los triángulos que quedan también la tienen, y ello es posible *razonando sobre la igualdad de las bases y alturas respectivas* de cada uno de ellos.

Un razonamiento de este tipo es el que permite demostrar que cualquier polígono se puede transformar en un triángulo equivalente.

Una vez el alumno esté familiarizado con el tratamiento cualitativo del área a partir del uso de algunos procedimientos geométricos, pensamos que es el momento adecuado para abordar el tratamiento cuantitativo con el estudio de los procedimientos numéricos.

2.4.2. PROCEDIMIENTOS NUMÉRICOS

Todos los procedimientos numéricos requieren previamente a su utilización de la elección de una unidad de medida, estando el número obtenido íntimamente ligado a la unidad escogida. La medición es un proceso por medio del cual se asigna un número al área, como resultado de la comparación de la superficie con otra considerada como unidad. Es por ello que para abordar los procedimientos numéricos y con el fin de lograr una adecuada comprensión del concepto de área es imprescindible una buena comprensión del concepto de unidad de medida. En caso contrario, las unidades indicadas tras los números quedan reducidas para los alumnos a meras etiquetas, manifestando una patente incomprensión sobre lo que se está realizando, con los consiguientes errores que ello conlleva, por ejemplo al confundir las unidades de longitud, superficie y volumen.

Será pues necesario familiarizar al alumno con el mayor número posible de unidades diferentes y plantearle situaciones diversas en las que pueda realizar la medida del área de una misma superficie utilizando diferentes unidades que le permitan establecer la relación entre el tamaño de la unidad y el número resultante de la medida. Situaciones en las que para efectuar la medición, se requiera subdividir la unidad de medida en unidades más pequeñas, mostrando de ese modo la naturaleza continua del proceso de medida. En definitiva, se le deberá proporcionar al alumno las situaciones y problemas necesarios para que éste conozca y comprenda las *propiedades y características de las unidades de medida*, que relacionamos a continuación:

1) La unidad de medida puede ser dividida en partes para facilitar la medida de una cantidad. Esta propiedad pone de manifiesto el carácter de no discretitud de la unidad de medida.

2) Existe una relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de unidades que recubren la superficie.

3) La unidad debe recubrir exactamente la superficie. Esto es lo que llamamos carácter de recubrimiento (tal vez más conocido por su expresión inglesa, "space-covering") de la unidad de medida. Para la comprensión de esta propiedad, es necesario estudiar las características que la unidad de área debe poseer para que la medida efectuada sea correcta y fácil de realizar. Éstas son: la unidad de medida escogida debe ser fácilmente reproducible, fácilmente divisible y no debe dejar huecos en el momento de recubrir la superficie con unidades o sus fracciones. Estas condiciones deben conducir a una elección racional del cuadrado como la unidad de área más "conveniente".

   Nota.- Esta última propiedad se refiere sólo a unidades de medida bidimensional.

Las unidades utilizadas para la medida de un área pueden ser bidimensionales o unidimensionales (lineales), siendo el tipo de procedimiento el que determina el uso de uno u otro tipo de unidad. Pensamos que es importante tener presente este factor, ya que el carácter que posee la unidad de medida utilizada puede suponer una dificultad añadida a la que ya de por sí pueda representar el mismo procedimiento. Concretamente creemos que el uso unidades lineales, utilizadas en las fórmulas, encierra mayor dificultad que el de unidades de carácter bidimensional. Por ello y como ya hemos comentado al inicio de esta sección hemos considerado este carácter de la unidad como una de las características a partir de la cual hemos clasificado los procedimientos.

Compartimos la opinión de otros investigadores como Dickson, Brown y Gibson (1988), Douady y Perrin-Glorian (1983, 1984, 1989), Freudenthal (1983), Héraud (1989), Hershkowitz et al. (1990), Hughes, Bell y Rogers (1975), Rogalski (1982) y Tierney, Boyd y Davis (1990), de considerar necesario relegar el estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas hasta que el alumno no esté familiarizado con los métodos numéricos que requieren de la selección de una unidad de medida bidimensional y comprenda el significado del papel de la unidad.

Es necesario ser conscientes del nivel de abstracción y de formalización que requiere la medición de un área mediante cálculos a partir de las dimensiones lineales. Ya Piaget (Holloway, 1986) se refería a ello cuando situaba la capacidad de un niño de medir áreas utilizando fórmulas en el estadio último de desarrollo, de pensamiento operativo formal. No podemos olvidar que detrás de una fórmula se esconde la relación entre magnitudes de diferente naturaleza, una bidimensional (el área) y otras unidimensionales (longitudes), idea conceptualmente compleja y difícil de comprender para una mayoría de estudiantes, incluso de secundaria, si no se les ha preparado para ello.

Así pues, en primer lugar se deberá familiarizar al alumno con mediciones basadas en la comparación de las áreas de dos superficies, una, la superficie cuya área se desea medir y la otra, la considerada como unidad. Para ello se podrían utilizar métodos como la iteración de la unidad o la descomposición de la superficie en partes iguales. En estos casos el número obtenido es el resultado de una operación aditiva, procedente de un recuento o conteo del número de unidades o fracción de ésta que recubren exactamente la superficie, y por lo tanto, a diferencia de lo que ocurría con el uso de las fórmulas, la operación tiene un carácter unidemensional.

La utilización de este tipo de métodos para medir áreas, en ejercicios planteados en situaciones convenientemente escogidas, propiciará por un lado, la disociación del área del número que la mide, objetivo para nosotros fundamental y ya comentado anteriormente, y por otro, la transición desde el recubrimiento del espacio con una unidad a la multiplicación de las dimensiones lineales, necesaria para dar sentido a las fórmulas.

Un alumno que comprenda el papel que juega la unidad de medida en el cálculo de áreas y disponga de la experiencia necesaria que acabamos de detallar, estará familiarizado con el **área cómo número de unidades que recubren exactamente la superficie**, y estará en condiciones de enfrentarse significativamente al estudio del **área como número resultante del producto entre dos magnitudes lineales.** Éste es, tal vez, el enfoque de área más universalmente enseñado a los alumnos y paradójicamente es el que posee las más altas cotas de incomprensión, como así lo muestran los diferentes estudios realizados.

No podemos considerar completo este análisis sin incluir los procedimientos basados en procesos infinitos, procesos que personalmente consideramos poseen una gran belleza en su ejecución. Éstos, mediante aproximaciones sucesivas desde el interior y/o el exterior de la superficie permiten obtener el valor exacto del área, o un valor aproximado tan próximo al valor real como se quiera.

Habitualmente se presenta a los alumnos de los últimos cursos del Bachillerato Unificado Polivalente (B.U.P.) y del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.), **la Integral de Riemann.** Sin embargo su inclusión en la enseñanza no tiene por objeto abordar la definición de área sino presentar un procedimiento de cálculo, que entre otras aplicaciones tiene la de calcular áreas de superficies planas. En cualquier caso la definición de área como el límite de una suma de áreas de rectángulos infinitamente pequeños es compleja matemáticamente y de difícil comprensión para muchos alumnos ya que el método utiliza una teoría explícita de límites, en la que se manejan términos tan polémicos a lo largo de la historia, como infinitésimo e infinito. De hecho la variedad de términos que fueron utilizados por los matemáticos a lo largo de la historia, como: tan pequeño como se quiera, indivisibles, infinitamente pequeños, incrementos evanescentes, cantidades despreciables, infinitesimales, en el intento de fundamentar sus métodos de cuadraturas, y las fuertes críticas que recibieron pone en cierto modo de manifiesto la complejidad de la comprensión de estos términos.

Inmediatamente nos surge la pregunta ¿pueden los alumnos entender el significado de estos términos? Nuestra experiencia docente nos permite afirmar que la Integral de Riemann es más asumida, por los alumnos que comprendida. Hecho que por otra parte no es de extrañar ni nos debería alarmar al comprobar la polémica que ha ocasionado durante muchos siglos el uso de métodos basados en procesos infinitos para resolver problemas de cuadraturas. El primer método infinitesimal fue propuesto por los pitagóricos en un intento de resolver la cuadratura del círculo. Aunque reconocemos que no deja de tener un carácter anecdótico, queremos mostrar aquí algunos fragmentos extraídos de dos libros de historia de la matemática en los que se exponen algunos de los muchos comentarios que a lo largo de la historia han realizado matemáticos y filósofos al respecto, y que pensamos recogen perfectamente el espíritu de lo que acabamos de comentar aquí.

> [...]. Los pitagóricos consideran el círculo como una suma de un número infinito de triángulos infinitamente estrechos colocados alrededor del círculo, de tal manera que su altura se aproxima al radio cuanto más se reduce la base de dichos triángulos. Al observar que la altura pasaba a ser el radio del círculo y que la suma de las bases igualaban a la circunferencia, aplicaron como fórmula del área del círculo, la siguiente: 1/2 de la longitud de la circunferencia por el radio.
>
> [...]. El descubrimiento de los inconmensurables no fue el único golpe que recibió el pensamiento matemático del período Helénico, ya que la escuela eleática de filósofos [...], le iba a hacer algunas objeciones a la división lógica del círculo en el número de partes descritas anteriormente y, probablemente, del modo siguiente: A medida que el triángulo se va estrechando, exactamente, ¿cuándo deja de existir como tal y cuando empieza a ser

triángulo? Cierto que tendrá la forma de triángulo hasta que se estreche infinitamente, y entonces ya no es algo, sino nada. ¿Cómo una suma de nadas puede producir algo? (Argüelles, 1989; pp. 33-34).

[...], D'Alembert aconsejaba a los estudiantes de cálculo infinitesimal, < <Persistid y os llegará la fe> > (Kline, 1992; p. 576).

[...]. Todos esos esfuerzos podrían resumirse en la descripción de Voltaire del cálculo infinitesimal como < <el arte de numerar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser concebida> > (Kline, 1992; p. 577).

Después de lo anterior tal vez cabría plantearse un estudio sobre la idoneidad de presentar a los alumnos un método de cálculo de áreas como la Integral de Riemann. De hecho ya existe alguna investigación al respecto. En esta línea se encuentra la realizada por Turégano (1994) que propone como método alternativo a la Integral de Riemann una utilización intuitiva de la medida de Lebesgue.

En cualquier caso y con el fin de proporcionar a los alumnos otro tipo de procedimiento para calcular áreas, y para introducir los procesos infinitos y de ese modo preparar el terreno para una mejor comprensión del cálculo integral, creemos que sería interesante animar a los estudiantes de los primeros cursos de secundaria y primaria a realizar cálculos aproximados de áreas de algunas superficies planas mediante un **método de exhaución**, que consista en el agotamiento "exhaustivo" de la superficie por unidades de área. Por ejemplo, mediante una rejilla cuadrada se recubre la superficie (S) de la que se desea determinar su área, pudiendo obtenerse ésta a partir de las unidades cuadradas contenidas o que contienen a (S). Un refinamiento de esa rejilla conduce a una mejor aproximación. Aproximaciones sucesivas del área de (S) mediante refinamientos de la rejilla, conducen de forma natural a la idea de refinamiento ilimitado, aunque en estos niveles educativos ésto no debe tratarse explicítamente. En definitiva, estamos convencidos del interés de este método, por considerarlo un buen método de cálculo, tan bueno como uno desee en cuanto a aproximación se refiere, y porque el método que utiliza para aproximar el área de la superficie dada se basa en un proceso que resulta más natural para los alumnos y por lo tanto mucho más comprensible para ellos que el método de la Integral de Riemann al utilizar el concepto de "tan pequeño como se quiera", y no requerir el paso al límite.

Debemos reconocer que además de por lo expuesto anteriormente, y que si bien, sólo motivos de esta naturaleza deberían justificar su inclusión en la enseñanza, existe un motivo sentimental que nos lleva a rescatarlo de la historia. Fue el método por nosotros conocido como "de exhaución" , creado por Eudoxo de Cnido (408 - 355 a. C.), el primero que permitió resolver la cuadratura del círculo mediante argumentos matemáticos de un rigor lógico impecable. El método se basa en el hecho de que se puede inscribir y circunscribir a los círculos, polígonos cuyo número de lados puede aumentar tantas veces como se quiera, así el círculo es agotado exhaustivamente por los polígonos, de manera que quedará siempre una diferencia determinada entre el área del polígono y el área del círculo.

Un paso más en el estudio del concepto de área, nos llevaría a introducirnos en la Teoría de la Medida y en el estudio de la **definición axiomática de área**. Aunque, como ya anteriormente hemos comentado, esta definición requiere para su comprensión de un conocimiento matemático que no poseen los alumnos de secundaria y por ello es abordada en el nivel de enseñanza universitaria, no podríamos considerar cerrado este análisis si no la mostráramos aquí, ya que representa la interpretación "superior" de área, en cuanto al contenido matemático se refiere. A continuación exponemos la definición axiomática de área dada por autores diferentes, donde se aprecian algunas diferencias, que nos parecen interesantes de observar. Concretamente la que se detecta al comparar el axioma IV de la definición de Rey, Pi y Trejo (1952) y el δ de la de Lebesgue (1975). Mientras que en el primero caso los autores se refieren a una superficie unidad concreta, Lebesgue no lo hace, deduciéndose de ello que cualquier superficie puede ser considerada como unidad.

Definición extraída de Rey, Pi y Trejo (1952):

En la Geometría elemental se construye la teoría de la medida de la extensión en el plano, comenzando por asignar a cada región R de una cierta clase M un número $\mu(R)$, llamado área de R, que cumple los postulados siguientes:

I) $\mu(R) > 0$;
II) Regiones congruentes R y R' tienen igual área; más precisamente: si $R \in M$ y es R' congruente con R, entonces $R' \in M$ y $\mu(R) = \mu(R')$;
III) Una región suma de varias de M, tiene un área suma de las de éstas.

Con estos axiomas, $\mu(R)$ queda determinado salvo un factor constante, que si M contiene un cuadrado de lado 1 (y por II a todos) puede fijarse conviniendo en que:

IV) Si C es un cuadrado de lado 1, es $\mu(C) = 1$.

Definición extraída de Lebesgue (1975):

α) A cada dominio de una familia de dominios a la que pertenecen todos los polígonos corresponde un número positivo al que llamamos su área.
β) El área asignada a un dominio formado por la unión de dos dominios disjuntos es la suma de las dos áreas.
γ) A los dominios congruentes corresponden áreas iguales.

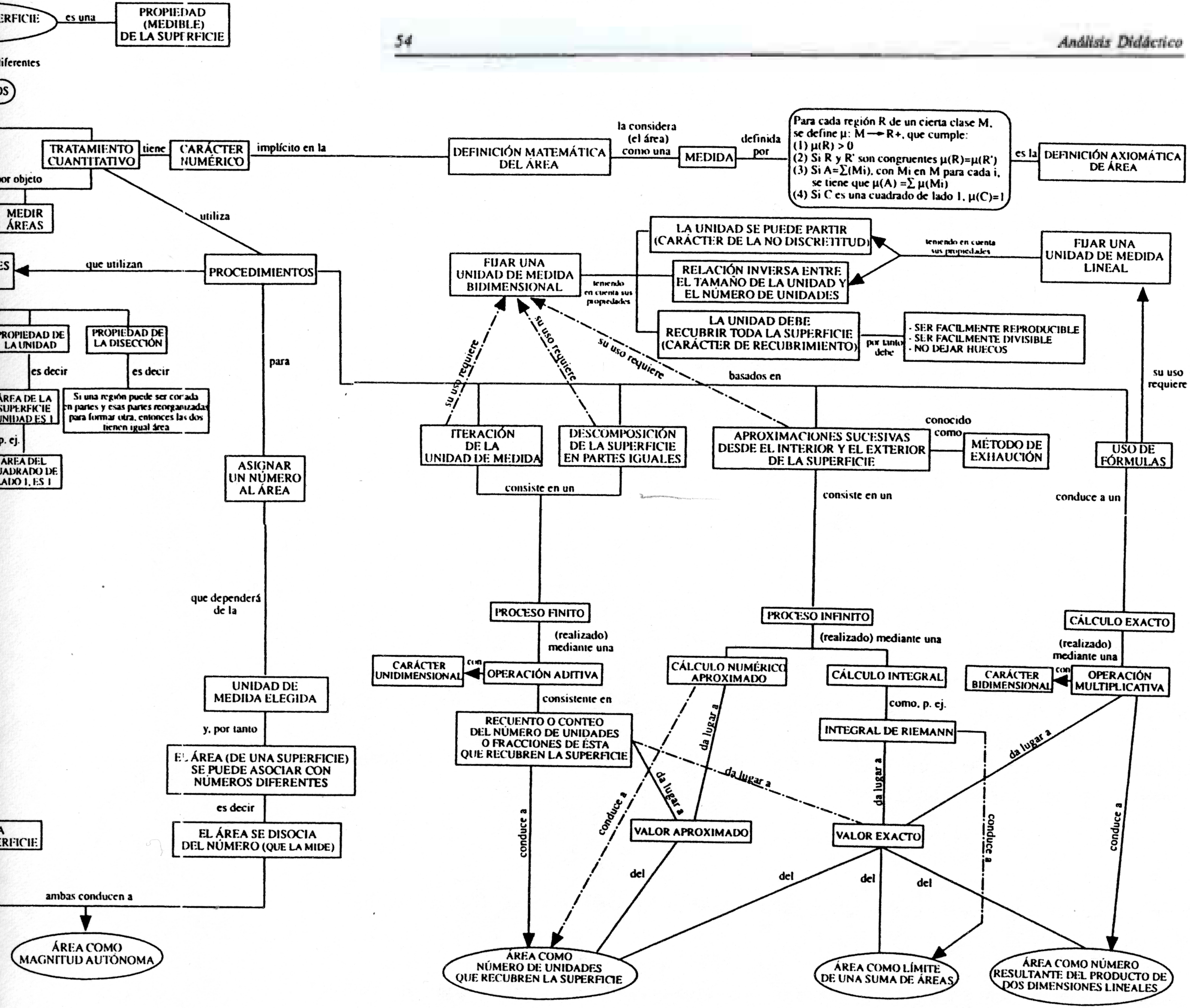
además

δ) Los números del área están totalmente determinados numéricamente cuando conocemos el área asignada a uno de los dominios.

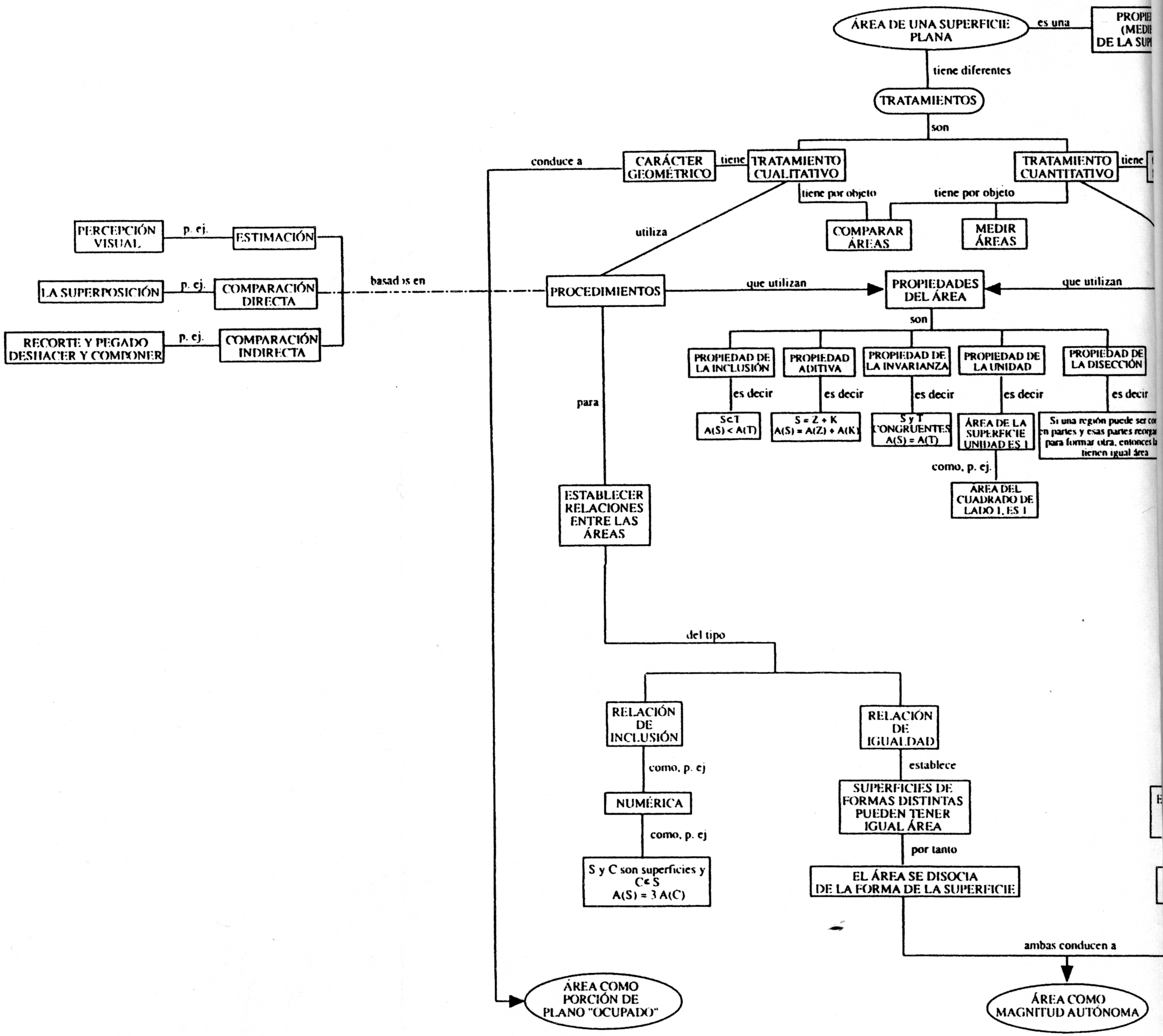
(En realidad, δ es sólo usada manifiestamente, y ciertas precauciones lingüísticas insignificantes -que consisten sólo en hablar de "un" área en vez de hablar de "el" área- hacen posible prescindir de δ).

2.5. MAPA CONCEPTUAL DEL ÁREA

A continuación mostramos un mapa conceptual en el que hemos intentado presentar de forma clara, resumida y esquemática una visión global del análisis didáctico del concepto de área expuesto anteriormente. Éste ha sido diseñado con objeto de exponer principalmente las diferentes interpretaciones del área y los distintos "caminos" que conducen a ellas, proporcionando indirectamente orientación acerca de la instrucción que se debería seguir.



ERFICIE
es una
PROPIEDAD (MEDIBLE) DE LA SUPERFICIE
iferentes
OS
TRATAMIENTO CUANTITATIVO
tiene
CARÁCTER NUMÉRICO
implícito en la
DEFINICIÓN MATEMÁTICA DEL ÁREA
la considera (el área) como una
MEDIDA
definida por
Para cada región R de un cierta clase M, se define μ: M → R+, que cumple:
(1) μ(R) > 0
(2) Si R y R' son congruentes μ(R)=μ(R')
(3) Si A=Σ(Mi), con Mi en M para cada i, se tiene que μ(A) = Σ μ(Mi)
(4) Si C es una cuadrado de lado 1, μ(C)=1
es la
DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE ÁREA
or objeto
MEDIR ÁREAS
utiliza
ES
que utilizan
PROCEDIMIENTOS
FIJAR UNA UNIDAD DE MEDIDA BIDIMENSIONAL
teniendo en cuenta sus propiedades
LA UNIDAD SE PUEDE PARTIR (CARÁCTER DE LA NO DISCRETITUD)
RELACIÓN INVERSA ENTRE EL TAMAÑO DE LA UNIDAD Y EL NÚMERO DE UNIDADES
LA UNIDAD DEBE RECUBRIR TODA LA SUPERFICIE (CARÁCTER DE RECUBRIMIENTO)
por tanto debe
- SER FACILMENTE REPRODUCIBLE
- SER FACILMENTE DIVISIBLE
- NO DEJAR HUECOS
teniendo en cuenta sus propiedades
FIJAR UNA UNIDAD DE MEDIDA LINEAL
PROPIEDAD DE LA UNIDAD
PROPIEDAD DE LA DISECCIÓN
es decir
es decir
ÁREA DE LA SUPERFICIE UNIDAD ES 1
Si una región puede ser cortada en partes y esas partes reorganizadas para formar otra, entonces las dos tienen igual área
p. ej.
ÁREA DEL CUADRADO DE LADO 1, ES 1
para
su uso requiere
su uso requiere
su uso requiere
basados en
su uso requiere
ITERACIÓN DE LA UNIDAD DE MEDIDA
DESCOMPOSICIÓN DE LA SUPERFICIE EN PARTES IGUALES
APROXIMACIONES SUCESIVAS DESDE EL INTERIOR Y EL EXTERIOR DE LA SUPERFICIE
conocido como
MÉTODO DE EXHAUCIÓN
USO DE FÓRMULAS
ASIGNAR UN NÚMERO AL ÁREA
consiste en un
consiste en un
conduce a un
que dependerá de la
PROCESO FINITO
PROCESO INFINITO
CÁLCULO EXACTO
(realizado) mediante una
(realizado) mediante una
(realizado) mediante una
CARÁCTER UNIDIMENSIONAL
con
OPERACIÓN ADITIVA
CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO
CÁLCULO INTEGRAL
CARÁCTER BIDIMENSIONAL
con
OPERACIÓN MULTIPLICATIVA
UNIDAD DE MEDIDA ELEGIDA
consistente en
como, p. ej.
RECUENTO O CONTEO DEL NÚMERO DE UNIDADES O FRACCIONES DE ÉSTA QUE RECUBREN LA SUPERFICIE
INTEGRAL DE RIEMANN
y, por tanto
EL ÁREA (DE UNA SUPERFICIE) SE PUEDE ASOCIAR CON NÚMEROS DIFERENTES
da lugar a
da lugar a
da lugar a
da lugar a
da lugar a
es decir
conduce a
conduce a
conduce a
conduce a
A
ERFICIE
EL ÁREA SE DISOCIA DEL NÚMERO (QUE LA MIDE)
VALOR APROXIMADO
VALOR EXACTO
del
del
del
del
ambas conducen a
ÁREA COMO MAGNITUD AUTÓNOMA
ÁREA COMO NÚMERO DE UNIDADES QUE RECUBREN LA SUPERFICIE
ÁREA COMO LÍMITE DE UNA SUMA DE ÁREAS
ÁREA COMO NÚMERO RESULTANTE DEL PRODUCTO DE DOS DIMENSIONES LINEALES



ÁREA DE UNA SUPERFICIE PLANA
es una
tiene diferentes
TRATAMIENTOS
son
conduce a
CARÁCTER GEOMÉTRICO
tiene
TRATAMIENTO CUALITATIVO
TRATAMIENTO CUANTITATIVO
tiene
tiene por objeto
tiene por objeto
COMPARAR ÁREAS
MEDIR ÁREAS
utiliza
PERCEPCIÓN VISUAL
p. ej.
ESTIMACIÓN
LA SUPERPOSICIÓN
p. ej.
COMPARACIÓN DIRECTA
RECORTE Y PEGADO DESHACER Y COMPONER
p. ej.
COMPARACIÓN INDIRECTA
basados en
PROCEDIMIENTOS
que utilizan
PROPIEDADES DEL ÁREA
que utilizan
son
PROPIEDAD DE LA INCLUSIÓN
PROPIEDAD ADITIVA
PROPIEDAD DE LA INVARIANZA
PROPIEDAD DE LA UNIDAD
PROPIEDAD DE LA DISECCIÓN
es decir
es decir
es decir
es decir
es decir
S⊂T A(S) < A(T)
S = Z + K A(S) = A(Z) + A(K)
S y T CONGRUENTES A(S) = A(T)
ÁREA DE LA SUPERFICIE UNIDAD ES 1
como, p. ej.
ÁREA DEL CUADRADO DE LADO 1, ES 1
para
ESTABLECER RELACIONES ENTRE LAS ÁREAS
del tipo
RELACIÓN DE INCLUSIÓN
como, p. ej
NUMÉRICA
como, p. ej
S y C son superficies y C⊂S A(S) = 3 A(C)
RELACIÓN DE IGUALDAD
establece
SUPERFICIES DE FORMAS DISTINTAS PUEDEN TENER IGUAL ÁREA
por tanto
EL ÁREA SE DISOCIA DE LA FORMA DE LA SUPERFICIE
ambas conducen a
ÁREA COMO PORCIÓN DE PLANO "OCUPADO"
ÁREA COMO MAGNITUD AUTÓNOMA

Esperamos haber conseguido mostrar la existencia de diferentes componentes en el concepto de área, de que ésta puede tener distintos enfoques según las características de los procedimientos utilizados en la comparación y cálculo de áreas y de que estos últimos conducen a los alumnos a concepciones diferentes sobre el área que se complementan entre sí, siendo algunas de ellas necesarias para poder abordar el estudio de alguna otra.

Todo ello pone de manifiesto la gran riqueza del concepto de área que contrasta con la gran pobreza y ligereza con la que es tratada habitualmente en la enseñanza por los profesores y por los libros de texto, quedando justificado de ese modo el alto grado de incomprensión que de ella poseen los estudiantes, como se recoge de los resultados de las distintas investigaciones ya mostrados en el capítulo anterior y de los obtenidos en nuestra investigación que se presentan en el próximo capítulo.

Para nosotros todo lo anterior tiene una consecuencia directa en la enseñanza del concepto de área en los distintos niveles educativos, que pasamos a comentar inmediatamente.

2.6. ALGUNAS SUGERENCIAS PARA LA ENSEÑANZA

Si bien es cierto que existen dos interpretaciones que por su elevado contenido matemático están directamente ligadas a un determinado nivel educativo, como sería el caso de la Integral de Riemann, que no debería ser presentada a los estudiantes hasta después de finalizada la enseñanza secundaria obligatoria, y el de la definición axiomática del área, que sólo deberá ser abordada en el nivel universitario, pensamos que no es conveniente asociar las otras interpretaciones con determinados estadios educativos. Por el contrario, sería acertado presentar diferentes enfoques del área en un mismo nivel educativo con el objetivo de enriquecer el campo de conocimiento de los alumnos.

Considerando las características de los distintos procedimientos ya expuestos anteriormente y la dificultad que sus usos pueden ocasionar a los alumnos, realizamos una propuesta acerca del tipo de procedimientos que podrían ser abordados en los distintos niveles educativos, como sugerencia y con el único objetivo de orientar, sin que ello pretenda ser en ningún caso una secuencia fija de aprendizaje.

Enseñanza Primaria

- Tratamiento cualitativo del área.
- Iniciación de un tratamiento cuantitativo a partir de:
  - Procedimientos basados en la iteración de la unidad y consistentes, en un primer momento en un proceso en el que el alumno itere la unidad física, y posteriormente una representación de ella, y tal vez los basados en la descomposición de la superficie en partes iguales.
  - La estimación del área de una superficie utilizando aproximaciones desde el interior de ésta.

Enseñanza Secundaria Obligatoria

- Tratamiento cualitativo del área.
- Tratamiento cuantitativo del área a partir de:
    - Procedimientos consistentes en un proceso finito, como son la iteración de la unidad verdadera (unidad física) de área y de representaciones de ésta, y/o la descomposición de la superficie en partes iguales.
    - La estimación del área de una superficie utilizando aproximaciones desde el interior y/o exterior de ésta.
    - La utilización de fórmulas para el cálculo de las áreas.

Enseñanza Secundaria Post-obligatoria. Bachilleratos

- Tratamiento cualitativo del área.
- Tratamiento cuantitativo del área mediante la Integral de Riemann.

Enseñanza Universitaria

- Tratamiento cuantitativo del área a partir de la definición axiomática del área.

A continuación mostramos los pasos que a nuestro entender se deberían seguir en un proceso de enseñanza del área que posibilitara al alumno un aprendizaje significativo de este concepto, independientemente del estadio educativo al que pertenezca:

- Introducir el concepto de área considerando las aplicaciones de este concepto, especialmente las que están presentes en el mundo real en el que viven los alumnos antes que en el de las matemáticas.

- Abordar el tratamiento cualitativo del área antes de abordar el cuantitativo.

- No abandonar los procedimientos geométricos durante el estudio de los procedimientos numéricos, sino por el contrario utilizarlos para simplificar las situaciones numéricas complejas, con el fin de determinar la medida del área de la forma más sencilla posible.

- Introducir el proceso de medida a partir del papel que juega la unidad de área en la medida.

- De entre los procedimientos de carácter numérico, introducir en primer lugar aquellos procedimientos que requieran la elección de una unidad de medida bidimensional, para en primer lugar realizar tareas de iteración de la unidad y posteriormente de partición de la superficie a medir en partes idénticas a la unidad escogida.

- Trabajar conjuntamente desde un tratamiento cualitativo y cuantitativo (antes del estudio de las fórmulas) la disociación del área de una superficie de su forma y del número que la mide.

- Estudiar de forma continuada e insistentemente la independencia entre el área y el perímetro de una superficie, especialmente a partir del análisis de la variación y/o conservación de estas dos propiedades cuando la superficie es sometida a determinadas transformaciones, planteadas tanto en un contexto geométrico como numérico.

- No introducir el uso de fórmulas para el cálculo de áreas antes de que los alumnos estén familiarizados con el área como número de unidades que recubren exactamente la superficie. Es necesario que el alumno comprenda previamente el proceso de medida. Sólo entonces estará en condiciones de comprender el papel y significado de las fórmulas.

- Desarrollar el estudio de las fórmulas para el cálculo de las áreas de paralelogramos, trapecios y triángulos a partir de la del rectángulo, y la del círculo a partir de la del triángulo.

- Estudiar en contextos geométricos el área de superficies planas, analizando los elementos de los que depende el área.

- Estudiar el carácter bidimensional de las fórmulas del área.

- Abordar cálculos aproximados de áreas mediante aproximaciones desde el interior y/o exterior de la superficie como entrada a los procesos infinitos y al cálculo integral, y para deducir la fórmula del área del círculo a partir del área de los polígonos regulares.

CAPÍTULO 3

ETAPA DIAGNÓSTICA

3.1. INTRODUCCIÓN

Como ya se ha comentado en el capítulo 1, la práctica totalidad de las investigaciones consultadas sobre el área han sido realizadas en el extranjero, de ahí que uno de los principales deseos, no carente de una parte de curiosidad, que tuvimos cuando nos decidimos a iniciar la investigación que aquí nos ocupa, fue el poder disponer de la información suficiente que nos permitiera determinar el estado del tema en nuestro país. Información por otro lado imprescindible para el posterior diseño de una secuencia de aprendizaje del área, destinada a los alumnos de secundaria. Para tal fin se consideró necesario dedicar una parte de la investigación a una importante recogida de datos, que hemos denominado "etapa diagnóstica".

La información se obtuvo a partir del análisis de las respuestas dadas por 521 alumnos de los diferentes niveles educativos a los ítemes que constituían el test que se diseñó para tal fin.

En este capítulo se detalla el trabajo que se efectúo durante esta etapa en la que existen dos fases bien diferenciadas. Una primera consistente en la recogida de datos, que se expone en las secciones 3.2. y 3.3., y una segunda en el análisis de éstos y extracción de conclusiones, que se muestra en las 3.4. y 3.5. La primera requirió del diseño y elaboración de un test, de la selección de la muestra de alumnos con los que se llevaría a cabo el estudio, y de la posterior administración del test. Durante la segunda se realizó un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes ayudados del paquete de técnicas estadísticas SPSS/PC+, y se llevaron a cabo entrevistas con algunos alumnos seleccionados, con el fin de colaborar en el análisis cualitativo de algunos tipos de respuestas dadas por los alumnos.

3.2. OBJETIVOS

En este apartado se comentan los objetivos generales planteados en esta etapa, así como el tipo de información que se pretendía obtener de la administración del test y, se especifican los aspectos concretos del área que se sometieron a estudio, indicando los ítemes que se refieren a cada uno de ellos.

3.2.1. OBJETIVOS DE LA ETAPA DIAGNÓSTICA

La etapa diagnóstica tenía como objetivo:

- Determinar el grado de comprensión de los estudiantes del concepto de área al final de los siguientes niveles educativos: Educación General Básica (E.G.B.), enseñanza media (Bachillerato Unificado Polivalente (B.U.P.), y Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.)) y Universidad (Licenciatura de Matemáticas y Diplomatura de profesor de Educación General Básica).

  Nota.- Con objeto de identificar del modo más sencillo y claro posible los niveles educativos, en alguna ocasión y a lo largo de la exposición del trabajo en esta memoria, nos hemos referido al nivel de E.G.B. como primaria, y al de enseñanza media como secundaria.

- Estudiar si la comprensión de los estudiantes experimenta una evolución en relación a los diferentes niveles educativos.

- Determinar qué aspectos del concepto de área y qué herramientas de medida deberían reforzarse en secundaria. Información ésta que permitirá el diseño de una secuencia de aprendizaje que perfeccione la comprensión del concepto de área en este nivel educativo.

Al plantearnos el estudio de la comprensión que poseen los estudiantes del concepto de área en los diferentes niveles educativos, pensamos que, además de los conocimientos específicos que los estudiantes posean sobre el área, hay otras dos variables que podían influir en ella: la madurez humana y la matemática que los estudiantes van adquiriendo a lo largo de su vida académica.

Esto nos llevó a plantearnos en el inicio de esta etapa de la investigación la siguiente *hipótesis*:

> Aún siendo similares los conocimientos de geometría plana -y en particular sobre el área- que poseen los estudiantes en los diferentes estadios educativos (puesto que en la dinámica escolar actual estos conocimientos se enseñan sólo en primaria), esperamos observar una gradual mejora de la comprensión del concepto de área, con mejores resultados en la resolución de problemas relativos a este concepto, conforme los estudiantes va evolucionando a lo largo de los distintos niveles educativos, como consecuencia del desarrollo de su formación, tanto humanista como matemática.

3.2.2. OBJETIVO Y CONTENIDO DEL TEST

Con el fin de poder determinar el grado de comprensión de los alumnos sobre el área, consideramos oportuno recabar información, mediante la administración de un test, acerca de:

- sus conocimientos y
- sus errores y dificultades más frecuentes sobre diferentes aspectos del área y conceptos relacionados con ésta, así como información sobre:

- los procedimientos empleados normalmente por los estudiantes en la resolución de problemas consistentes en tareas de comparación y medida de áreas.

El hecho de que el test debía ser el mismo para todos los alumnos independientemente del nivel educativo al que pertenecieran, condicionó el contenido de los ítemes así como la presentación y redacción de éstos. De todos los ítemes que constituyen el test, sólo dos de ellos requirieron de una presentación diferente en primaria, como más adelante se indicará.

Sin embargo en lo que respecta al contenido del test, fueron los estudios realizados y resultados obtenidos en las diferentes investigaciones consultadas, comentados en el capítulo 1, así como el análisis didáctico realizado y expuesto en el capítulo 2, los que jugaron un papel determinante en la concreción de los aspectos del área y los conceptos relacionadas con ella, a estudio.

Considerados estos factores, se procedió a la elaboración de un test cuyos ítemes proporcionaran información acerca de lo que los alumnos saben sobre:

- Las concepciones del área.
- La unidad de área.
- La conservación del área.
- La relación entre área y perímetro.
- La relación entre área y forma de una superficie.
- La bidimensionalidad del área.
- Las fórmulas para el cálculo de áreas.
- El significado geométrico del teorema de Pitágoras.
- El papel de la percepción visual en la comparación de áreas.
- La relación existente entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la de un rectángulo.
- Los procedimientos utilizados en la comparación y medida de áreas.
- La conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones.

De la relación anterior puede deducirse el carácter ambicioso de la etapa diagnóstica, consistente tal vez en un estudio en exceso exhaustivo como resultado de nuestro deseo de recoger la mayor información posible acerca de los conocimientos de los alumnos y de su forma de proceder. Ello supuso el diseño de un test que, reconocemos, resultó demasiado largo, lo que provocó en alguna ocasión cansancio en determinados alumnos, a los que -tuvimos que animar para que finalizaran con tranquilidad el test. Pensamos que el estudio que nos planteamos en un principio fue excesivo y/o en algún caso innecesario. Concretamente, el estudio del conocimiento que poseen los alumnos sobre el significado geométrico del teorema de Pitágoras es totalmente irrelevante para determinar el grado de comprensión que poseen sobre el área. Así pues, dado que este estudio no proporciona una información relevante y el único motivo de considerarlo fue la curiosidad de saber si los alumnos lo conocen o no, el ítem correspondiente podría ser suprimido en un futuro test. Por otra parte, tras la administración del test y el análisis de las respuestas se pudo comprobar la no idoneidad de algunos de los ítemes, como más adelante se explica con detalle en el apartado 3.3.5.2.

Precisamente el factor tiempo fue el determinante de la división del test en dos partes ante el temor de que los alumnos no dispusieran del tiempo necesario para su resolución en una única sesión. Las dos partes del test, las denominamos test1 y test2.

Dado que se desconocían las condiciones de las que se iban a disponer para la administración del test y cabía la posibilidad de pasar a un mismo grupo de estudiantes el test1 y test2 en días diferentes, se decidió seleccionar los ítemes que debían constituir cada una de estas partes de manera que el test1 no proporcionara a los alumnos información relevante sobre el posible contenido de los otros ítemes y de modo que cualquier consulta que pudiera realizar un alumno "curioso" durante el período que separara la realización de los dos tests, no pudiera condicionar o falsear su respuesta a los ítemes del test2.

En el test1 se incluía una pregunta en la que se pedía al alumno que explicara qué era para él el área de una superficie plana y contenía los ítemes que hacían referencia a las fórmulas de cálculo del área de las figuras más habituales y la práctica totalidad de los problemas. En total constaba de 8 ítemes, distribuidos en 4 páginas. El test2 contenía 28 ítemes presentados en 16 páginas. Un ejemplar completo del test se adjunta en Anexo 1 de esta memoria.

A continuación indicamos los ítemes que aportan información sobre cada uno de los aspectos indicados anteriormente y que constituyen el contenido del test. En lo sucesivo nos referiremos a cada uno de los ítemes mediante un código consistente en dos números separados por un punto, de manera que el primero indica la parte del test al que pertenece y el segundo el número del ítem.

Concepción del área

ítem 1.1

Unidad de medida

- Importancia del papel de la unidad en el proceso de medida:
  ítem: 1.2; 1.3; 1.5; 1.7; 1.8; 2.9.

- Uso y reconocimiento de las unidades estándares y no estándares de medida:
  ítem: 1.2; 1.3; 1.5; 1.7; 2.25.

- Carácter de no discretitud de la unidad de medida:
  ítem: 2.6; 2.20.

(El ítem 2.20, como se explica en la sección 3.3.5.2., fue excluído del análisis al comprobar que no medía aquello para lo que fue diseñado)

- Carácter de recubrimiento de la unidad de medida:
  ítem: 1.3; 1.5; 1.7; 2.6; 2.9; 2.10.

- Relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de unidades que recubren la superficie.
  ítem: 2.10; 2.11.

Conservación del área

- Por recorte y pegado:
  ítem: 2.3; 2.4.

- Por deslizamiento de un vértice sobre una línea paralela a la base:
  ítem 2.22.

Relación entre área y perímetro

- Confusión conceptual entre área y perímetro:
  ítem: 1.1; 1.4.

- Confusión operacional entre área y perímetro:
  ítem: 1.2; 1.4.

- Relación entre el área y el perímetro, en una modificación de:
  · menor área y mayor perímetro:
  ítem 2.2.
  · menor área e igual perímetro:
  ítem 2.14.

Relación entre área y forma de una superficie

ítem 2.8.

Bidimensionalidad del área

- Relación entre la medida del área de una figura y sus dimensiones lineales cuando:
  · se modifican las dimensiones lineales:
  ítem: 2.15; 2.16; 2.17; 2.18; 2.19.
  · se modifica el área:
  ítem: 2.7; 2.12.

- Carácter dimensional de las fórmulas:
  ítem 2.21.

Fórmulas para el cálculo de áreas

- Conocimiento de las fórmulas para el cálculo de las áreas de las figuras más elementales (rectángulo, círculo, triángulo, paralelogramo y cuadrado):
  ítem: 1.2; 1.4.

- Comprensión del significado de la fórmula para el cálculo del área de un triángulo:
  ítem: 1.2.3; 2.5; 2.13; 2.22.

Significado geométrico del teorema de Pitágoras

ítem 2.24.

Papel de la percepción visual en la comparación de áreas

ítem 2.1.

Relación entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la de un rectángulo

ítem: 2.26; 2.27; 2.28.

Procedimientos utilizados en la resolución de problemas

- Naturaleza geométrica:
  ítem 1.6.

- Naturaleza numérica:
  ítem: 1.3; 1.4; 1.5; 1.7; 1.8.

  Para la resolución de los problemas correspondientes a los ítemes 1.5, 1.7 y 1.8 pueden combinarse procedimientos numéricos con geométricos, de modo que éstos últimos simplifican considerablemente el cálculo del área de la superficie plana dada.

En el cuadro siguiente se han clasificado los distintos problemas según determinadas variables, y así de forma resumida proporcionar información sobre el conjunto de todos ellos con el fin de apreciar las similitudes y diferencias que existen entre unos y otros.

número de ítem	la figura viene dada		la figura no viene dada	tipo de superficie		naturaleza de los procedimientos que requieren para su resolución			problema habitual en la enseñanza del área
	sobre papel cuadriculado	sobre papel blanco		no poligonal	poligonal	geométrico	numérico		
							sólo numérico	numérico combinado con uno geométrico	
1.3									últimos cursos de secundaria
1.4									sí
1.5									no
1.6									no
1.7									no
1.8									sí

Nota.-
(1) versión del ítem para los alumnos de 8° de E.G.B.
(2) versión del ítem para los alumnos de B.U.P. y Universidad.

Conservación y/o variación del área y/o del perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones

- Recorte y pegado:
  ítem: 2.3; 2.4.

- Deslizamiento de un vértice sobre una línea paralela a la base, transformación que conserva el área pero no el perímetro.
  ítem 2.22.

- Abatimiento de un lado, transformación que conserva el perímetro pero no el área.
  ítem 2.23.

En el siguiente cuadro se presenta de forma conjunta toda la información detallada anteriormente acerca de la información que cada uno de los ítemes que constituyen el test proporcionan sobre los distintos aspectos del área estudiados.

Ítemes	concepción área	unidad de medida	conservación del área	relación entre el área y el perímetro	relación entre el área y la forma	bidimensionalidad del área	fórmulas para el cálculo de áreas	significado geométrico del T. Pitágoras	papel de la percepción visual	procedimiento utilizado en la resolución de problemas	conservación y/o variación del área y/o el perímetro	relación entre el área de un rectángulo con la de otros cuadriláteros
1.1	■			■								
1.2		■		■			■					
1.3		■								■		
1.4				■			■			■		
1.5		■								■		
1.6										■		
1.7		■								■		
1.8		■								■		
2.1									■			
2.2				■								
2.3			■								■	
2.4			■								■	
2.5							■					
2.6		■										
2.7						■						
2.8					■							
2.9		■										
2.10		■										
2.11		■										
2.12						■						
2.13							■					
2.14				■								
2.15						■						
2.16						■						
2.17						■						
2.18						■						
2.19						■						
2.20		■										
2.21						■						
2.22			■				■				■	
2.23											■	
2.24								■				
2.25		■										
2.26												■
2.27												■
2.28												■

Algunos de los ítemes del test, además de proporcionar información acerca de los distintos aspectos que acabamos de relacionar, fueron diseñados con el objeto de que suministraran datos sobre determinadas variables cuyo conocimiento pensamos podía colaborar en la interpretación de determinados comportamientos de los alumnos. Detallar aquí esta información complementaria resultaría repetitivo e innecesario ya que de algún modo se muestra en el análisis de los resultados que se expone en la próxima sección 3.4. Como ejemplo citar aquí la intención de utilizar un rombo y un rectángulo en los ítemes 2.2 y 2.14 respectivamente, con el fin de observar el efecto que el empleo de figuras "regulares" en definiciones o en transformaciones, puede tener en las respuestas dadas por los alumnos.

También consideramos relevante comentar que algunos de los ítemes del test fueron diseñados no por la información que por si solos pudieran suministrar, sino para preparar el terreno de otros ítemes, como sucede con el 2.15 y 2.16, o bien para interpretar alguna de las respuestas dadas por los alumnos a otros ítemes, como ocurre por ejemplo con el ítem 2.12. Igualmente deseamos explicar que algunos de los ítemes fueron diseñados de manera que la información que recabaran se complementara entre si. Así por ejemplo las respuestas dadas por un alumno a los ítemes 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 y 2.21 permitiría determinar su grado de comprensión sobre el carácter bidimensional del área.

3.3. METODOLOGÍA DE TRABAJO

3.3.1. DISEÑO DEL TEST

El test que fue administrado a la totalidad de estudiantes integrantes de la muestra y como ya hemos comentado puede consultarse en el Anexo 1 de esta memoria, corresponde a la tercera redacción de un primer test que fue diseñado y sucesivamente cribado a partir de una experiencia piloto que tuvo lugar durante los meses de diciembre de 1992 y enero de 1993.

La experiencia piloto tuvo por objeto:

- Comprobar que la redacción así como el contenido de los ítemes eran adecuados tanto para los alumnos de 8º de E.G.B., como para los de B.U.P. y C.O.U., y los de Universidad.

- Confirmar que los ítemes respondían a los objetivos para los que habían sido diseñados.

- Determinar el tiempo aproximado que los alumnos de los diferentes niveles educativos requerían para la resolución del test.

En esta experiencia colaboraron los estudiantes de 8º de E.G.B. del Colegio Público Vicente Blasco Ibañez de Valencia (de edades comprendidas entre los 13 y 14 años) y de 2º de

Formación Profesional de 2º Grado (2º F.P.2) (de edades comprendidas entre los 18 y 21 años) de la especialidad de electrónica del Instituto de Formación Profesional de Alfafar. Éste último curso fue escogido como representante de secundaria por ser más accesible para realizar la prueba que uno de B.U.P.

El primer test diseñado se administró al grupo de 2º de F.P.2, y a un ingeniero técnico industrial. Los comentarios y propuestas realizadas por estos alumnos así como el estudio de sus respuestas, aconsejaron algunos cambios. El test retocado se administró posteriormente a los alumnos de 8º de E.G.B. y a cuatro graduados universitarios: un ingeniero superior industrial, un ingeniero de montes, un licenciado en informática y un licenciado en matemáticas. Tras el análisis de esta segunda experimentación se procedió a la confección de un tercer test que resultó ser el definitivo y el que se administró a los alumnos que iban a participar en el estudio.

Para la elaboración de este test se utilizaron algunos ítemes extraídos de otras investigaciones y trabajos, bien respetando su redacción original, o bien adaptándolos. Los restantes ítemes son originales de esta investigación.

En el test se alternan los ítemes de respuesta múltiple con los de respuesta abierta, correspondiendo generalmente estos últimos a los problemas. Se optó por el diseño de ítemes de respuesta múltiple siempre que la situación planteada lo permitiera, con el fin de facilitar la recogida de respuestas dadas por los alumnos y en consecuencia su codificación.

Si bien el test que se diseñó y se administró a los alumnos seleccionados fue el mismo independientemente del nivel educativo al que pertenecieran, es importante señalar que se consideró oportuno realizar versiones diferentes -en cuanto a su formato se refiere- de los ítemes 1.3 y 1.5 según estuvieran dirigidos a alumnos de 8º de E.G.B. o al resto de estudiantes. Los ítemes 1.3 y 1.5 fueron los dos únicos de todo el test que tuvieron presentaciones diferentes según el nivel educativo de los alumnos. En el ítem 1.3 a los alumnos de E.G.B. se presentó la superficie no poligonal sobre papel cuadriculado, mientras que al resto de los estudiantes, además de lo anterior, se les proporcionó la ecuación de la parábola y los ejes coordenados. Por otro lado, mientras que a los alumnos de 8º de E.G.B. se les dio dibujado el cuadrilátero del ítem 1.5, a los demás tan sólo se les facilitaron las coordenadas de los vértices. Respecto a esta última diferencia y una vez finalizada la investigación debemos señalar que la consideramos totalmente innecesaria e incluso inadecuada, ya que a diferencia de lo que pensábamos no introduce ningún factor diferente relativo al área, ocasionando únicamente molestias a los alumnos, en cuanto que origina un enunciado del problema más largo y en consecuencia les reclama mayor atención, e incomoda a algunos de ellos, especialmente a los de 2º de B.U.P. al tener que representar coordenadas de puntos.

3.3.2. ELECCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

Selección de los cursos participantes en la experiencia

Los cursos que fueron escogidos para participar en el estudio fueron:

- 8º de E.G.B. Último curso de E.G.B.
- 2º de B.U.P. Último curso de enseñanza común de B.U.P., sin especialidades.
- C.O.U., tanto de la especialidad de letras (C.O.U.-L) como de la de ciencias (C.O.U-C). Último curso de enseñanza media.
- 3º de la Escuela de Magisterio (3º E.M.). Último curso de la diplomatura de profesor de E.G.B.
- 5º de la Facultad de Matemáticas (5º F.M.). Último curso de la licenciatura de Matemáticas.

Como puede observarse, todos ellos corresponden a los cursos terminales de los distintos estadios educativos, primaria, secundaria y Universidad, salvo el curso de 2º de B.U.P. Dos fueron las causas que motivaron su inclusión en la experiencia. Por un lado se trata de un curso intermedio en la secundaria y por otro es un curso frontera entre la enseñanza común para todos los estudiantes y la enseñanza especializada que comienza en 3º de B.U.P. con la opcionalidad entre ciencias o letras.

También se consideró interesante incluir en la muestra a alumnos de C.O.U. de *Letras* con objeto de poder valorar el efecto que la madurez y formación humanista de estos alumnos, independientemente de su formación matemática, podía tener en una mejora de su comprensión sobre el concepto de área y de ese modo comprobar el grado de validez de nuestra hipótesis planteada al inicio de esta etapa. Por otra parte se pensó conveniente incluir en el estudio a los alumnos de 3º de Magisterio ya que ellos serían los futuros profesores de matemáticas de enseñanza primaria, junto con los de 5º de Matemáticas, los futuros profesores de secundaria.

Selección de la muestra

La primera decisión que se adoptó fue la de limitarse a los Colegios e Institutos Públicos de la ciudad de Valencia con el fin de reducir la población a estudio, ya que si bien la situación geográfica del centro es una variable que podría influir en los resultados, el estudio se complicaría en exceso, marcando incluso objetivos diferentes.

Posteriormente se procedió a determinar el tamaño de la población con objeto de determinar el modo de elegir la muestra y el tamaño de ésta. Para ello se inició un proceso de búsqueda de información para el que fue necesario contactar con el organismo responsable de la escolarización de la Consejería de Cultura, Educación y Ciencia de la Generalidad de Valencia, con la secretarías de la Facultad de Matemáticas y Escuela de Magisterio de Valencia, así como con algún Instituto y Colegio Público. A continuación mostramos un cuadro con los datos globales, referidos al curso escolar 1992-93 y a la ciudad de Valencia, que creemos pueden resultar interesantes para poder valorar la representatividad de la muestra con la que se ha trabajado.

	número de centros públicos	número de alumnos matriculados
Educación General Básica	78	
8° de E.G.B.		4.179
Enseñanza media	22	
2° de B.U.P.		4.718
C.O.U. de Letras		2.148
C.O.U. de Ciencias		3.222
Escuela de Magisterio	1	
3° de Ciencias		118
Facultad de Matemáticas	1	
5° de Matemáticas		138

Una vez en posesión de esta información y asesorados en todo momento por profesores del departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Matemáticas de Valencia, se decidió proceder a la elección de centros mediante un muestreo aleatorio que no tuvo en cuenta el número de alumnos matriculados en cada centro.

Respecto al tamaño de la muestra, ésta sólo dependía de la capacidad de la investigadora de abordar mayor o menor número de alumnos. Así pues, y con el fin de garantizar siempre la elección aleatoria de los centros, se fue administrando el test en cada uno de ellos respetando rigurosamente el orden que éstos habían obtenido en el sorteo.

Participaron en la experiencia, 4 Centros Públicos de E.G.B., 4 Institutos de Enseñanza Media, la Escuela de Magisterio y la Facultad de Matemáticas. En cada uno de estos centros se escogió un grupo de cada uno de los cursos a estudio. Esta elección fue realizada fundamentalmente por la dirección de cada centro, considerando los condicionamientos del horario de los alumnos. En la Escuela de Magisterio se administró el test a los dos grupos que constituían el curso de 3° de la especialidad de Ciencias. La distribución de los alumnos encuestados es la siguiente:

nivel educativo: E.G.B.			
Centros participantes	curso	edad	nº alumnos
Ballester Fandos	8º	13-14	32
Lluís Guarner	8º	13-14	24
Niño Jesús	8º	13-14	24
Rodríguez Fornós	8º	13-14	22
total: 102			

nivel educativo: Enseñanza media						
Centros participantes	2º B.U.P.		C.O.U-L		C.O.U-C	
	edad	nº alumnos	edad	nº alumnos	edad	nº alumnos
I. de Campanar	15-16	34	17-18	21	17-18	23
I. Font de Sant Lluís	15-16	36	17-18	31	17-18	28
I. Sant Vicent Ferrer	15-16	29	17-18	31	17-18	36
I. Antic Regne	15-16	32	17-18	19	17-18	23
	total: 131		**total: 102**		**total: 110**	

nivel educativo: Universidad				
Centros participantes	curso	especialidad	edad	nº alumnos
Escuela de Magisterio	3º	Ciencias	20-22	44
Facultad de Matemáticas	5º	Investigación Operativa	22-24	32
total: 76				

total de alumnos encuestados: 521

3.3.3. ADMINISTRACIÓN DEL TEST

Para la administración del test se solicitó y se contó con la colaboración del/de la responsable de la Jefatura de Estudios de los distintos Centros de primaria y secundaria. En el nivel universitario se contactó directamente con algunos de los profesores de los grupos implicados. Las soluciones dadas en cada Centro escolar fueron distintas, pero todas ellas posibilitaron la administración del test a los distintos grupos en una única sesión de aproximadamente dos horas a excepción del Instituto de Campanar donde esto no fue posible, circunstancia que como ya se ha comentado anteriormente se había previsto, por lo que a los alumnos de este Instituto se les administró el test en dos sesiones distintas, en días consecutivos.

No consideramos necesario establecer un período del curso escolar en el que se debiera administrar el test a los estudiantes, de ahí que las fechas fueran fijadas por los distintos Centros escolares. Sin embargo se les solicitó que no fuera hacia final de curso con el fin de poder disponer del tiempo suficiente tras la corrección de todos los tests, para entrevistar a un número determinado de alumnos seleccionados de los distintos niveles educativos. A los estudiantes de enseñanza media y Universidad se les administró el test durante el segundo trimestre de curso escolar 92-93 y a los de 8º de E.G.B. durante el tercer trimestre.

Se veló por que las condiciones en las que el test fuera administrado a la totalidad de estudiantes fueran similares. Esto fue posible dado que la administración a todos los alumnos de la muestra fue realizada siempre personalmente por la investigadora. Especialmente se cuidó que el tiempo total dado para la resolución del test completo y en consecuencia los tiempos parciales otorgados para las distintas partes (test1 y test2) fuera el mismo, y que las instrucciones y aclaraciones dadas a los estudiantes fueran similares en todos los casos.

En primer lugar se les explicaba a los alumnos el objetivo de la investigación y la importancia que en ella tenía su colaboración, que una vez más queremos agradecer desde aquí, comentándoles el carácter voluntario de la participación y nunca obligatoria en contra de su voluntad. Se les garantizaba el anonimato de los resultados y se les daba la posibilidad de utilizar un seudónimo o mote en lugar de sus nombres auténticos. Una vez finalizados los comentarios generales introductorios se les proporcionaba el test1, para el que se les daba media hora de tiempo para su resolución. Transcurrido este período se procedía a repartir el test2, recogiendo el primero a aquellos alumnos que lo habían finalizado y ampliando a diez minutos el tiempo destinado a acabar el test1. Transcurridos éstos se procedía a la retirada definitiva del test1, debiendo centrarse los alumnos en la resolución del test2, para el que disponían de una hora, tiempo que generalmente no agotaban. Tras la recogida del test1 y para la resolución del test2, se les proporcionó a los alumnos en la práctica totalidad de los casos, las fórmulas para el cálculo del área de un triángulo y un rectángulo. Pensábamos que esta información podía posibilitar a algunos alumnos el afrontar determinados ítemes de esta segunda parte del test, sin que ello distorsionara las conclusiones que pudieran deducirse del análisis de sus respuestas.

Entre las instrucciones generales que se les dio a los estudiantes, se les indicó la importancia que tenía explicar los razonamientos que emplearan al responder los ítemes y se les animó a hacerlo. También se les pidió encarecidamente que todos respondieran al ítem 1.1, en el que se les preguntaba acerca de lo que entendían por área.

3.3.4. CORRECCIÓN DEL TEST

Para la corrección del test se procedió a la confección de una codificación que permitiera recoger de la forma más fiel posible las respuestas dadas por los alumnos. Con objeto de reducir el número de valores posibles para cada variable se realizó una agrupación de las respuestas dadas por los alumnos que como expertos consideramos similares. Codificación que puede consultarse en el Anexo 2 de esta memoria.

Se elaboró, para cada alumno, una hoja que constaba de 93 casillas en las que se indicaba el valor correspondiente a la codificación de cada una de las 87 variables cualitativas. Las cinco primeras variables, que requerían de 10 casillas, tenían por objeto identificar a cada estudiante e indicar el curso en el que cada alumno recordaba haber estudiado el concepto de área por última vez. Las 82 variables restantes, que precisaban de 83 casillas, se referían a las respuestas dadas por cada alumno en cada ítem. De ese modo, se creó un fichero de datos con las respuestas dadas por todos los alumnos de la muestra. Con el fin de realizar el análisis de datos, se utilizó el paquete comercial de técnicas estadísticas, llamado SPSS/PC+.

Además del estudio estadístico, durante la corrección de los tests de un mismo grupo se procedía a un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los alumnos, seleccionando algunas de ellas curiosas, sorprendentes o interesantes (algunas de las cuales se muestran en esta memoria), detectando respuestas contradictorias dadas por un mismo alumno en ítemes diferentes pero complementarios y observando respuestas erróneas similares entre los alumnos a un mismo ítem. Este estudio fue decisivo para la selección de los alumnos a los que se debería entrevistar.

3.3.5. ENTREVISTAS

Durante la corrección del test se observaron determinados tipos de respuestas dadas por algunos alumnos a determinados ítemes, que resultaban verdaderamente difíciles de interpretar. También y como consecuencia del modo de proceder de una mayoría de los alumnos en ítemes específicos, se cuestionó el interés de éstos, por lo que se consideró oportuno someterlos a estudio. Por ello y aunque en un principio en la investigación no estaba previsto, se consideró conveniente, para realizar un correcto análisis de las respuestas, entrevistar a varios alumnos por curso, cuyas respuestas a determinados ítemes respondieran a unas características específicas, como más adelante se detalla. Así pues, las entrevistas tuvieron como *objetivo:*

- ayudar a interpretar algunos tipos de respuestas dados por los alumnos en determinados ítemes y,

- comprobar si determinados ítemes medían aquello para lo que habían sido diseñados.

A continuación se detallan la metodología utilizada para llevar a cabo las entrevistas, así como el contenido de éstas y las conclusiones que de ellas se pudieron extraer, en relación únicamente a la validación de los ítemes sometidos a estudio, ya que el resto de la información recabada durante las entrevistas ha sido utilizada para el análisis de los resultados, y por lo tanto se muestra en el apartado correspondiente de la próxima sección 3.4.

3.3.5.1. Metodología de trabajo

Una vez concretados los objetivos de las entrevistas se procedió a la selección de los alumnos de cada curso que se entrevistarían. En los niveles de primaria y enseñanza media se procedió en primer lugar a la selección del Centro escolar donde se llevarían a cabo las entrevistas. Para ello fue determinante la disponibilidad y grado de colaboración que demostraron los alumnos y las Direcciones de los Centros implicados. Finalmente los Centros escogidos fueron: el Colegio Público Niño Jesús y el Instituto de Campanar. En cada Centro, se escogieron aquellos alumnos cuyas respuestas dadas a los ítemes a estudio poseían las características que se muestran en el próximo apartado 3.3.5.2. Fueron entrevistados:

- 6 alumnos de 8º de E.G.B.
- 6 alumnos de 2º de B.U.P.
- 5 alumnos de C.O.U. de Letras.
- 4 alumnos de C.O.U. de Ciencias.
- 4 alumnos de 3º de la Escuela de Magisterio.
- 8 alumnos de 5º de la Facultad de Matemáticas.

Se realizaron entrevistas individuales a cada uno de los alumnos anteriores. Todas ellas fueron realizadas por la investigadora una vez finalizada la corrección de los tests, y grabadas en magnetofón (aunque por problemas técnicos, de algunas de ellas no se posee registro en cinta). Las entrevistas tuvieron una duración aproximada de 15 minutos, resultando un poco más largas las realizadas a los alumnos de 8º de E.G.B. como consecuencia de su timidez e inseguridad en sus razonamientos. Durante ellas se formuló a los alumnos preguntas directas acerca de sus respuestas a los ítemes seleccionados, principalmente con el fin de comprobar si actuaban del mismo modo a como lo hicieran cuando se les administró el test o procedían a rectificar o añadir algo, y de ese modo disponer de mayor información que nos permitiera interpretar mejor sus respuestas escritas. En cualquier caso, se cuidó de no introducir ninguna variable nueva a las consideradas en el test.

Con el fin de conseguir una homogeneidad entre todas ellas en cuanto al modo de realizarlas y a su contenido, se elaboró un guión semi-estructurado (que puede consultarse en el Anexo 3), que por un lado garantizara que a todos los alumnos se les iba a realizar las mismas preguntas y en el mismo orden y forma, y por otro, permitiera recoger de forma escueta las respuestas dadas por los alumnos. Este cuestionario no impidió que se introdujeran las modificaciones que en cada momento se consideraron oportunas.

El cuestionario se diseñó de modo que el entrevistador dispusiera de la respuesta dada por el alumno entrevistado a cada uno de los distintos ítemes a estudio, con objeto de poseer información acerca de las características del estudiante y así poder orientar mejor la conversación en cada caso.

3.3.5.2. Contenido de las entrevistas. Algunas conclusiones

A continuación pasamos a relacionar los ítemes que reclamaron nuestra atención y que finalmente se estudiaron en las entrevistas, y a exponer los motivos que nos condujeron a interesarnos por cada uno de ellos. En algunos de ellos comentamos las conclusiones a las que hemos llegado tras las entrevistas, pero sólo las que hacen referencia al interés del ítem a estudio.

ÍTEMES: 1.2; 1.3; 1.5; 1.7 Y 2.25. Cuando quisimos analizar los conocimientos que sobre las unidades de medida poseen los alumnos, nos encontramos con respuestas dadas por éstos a ítemes diferentes que resultaban contradictorias y que por lo tanto no sabíamos cómo interpretar. Era necesario comprender el significado de estas respuestas con el fin de poder explicar estos comportamientos de los alumnos. Así pues, se seleccionó en cada curso a algunos de los alumnos cuyas respuestas a éstos ítemes respondieran a situaciones como las siguientes:

- Alumnos que habían omitido la unidad de medida o habían dado unidades incorrectas en el ítem 1.2 y sin embargo, habían realizado correctamente la clasificación de unidades demandada en el ítem 2.25.

- Alumnos que habían dado correctamente las unidades en el ítem 1.2 y sin embargo, su clasificación en el ítem 2.25 era incorrecta.

- Alumnos que omitieron la unidad de medida en los ítemes 1.3; 1.5 y 1.7 y sin embargo sus unidades en el ítem 1.2 eran correctas, así como su clasificación en el ítem 2.25.

- Alumnos que pusieron en los ítemes 1.3; 1.5 y 1.7 (donde no se especifica la unidad de medida) "cm^2" sin comentario alguno.

En general se daban las siguientes posibles combinaciones de respuestas:
ítem 1.2: unidades correctas, unidades incorrectas o unidades omitidas.
ítem 1.3, 1.5 y 1.7: no indica unidades o utiliza siempre "cm^2".
ítem 2.25: clasificación correcta, clasificación incompleta o con algún error, o en blanco.

Tras el análisis de las conversaciones mantenidas con los alumnos entrevistados pudimos constatar que sólo del hecho de que los alumnos omitan las unidades no se debe extraer ningún tipo de conclusión acerca del conocimiento o desconocimiento que éstos poseen sobre la unidad de área, si bien pudimos comprobar que generalmente la omisión de la unidad por parte de los alumnos de los cursos de nivel inferior (8º de E.G.B. y 2º de B.U.P.) está ocasionada antes por el desconocimiento que por el olvido, mientras que la de los estudiantes de los cursos de nivel superior es consecuencia de la falta de hábito de indicar la unidad. Todo esto se expone de un modo más detallado en el apartado 3.4.2. dedicado al estudio de la unidad de medida.

También pudimos comprobar la irrelevancia de las unidades dadas por los alumnos en el ítem 1.2, ya fueran éstas correctas o incorrectas, al observar que en este ítem los alumnos trabajan de forma mecánica con ausencia de cualquier tipo de reflexión por su parte. Todo lo contrario sucede con las unidades indicadas por los estudiantes en los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7, que se manifiestan de gran interés para determinar la comprensión que éstos poseen de la unidad de medida.

Finalmente señalar la relevancia de la respuesta dada por los alumnos en el ítem 2.25, tanto por la información que proporciona acerca del conocimiento que los alumnos poseen de las unidades de medida, como por la que proporciona para la interpretación de situaciones contradictorias, ya que comprobamos que los alumnos a los que entrevistamos mantenían la clasificación por ellos hecha en este ítem, mientras que podían cambiar las respuestas por ellos dadas en los otros ítemes.

ÍTEM 1.3. También se quiso conocer por qué los alumnos en los diferentes niveles y cursos dejaban en blanco el ítem 1.3, si los alumnos que lo habían resuelto por cálculo integral conocían otro método alternativo, y si entendían el significado del número obtenido tras el cálculo. Para ello, se escogieron alumnos de cada curso, cuya respuesta a este ítem fuera del tipo: en blanco o resuelto por cálculo integral (correctamente, sólo planteado sin resolver o incorrectamente).

La información proporcionada por las entrevistas ha permitido comprender mejor el modo de proceder de los alumnos en este ítem, mostrándose en detalle en el apartado 3.4.11. correspondiente al estudio de los procedimientos utilizados en la resolución de problemas.

ÍTEM 1.4. Mientras que determinar la longitud del lado de un cuadrado a partir del área de éste no supuso ningún problema a los alumnos de secundaria y Universidad, realizándolo la práctica totalidad de ellos correctamente, no sucedió lo mismo con los alumnos de 8º de E.G.B. Bastantes alumnos de este nivel, aún indicando correctamente lo que es el área y conociendo la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo, calcularon incorrectamente la longitud del lado del cuadrado. Las operaciones erróneas más frecuentemente realizadas por ellos fueron: $l= 36/4$ o bien $l=36/2$. Era necesario aclarar esta forma de proceder.

Se seleccionaron alumnos de 8º E.G.B., cuya respuesta a este ítem mostrara que poseían una idea correcta del área pero cuyo cálculo numérico fuera incorrecto.

Aunque este problema se aborda en los apartados 3.4.4. y 3.4.11. de forma detallada, aportando incluso algunas respuestas de alumnos, podemos adelantar que las conversaciones mantenidas con los alumnos nos permitieron apreciar la gran incomprensión que acompaña al conocimiento que los estudiantes poseen sobre las fórmulas para el cálculo de áreas. Pudimos comprobar que los errores anteriormente mencionados estuvieron principalmente ocasionados por un desconocimiento de la fórmula del área del cuadrado y por una confusión operacional, consecuencia de una deficiente formación en aritmética.

ÍTEM 2.2. Fueron muchos los alumnos de los diferentes niveles que no supieron modificar un rombo para transformarlo en otra superficie de menor área y mayor perímetro, o manifestaron que lo que se solicitaba era imposible. Deseábamos determinar las dificultades que habían tenido los alumnos al intentar la modificación y especialmente si la forma de la figura dada (un rombo) había sido un impedimento o había condicionado la forma de la nueva figura construida. Para ello en la entrevista se les solicitó una modificación del mismo tipo pero no sobre un rombo sino sobre un polígono cóncavo. Pudimos comprobar cómo los alumnos entrevistados procedían de forma similar sobre el polígono cóncavo a como lo habían hecho sobre el rombo. Lo comentado por los alumnos puede consultarse en el apartado 3.4.4.

Los alumnos escogidos de cada curso fueron algunos de los que habían mostrado cualquiera de los comportamientos siguientes: modificación correcta del rombo (conservando la forma de la superficie original o no conservándola); intenta la modificación pero no lo consigue; afirma que la modificación solicitada es imposible o lo deja en blanco.

ÍTEM 2.4. Se quería saber por qué los alumnos reconociendo la conservación del área por recorte y pegado en el ítem 2.3, no eran "capaces" de reconocerla y utilizarla en esta nueva situación planteada en un contexto numérico, hasta el punto de que muchos de ellos fracasaron en el cálculo del área del trapecio construido a partir de las piezas en las que había sido dividido un cuadrado. Por ello se seleccionaron alumnos que, dando la respuesta correcta en el ítem 2.3, dejaron en blanco el 2.4 o bien lo abordaron mediante un cálculo numérico largo (correcto o incorrecto). Las conclusiones extraídas junto con la trascripción de los protocolos correspondientes a la entrevista mantenida con dos alumnos pueden consultarse en el apartado 3.4.3.

ÍTEM 2.8. En este ítem se le pedía al alumno que dibujara 4 figuras diferentes que tuvieran de área 1 cm^2, con objeto de comprobar si los alumnos admiten la posibilidad de que superficies de distintas formas pueden tener igual área. Con el fin de constatar hasta qué punto el alumno que resolvía este ítem era consciente de que estaba trabajando con figuras de formas diferentes de igual área, quisimos plantear la pregunta: ¿crees que superficies de formas distintas pueden tener igual área? Seleccionamos alumnos que habían respondido de forma correcta o incorrecta a este ítem o lo habían dejado en blanco.

El resultado de las entrevistas confirma el interés de este ítem, en cuanto que los alumnos que resolvieron correctamente el ítem eran conscientes de la existencia de superficies de formas diferentes con igual área, los alumnos que fracasaron en este ítem negaron la existencia de superficies de formas diferentes con igual área. A continuación mostramos un fragmento de la conversación mantenida con un alumno/a de la Escuela de Magisterio, que fracasó en la resolución de este ítem y respondió negativamente a la pregunta planteada.

E: Entrevistador.
A: Alumno/a.

E: Fíjate en el ítem nº 8.
A: Es que... O sea, no sabía hacerlo porque para que salga 1 cm^2 tiene que ser 1x1, y si no se pone de esta manera (Señala al cuadrado)... O sea, no sé hacerlo... A no ser que lo inclines, y lo cojas así. (Gira el cuadrado).
E: Pero aunque lo gires sigue siendo el mismo cuadrado. Se trata de que construyas figuras distintas que tengan 1 cm^2 de área. Tú piensas que sólo podrías construirlo...(Interrumpe).
A: A no ser que sea con decimales, o por decimales que te den 1 por multiplicación.
E: Olvídate de las dimensiones de los lados de las figuras, ¿piensas que es imposible que existan figuras distintas que tengan la misma área? (Transcurre el tiempo y no responde).
E: El problema que tienes es que te centras en el cálculo de las dimensiones de la figura.
A: Claro. Pero porque tampoco sé...(Transcurre una pausa de tiempo). O sea es que si no es cuadrada... Que no sean cuadradas a mí no me sale ninguna, porque si es ...(Transcurre una nueva pausa). No, no sé hacerlo.

Como se puede deducir de esta breve transcripción este alumno/a centra su atención en las dimensiones de la figura, lo que claro está le dificulta la tarea de construcción de diferentes figuras de igual área. Sin embargo, creemos que la falta de convencimiento de que figuras de diferente forma puedan tener igual área, no le predispone a buscar métodos alternativos al por el/ella utilizado en esta tarea. Por ello creemos poder afirmar que los alumnos que fracasan rotundamente en este ítem no tienen nada claro la existencia de superficies de igual área y forma diferente.

ÍTEM 2.9. Con el fin de adquirir mayor información del conocimiento de los alumnos sobre el papel que juega la unidad en la medida, comparamos la respuesta dada en este ítem, en el que debe comparar el área de dos superficies distintas, medidas con unidades diferentes, y la dada a la respuesta que se formuló en la entrevista: ¿Crees que se pueden comparar áreas que han sido medidas con unidades diferentes?

Los alumnos seleccionados habían dado tanto una respuesta correcta como incorrecta en este ítem.

Comprobamos que los alumnos que respondieron correctamente (más o menos bien) al ítem 2.9 aceptaban la posibilidad de comparar áreas medidas con unidades diferentes, siempre que se pudiera establecer la relación existente entre las unidades. Sin embargo, de una respuesta incorrecta a este ítem no se debe inferir que no acepten la posibilidad antes mencionada, ya que existen otras variables, además de ésta, que pueden dificultar e impedir su resolución, como por ejemplo es la imposibilidad de identificar la unidad utilizada en la medida del área, hecho este frecuente en los alumnos que no están familiarizados con tareas de recubrimiento de una superficie con otra tomada como unidad.

ÍTEMES: 2.10; 2.11 Y 2.12. En la resolución de estos tres ítemes, el alumno procede al cálculo del área de una misma superficie con dos unidades de medida diferentes. Es importante saber si es consciente el alumno al responder a estos tres ítemes de que está asociando a una misma área dos números distintos. Para ello, le planteamos durante la entrevista la pregunta: ¿Crees que al área de una superficie le pueden corresponder números diferentes? Pregunta que se formuló a todos los estudiantes seleccionados para la entrevista y cuyas respuestas a estos tres ítemes respondían a las distintas combinaciones posibles.

De las entrevistas se concluye que no existe una implicación directa entre la resolución correcta de los ítemes 2.10, 2.11 y 2.12, y el conocimiento explícito de que al área de una superficie le pueden corresponder números distintos según la unidad de medida utilizada. De hecho se podría decir que una mayoría de los alumnos con los que conversamos, en un primer momento, negaron esta afirmación y sólo cambiaron de opinión cuando se les hizo reflexionar sobre las respuestas (correctas) que ellos mismos habían dado en estos tres ítemes. Por lo tanto deducimos que es un aspecto del área sobre el que no han reflexionado ni se han planteado hasta ese momento. Así pues no se debe concluir que los alumnos comprenden y son conscientes de que al área de una superficie le pueden corresponder números distintos según la unidad de medida utilizada, del hecho de que los alumnos en tareas diferentes asocien números diferentes al área de una misma superficie.

ÍTEM 2.14. Como más adelante podrá observarse, este ítem fue uno de los que tuvo mayor porcentaje de respuestas en blanco o incorrectas en todos los niveles. Con la entrevista queríamos determinar la dificultad que supone al alumno cualquier modificación en la que estén relacionados el área y el perímetro y si ésta era agravada por la utilización de un rectángulo como superficie a modificar.

Para ello en la entrevista se le preguntó directamente al alumno si superficies de igual perímetro, pueden tener diferente área y si cambiaría su opinión en el caso de no ser la superficie considerada un rectángulo.

El tipo de respuesta dada en este ítem por los alumnos seleccionados de cada curso correspondía a las distintas posibilidades. Es decir, existían alumnos que habían dado la respuesta correcta, incorrecta, habían manifestado la imposibilidad de la modificación solicitada, o la habían dejado en blanco.

Los alumnos entrevistados que manifestaron que superficies de igual perímetro no podían tener diferente área no habían sido capaces de resolver este ítem. Lo que nos lleva a concluir que los alumnos no podrán enfrentarse a modificaciones como la planteada en este ítem mientras no acepten la "independencia" entre el área y el perímetro de una superficie. Por otra parte, pudimos constatar que en efecto el rectángulo dificultó, e incluso impidió a algunos alumnos la modificación solicitada. Todo esto se expone de forma detallada en el apartado 3.4.4.

ÍTEM 2.20. Este ítem se componía de dos apartados, en los que se le pedía al alumno la construcción de un rectángulo de igual área que una superficie dada, sobre una cinta cuadriculada de altura determinada. La diferencia entre estos dos apartados residía en que para la construcción del rectángulo en B) se requería partir la unidad cuadrada, a diferencia de lo que ocurría en A) en la que se podían utilizar unidades cuadradas enteras.

El objetivo perseguido con este ítem era comprobar si los alumnos contemplan la posibilidad de fraccionar la unidad de medida. Sin embargo, el tipo de respuestas dado por los alumnos que no consiguieron responder correctamente a los dos apartados junto con las preguntas que los estudiantes nos formularon acerca de la tarea demandada en el ítem durante la administración del test, nos plantearon serias dudas acerca de la claridad del enunciado y en consecuencia de la validez del ítem.

La práctica totalidad de los alumnos que no realizó correctamente las tareas solicitadas en los dos apartados, sí lo consiguió en el caso de A) pero no en el de B), que lo dejaron en blanco o realizaron un corte inadecuado sobre la cinta. Al entrevistar a estos alumnos comprobamos que todos ellos, independientemente de que hubieran fracasado en este ítem, aceptan y son conocedores del hecho de que la unidad puede y debe ser rota para facilitar la medida del área. Que no procedieran a partir la unidad cuadrada en el apartado B) fue tan sólo porque según ellos no se les ocurrió y porque parece ser, que los ejemplos mostrados en el enunciado del ítem les llevaron a pensar que debían de trabajar con unidades cuadradas enteras. Así pues, comprendimos que la información que podían proporcionar las respuestas dadas por los alumnos a este ítem no tenía ninguna validez, ya que éste no medía aquello para lo que en un principio fue diseñado, por lo que procedimos a excluirlo del análisis.

SIGNIFICADO DE LOS TÉRMINOS ÁREA Y SUPERFICIE. A pesar de que tanto durante la administración del test como tras la corrección de éste no observamos que el uso diferenciado de los términos "área" y "superficie" en los enunciados de los ítemes causara problema alguno a los alumnos, tuvimos la curiosidad de saber si para ellos tenían significados diferentes o iguales. Por ello durante la entrevista les preguntamos acerca de lo que ellos entendían por estos dos términos. Encontramos que mientras para ciertos alumnos "área" y "superficie" representaban lo mismo, para otros poseían significados diferentes, no existiendo una clara tendencia de una creencia sobre la otra. Sin embargo, sí detectamos una cierta inclinación en los alumnos a asociar el término "área" con figuras geométricas y el de "superficie" con terrenos. Toda esta información la hemos utilizado en la reflexión planteada en el capítulo 2, relativo al análisis didáctico del área, sobre la conveniencia de clarificar los significados de estos términos, y donde se relacionan algunas las "definiciones" dadas por los alumnos.

3.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TEST

Para la corrección del test, y como ya se ha comentado anteriormente en el apartado 3.3.4., se realizó una codificación de cada ítem, que puede consultarse en el Anexo 2 de esta memoria, de modo que no sólo permitiera recabar de la forma más fiel posible el tipo de respuesta dada por cada alumno, sino que además facilitara el análisis de los distintos aspectos del área a estudio: las concepciones, la unidad, la conservación, la relación entre el área y el perímetro, la relación entre el área y la forma de la superficie, la bidimensionalidad, las fórmulas para el cálculo de áreas, el significado geométrico del teorema de Pitágoras, el papel de la percepción visual en la comparación de áreas, los procedimientos utilizados en la comparación y medida de áreas, la conservación y/o variación del área y/o del perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones, y la relación existente entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio y la de un rectángulo.

Dado que nuestro objetivo era recabar información acerca de lo que los alumnos de los distintos cursos saben sobre los aspectos del área citados anteriormente, el análisis realizado no consistió en un estudio individual de las respuestas dadas por los estudiantes en cada uno de los ítemes sino en relación con las respuestas dadas en los ítemes implicados en cada aspecto.

Ayudados del paquete de técnicas estadísticas SPSS/PC+, versión 4.0.1, se procedió a un análisis cualitativo dado que todas las variables consideradas poseían este carácter. Con objeto de valorar las posibles dependencias que podían presentarse entre las variables se utilizaron dos técnicas: el *test* χ^2 *de Pearson de independencia* para analizar las posibles dependencias dos a dos, y un *análisis loglineal jerárquico* para el caso en el que se consideraran más de dos variables (Upton, 1980).

A continuación pasamos a detallar los resultados obtenidos a partir del análisis de las respuestas dadas por los alumnos en cada uno de los aspectos del área a estudio. En cada caso, y con objeto de facilitar la información a los lectores se presentan de forma resumida, al final de cada apartado, las conclusiones que hemos considerado más relevantes.

3.4.1. CONCEPCIONES DEL ÁREA

Fue uno de nuestros deseos conocer lo que los alumnos entendían por área de una superficie plana después de más o menos años de formación según el curso escolar al que pertenecieran. Para ello, en el test se incluyó un ítem, en el que directamente al alumno se le pedía que escribiera lo que para él era el área de una superficie plana. Con objeto de recoger el primer recuerdo del alumno sobre este concepto y de manera que éste no se viera influido por la información que algún ítem del test le pudiera proporcionar, este ítem (1.1) fue la primera pregunta a la que debieron responder los estudiantes.

Dado el interés del ítem, durante la administración del test se pidió encarecidamente a los alumnos que respondieran a él. A pesar de ello, si bien la práctica totalidad de los alumnos lo hizo, todavía 4 de 8º de E.G.B., 5 de 2º de B.U.P., 9 de C.O.U.-L, 13 de C.O.U.-C y 1 de 3º E.M., lo dejaron en blanco.

Antes de pasar a exponer con detalle el estudio realizado de las respuestas dadas por los alumnos en este ítem, queremos comentar el interés que éstas poseen, ya que no sólo nos proporcionan una información relevante sobre lo que los estudiantes entienden por área, sino que además nos muestran la dificultad que poseen en general todos los alumnos para expresar lo que piensan, la pobreza de la terminología técnica que poseen y la inadecuación de los términos y vocabulario empleados.

Lo que los alumnos escribían para expresar lo que para ellos era el área, es a lo que nos hemos referido aquí como "concepción del área". Durante la corrección del ítem se detectaron concepciones de muy distinta índole y que clasificamos, como más adelante se detalla, con el objeto de facilitar su análisis.

CONCEPCIONES ERRÓNEAS. Se detectaron diferentes concepciones erróneas que nosotros clasificamos en cinco grupos, según correspondiesen a una *confusión del tipo área-perímetro, área-volumen, área-superficie plana, área-perímetro+área* y las que, dada su peculiaridad, eran *incatalogables*. Las siguientes respuestas son un ejemplo de estas concepciones erróneas.

Nota.- En lo sucesivo para referirnos a un alumno en particular, primeramente indicaremos el código del curso al que pertenece y después el número que le fue asignado para su identificación en cada curso.

Confusión área-perímetro. Los alumnos se refieren a la longitud de los lados o al perímetro de la superficie.

- Son los datos que se necesitan para resolver el problema y dar los "cm" de cada lado. 8º E.G.B.-22.
- Lo que miden todos los lados de un cuerpo. 8º E.G.B.-43.
- Son los metros lineales de una figura. 8º E.G.B.-56.
- Lo que mide de longitud sus lados, lo que mide una figura. 8º E.G.B.-84.
- Es la línea que hay por fuera de las figuras geométricas. 2º B.U.P.-83.
- Son las limitaciones que tiene una superficie a lo largo y a lo ancho. 2º B.U.P.-4.
- Es la longitud que ocupa la base. C.O.U.-L-65.
- La suma de sus lados. C.O.U.-L-52.

Confusión área-volumen. Los alumnos se refieren al volumen de la superficie.

- La superficie comprendida de un objeto en sus tres dimensiones: alto, largo, ancho. C.O.U.-L-75.
- El volumen de dicha superficie. C.O.U.-C-109.

Confusión área-superficie plana. Los alumnos describen una superficie plana.

- Una superficie plana es que está totalmente lisa como una pizarra, la tabla de una mesa. 8º E.G.B.-9.
- Un chicle chafado por un camión. 8º E.G.B.-25.

- El dibujo de una figura que puedes dibujar en un folio, etc. Una figura que no tiene volumen. 8° E.G.B.-33.
- Para mí el área de una superficie plana es ejemplo el tablero de una mesa. 8° E.G.B.-95.

Confusión área-perímetro+área. Los alumnos se refieren simultáneamente al espacio ocupado por la superficie y al perímetro de ésta.

- Longitud y territorio de un campo. 2° B.U.P.-115.
- La suma de todos los lados + espacio que ocupa dicha superficie. 2° B.U.P.-43.
- La medida de toda la superficie, incluyendo el interior y el contorno. 5° F.M.-5.

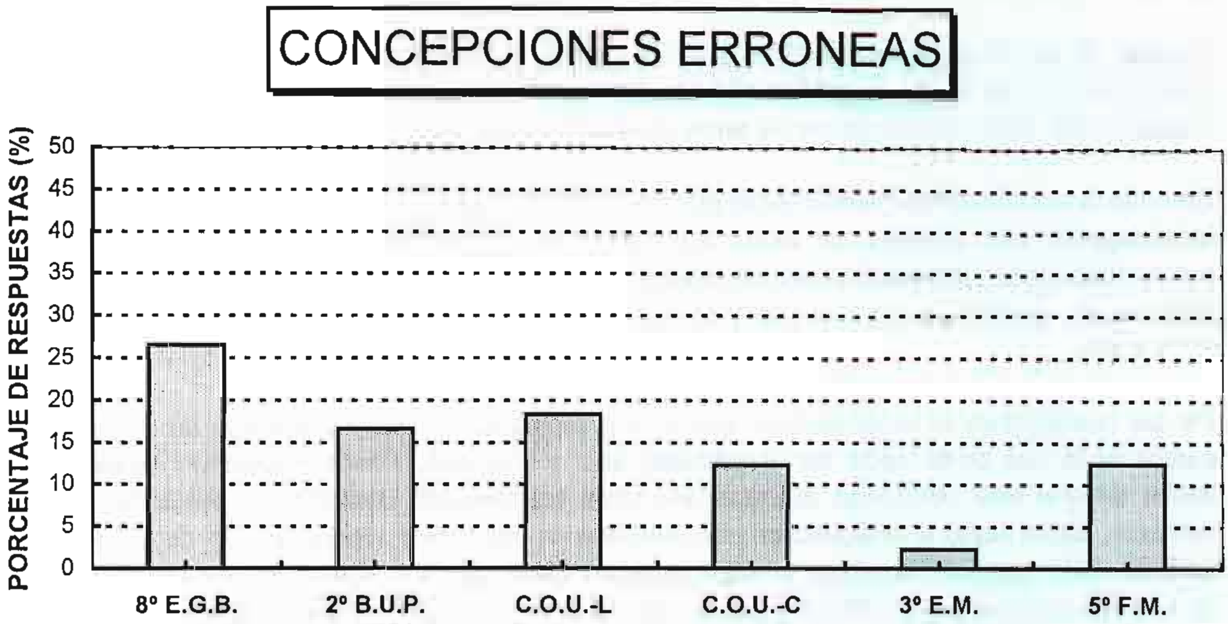
Concepciones incatalogables. Los alumnos utilizan afirmaciones para caracterizar el área que a nosotros nos han resultado imposibles de clasificar.

- El área de una superficie es la capacidad en "m", "dm", "cm", etc... 8° E.G.B.-52.
- La base de una circunferencia es el área lo que mide la base. 8° E.G.B.-96.
- El área de una superficie plana es algo imaginario que se puede llevar a un plano, y esa área se puede calcular de muy diversas formas. 2° B.U.P.-116.
- Todo el espacio que hay desde un punto a otro de la figura. C.O.U.-L-18.
- Es la dimensión total que tiene la superficie en cuestión. C.O.U.-L-28.
- Es la suma de todos los puntos que componen un área expresada en unidades de superficie. C.O.U.-C-41.
- Un área limitado, en que se puede dividir en dos semiplanos. C.O.U.-C-87.
- El área de la superficie es la medida que equivale a un cuadrado. Este cuadrado dependerá de la imprecisión. 3° E.M.-5.
- Cjto. de puntos "delimitados" por la superficie. 5° F.M.-17.
- Es lo que miden conjunto de puntos que conforman la superficie. 5° F.M.-22.
- Es la intersección interior de la clausura de un espacio con su frontera en R^2. 5° F.M.-10.

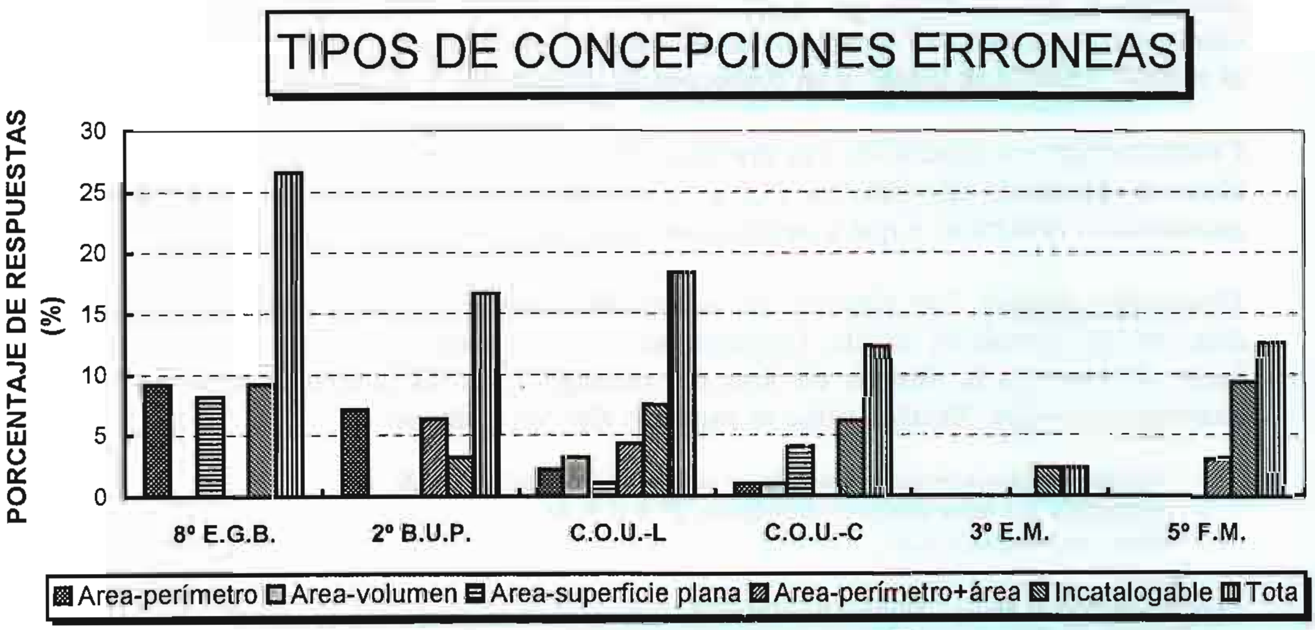
En estos ejemplos se han mostrado las concepciones de los únicos cuatro alumnos de 5° F.M. que dieron una definición errónea del área. Sólo uno de ellos permite claramente determinar la confusión que posee. Sin embargo, poco podemos decir de los otros tres alumnos, tal vez sólo que resultan increíbles si consideramos el nivel de éstos. Creemos que aunque está claro que no son definiciones correctas, podría suceder que el error radicara en el modo incorrecto en el que se han expresado, antes que en su desconocimiento de lo que es el área de una superficie plana. Lo que es evidente es que los términos que han empleado no han sido utilizados en la manera más adecuada posible, y que el alumno 5° F.M.-10, tal vez, nos ha querido impresionar con su "nivel".

El origen de las confusiones que evidencian estas concepciones erróneas es distinto, ya que creemos que mientras que las confusiones área-perímetro, área-volumen y área-perímetro+área, están motivadas por un error conceptual, es decir, por un desconocimiento de los conceptos área, perímetro y volumen, la confusión área-superficie plana, a diferencia de las anteriores, podría estar motivada por una incorrecta lectura del enunciado del mismo ítem. Por último, las causas que hayan podido motivar las concepciones incatalogables, pensamos que son distintas y de muy diversa índole, como podrían ser entre otras, una muy deficiente manera de expresarse, un uso inapropiado e incorrecto de términos técnicos, una errónea lectura del ítem, y por supuesto un error conceptual provocado por el desconocimiento del concepto.

Las siguientes gráficas proporcionan la información acerca del número de alumnos que en cada curso manifestó una concepción errónea. La gráfica n°1, muestra los porcentajes globales, mientras que la gráfica n°2 proporciona la distribución de este porcentaje según los distintos tipos.



Gráfica n°1



Gráfica n°2

Como puede observarse existe un porcentaje bastante importante de alumnos de 8° de E.G.B. que poseen concepciones erróneas del área. Aunque el porcentaje correspondiente a los alumnos de 5° de F.M. también llama la atención debemos recordar que éste representa a cuatro alumnos, de los que sólo en uno de ellos hemos podido determinar su error, por lo que para nosotros no es significativo este porcentaje.

A pesar de los altibajos ocasionados por los porcentajes correspondientes a los alumnos de C.O.U.-L y 5° de F.M., la gráfica n°1 muestra una disminución del número de alumnos con concepciones erróneas conforme va aumentando la formación matemática de los estudiantes.

De todas las confusiones manifestadas por los alumnos sólo la denominada por nosotros como incatalogable está presente en todos los cursos no pudiéndose hablar de ningún tipo de regularidad en su comportamiento en relación al aumento del nivel del curso, tal vez por ser diversas las causas que las motivan y en consecuencia más imprevisible el comportamiento del alumno.

De las confusiones conceptuales la que está presente en un mayor número de alumnos y cursos es la que se da entre las magnitudes área y longitud, siendo importante destacar el hecho de que esta confusión muestra una clara disminución conforme el nivel del curso aumenta, hasta llegar a desaparecer por completo en los cursos superiores, 3° de E.M. y 5° de F.M. Ello nos lleva a pensar que la formación matemática que un alumno va adquiriendo en su vida académica es suficiente para erradicar esta confusión. Por otra parte, la confusión entre las magnitudes área y volumen es apenas apreciable.

Como se puede comprobar la concepción errónea área-superficie plana se detecta principalmente en los alumnos de 8° de E.G.B. Este hecho pensamos que está en consonancia con la causa que según nosotros la pudo motivar, que como ya hemos comentado antes sería una incorrecta lectura del ítem que les llevó a centrar su atención sobre el término "superficie plana" y en consecuencia procedieron a su descripción.

CONCEPCIONES NO ERRÓNEAS. Las distintas concepciones no erróneas manifestadas por los alumnos las hemos agrupado en tres grupos, que hemos llamado: *concepción fórmula, geométrica y numérica,* y que a continuación pasamos a describir con mayor detalle.

Concepción fórmula. Los alumnos que poseen esta concepción son aquellos que asocian el área con una fórmula de cálculo. La mayor parte de los alumnos que la poseen normalmente hacen referencia a la fórmula del área del rectángulo, quizás porque es la fórmula más recordada por ellos. Veamos como se expresan algunos alumnos:

- Una fórmula para efectuar su resultado de esa superficie plana. 8° E.G.B.-38.
- Producto de sus lados (dibuja un rectángulo). 2° B.U.P.-33.
- Base x altura. C.O.U.-L-5.

Concepción geométrica. Hemos considerado que un alumno posee una concepción geométrica del área de una superficie plana cuando la entiende como el lugar que ocupa la superficie en el plano. A continuación mostramos algunas de las descripciones realizadas por los alumnos.

- El alumno dibuja un círculo marcando lo de dentro. 8° E.G.B.-16.
- El alumno dibuja un triángulo marcando lo de dentro. 8° E.G.B.-92.
- El área es el sitio que ocupa la superficie. 2° B.U.P.-7.
- Es toda la superficie encerrada entre los límites (bordes) de la figura. 2° B.U.P.-2.
- Es una extensión delimitada. C.O.U.-L-35.
- Es la zona limitada por líneas o segmentos que se cortan. 3° E.M.-19.
- Cantidad de espacio que encierra esa superficie. 5° F.M.-15.
- Espacio de plano delimitado (no tiene por qué ser cerrado) por un cjto. de curvas. 5° F.M.-21.
- El recinto que ocupa dicha figura plana. 5° F.M.-11.
- Porción de plano contenido en la figura. 5° F.M.-1.

Concepción numérica. En la concepción numérica se han incluido todas aquellas manifestaciones de los alumnos en las que de un modo u otro identifican el área con un número, generalmente asociado a una medida.

Las diversas formas en las que se han expresado los alumnos nos ha permitido observar dentro de la numérica, diferentes concepciones. Mientras que unos alumnos se refieren al área como el número de unidades, tanto estándares como no estándares, que posee o recubren la superficie, otros se refieren a ella como la medida de la superficie sin concretar más y sin hacer referencia alguna a la unidad de medida. Veamos algunos ejemplos de lo que acabamos de comentar:

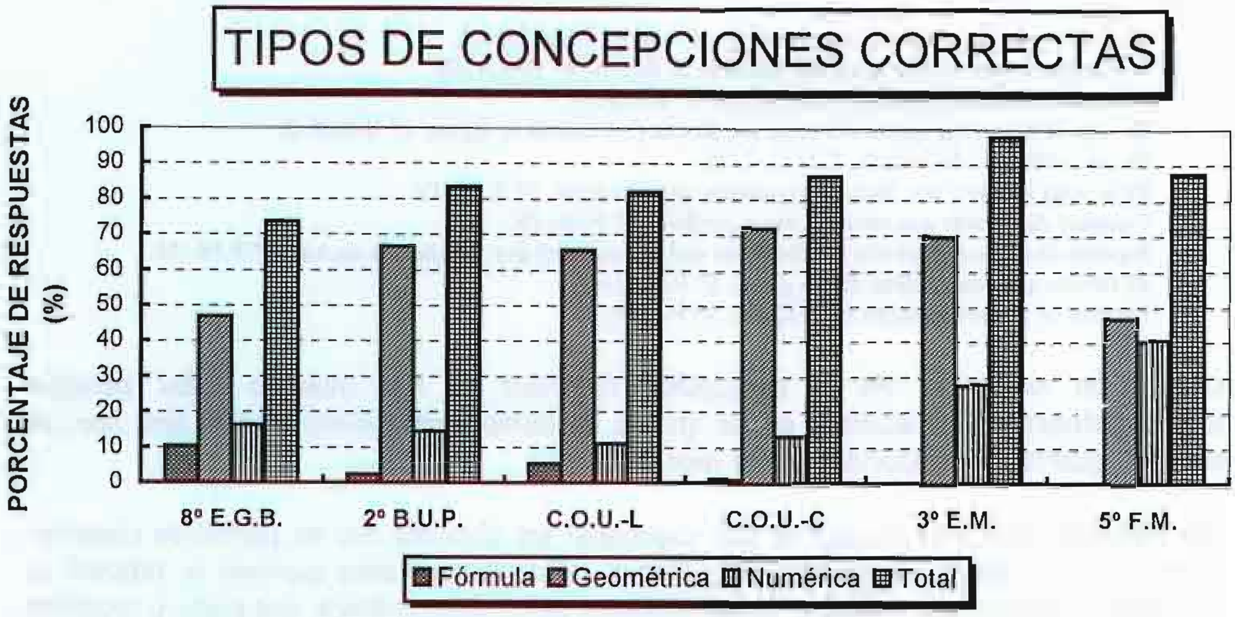
Se hace referencia a la unidad de medida:

- El área es el número de unidades cuadradas que tiene la superficie. 2° B.U.P.-8.
- Si consideramos una figura cuadrada de un lado de longitud 1 unidad, entonces el área de una superficie plana será la cantidad de cuadraditos unitarios a los que equivale esa superficie. 5° F.M.-20.
- El área es el espacio que ocupa en "m^2" una figura en el plano. 2° B.U.P.-71.
- Los m^2 o cm^2 dentro de unos límites. 3° E.M.-1.
- Veces que se repite una unidad de medida previamente establecida. 3° E.M.-25.
- El área es una medida del espacio limitado por los "bordes" de dicha superficie respecto de una unidad especificada de superficie. 5° F.M.-3.
- El área es el espacio medido en unidades de longitud elevadas al cuadrado, que ocupa un determinado cuerpo en un plano. 2° B.U.P.-74.
- Es lo que mide una superficie en unidades de longitud al cuadrado. C.O.U.-L-25.

No se hace referencia a la unidad de medida:

- El área es la medida de una superficie. 5° F.M.-18.
- Es lo que mide en total toda esa superficie. 2° de B.U.P.-30.
- Es la medida del espacio encerrado entre rectas o curvas, en 2 dimensiones. 5° F.M.-13.
- Que mide el interior de una figura. C.O.U.-C-79.

La siguiente gráfica nos proporciona el porcentaje de alumnos por curso que ha dado cada una de estas concepciones.



Gráfica n°3

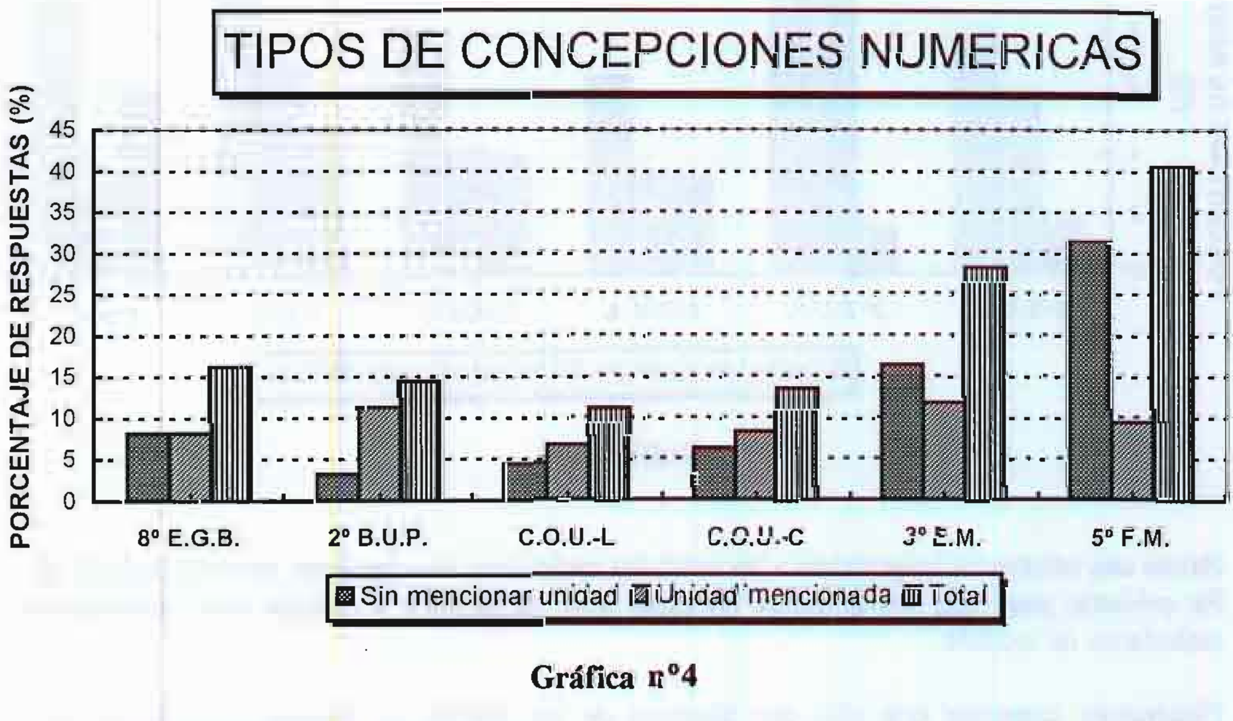
Pensamos que la concepción fórmula es consecuencia directa de la instrucción que los alumnos reciben del área en E.G.B., y que se limita en la mayoría de los casos a la enseñanza de fórmulas para su cálculo. De hecho como se puede comprobar en la gráfica n°3, el porcentaje mayor corresponde a los alumnos de 8° de E.G.B. Es interesante observar la tendencia a desaparecer de esta concepción en los alumnos, para hacerlo definitivamente en el nivel universitario, aunque ya en secundaria, a excepción de C.O.U.-L, es prácticamente inexistente. Luego por una parte parece que esta concepción está íntimamente ligada con el tipo de instrucción impartida, y por otra, que la riqueza que va proporcionando la formación matemática a los alumnos resulta ser un factor primordial para el abandono por parte de los alumnos de esta concepción tan pobre.

Como se puede comprobar de la lectura de la gráfica n°3 los alumnos de todos los cursos, independientemente de su nivel escolar, han manifestado de forma mayoritaria una concepción geométrica, resultando ser considerable la diferencia con respecto a las otras dos concepciones. Sólo en 5° de F.M. aún siendo mayor el número de alumnos que se inclinan por la concepción geométrica, existe una mínima diferencia con los que manifiestan una concepción numérica del área.

Nos parece interesante reflexionar sobre el hecho de que en los cursos centrales los porcentajes correspondientes a los alumnos que poseen una concepción geométrica del área, son bastantes similares entre ellos, observándose las variaciones en los cursos extremos, produciéndose el aumento de 8° de E.G.B. a 2° de B.U.P. y la disminución de 3° E.M. a 5° F.M. Pensamos que este hecho es consecuencia directa de la formación académica general y matemática de los alumnos. Creemos que la formación general que reciben los alumnos a lo largo de sus estudios les suministra los conocimientos suficientes para aclarar algunas de sus confusiones y en consecuencia rectificar algunas de las concepciones erróneas que hemos detectado especialmente en alumnos de 8° de E.G.B., proporcionándoles una idea clara del área, que vendría a ser la que nosotros hemos denominado como concepción geométrica. Sin embargo, creemos que para que un alumno adquiera una concepción numérica correcta es necesario que reciba una formación específica del área, o una formación matemática de un "cierto" nivel, como por ejemplo la correspondiente a los alumnos de 5° F.M.

Puede parecer contradictorio el que sean muy pocos los alumnos entre 8° de E.G.B. y C.O.U. que conservan una idea de área asociada a un número con el hecho de que la instrucción habitual que reciben los alumnos sobre el área se reduzca casi exclusivamente al cálculo de áreas. Sin embargo, creemos que esto sucede porque para que un alumno posea una concepción numérica correcta del área es necesario que esté familiarizado con el proceso de medida, y en consecuencia que conozca y comprenda el papel que juega la unidad en la medida, estudio éste que normalmente no se lleva a cabo.

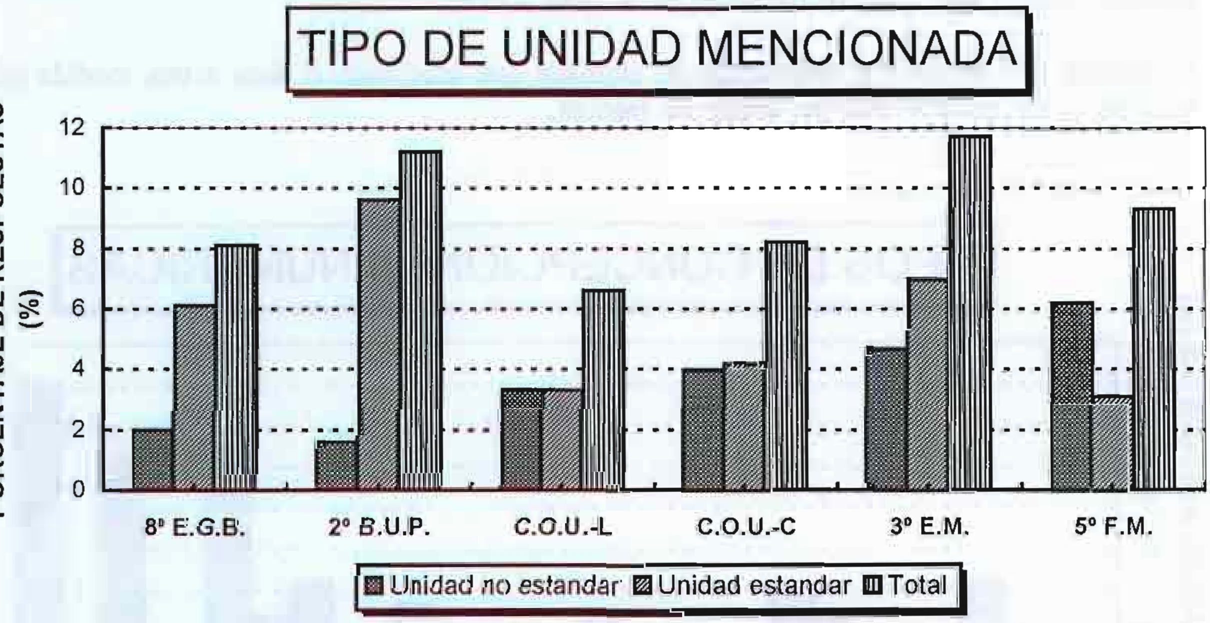
La gráfica n°4 muestra el porcentaje de alumnos que asociando el área a una medida se refieren, o no, a algún tipo de unidad de medida.



Gráfica n°4

Resulta curioso observar la evolución de estas dos concepciones. Mientras que en E.G.B. no hay una diferencia en el comportamiento de los alumnos y en secundaria existe una tendencia mayor a referirse a la unidad, en universidad la tendencia es la contraria, hacia la omisión de la unidad. Estas diferencias no son muy grandes, salvo en 5° F.M., donde es manifiesta la inclinación de los alumnos por referirse al área como la medida de una superficie sin hacer mención alguna a la unidad considerada en el proceso. Las entrevistas nos permitieron determinar que el comportamiento de los alumnos universitarios estaba ocasionado por el hábito que poseen de no indicar las unidades al darlas por sobreentendidas, y no porque no las consideren durante el proceso de medida. Todo esto se comenta con más detalle en el próximo apartado 3.4.2.

De la lectura de las respuestas dadas por algunos alumnos que se han mostrado anteriormente como ejemplo de las concepciones numéricas, se puede observar que los alumnos que han mencionado la unidad de medida al referirse al área se han referido bien a unidades estándares de medida, por ejemplo cm^2, m^2, como a no estándares, por ejemplo la unidad cuadrada. Ésta es la información que se recoge en la gráfica siguiente:



Gráfica n°5

Existe una referencia mayoritaria a las unidades estándares de superficie, excepto en 5° F.M. Es evidente pues que los alumnos no están muy habituados a trabajar con unidades no estándares de medida.

Finalmente comentar que sólo dos alumnos de los 489 de la muestra, pertenecientes a C.O.U.-C, que respondieron a este ítem, se han referido al área como una magnitud. Luego dado que el término "magnitud" ha sido empleado sólo por dos alumnos, está claro que ni este término, ni en consecuencia el concepto mismo resulta familiar a los alumnos, sea cual sea su nivel escolar. Estos alumnos se expresaron del modo siguiente:

- El área es un concepto para nombrar la magnitud de una figura plana. C.O.U.-C-66.
- El área es una magnitud que designa el número de veces que se podría repetir una porción de superficie tomada como unidad en otra superior a inferior. C.O.U.-C-43.

En esta última definición el alumno se refiere al área como una magnitud y la identifica con la misma medida del área. De su exposición se aprecia con claridad que entiende la medida como un proceso por medio del cual se asigna un número como resultado de la comparación entre dos superficies, en el que la menor se ha tomado como una unidad de referencia.

El último estudio al que se procedió en este apartado de concepciones mostradas por los alumnos, fue el análisis de la relación existente entre el curso al que pertenecía el alumno y el tipo de concepción que éste manifestaba, que fue detectada mediante un análisis loglineal para estudiar posibles dependencias entre las variables: curso, concepción y tipo de procedimiento utilizado por los alumnos en la resolución de los problemas. Para ello realizamos un análisis detallado de las tablas en dos variables, con la variable "curso: factor experimental" y la variable "concepción: respuesta", y de los p-valores correspondientes al test de la χ^2 de Pearson. El resultado de este test permite afirmar con un grado de significación menor del 0'00001 que estas variables no son independientes, y por lo tanto existe una dependencia estadística entre el curso al que pertenece el alumno y la concepción que él manifiesta -relación del tipo "factor-respuesta"-. En este caso esto supone que los alumnos de cada curso no se distribuyen en la misma proporción en cada una de las distintas concepciones manifestadas. Por el contrario, la tabla de contingencia obtenida en el test (ver Anexo 4), muestra que la distribución es diferente en los diferentes cursos, existiendo una categoría dominante que corresponde a la concepción geométrica donde se concentra una mayoría de los alumnos en cada curso, hecho que ya conocíamos y que ya habíamos comentado anteriormente. Esta dependencia detectada significa que el curso aparece como un factor dominante en la concepción manifestada por el alumno. Lo que nos resulta difícil es determinar cómo domina. Estudiando la tabla de contingencia, además de la concentración ya comentada en la concepción geométrica, destacan dos celdas más, correspondientes a la concentración de un elevado número alumnos de 8° de E.G.B. en la concepción errónea, y a la de 5° de F.M. en la concepción numérica.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre las concepciones manifestadas por los alumnos

- A excepción de 8° de E.G.B. -donde una 26'8% de los alumnos ha manifestado concepciones erróneas-, la práctica totalidad de los alumnos de los otros cursos posee una idea correcta del área de una superficie plana.

- Las concepciones erróneas encontradas han consistido en confusiones del área con el perímetro, con el volumen, con la superficie plana, con el perímetro+área, y en errores difícilmente clasificables, que han resultado ser los más numerosos entre los alumnos de todos los cursos.

- Pensamos que las concepciones erróneas: confusión área-perímetro, área-volumen y área-perímetro+área, están motivadas por un error conceptual, es decir por un desconocimiento de los conceptos área, perímetro y volumen. La confusión área-superficie plana, podría estar motivada por una incorrecta lectura del enunciado del mismo ítem. Las concepciones incatalogables están motivadas por causas diversas, como por ejemplo una deficiente manera de expresarse, un uso inapropiado e incorrecto de términos técnicos, una errónea lectura del ítem, y por supuesto un error conceptual provocado por el desconocimiento del concepto.

- Las concepciones no erróneas se han clasificado en tres grupos según su naturaleza: concepción fórmula, concepción geométrica y concepción numérica.

- De entre los 489 alumnos que respondieron a este ítem, únicamente dos alumnos de C.O.U.-C se refieren al área como una magnitud.

- La concepción fórmula, la más pobre de todas, ya que los alumnos asocian el área con una fórmula de cálculo, y no con cualquiera sino generalmente con la del rectángulo, es la más minoritaria entre los alumnos, con presencia significativa sólo en 8º de E.G.B. Se ha podido comprobar a lo largo del análisis efectuado de las respuestas dadas por los alumnos en el test, y cuyos resultados se muestran en esta sección (3.4.), que estos alumnos no comprenden el carácter bidimensional del área, ni el significado del área como expresión que relaciona magnitudes de diferente dimensión.

- La mayoría de los alumnos en todos los cursos se refiere al área de una superficie plana como la porción de plano ocupado por ésta -concepción geométrica-.

- La concepción numérica, en la que el alumno asocia el área con un número, ha sido manifestada por una minoría de alumnos de los distintos cursos, a excepción de los de 5º de F.M. Los porcentajes oscilan entre el 11% de los C.O.U.-L y el 28% de los de 3º E.M., con un 40'6% para los de 5º F.M.

- Dentro de la concepción numérica, en los cursos de secundaria es mayoritaria, sin grandes diferencias, la referencia a la unidad de medida al hablar del área, mientras que para los de universidad ocurre lo contrario, es decir, es mayoritario el no mencionar la unidad de medida. En 8º de E.G.B. no existe diferencia alguna al respecto.

- De entre los alumnos que se refieren a la unidad de medida son mayoría aquéllos que mencionan una unidad estándar de medida en lugar de una no estándar, salvo los de 5º F.M., que se inclinan por ésta última.

- La concepción errónea consistente en la confusión entre el área y el perímetro va desapareciendo conforme el alumno evoluciona a lo largo de los cursos, no detectándose ningún caso en los cursos universitarios.

- Mientras que el porcentaje de alumnos que asocian el área con la medida de la superficie refiriéndose a una unidad determinada se mantiene sin grandes diferencias, a lo largo de los cursos, no sucede lo mismo con el porcentaje de alumnos que no mencionan ninguna unidad de medida, ya que presenta un claro crecimiento a partir de C.O.U.-C.

- Una vez finalizada la E.G.B. y la instrucción que los alumnos reciben normalmente en su vida escolar del concepto del área, un 26'54% de estos alumnos posee una concepción errónea y un 10'2% cree que el área es base x altura. La formación humanista y matemática que los alumnos reciben durante la secundaria colabora en la desaparición de algunas de las concepciones erróneas y proporciona a la práctica totalidad de los alumnos una idea clara de lo que es el área de una superficie plana asociándola con el lugar de plano ocupado. Por último parece que la formación universitaria encamina a los alumnos hacia una concepción numérica en la que no se menciona a la unidad de medida.

- El curso al que pertenece un alumno es un factor dominante en el tipo de concepción que posee sobre el área de una superficie plana.

- Ningún alumno de C.O.U., ni de 3º E.M. y ni de 5º F.M. ha asociado el área con la integral definida.

- Ningún alumno de 5º F.M. ha dada la definición matemática del área.

3.4.2. UNIDAD DE ÁREA

Importancia del papel de la unidad en el proceso de medida

¿ACOSTUMBRAN LOS ALUMNOS A DAR LA UNIDAD AL CALCULAR EL ÁREA DE UNA SUPERFICIE PLANA?

Hemos constatado que los alumnos no están habituados a dar la unidad de medida al calcular el área de una superficie plana independientemente del modo en el que la calculen y de que se proporcionen o no unidades de las dimensiones lineales de la figura, aunque sí hemos comprobado que determinadas situaciones, como enseguida explicaremos, propician en el alumno el olvido de la unidad.

Las siguientes tablas -Tabla 1 y Tabla 2- muestran respectivamente el número de alumnos que han omitido la unidad de medida en el ítem 1.2, y en los problemas correspondientes a los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8.

Nota.- En (a/b), "a" es el número de respuestas de ese tipo y "b" el número total de respuestas al ítem.

	rectángulo	círculo	triángulo	paralelogramo
8° E.G.B.	37'5% (36/96)	51'4% (36/70)	55'4% (46/83)	45'3% (29/64)
2° B.U.P.	10'7% (14/131)	35'4% (45/127)	21'5% (26/121)	24'4% (19/78)
C.O.U.-L	30'4% (31/102)	60'4% (55/91)	41'7% (40/96)	43'9% (25/57)
C.O.U.-C	18'2% (20/110)	43'0% (46/107)	27'5% (30/109)	27'5% (28/102)
3° E.M.	18'2% (8/44)	55'8% (24/43)	22'7% (10/44)	21'1% (8/38)
5° F.M.	31'3% (10/32)	37'5% (12/32)	31'3% (10/32)	48'4% (15/31)

Tabla 1. Alumnos que omiten la unidad en el ítem 1.2.

	ítem 1.3	ítem 1.5	ítem 1.7	ítem 1.8
8° E.G.B.	24'0% (12/50)	43'5% (20/46)	39'0% (16/41)	49'2% (32/65)
2° B.U.P.	66'7% (18/27)	23'1% (6/26)	40'9% (27/66)	53'6% (60/112)
C.O.U.-L	69'6% (16/23)	62'5% (10/16)	61'1% (22/36)	59'6% (56/94)
C.O.U.-C	62'1% (36/58)	50'6% (40/79)	54'9% (50/91)	40'9% (45/110)
3° E.M.	63'2% (12/19)	68'8% (11/16)	69'0% (20/29)	62'5% (25/40)
5° F.M.	80'6% (25/31)	66'7% (16/24)	76'0% (19/25)	73'3% (22/30)

Tabla 2. Alumnos que omiten la unidad en el ítem 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8.

Sin embargo, sería una simplicidad y un error extraer como conclusión que los alumnos que omiten la unidad de área, la desconocen. Tras el estudio de diversos resultados y ayudados por las entrevistas, hemos detectado diferentes comportamientos en los alumnos, que nos han llevado a establecer algunas de las que creemos son las causas de que un alumno no indique la unidad:

- En el cálculo del área del círculo, se registraron los porcentajes más altos de omisión de unidad en el ítem 1.2. En esta ocasión la práctica totalidad de los alumnos dejaron indicada la expresión $A=\pi(1'5)^2$ sin realizar las operaciones, con lo que a diferencia de los otros tres casos, no obtuvieron un número específico correspondiente al área del círculo. Ello nos ha llevado a pensar que la no finalización del cálculo, y en consecuencia la ausencia de un número determinado, puede determinar la omisión de la unidad.

- Por otro lado, hemos observado que el porcentaje de omisiones aumenta cuando los alumnos no realizan el cálculo del área mediante el uso de una fórmula, sino que utilizan procedimientos diferentes del producto de dimensiones. La fórmula para el cálculo del área de un paralelogramo no era recordada por gran número de alumnos, siendo muchos de ellos los que intentaron determinar su área empleando un razonamiento alternativo, como se muestra en el apartado 3.4.7. Pudimos comprobar que la mayoría de los alumnos que no habían indicado la unidad habían optado por un procedimiento diferente al uso de la fórmula: el 100% de los de 8° de E.G.B., el 62'5% de los de 2° de B.U.P., el 72'7% de los de C.O.U.-L, el 50% de los de C.O.U.-C, el 83'3% de los de 3° E.M. y el 66'7% de los de 5° F.M.

Este hecho pensamos que queda corroborado por el elevado porcentaje de alumnos que omitió la unidad en los problemas correspondientes a los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8, que representa un aumento considerable respecto de lo sucedido en el ítem 1.2, aunque las condiciones de las situaciones planteadas en estos ítemes no fueran las mismas, dado que en el ítem 1.2 se proporcionaban las unidades lineales de las superficies planas y en los otros no se mencionaba unidad alguna.

Todo ello nos hace pensar que el uso de un procedimiento consistente en algo más que el mero hecho de aplicar una fórmula lleva al alumno a centrarse únicamente en el modo de determinar ese número que representará el área pedida, distrayéndolo de considerar la globalidad del problema.

- Durante las entrevistas los alumnos de los cursos superiores justificaron sus incorrecciones u omisiones de la unidad esgrimiendo argumentos al margen del contenido matemático. De lo que pudimos deducir que no le dan ninguna importancia al hecho de indicar o no indicar la unidad. Por ejemplo, los estudiantes de 5° F.M. manifestaron que los errores que habían cometido eran consecuencia de "despistes", y que no indicaban la unidad porque "se daba por supuesto", "se sobrentiende". Los alumnos de 3° E.M. y C.O.U.-C los justificaron diciendo que "uno va rápido..." o "porque se olvida", "se pasa". Lo cierto es que todos ellos demostraron tener un correcto conocimiento de las unidades de área a pesar de sus errores u omisiones, que rectificaron correcta e inmediatamente.

- Por supuesto, otra de las causas que induce a los alumnos a no indicar la unidad de medida es su desconocimiento o la inseguridad que poseen. Los alumnos de C.O.U.-L, 2° de B.U.P., y especialmente, los de 8° de E.G.B. mostraron durante las entrevistas una falta de seguridad importante cuando eran preguntados por la unidad adecuada a utilizar.

Podemos completar esta información con el número de alumnos que omitieron la unidad en al menos 3 de los 4 cálculos de áreas planteados en el ítem 1.2, y en al menos 3 de los 4 problemas 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8 (Tabla 3). Sin embargo, para extraer cualquier tipo de conclusión es importante tener en cuenta que estas cantidades representan a un pequeño número de estudiantes al estar referidos al total de alumnos que en cada curso respondió por una parte, a todos los apartados del ítem 1.2 y por otra, a los cuatro ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8.

	omisiones de la unidad en al menos 3 de los 4	
	casos del ítem 1.2	ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8
8° E.G.B.	35'0% (14/40)	26'3% (5/19)
2° B.U.P.	12'3% (9/73)	100'0% (1/1)
C.O.U.-L	27'6% (13/47)	50'0% (3/6)
C.O.U.-C	20'2% (20/99)	40'9% (18/44)
3° E.M.	13'5% (5/37)	60'0% (3/5)
5° F.M.	29'0% (9/31)	66'7% (14/21)

Tabla 3. Alumnos que omiten la unidad en al menos 3 de los 4 casos del ítem 1.2, y en al menos 3 de los 4 ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8.

EN EL MOMENTO DE COMPARAR LOS NÚMEROS ASOCIADOS A LA MEDIDA DE DOS ÁREAS, ¿SE FIJAN EN LAS UNIDADES QUE ÉSTOS REPRESENTAN?

El 17'9% de los estudiantes de 8° de E.G.B. que respondieron al ítem 2.9, el 6% de los de 2° de B.U.P., el 13'1% de los de C.O.U.-L y el 6% de los de C.O.U.-C, afirmaron en este ítem que el área del rectángulo era mayor que la del triángulo ya que 40 era mayor que 6. Es decir, compararon directamente los números resultantes de la medida sin tener en consideración alguna la unidad empleada en ella. Es notable reseñar que ningún alumno de 3° E.M. ni de 5° F.M. procedió de este modo.

No hemos querido interpretar estos datos sin tener en cuenta el número de alumnos que dejaron en blanco este ítem: el 49'4% de 8° de E.G.B., el 21'3% de 2° de B.U.P., el 23'6% de C.O.U.-L, el 4'5% de C.O.U.-C, el 1'1% de 3° E.M. y el 0% de 5° de F.M.

De estos porcentajes podemos afirmar que la totalidad de los estudiantes de los dos cursos universitarios y la práctica totalidad de los de C.O.U.-C, sí han tenido en cuenta el hecho de que el número resultante de la medida depende de la unidad escogida. Conclusión que no podemos extender a los de los restantes cursos. Por otra parte, aunque el 18% de los alumnos de 8° E.G.B. representa a un pequeño número de alumnos que no ha considerado la unidad al comparar las áreas, si ha esto le añadimos que sólo el 50% de ellos responde a este ítem, pensamos que ello da indicios de la existencia de una falta de comprensión del papel que juega la unidad en la medida por parte de los estudiantes de este nivel educativo.

Así pues, de todo ello se podría concluir que, por diversos motivos, una gran mayoría de los alumnos de los distintos cursos no acostumbran a indicar la unidad tras la realización del cálculo para la medida del área. Sin embargo, no sería correcto deducir de ello que los alumnos desconocen las unidades de área o no las consideran durante el proceso de cálculo. Pensamos que en los cursos superiores (C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M.), la omisión es consecuencia más de una falta de hábito - y de una errónea actitud de los alumnos de estos cursos, que no le dan importancia a este hecho-, que de un desconocimiento e incomprensión del papel que la unidad tiene en la medida, en este caso, del área. Por el contrario, los datos correspondientes a los restantes cursos son indicios de inseguridad y desconocimiento de ello.

Uso y reconocimiento de las unidades estándares y no estándares de medida

¿UTILIZAN LOS ALUMNOS CORRECTAMENTE LA UNIDAD ESTÁNDAR (CM^2) DE SUPERFICIE, A PARTIR DE UNIDADES ESTÁNDARES (CM) LINEALES?

Quisimos conocer el número de alumnos que en cada curso había utilizado correctamente la unidad estándar de superficie cuando las dimensiones de las longitudes venían dadas en unidades de este mismo tipo. Para poder afirmar que un estudiante ha utilizado correctamente la unidad, creímos que debería haberlo hecho bien en al menos 3 de las cuatro situaciones planteadas en el ítem 1.2. Sin embargo, el número tan elevado de alumnos que omitió la unidad de medida al dar las áreas de las figuras de este ítem dificulta extraer cualquier conclusión con un carácter general al respecto de los conocimientos y uso que los alumnos hacen de las unidades estándares. A pesar de ello, proporcionaremos algunos datos que pensamos pueden aportar información interesante pero de los que, insistimos, no deberían inferirse comportamientos generales, y de hacerlo así, con muchos recelos, ya que están referidos a un número muy reducido de estudiantes de cada uno de los cursos.

Los siguientes valores representan el número de alumnos que dieron correctamente la unidad en tres o en los cuatro casos considerados en el ítem (referido al total de los alumnos que no omitieron la unidad en ninguno de los cuatro casos).

8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
61'1% (11/18)	80'0% (40/50)	91'7% (11/12)	94'0% (47/50)	69'2% (9/13)	92'3% (12/13)

Tabla 4. Alumnos que utilizan correctamente una unidad estándar en al menos 3 de los 4 casos del ítem 1.2.

Es patente la existencia de un bajísimo número de alumnos que respecto del total de cada curso calculó el área de las cuatro superficies sin omitir la unidad en ninguno de los cuatro casos. Podríamos deducir de estos números, que la práctica totalidad de los alumnos de C.O.U. y de 5° F.M. que sí dan una unidad de medida finalizado el cálculo, mayoritariamente la utilizan correctamente. Creemos que los porcentajes correspondientes a los estudiantes que no han sabido dar la unidad correctamente en al menos tres de las cuatro ocasiones, en los cursos de 8° de E.G.B. (un 39%), 2° de B.U.P. (un 20%) y 3° E.M. (un 30%) ponen de manifiesto un cierto grado de desconocimiento sobre la unidad estándar de superficie. El error más común fue el de utilizar el "cm" en lugar del "cm^2".

Las entrevistas realizadas vienen a confirmar lo que de estos datos hemos concluido, a excepción de lo sucedido en 3º de E.M. Los alumnos de este curso que fueron entrevistados y que habían dado alguna unidad incorrectamente, cuando fueron preguntados al respecto, detectaron enseguida el error y lo rectificaron correctamente, al igual de lo que sucedió con los alumnos de C.O.U. y 5º F.M. Por lo tanto, no deberíamos concluir que todos los alumnos de 3º de E.M. que han utilizado incorrectamente las unidades, las desconocen.

Los siguientes fragmentos de las entrevistas realizadas a los alumnos de 8º de E.G.B. y 2º de B.U.P. son una muestra del tipo de respuesta dado por éstos a preguntas sobre las unidades de medida, que ponen de manifiesto la inseguridad que en general mostraron los alumnos de estos cursos en sus razonamientos como consecuencia de la fragilidad de sus conocimientos sobre la unidad de medida en general y la del área en particular.

Alumno 8º E.G.B.-11 del C.P. Niño Jesús. (Omite unidades en el ítem 1.2. No clasifica en el ítem 2.25 ninguna unidad estándar y de las no estándares, sólo clasifica el triángulo en longitud y el cuadrado en área).

E: Entrevistador.
A: Alumno.

E: A estos números que representan un área, ¿les corresponde una unidad de medida?
A: Sí. Sería 15 cm (Se refiere al área del rectángulo).
E: Entonces, piensas que serían...(Interrumpe el alumno).
A: 15 cm.
E: ¿Por qué no lo pusiste?
A: Es que empecé a hacerlo, ¿no?, y se me olvidó.
E: En la clasificación de unidades del ítem 2.25, dejaste la mayoría por clasificar, ¿por qué? (Se origina una pausa).
A: Es que yo pensaba... Utilizaría esto para medir longitud. (Señala el triángulo).
E: Por ejemplo, la unidad "A" (un segmento), que no la has colocado en ningún sitio, ¿crees que se puede utilizar para medir una longitud, un área o un volumen?
A: No. Bueno... Aunque por ejemplo, podría ser, si tienes un rectángulo, pones una raya ahí (se refiere a la base). Podría ser, ¿no?, y puedes medir la mitad. Ah! no, no, no. Porque entonces tendría un cuadrado, y otro medio cuadrado, y no podría medir el área con eso.
E: O sea, ¿qué no te serviría?
A: No.
E: ¿Y la unidad "D" (dm) que tampoco la has indicado?
A: Sí.
E: Los "dm" ¿para qué se utilizan? o ¿no los conoces?
A: Sí, pero ahora no me acuerdo. Es que pienso que... para figuras, así sin ponerme el dibujo, no...
E: No lo sabes. ¿Y esta unidad, cuál es? (Le señalo el "cm^3").
A: "cm". (Omite el cubo).
E: "cm^3", ¿los conoces?
A: Sí, los he oído.
E: ¿Recuerdas para qué se utilizan?
A: Para medir...
E: No lo recuerdas.
A: No.

Alumno 8º E.G.B.-22 del C.P. Niño Jesús.

E: ¿Por qué no has puesto ninguna unidad cuando has indicado el área del rectángulo?

A: Porque se me olvidó. Serían "cm".
E: En el triángulo pones también "cm", ¿por qué?
A: Porque las dimensiones están en "cm".
E: ¿Por qué en el paralelogramo has puesto "cm²"?
A: Porque al ver esto (el alumno señala la altura del paralelogramo), me ha parecido que no era una figura plana. Que tenía altura. (El alumno levanta la mano como indicando la existencia de la 3ª dimensión).
E: Cuando tú calculas áreas, ¿utilizas "cm"?
A: Sí.
E: ¿Por qué en la clasificación del ítem 2.25, sólo has puesto una unidad de cada tipo?
A: Porque no tenía seguridad a la hora de colocar las otras. No sabía dónde iban.

Alumno 2º B.U.P.-22 del Instituto de Campanar. (Omite unidades en tres de los cuatro casos planteados en el ítem 1.2, y en el otro la unidad que da es incorrecta. Clasificación incompleta en el ítem 2.25. Argumenta de forma insatisfactoria la utilización de "cm²" en los ítemes 1.3,1.5 y 1.7).

E: ¿Por qué aquí pones "cm" (le señalo el rectángulo) y aquí no pones nada (le señalo los otros tres casos)?
A: Aquí son radianes. ¿No? (Señala el círculo).
E: ¿Tu crees que a estos números que representan el área les corresponde una unidad de medida?
A: "cm²". (Refiriéndose al rectángulo).
E: Y ¿por qué pusiste "cm"?
A: No lo sé.
E: Y en los otros casos, ¿qué unidades pondrías?
A: Aquí "cm" también (se refiere al triángulo) porque la altura está medida en "cm". La superficie, o sea la base, también. La hipotenusa también en "cm".
E: ¿Pondrías "cm" o "cm²"?
A: ¿Aquí? (Señala el triángulo). Yo creo que "cm".
E: Y ¿por qué no pones unidades?
A: No lo sé.
E: Y en el paralelogramo, ¿qué pondrías?
A: "cm²". Luego se hace un rectángulo.
E: En el triángulo pondrías "cm", en el rectángulo "cm²" y en el paralelogramo "cm²". ¿Por qué en una ocasión pones "cm" y en otra "cm²"?
A: Porque estos tienen cuatro lados. Entonces, diríamos que es el área, hemos sumado los lados. Entonces, aquí (señala el triángulo) no veo por qué cuadrado, ¿por qué "cm²"?
E: Y en el círculo, ¿qué unidad pondrías?
A: Creo que radianes, porque si se multiplica por π, la unidad de π son los radianes.
E: ¿Qué unidad de medida pondrías en los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7?
A: "cm²". Sí "cm²".
E: ¿Por qué pondrías "cm²"?
A: Porque está dividida la superficie en cuadrados.

Pensamos que éstos son los resultados de una enseñanza inadecuada, donde al alumno se le bombardea con una gran cantidad de información, sin reflexionar sobre el momento y modo más adecuado de proporcionársela.

¿SE INCLINAN LOS ALUMNOS POR EL USO DE LA UNIDAD ESTÁNDAR DE ÁREA, AÚN CUANDO NO SE DA EXPLÍCITAMENTE NINGUNA DIMENSIÓN Y EN CONSECUENCIA NO SE INDICA UNIDAD ALGUNA?

Para ello, estudiamos el porcentaje de alumnos que, en cada uno de los problemas 1.3, 1.5 y 1.7, habiendo dado el área en función de una unidad, lo han hecho usando unidades estándares, fundamentalmente el cm^2. Al igual que sucedió en el ítem 1.2, fueron muy pocos los alumnos que no omitieron la unidad en estos ítemes, así pues y como ya comentamos en el caso anterior debemos tener una especial precaución al extraer conclusiones de los datos que a continuación se muestran.

	ítem 1.3	ítem 1.5	ítem 1.7
8° E.G.B.	31'6% (12/38)	30'8% (8/26)	36'0% (9/25)
2° B.U.P.	55'5% (5/9)	70'0% (14/20)	66'7% (26/39)
C.O.U.-L	42'8% (3/7)	50'0% (3/6)	78'6% (11/14)
C.O.U.-C	18'2% (4/22)	25'6% (10/39)	29'3% (12/41)
3° E.M.	0'0% (0/7)	20'0% (1/5)	33'3% (3/9)
5° F.M.	50'0% (3/6)	50'0% (4/8)	66'7% (4/6)

Tabla 5. Alumnos que utilizan una unidad estándar en el ítem 1.3, 1.5 y 1.7.

Como se puede observar el comportamiento de los alumnos de los distintos cursos es bastante heterogéneo. Contrasta el uso tan bajo de unidades estándares por parte de los alumnos de C.O.U.-C en relación a los porcentajes correspondientes a los alumnos de 2° de B.U.P. y los de 5° F.M., junto con los de C.O.U.-L, que muestran un uso casi mayoritario de la unidad estándar. Por otra lado, el bajo porcentaje de utilización del cm^2 por parte de los alumnos de 3° E.M. podría estar justificado por su mayor familiaridad con las unidades no estándares, como consecuencia de la instrucción específica que reciben sobre el área a lo largo de su formación para maestros. La causa de que los alumnos de 8° de E.G.B. no utilicen tampoco mayoritariamente la unidad estándar podría estar asociada al tipo de procedimiento que utilizan para resolver estos tres problemas, basado en el conteo de unidades cuadradas.

Los comportamientos anteriores nos llevaron a estudiar la existencia de posibles dependencias entre las variables: curso, tipo de procedimiento utilizado en la resolución de estos ítemes y el tipo de unidad empleada en ellos. Para ello procedimos a un análisis loglineal entre las variables siguientes:

- variable factor experimental: curso;
- variables respuestas:
  - tipo de procedimiento utilizado: procede al conteo de unidades cuadradas o se ayuda de un procedimiento geométrico, utiliza únicamente un procedimiento numérico, u otros procedimientos erróneos;
  - tipo de unidad empleada: unidad no estándar, estándar u omitida.

El análisis loglineal, realizado en los alumnos que en cada curso habían respondido a estos ítemes, detectó sólo interacciones a dos niveles y entre las variables: i) curso y tipo de procedimiento, ii) curso y tipo de unidad y iii) tipo de procedimiento y tipo de unidad. Las dos primeras relaciones del tipo factor-respuesta, y la última del tipo causa-efecto han sido estudiadas con mayor detalle en sus apartados correspondientes, que se muestran a lo largo de la sección 3.4.

En esta ocasión procedimos al estudio de las dos relaciones detectadas donde la unidad de medida era una de las variables implicadas, para lo que utilizamos el test de la χ^2. El estudio de la dependencia entre las variables curso y tipo de unidad utilizada no proporcionó nuevos datos de los que ya disponíamos, al ratificar que la mayoría de los alumnos de los distintos cursos que habían resuelto estos problemas habían omitido la unidad. Estos datos los proporcionaron las tablas de contingencia correspondiente a cada problema donde aparecía como categoría dominante la correspondiente a la unidad omitida. Posteriormente estudiamos la relación entre el tipo de procedimiento y el tipo de unidad utilizada en cada uno de los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7, y del que a continuación exponemos sus resultados más interesantes.

La tabla siguiente muestra los valores correspondientes al p-valor por curso y problema, que representaremos de modo abreviado por "p", procedente del test de la χ^2 para el estudio de la relación entre el tipo de procedimiento utilizado en los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7 y el tipo de unidad empleada en éstos.

	ítem 1.3	ítem 1.5	ítem 1.7
8° E.G.B.	p = 0'01999 (*)	p = 0'00025 (**)	p = 0'71617
2° B.U.P.	p = 0'00253 (**)	p = 0'42657	p = 0'61214
C.O.U.-L	p = 0'01921 (*)	p = 0'00072 (**)	p = 0'40213
C.O.U.-C	p = 0'25695	p = 0'00067 (**)	p = 0'00063 (**)
3° E.M.	p = 0'02306 (*)	p = 0'11142	p = 0'05386
5° F.M.	p = 0'88338	p = 0'97058	p = 0'41160

Tabla 6. p-valores correspondientes al estudio de una posible relación entre el tipo de unidad utilizada y el tipo de procedimiento empleado en la resolución de los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7.

Los valores (*) que representan un $p<0'05$ y (**) un $p<0'01$ indican la existencia de una cierta dependencia entre estas dos variables. De modo que, en determinados cursos y problemas la unidad de medida utilizada depende del procedimiento empleado para su resolución.

También del análisis de los p-valores se deduce que la dependencia o no de estas dos variables, no depende sólo del curso al que pertenecen los alumnos, sino que podría estar relacionada también por las características propias de cada problema, ya que en el problema del ítem 1.3 se ha manifestado mayoritariamente esta dependencia en contra de lo que ha sucedido en el ítem 1.7.

De los valores de la tabla anterior se constata que únicamente en los alumnos de 5° F.M. existe independencia entre el razonamiento empleado y la unidad escogida.

Al estudiar las tablas de contingencia correspondientes a cada curso, que se pueden consultar en el Anexo 4 de esta memoria, se observa que los alumnos que se han ayudado de un procedimiento geométrico o han contado el número de unidades cuadradas para determinar el área de la superficie dada, tienden a utilizar una unidad no estándar de medida.

¿RECONOCEN LOS ALUMNOS DIVERSAS UNIDADES DE MEDIDA, TANTO ESTÁNDARES COMO NO, DE LONGITUD, SUPERFICIE Y VOLUMEN?

Para tal fin estudiamos la clasificación realizada por los alumnos en el ítem 2.25 -ítem que fue abordado por la práctica totalidad de los alumnos de la muestra-, mostrando a continuación los datos referidos a aquéllos que fracasaron de forma rotunda en la identificación conjunta tanto de las unidades estándares como las no estándares de longitud, superficie y volumen, y de los que, por lo tanto, podemos afirmar que las desconocen.

	desconocen las unidades estándares	desconocen las unidades no estándares
8° E.G.B.	41'7% (35/84)	41'7% (35/84)
2° B.U.P.	16'0% (20/125)	12'8% (16/125)
C.O.U.-L	20'0% (16/80)	11'2% (9/80)
C.O.U.-C	7'8% (7/90)	0'0% (0/80)
3° E.M.	7'1% (3/42)	2'4% (1/42)
5° F.M.	3'4% (1/29)	0'0% (0/29)

Tabla 7. Alumnos que realizan una clasificación totalmente errónea de las unidades estándares y no estándares de medida en el ítem 2.25.

Aunque no son grandes las diferencias se observa un mayor número de alumnos que desconocen las unidades estándares frente a las no estándares en todos los cursos, a excepción de 8° de E.G.B. donde coinciden. Estos datos nos sorprenden porque creemos que que debería haberse dado la situación contraria, ya que las unidades no estándares, normalmente, no son estudiadas en ningún nivel educativo.

Por otra parte es interesante reflexionar sobre la evolución de estos porcentajes, bastante elevados en los alumnos de 8° de E.G.B. y apenas significativos a partir de los alumnos de C.O.U.-C. Estos resultados muestran un importante desconocimiento de las unidades por parte de los alumnos de 8° de E.G.B., en contra de lo que parecería lógico esperar, dado que son éstos los que más reciente tienen la instrucción sobre el concepto que nos ocupa. Ello nos lleva a considerar que la madurez del alumno es un factor necesario para asimilar el concepto de unidad. Sin embargo, este análisis estaría incompleto si no tuviéramos en cuenta los resultados correspondientes a los alumnos de C.O.U.-L, bastante inferiores a los de C.O.U.-C, y muy similares a los obtenidos por los de 2° de B.U.P. Por lo tanto, creemos que tanto la madurez del alumno como su formación matemática son dos factores esenciales para el conocimiento y comprensión de la unidad de medida.

A continuación mostramos los porcentajes correspondientes al número de alumnos que en cada curso demostró desconocer la unidad estándar y no estándar para cada una de las magnitudes, longitud, área y volumen.

	longitud		área		volumen	
	u. e.	u. no e.	u. e.	u. no e.	u. e.	u. no e.
8° E.G.B.	44'0%	44'0%	59'5%	57'1%	57'1%	55'9%
2° B.U.P.	24'0%	16'8%	24'8%	23'2%	17'6%	18'4%
C.O.U.-L	20'0%	11'3%	27'5%	15'0%	26'3%	15'0%
C.O.U.-C	8'9%	1'1%	12'2%	2'2%	10'0%	0'0%
3° E.M.	9'5%	4'8%	19'0%	11'9%	14'3%	4'8%
5° F.M.	3'4%	0'0%	3'4%	0'0%	3'4%	0'0%

Tabla 8. Porcentaje de alumnos que realizan una clasificación totalmente errónea de la unidad estándar (u. e.) y no estándar (u. no e.) de longitud, área y volumen en el ítem 2.25.

Se observa que las unidades de área son las más desconocidas por los alumnos indistintamente del curso al que pertenecen, si bien no existe gran diferencia con el desconocimiento manifestado por los estudiantes sobre las unidades de volumen.

A toda esta información podemos añadir que el 20'2% (17/84) de los alumnos de 8° de E.G.B., el 5'6% (7/125) de los de 2° de B.U.P., el 6'3% (5/80) de los de C.O.U.-L, el 3'3% (3/90) de los de C.O.U.-C, el 7'1% (3/42) de los de 3° E.M. y el 6'9% (2/29) de los de 5° F.M. sólo indicó el cuadrado como posible unidad no estándar de área. Si bien en la mayoría de los cursos estas cifras son poco significativas no ocurre lo mismo para la correspondiente a 8° de E.G.B. que junto con otros datos ya proporcionados o que se irán proporcionando a lo largo de este análisis, pone de manifiesto la pobreza del conocimiento que estos alumnos poseen sobre la unidad de área.

Finalmente queremos mostrar los datos referentes al número de alumnos que consiguió realizar correctamente la clasificación solicitada en este ítem, que junto con los mostrados en las Tablas 7 y 8 ponen de manifiesto el desconocimiento que los alumnos de los distintos cursos, especialmente los de 8° de E.G.B. poseen sobre las unidades de medida.

	clasificación correcta de las unidades estándares	clasificación correcta de las unidades no estándares	clasificación correcta de las unidades estándares y no estándares
8° E.G.B.	14'3% (12/84)	10'7% (9/84)	8'3% (7/84)
2° B.U.P.	51'2% (64/125)	42'4% (53/125)	32'8% (41/125)
C.O.U.-L	55'0% (44/80)	40'0% (32/80)	32'5% (26/80)
C.O.U.-C	75'5% (68/90)	80'0% (72/90)	65'5% (59/90)
3° E.M.	71'4% (30/42)	69'0% (29/42)	59'5% (25/42)
5° F.M.	86'2% (25/29)	89'6% (26/29)	82'7% (24/29)

Tabla 9. Alumnos que realizan una clasificación totalmente correcta de las unidades del ítem 2.25, por tipos y conjuntamente.

INTERÉS DE LAS RESPUESTAS DADAS AL ÍTEM 2.25

De la información proporcionada por el estudio de la implicación ¿clasificación correcta en el ítem 2.25 implica la utilización correcta de unidad en el ítem 1.2?, se confirma, lo que ya durante las entrevistas se constató, que el ítem 2.25 proporciona una información suficientemente fidedigna sobre el conocimiento que los alumnos poseen sobre las diferentes unidades de medida, ya que por ejemplo, en 8° de E.G.B., de los que habían realizado correctamente la clasificación, el 100% dio correctamente la unidad en el caso del rectángulo y círculo, el 85'7% y el 83'3% en los casos del triángulo y paralelogramo, respectivamente. Esto se verifica también en los otros cursos, aunque con porcentajes más bajos, ya que en los cursos superiores existe un elevado número de alumnos que no indicó la unidad.

¿ESTÁN FAMILIARIZADOS LOS ALUMNOS CON EL USO DE UNIDADES NO ESTÁNDARES DE SUPERFICIE?

Con el fin de conocer algo sobre el comportamiento de los alumnos cuando se trabaja con unidades no estándares, estudiamos las respuestas dadas por éstos a las distintas cuestiones planteadas en el ítem 2.9.

La siguiente tabla muestra el número de alumnos que identificó correctamente la unidad utilizada en la medida del área de cada una de las figuras consideradas en los casos (A) y (B), así como el dato correspondiente al número de alumnos que dejó en blanco este ítem.

	identificación correcta de la unidad utilizada en la medida del área		no contestan	
	A	B	A	B
8° E.G.B.	57'9% (33/57)	80'4% (41/51)	44'1% (45/102)	50'0% (51/102)
2° B.U.P.	90'7% (98/108)	85'1% (86/101)	17'6% (23/131)	22'9% (30/131)
C.O.U.-L	85'5% (65/76)	87'5% (63/72)	25'5% (26/102)	29'4% (30/102)
C.O.U.-C	85'4% (88/103)	90'3% (84/93)	6'4% (7/110)	15'4% (17/110)
3° E.M.	95'3% (41/43)	92'5% (37/40)	2'3% (1/44)	9'1% (4/44)
5° F.M.	90'6% (29/32)	83'9% (26/31)	0'0% (0/32)	3'1% (1/32)

Tabla 10. Alumnos que identifican correctamente la unidad utilizada en la medida del área en los casos (A) y (B) del ítem 2.9, y número de alumnos que lo deja en blanco.

Si bien no existen grandes diferencias entre los porcentajes correspondientes a los alumnos que en cada curso identificaron correctamente la unidad utilizada en la medida del área en los distintos casos (a excepción del dato correspondiente a 8° E.G.B., caso (A)), sí las hay entre los datos correspondientes al número de alumnos que dejó en blanco el ítem. Ello permite detectar dos comportamientos diferentes según los alumnos pertenecen a los cursos de menor formación matemática (8° E.G.B., 2° B.U.P. y C.O.U.-L) o de mayor formación matemática (C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M.). Para los alumnos pertenecientes a los cursos del primer bloque el ítem no resultó sencillo, especialmente para los de 8° de E.G.B., donde además del elevado número que no respondió al ítem, de los que sí afrontaron su resolución, aproximadamente el 42% y el 20% identificaron erróneamente la unidad de las figuras (A) y (B) respectivamente. Aunque la práctica totalidad de los alumnos de los cursos del segundo bloque afrontara la resolución del ítem y la mayoría lo resolviera con éxito, pensamos que las cifras muestran que también a parte de ellos la tarea de identificación de la unidad les ha planteado algunas dificultades.

Por otra parte, a excepción de lo ocurrido en 8° de E.G.B. que más adelante comentaremos, el que un mayor número de alumnos dejara en blanco el apartado (B) y éste fuera correctamente resuelto por un menor número de estudiantes en cada curso, en valores absolutos que el apartado (A), nos hacen suponer que la identificación de la unidad de medida cuando ésta está reproducida de forma completa en la superficie resulta más sencilla que cuando la unidad aparece fraccionada para el recubrimiento exacto de la superficie, aunque realmente las diferencias no fueron muy significativas. Este hecho se confirma al observar la cantidad de alumnos que eligen una unidad de longitud, en lugar de identificar la unidad de área utilizada, con el fin de poder comparar las áreas de las dos superficies, verificándose un aumento en el caso (B) respecto del (A), como a continuación se muestra:

	caso (A): cuadrilátero			caso (B): triángulo		
	uso de una unidad correcta de longitud	uso de una unidad incorrecta de longitud	uso de una unidad de longitud	uso de una unidad correcta de longitud	uso de una unidad incorrecta de longitud	uso de una unidad de longitud
8° E.G.B.	0'0% (0)	7'0% (4)	7'0% (4)	3'9% (2)	7'8% (4)	11'7% (6)
2° B.U.P.	2'8% (3)	0'9% (1)	3'7% (4)	3'0% (3)	0'0% (0)	3'0% (3)
C.O.U.-L	5'3% (4)	0'0% (0)	5'3% (4)	9'7% (7)	0'0% (0)	9'7% (7)
C.O.U.-C	1'9% (2)	0'0% (0)	1'9% (2)	5'4% (5)	0'0% (0)	5'4% (5)
3° E.M.	0'0% (0)	2'3% (1)	2'3% (1)	2'5% (1)	0'0% (0)	2'5% (1)
5° F.M.	6'3% (2)	0'0% (0)	6'3% (2)	9'7% (3)	0'0% (0)	9'7% (3)

Tabla 11. Alumnos que utilizan una unidad de longitud para la comparación del área de las figuras del ítem 2.9.

Pudimos comprobar que la práctica totalidad de alumnos que habían identificado correctamente la unidad de superficie en el caso (B), lo habían conseguido también en el caso (A). Tan sólo, en el caso de 8° de E.G.B. la implicación no fue tan fuerte, siendo el porcentaje de alumnos que así habían procedido del 70%. La implicación contraria no se dio. Lo que vendría también, a apoyar la afirmación anterior al respecto de la existencia de una mayor dificultad en la identificación de la unidad cuando ésta no está siempre reproducida en su totalidad.

¿Qué ocurre con los alumnos de 8° E.G.B.? De nuevo estos alumnos se comportan de forma contraria a lo que se espera, considerando lo que podríamos llamar la tónica general. Es decir, mientras que a los estudiantes de los otros cursos les resulta más sencilla la identificación de la unidad de superficie de forma triangular del caso (A), que la de forma cuadrada del caso (B), por lo que acabamos de comentar, a ellos les resulta mucho más dificultoso, ya que sólo el 57'9% lo consigue, frente al 80'4% que lo logra en (B). Creemos que estos resultados se podrían justificar si pensamos de nuevo en la instrucción recibida por estos alumnos sobre la unidad no estándar de medida, que parece limitarse únicamente a la unidad cuadrada, por lo que están entrenados a trabajar con ella, y por lo tanto les resulta más sencillo identificarla, antes que cualquier otra unidad de superficie de forma diferente.

Nos pareció interesante también conocer la actitud que adoptaron los alumnos de los distintos cursos en el momento de comparar dos áreas medidas con unidades diferentes. Para ello observamos los argumentos que mayoritariamente esgrimieron los estudiantes al emitir una opinión sobre las áreas del rectángulo y triángulo.

En el momento de comparar las áreas de las dos superficies la mayoría de los estudiantes de todos los cursos se inclinó por intentar establecer una equivalencia entre las unidades de medida que les condujera a una relación del tipo menor, mayor o igual, a excepción de los alumnos de 5° F.M. que mayoritariamente optaron por afirmar que no se podían comparar, ya que las unidades eran diferentes.

En la siguiente tabla queremos mostrar algunas de las razones inconsistentes dadas por los alumnos, ya que pensamos ponen de manifiesto la debilidad de su argumentación y en consecuencia la de su conocimiento sobre la unidad de medida.

	no hay datos	40 > 6	me parece	unidad A < unidad B	otras	**total**
8° E.G.B.	1'5%	17'9%	10'4%	6'0%	29'9%	65'7%
2° B.U.P.	0'0%	6'0%	6'0%	0'0%	26'2%	38'2%
C.O.U.-L	3'3%	13'1%	16'4%	1'6%	8'2%	42'6%
C.O.U.-C	2'4%	6'0%	2'4%	2'4%	8'4%	21'6%
3° E.M.	0'0%	0'0%	2'6%	5'3%	10'5%	18'4%
5° F.M.	3'8%	0'0%	0'0%	0'0%	0'0%	3'8%

Tabla 12. Argumentaciones erróneas dadas por los alumnos para justificar su respuesta en el ítem 2.9.

Estos datos ponen de manifiesto la existencia de un elevado número de alumnos que avalan su elección con argumentos basados en errores conceptuales, o mediante razonamientos inconsistentes y sin sentido. Creemos que los porcentajes totales son demasiados altos en todos los cursos, teniendo en consideración el nivel de cada uno de ellos, a excepción del registrado en 5° F.M. que corresponde a la respuesta de un único alumno y por lo tanto, pensamos que no es relevante. Así pues, la forma de actuar de estos alumnos viene a advertirnos de la existencia de demasiados estudiantes en los distintos niveles educativos -con la única salvedad de los alumnos de 5° F.M.- que no entienden el papel de la unidad no estándar de superficie, ni están habituados a trabajar con ella.

Carácter de no discretitud de la unidad de medida

Podemos afirmar con total convencimiento a partir del estudio del comportamiento de los alumnos en distintos ítemes y de lo que algunos de ellos comentaron durante las entrevistas, que desde 8° de E.G.B. hasta 5° F.M. admiten que la unidad puede y debe partirse para facilitar la medida.

En el ítem 2.6, sólo un alumno de 2° de B.U.P. ignoró las fracciones de la unidad en los dos casos, y dos consideraron las fracciones como unidades enteras, también en los dos casos. Ningún otro comportamiento de este tipo se detectó en el resto de alumnos de los demás cursos, aunque algunos alumnos de 8° de E.G.B. (muy pocos) dieron en este ítem un tipo de respuesta difícilmente catalogable, que se comentará en el apartado siguiente dedicado al carácter de recubrimiento de la unidad de medida.

Con carácter informativo, queremos comentar que si bien la práctica totalidad de los estudiantes consideró las fracciones de la unidad en los dos casos del ítem 2.6, no todos ellos consiguieron dar con exactitud la medida del área, estando ocasionados los errores por una lectura errónea de las fracciones de la unidad -generalmente consistente en considerar la fracción "1/3" como "1/4" o "1/2"- y/o, por una suma incorrecta de éstas.

También pudimos comprobar que para dibujar las cuatro figuras solicitadas en el ítem 2.8 de área 1 cm^2, los alumnos, en general, no tuvieron ninguna dificultad en partir la unidad cuadrada para su construcción.

Carácter iterativo y de recubrimiento de la unidad de medida

Si en las respuestas en el caso (A) del ítem 2.6 ignoramos los errores cometidos al identificar y contar las distintas fracciones de la unidad, nos encontramos con que el 76'48% de los de 8º de E.G.B., el 95'43% de los de 2º de B.U.P., el 91'18% de los de C.O.U.-L, el 100% de los de C.O.U.-C, el 97'73% de los de 3º E.M. y el 96'875% de los de 5º F.M. han sabido que debían proceder al recuento de las unidades que cubrían la superficie para cuantificar el área.

Nota.- Nos hemos referido únicamente a las respuestas dadas en el caso (A), ya que pensamos que la situación planteada en (B) es un poco más compleja al considerar la tercera parte de la unidad, y por lo tanto pueden haber existido otros motivos al margen de lo que deseamos estudiar, como por ejemplo el hecho de operar con fracciones, que hayan dificultado su resolución.

¿Los alumnos que proceden a un recuento del número de unidades cuadradas contenidas en el polígono, comprenden el carácter de recubrimiento que posee la unidad bidimensional del área? Ésta fue la pregunta que nos hacíamos a la hora de interpretar las respuestas dadas por los alumnos. Pensamos que no sería correcto extraer esta conclusión del análisis de este comportamiento en este único ítem y que éste se debería comparar con actitudes en otros ítemes relacionados. Sin embargo, sí creíamos que se podría concluir algún resultado interesante del análisis de los comportamientos de aquellos alumnos que no respondieron este ítem o lo hicieron de forma verdaderamente desconcertante.

Así pues, nos planteamos estudiar las respuestas dadas por los alumnos que habían fracasado completamente en el ítem 2.6, en los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 2.9, problemas que requieren para su resolución de una cierta comprensión del carácter de recubrimiento de la unidad de medida, pensando que el alumno que dejó en blanco el ítem 2.6 o lo resolvió incorrectamente, no entiende este carácter de la unidad de medida y en consecuencia no podría abordar la resolución de los ítemes indicados anteriormente.

Para ello pensamos realizar un contraste de hipótesis con objeto de estudiar si existía algún tipo de dependencia entre el comportamiento mostrado por los alumnos en estos ítemes. A pesar de que en esta ocasión el número de casos a estudio es reducido -ya que únicamente dejan en blanco el ítem 2.6: 16 alumnos de 8º de E.G.B., 5 de 2º de B.U.P., 9 de C.O.U.-

L, 1 de 3° E.M. y 1 de 5° F.M., y dan respuestas erróneas sin sentido: 8 alumnos de 8° de E.G.B. y 1 de 2° de B.U.P.- nos decidimos a realizar el test de la χ^2 con los alumnos que dejaron en blanco el ítem 2.6, pensando que los p-valores y en especial la distribución de los alumnos en las celdas de las tablas de contingencia resultantes, podrían proporcionar algún tipo de información interesante. Para los 8 alumnos de 8° de E.G.B. que habían dado las respuestas incorrectas incomprensibles en el ítem 2.6 estudiamos su comportamiento en los otros ítemes, comprobando que la práctica totalidad de ellos los habían dejado en blanco, y los pocos que respondieron lo hicieron de forma incorrecta.

La tabla siguiente muestra los p-valores resultantes del test de la χ^2 realizado entre la variable categórica que representaba si el alumno había resuelto o no el ítem 2.6 y otra variable de las mismas características referida a los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 2.9.

	responden o dejan en blanco el ítem 1.3	responden o dejan en blanco el ítem 1.5	responden o dejan en blanco el ítem 1.7	responden o dejan en blanco el ítem 2.9
8° E.G.B.	$p = 0'00027$ (**)	$p = 0'00432$ (**)	$p = 0'00256$ (**)	$p = 0'00112$ (**)
2° B.U.P.	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p = 0'00018$ (**)
C.O.U.-L	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p = 0'00299$ (**)
3° E.M.	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p > 0'05$
5° F.M.	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p > 0'05$	$p > 0'05$

Tabla 13. p-valores correspondientes al estudio de una posible relación entre los alumnos que dejan en blanco o responden el ítem 2.6 y los que dejan en blanco o responden los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 2.9.

Nota.- No aparece en el estudio C.O.U.-C ya que ningún alumno de este curso dejó el ítem 2.6 por responder.

Así pues, los p-valores correspondientes a 8° de E.G.B. indican que el hecho de que los alumnos de este curso respondan o no a cada uno de los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 2.9, depende en cierta medida de si lo hacen o no en el ítem 2.6. Se ha podido comprobar del análisis de la distribución de los datos en la tabla de contingencia (ver Anexo 4), una clara tendencia de los alumnos que han dejado en blanco el ítem 2.6, a dejar en blanco los problemas 1.3, 1.5, 1.7 y el 2.9.

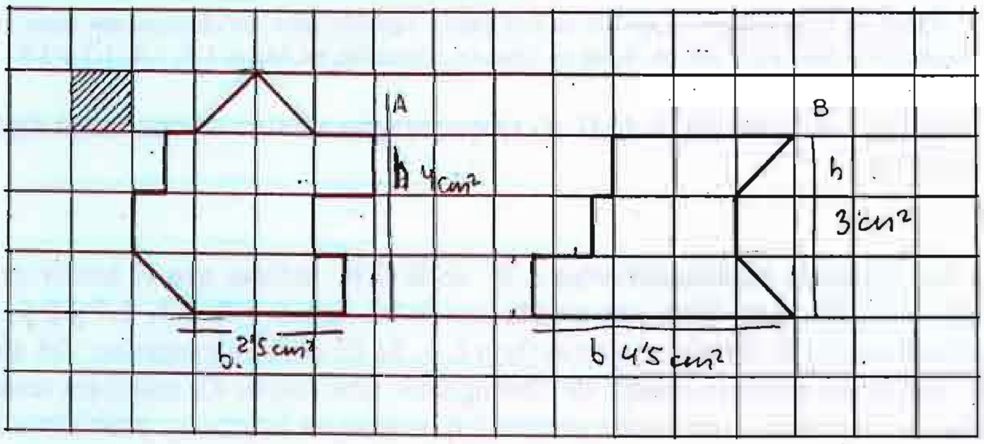
De la tabla anterior también se deduce una dependencia entre ítem 2.6 con el ítem 2.9, en los cursos de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L. Comprobando igual que antes a partir de la observación de las tablas de contingencia (ver Anexo 4), que los alumnos que dejaron en blanco el ítem 2.6, tienden a dejar en blanco el ítem 2.9. Este mismo comportamiento se observó en los ítemes 1.3 y 1.5, aunque con éstos no se da una dependencia estadística.

Del estudio de las tablas de contingencia correspondientes a cada curso y casos considerados, y en especial del estudio de los valores obtenidos en 8º de E.G.B., creemos que se confirma la necesidad de comprensión del carácter de recubrimiento de la unidad de medida para poder afrontar la resolución del ítem 2.6 y 2.9.

A pesar de las limitaciones de este estudio como consecuencia del reducido número de casos a estudio, creemos que la distribución de los alumnos que muestran las tablas de contingencia nos permite extraer como conclusión que los alumnos de 8º E.G.B. que dejan en blanco este ítem o dan una respuesta incomprensible, desconocen el carácter de recubrimiento de la unidad de medida y en consecuencia no entienden el área como el número de unidades que recubren la superficie, lo que les impide poder afrontar con éxito el ítem 2.9 y los problemas 1.3, 1.5 y 1.7, que mayoritariamente fueron resueltos en este nivel mediante el conteo de unidades cuadradas. Veamos un ejemplo de este comportamiento.

Alumno 8º E.G.B.-3. En el ítem 2.6 para determinar el área de los polígonos (no cuadriláteros) multiplica dos dimensiones lineales que él mismo asigna a la figura como "base" y "altura". Podemos observar cómo para calcular el área de las distintas superficies en los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7 procede exactamente del mismo modo. Este alumno se refirió al área en el ítem 1.1, como: "Es lo que mide la superficie de dicha figura".

Ítem 2.6

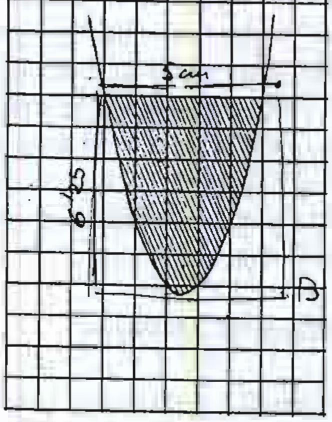


6.1 El área de A es ......10 cm4..............

6.2 El área de B es ....13'5 cm4............

Alumno 8º E.G.B.-3

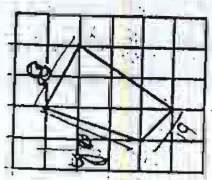
ítem 1.3



Para este resultado cada cuadrito es un centímetro.

$\frac{B \cdot a}{2} \Rightarrow \frac{5\,cm \cdot 6'25\,cm}{2} = 31'25\,cm^2$ area

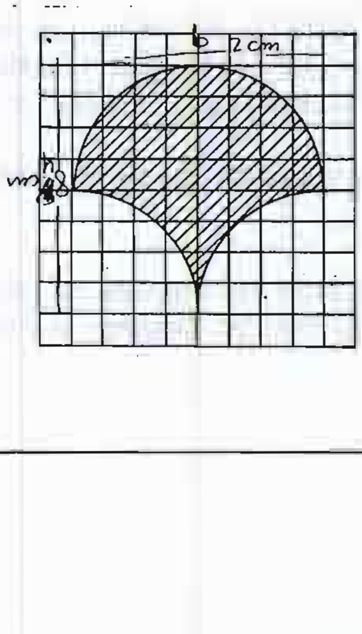
ítem 1.5



Medio cuadrado es un cm

$\frac{(B \cdot b) \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{(2 \cdot 1) \cdot 3}{2} = 3$?

ítem 1.7



cada cuadrito es un cm.

$b \cdot a \Rightarrow 2 \cdot 8 = \boxed{16\,cm^2}$

Tras este estudio podríamos decir que la práctica totalidad de los alumnos de los distintos cursos, a excepción de los de 8º de E.G.B., conocen el carácter de recubrimiento de la unidad de medida, salvo algún caso particular detectado en 2º de B.U.P. o C.O.U.-L. Por lo que respecta a los alumnos de 8º de E.G.B., el 23'52% de ellos no lo comprende.

Por otra parte podemos añadir que en el ítem 2.10, casi todos los alumnos de la muestra de cada curso (a excepción de dos alumnos de C.O.U.-L que lo dejaron en blanco) supieron que debían iterar la unidad de medida proporcionada para poder determinar el área del polígono dado. Reflexionando sobre el porcentaje de éxito en este ítem, llegamos a la conclusión de que tal vez y con objeto de asegurarnos de que el alumno comprende que el área se obtiene por iteración de la unidad escogida, se debería cambiar el modo en el que se formula la pregunta, y en lugar de pedir al alumno el número de baldosas necesarias para recubrir la superficie, preguntarle directamente por el área de la superficie.

Relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de unidades

De las respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.11 podemos concluir que prácticamente el 100% de los alumnos de cada curso afirmó que se requeriría mayor número de baldosas para recubrir la superficie poligonal del ítem 2.10, si se utilizara una baldosa menor que la dada en un principio. Sin embargo, y como ya explicamos cuando comentamos algunos de los resultados de las entrevistas (3.3.5.2.), pudimos comprobar que aunque las respuestas correctas dadas por los alumnos de los diferentes cursos rondaron prácticamente el 100% en estos ítemes, creemos que los alumnos no son conscientes cuando los resuelven de la relación inversa existente entre el tamaño de la unidad y el número obtenido aunque, una vez reflexionado sobre ello, lo aceptan.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la unidad de medida

- Existe una costumbre generalizada entre los alumnos de todos los cursos y niveles de no indicar la unidad utilizada para el cálculo del área ni tras el cálculo de ésta. Los motivos que colaboran en su omisión son diversos:

    · No disponer de un número determinado que represente la medida del área como consecuencia por ejemplo, de no haber finalizado el cálculo al dejar indicada alguna/s de las operaciones implicadas en él. Observado en los alumnos de todos los cursos.

    · Utilizar un procedimiento "largo", consistente en algo más que aplicar una fórmula. Observado en los alumnos de todos los cursos.

    · No considerar necesario indicar la unidad porque se da por supuesto, se sobrentiende o simplemente porque se olvida. Argumentado por los alumnos de los cursos superiores: C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M.

· Desconocer la unidad adecuada a emplear o poseer inseguridad en el uso de las unidades. Observado especialmente en los alumnos de 8° de E.G.B. y 2° de B.U.P.

- La omisión de la unidad de medida por parte de un alumno tiene generalmente interpretaciones diferentes según éste pertenezca a C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M., o bien a 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L. Mientras que para estos últimos la omisión está normalmente causada por una falta de conocimiento de las unidades de medida, en los primeros está motivada por un simple olvido.

- Los alumnos no reconocen diversas unidades estándares y no estándares de medida de longitud, área y volumen. Sólo una minoría de los estudiantes de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, una escasa mayoría de los de C.O.U.-C y 3° de E.M., y aproximadamente un 83% de los 5° F.M. clasificaron correctamente una colección de unidades como las descritas anteriormente.

- Existe un mayor desconocimiento de las unidades de medida estándares que de las no estándares por parte de los alumnos de los distintos cursos.

- En todos los cursos se ha detectado en los alumnos un mayor desconocimiento de las unidades de área que de las de longitud y volumen.

- La unidad estándar utilizada mayoritariamente por todos los alumnos ha sido el cm^2, y la no estándar la unidad cuadrada.

- El error más común cometido por los alumnos de cada uno de los cursos en el uso de unidades estándares de área es la utilización del "cm" en lugar del "cm^2".

- En general, a todos los alumnos les resulta más sencillo identificar una unidad de medida bidimensional que recubre una superficie siempre reproducida de forma íntegra, que aquélla de la que se muestra en algún momento, sólo una fracción.

- Una mayoría de los alumnos de cada curso, representando ésta en C.O.U.-L, C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M. la práctica totalidad de ellos, conoce y utiliza las tres propiedades de la unidad de medida: el carácter de no discretitud, el carácter de recubrimiento e iterativo de la unidad y la relación inversa entre el número de unidades y el tamaño de ésta.

- La totalidad de los estudiantes de 3° E.M. y 5° F.M. y la práctica totalidad de los de C.O.U.-C sí tienen en cuenta que el número resultante de la medida depende de la unidad escogida, hecho que parece ser reconocido por una mayoría, si bien no muy elevada, de los de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, y por una minoría de los alumnos de 8° de E.G.B.

- En aquellas situaciones en las que ninguno de sus elementos sugiere el uso de una unidad estándar se ha observado que los alumnos de 2° de B.U.P., C.O.U.-L y 5° F.M., que acostumbran a dar la unidad, tienden a utilizar mayoritariamente la unidad estándar "cm^2", en contra de lo que realizan los alumnos de C.O.U.-C, 8° de E.G.B. y 3° E.M., observándose un uso dominante de la unidad cuadrada por parte de los alumnos de estos dos últimos cursos, y que nosotros atribuimos a la instrucción que han recibido.

- Existe una dependencia estadística entre el tipo de procedimiento utilizado en la resolución de ciertos problemas (procedimiento geométrico o conteo de unidades cuadradas, procedimiento numérico y otros erróneos), y el tipo de unidad utilizada (unidad no estándar, estándar y omitida). Se ha detectado en todos los cursos a excepción de 5° F.M.

- Globalmente los mejores resultados referidos al concepto "unidad de área" corresponden a los alumnos de 5° F.M., le siguen los de C.O.U.-C y después los de 3° E.M. A éstos les siguen los de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L que obtienen resultados semejantes, siendo mejores en un gran número de ocasiones los obtenidos por los de 2° de B.U.P., a pesar de la diferencia de nivel escolar y edad que existe con los de C.O.U.-L. Finalmente los peores resultados son los obtenidos por los estudiantes de 8° de E.G.B., que curiosamente son los que más reciente tienen la instrucción específica sobre la unidad de medida en general y de superficie en particular. Esta clasificación de los alumnos por cursos, según sus éxitos, nos hace ver el papel que juega la formación matemática general del alumno en su comprensión de la unidad de medida, aún cuando esta formación no sea específica de ella.

- Creemos poder afirmar que los alumnos de C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M. poseen un buen grado de conocimiento y comprensión de la unidad de superficie, cosa que no sucede en los alumnos de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, resultando este grado deficiente en los alumnos de 8° de E.G.B.

Es un hecho constatado que la formación específica relativa a las unidades de medida y en particular a las unidades de área, que se imparte a los alumnos durante los últimos cursos de E.G.B. y rara vez es retomada por algún profesor en niveles posteriores, fracasa rotundamente, y que la formación matemática general adquirida por los alumnos a lo largo de sus estudios en posteriores niveles va mejorando su conocimiento de la unidad de área, hasta el punto de proporcionar a los del nivel superior un aceptable grado de conocimiento y comprensión, pero que aún siendo bueno no es completo. El proceso de asimilación de la unidad de medida se ha mostrado largo con detección de errores aún en los niveles más altos.

Ello nos lleva a concluir que la enseñanza de la unidad de medida no se hace en el modo adecuado ni tal vez en el momento oportuno, y que para que los estudiantes alcancen un total conocimiento de las unidades y comprendan el papel que éstas juegan en la medida es necesario proporcionarles instrucción específica sobre ello.

3.4.3. CONSERVACIÓN DEL ÁREA

El área de una superficie se conserva cuando ésta se transforma en una nueva superficie al ser dividida en piezas que son posteriormente reorganizadas

Los ítemes 2.3 y 2.4 se diseñaron con objeto de comprobar si los alumnos reconocen esta propiedad, tanto en un contexto geométrico como numérico.

De las respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.3 podemos concluir que, salvo algún caso aislado, la práctica totalidad de los estudiantes de los distintos cursos reconocen la conservación del área por recorte y pegado en un contexto geométrico. Incluso creemos que la mayoría de los alumnos que dieron una respuesta errónea no lo hicieron no porque no acepten la conservación del área, sino como consecuencia de una incorrecta interpretación del dibujo proporcionado en el ítem, como se deduce de sus afirmaciones, como por ejemplo: "el área de la superficie (B) es mayor que la (A) ya que (B) tiene mayor porción de superficie".

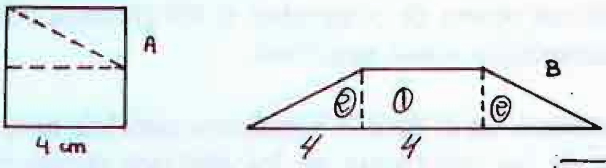
Las argumentaciones que los alumnos dieron para justificar que las dos superficies tenían la misma área fueron:

- Lo que se quita abajo, se le añade arriba. (Éste fue el tipo de respuesta dado mayoritariamente por los estudiantes).
- Es lo mismo dispuesto de otra forma.
- Simplemente se le ha cambiado la forma, no el tamaño.

Si bien los alumnos sí aceptan que el área de una superficie que es sometida a una transformación como la descrita se conserva, hemos constatado por el tipo de respuestas dadas en el ítem 2.4, que inmersos en un contexto numérico y ante un problema en el que se les pide no sólo comparar el área de dos superficies sino cuantificar la de una de ellas, pasan por alto, sea cual sea su nivel escolar, la relación existente entre las dos superficies. Ello condujo a algunos alumnos al fracaso, ya que no supieron cómo calcular el área del trapecio, llevando a algunos de ellos a afirmar que no era posible determinar el área por "no disponer de los datos necesarios", y a una mayoría de los alumnos a complicar innecesariamente el cálculo del área del trapecio, utilizando "largas" estrategias numéricas, que condujeron a un elevado número de ellos (especialmente a los correspondientes a los cursos de menor formación matemática) a valores erróneos causados por motivos diversos, como por ejemplo: la identificación errónea de alguno de los elementos de los que depende el área del trapecio, el uso de fórmulas incorrectas, planteamientos erróneos y errores de cálculo. A continuación se muestran algunas de las respuestas dadas por los alumnos que representan los comportamientos que acabamos de citar.

CÁLCULO CORRECTO DEL ÁREA MEDIANTE UN PROCEDIMIENTO NUMÉRICO INNECESARIO

Alumno C.O.U.-C-88



área del cuadrado A $= 4 \times 4 = \boxed{16 cm^2 \Rightarrow \text{figura } A}$

'' de B ① primero del rectángulo $= 2 \times 4 = 8 cm^2$

② de los triángulos $= \frac{2 \times 4}{2} = 4 cm^2$, como

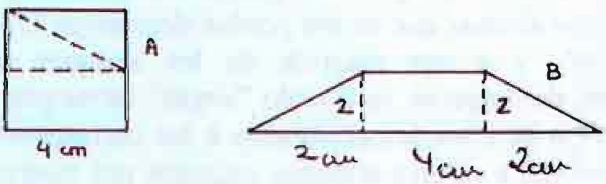
tengo 2 triángulos $= 2 \times 4 cm^2 = 8 cm^2$

$8 cm^2 + 8 cm^2 = \boxed{16 cm^2 \Rightarrow \text{figura } B}$

CÁLCULO INCORRECTO DEL ÁREA POR:

Identificación numérica errónea de algunos de los elementos de los que depende el área de un rectángulo y un triángulo

Alumno 2º B.U.P.-9



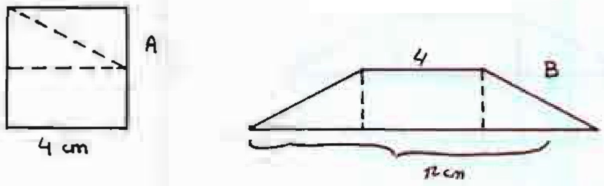
A rec. $= b \cdot h = 4 \cdot 2 = 8 cm^2$

A trian $= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 cm^2$

$8 + 2 + 2 = 12 cm^2$ el área total.

Utilización de fórmulas erróneas para el cálculo del área

Alumno 3º E.M.-36

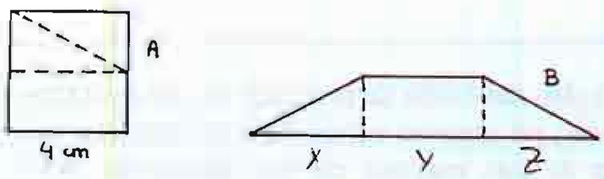


La figura B es un trapecio. Calcularíamos su área aplicando su fórmula.

$$A = \frac{B+b}{2} = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Planteamientos erróneos infructuosos

Alumno 3º E.M.-5



$$x = \frac{1}{3}\frac{b\cdot a}{2}$$

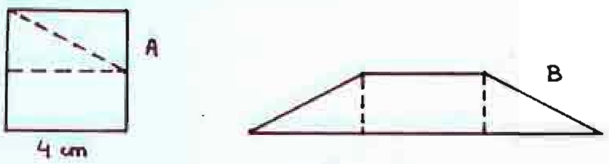
$$y = \frac{1}{3} b\cdot a$$

$$z = \frac{1}{3}\frac{b\cdot a}{2}$$

$$S_{total} = x + y + z$$

Errores aritméticos

Alumno C.O.U.-C-101



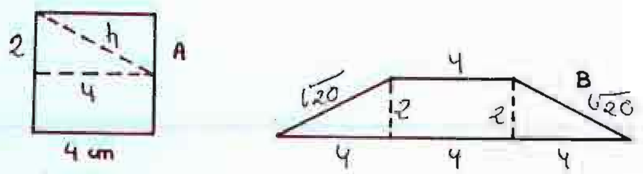
$$4\cdot\frac{4}{2}=8\ cm^2$$

$$\frac{4\cdot\frac{4}{2}}{2}=4\ cm^2$$

$$8+4\cdot2=64\ cm^2$$

Errores ocasionados por despistes

Alumno C.O.U.-L-19



$$h^2=c^2+c^2$$
$$h^2=4+16$$
$$h^2=20$$
$$h=\sqrt{20}$$

$$A_{\triangle}=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{4\cdot2}{2}=\frac{8}{2}=4\ cm^2$$

$4\cdot2=8\ cm^2$ área de los dos triángulos

$$A_{\square}=b\cdot h=4\cdot2=8\ cm^2$$

$$A_{TOTAL}=8+4=\boxed{12\ cm^2}$$

Acabamos de ver algunos ejemplos del modo de proceder de determinados alumnos que, en contra de lo que se podría pensar, no suponen actuaciones individuales sino que representan las distintas formas de actuar de una mayoría de los estudiantes. Para corroborar esto presentamos la tabla siguiente en la que se recogen los tipos de respuestas dadas por los alumnos en este ítem y que hemos clasificado como sigue:

A) Utilizan la conservación para determinar el área o indican que las dos superficies tendrán igual área sin llegar a calcularla.
B) Determina correctamente el área mediante un cálculo numérico, sin tener en cuenta la conservación del área.
C) Determinan incorrectamente el área mediante un cálculo numérico erróneo o planteamiento algebraico sin finalizar.
D) Afirman que no se puede determinar el área por falta de datos.
E) Respuestas erróneas con razonamientos confusos e incatalogables.

	correcta por conservación	correcta por cálculo numérico	incorrecta por cálculo numérico	afirman que es imposible calcularla	otras erróneas	no contestan
	A	B	C	D	E	
8° E.G.B.	49'4% (39/79)	8'9% (7/79)	15'2% (12/79)	2'5% (2/79)	24'1% (19/79)	22'5% (23/102)
2° B.U.P.	36'1% (43/119)	39'5% (47/119)	16'8% (20/119)	5'9% (7/119)	1'7% (2/119)	9'2% (12/131)
C.O.U.-L	41'9% (39/93)	32'3% (30/93)	9'7% (9/93)	9'7% (9/93)	6'5% (6/93)	8'8% (9/102)
C.O.U.-C	43'1% (47/109)	51'4% (56/109)	5'5% (6/109)	0'0% (0/109)	0'0% (0/109)	0'9% (1/110)
3° E.M.	40'9% (18/44)	38'6% (17/44)	9'1% (4/44)	4'5% (2/44)	6'8% (3/44)	0'0% (0/44)
5° F.M.	54'8% (17/31)	45'2% (14/31)	0'0% (0/31)	0'0% (0/31)	0'0% (0/31)	3'1% (1/32)

Tabla 14. Tipo de respuestas dadas en el ítem 2.4 y número de alumnos que lo dejan en blanco.

Como se deduce de estos datos, en cada curso aproximadamente el 50% de los alumnos opta por un método numérico en el que no tienen en consideración la conservación del área.

Durante las entrevistas se les preguntó a los distintos estudiantes que habían optado por un procedimiento numérico (correcto o incorrecto) por la existencia de algún método alternativo de determinar el área de forma más breve a como la habían calculado. La mayoría de ellos respondieron que podrían hacerlo si conocieran la fórmula del área del trapecio. Entonces se les pedía que releyeran de nuevo el texto del ítem. Su reacción era inmediata cuando terminaban de leer las dos primeras líneas, afirmando que el trapecio tenía la misma área que el cuadrado. Preguntados entonces si cuando resolvieron este ítem por primera vez se habían dado cuenta de ello, todos ellos a excepción de dos afirmaron que no, que se habían "quedado" con que debían calcular el área del trapecio y habían pasado enseguida a trabajar sobre el dibujo sin reflexionar en nada más.

A continuación se muestra la trascripción de una parte de los protocolos correspondientes a las entrevistas mantenidas con un alumno de 2° de B.U.P. y 5° F.M., que manifestaron haberse dado cuenta del hecho de que las dos superficies tenían igual área, pero que no lo utilizaron porque pensaron, por motivos diferentes como se podrá ver, que este procedimiento no era válido.

Alumno 5º F.M.-8

E: Entrevistador.
A: Alumno.

E: ¿Existe un procedimiento más corto que el que tú has elegido para calcular el área del trapecio?
A: Me imagino que la fórmula del trapecio nos lo daría mucho antes.
E: ¿Y sin la fórmula del trapecio?
A: ¿Un procedimiento más corto? ¿Con esto conocido siempre? (Se refiere a la longitud del lado del cuadrado). (Inmediatamente afirma). El área es la misma. No tengo ni que calcularla.
E: ¿Por qué no lo hiciste así?
A: Porque pensaba que era que lo calculásemos.
E: Si tú indicas que el área de la superficie (B) es 16, ¿no sería correcto?
A: Sí. Se sabía que era eso, que era 16, pero el calcular... Calcúlalo es ¿cómo lo calcularías?. Calcula con...
E: Para ti calcular significa realizar operaciones.
A: Exactamente. Calculando pero, computacionalmente. Es decir, házmelo. No dime que son 16.
E: Pero para determinar el valor del área, el 16, has debido realizar la operación 4x4.
A: Sí, claro.
E: Luego existe un cálculo.
A: Sí, sí. Pero bueno es un cálculo, en el sentido de que tú dices aquí, esto es un cuadrado, superficie: lado al cuadrado. Aquí sin embargo, dices: si no sé la fórmula del trapecio, lo que sí que puedo hacer, es asociarlo con esto, entonces sabría que esto mide 2, esto 4, solamente tengo que calcular estas dos áreas y ésta. (Se refiere a los dos triángulos y el rectángulo).
E: El procedimiento es correcto.
A: Yo por lo menos entiendo eso. Calcula, a mi no me sirve: pues vale tanto... sino: a ver...
E: ¿Qué palabra hubieras utilizado tú en el enunciado del ítem para que admitieras el razonamiento de la conservación del área?
A: Pues creo que lo hubiese especificado...No sé, quizás para que no hubiesen confusiones, se podría poner: "sin realizar operaciones" o simplemente "con las operaciones de éste (señala el cuadrado) decirme el área de (B)".
E: Nunca hubieras utilizado la palabra "calcular" ¿no es eso?
A: No, aquí no. En este caso no.

Alumno 2º B.U.P.-12

[...]
E: O sea, ¿que tú eras consciente al principio de que las áreas eran iguales y de que podías poner directamente el área del cuadrado?
A: Sí.
E: Y ¿por qué utilizaste este procedimiento que es mucho más largo?
A: Pues eso lo hago porque yo en los exámenes de matemáticas muchas veces hago cosas de cabeza, y luego me las ponen mal por hacerlo de cabeza.
E: Pero tú aquí, ¿lo harías de cabeza? Esto supone... (El alumno interrumpe).
A: Yo aquí lo haría de cabeza.
E: ¿Por qué es un cálculo de cabeza? (Aquí duda durante unos instantes).
A: No de cabeza. Bueno esto, el cálculo lo podría hacer de cabeza, porque es dos veces el rectángulo.
E: ¿Por qué dudas de que esto sería una buena respuesta, tan buena como la que has dado?
A: No, no es que dude, pero, por ponerlo dos veces nunca va a estar mal. Es ya costumbre, porque he hecho cosas de cabeza muchas veces que me han puesto mal y entonces pues ya...
E: No te fías.
A: No me fío.

En cualquier caso, uno por temor a no que no se le de por válida su respuesta y otro porque para él "calcular" tiene una connotación un tanto especial, ninguno ha considerado *suficiente* avalar la medida del área del trapecio utilizando la propiedad de la Disección. Ello nos debería hacer reflexionar como profesores sobre el tipo de procedimientos que en las clases de matemáticas les indicamos a los alumnos que son los "adecuados" para darles como correctamente resuelto un problema.

Los porcentajes de éxito en el cálculo del área no sorprenden ya que van en consonancia con la formación matemática del alumno. Es de esperar que un alumno de 5° F.M. no cometa errores en la determinación del área del trapecio a diferencia de lo que le puede ocurrir por ejemplo a un alumno de 2° de B.U.P. o de 8° de E.G.B. Sin embargo, creemos que los porcentajes de respuestas correctas no van en consonancia con la sencillez del problema planteado, y que de algún modo reflejan la debilidad de los conocimientos de los alumnos en el caso concreto del cálculo de áreas. Es interesante conocer el hecho de que de los alumnos de 8° de E.G.B. que utilizaron la conservación para afirmar que el cuadrado y trapecio tenían igual área, el 38'46% de ellos no supo calcular el área del cuadrado. Hecho este, que se confirmó durante las entrevistas.

Conservación del área de un triángulo cuando éste se transforma en uno nuevo al deslizar un vértice del triángulo sobre una línea paralela a la base

En el ítem 2.22 se le pedía a los alumnos que emitieran un juicio sobre la posible variación sufrida por el área y el perímetro de un triángulo al que se había transformado en uno nuevo mediante el deslizamiento de uno de sus vértices sobre una línea paralela a la base, de forma que el área se conservaba pero el perímetro aumentaba.

A continuación mostramos el porcentaje de alumnos por curso que afirmaron que los dos triángulos tenían igual área, referido a los alumnos que respondieron este ítem. Un estudio más detallado de este ítem se presenta en el próximo apartado 3.4.12.

8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
46'7% (43/92)	62'3% (76/122)	61'1% (55/90)	86'0% (86/100)	65'9% (27/41)	65'4% (17/26)

Tabla 15. Alumnos que afirman correctamente que los dos triángulos del ítem 2.22 tienen igual área.

Sin embargo, no todos los alumnos argumentaron sus respuestas del mismo modo. A continuación exponemos algunos de los distintos modos de proceder de los estudiantes, que hemos clasificado en:

A) Se refieren a la base y altura de los triángulos.
B) Se guían por su percepción visual. Por ejemplo dan razones del tipo: lo intuyo, se ve, me parece...
C) Otras argumentaciones no adecuadas.

	se refieren a las dimensiones de la base y la altura de los triángulos	utilizan su percepción visual	otros
	A	B	C
8º E.G.B.	35'7%	16'7%	47'6%
2º B.U.P.	42'6%	25'5%	31'9%
C.O.U.-L	27'5%	42'5%	30'0%
C.O.U.-C	88'3%	6'5%	5'2%
3º E.M.	88'0%	12'0%	0'0%
5º F.M.	93'8%	0'0%	6'3%

Tabla 16. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 2.22.

La mayoría de los alumnos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L que decidieron que los dos triángulos tenían igual área, lo hicieron basándose en un razonamiento inconsistente, luego podríamos decir que no han sido capaces de analizar la conservación del área en una transformación como la aquí considerada. Por lo que respecta a lo sucedido en los otros cursos, observamos que aproximadamente un 12% de los alumnos de C.O.U.-C y 3º E.M. utilizaron también razonamientos no válidos para apoyar su elección, siendo los alumnos de 5º F.M. los que en su práctica totalidad utilizan el razonamiento adecuado. Observamos, por tanto, que la conservación del área en una transformación de este tipo no es algo que resulte evidente. Como más adelante se verá, el hecho de que esta transformación tuviera lugar en un contexto puramente geométrico fue la principal causa de trastorno en los alumnos de 5º F.M., que en un porcentaje elevado afirmaron no poder emitir ninguna opinión sobre el área y perímetro de estos dos triángulos al no disponer de los datos suficientes.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la conservación del área

- La práctica totalidad de los alumnos conoce la propiedad de la Disección y es consciente de la conservación del área.

- La práctica totalidad de los alumnos de cada uno de los cursos reconoce, sin problemas, esta propiedad en un contexto geométrico, pero no así en un contexto numérico, en el que la petición de cuantificar el área les hace olvidar por completo la relación existente entre las superficies consideradas.

- Una mayoría de los estudiantes de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L no aprecia que un deslizamiento del vértice del triángulo sobre una línea paralela a la base, conserva las dimensiones de la base y altura del triángulo y en consecuencia, el área. Este hecho tampoco resulta evidente para los alumnos de C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M.

3.4.4. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE UNA SUPERFICIE

Del estudio de las respuestas dadas por los alumnos en algunos ítemes del test hemos podido apreciar que para una mayoría de ellos, sea cual fuere su curso, los conceptos área y perímetro están íntimamente relacionados, hasta el punto que, en demasiadas ocasiones esta relación les conduce a determinadas confusiones y conclusiones erróneas, que hemos podido comprobar son de distinto tipo. Por ello hemos optado por presentar los resultados agrupados según la naturaleza de la confusión que dicha relación ocasiona.

Confusión conceptual. Preguntados en el ítem 1.1 por lo que ellos entienden por área, el 9'2% de los de 8° de E.G.B. (9 alumnos) de los que respondieron el ítem, el 7'1% de los de 2° de B.U.P. (9 alumnos), el 2'2% de los de C.O.U.-L (2 alumnos) y el 1'0% de los de C.O.U.-C (1 alumno), confundieron el área de la superficie con el perímetro de ésta, como ya comentamos en el apartado 3.4.1. y donde se pueden consultar algunas de las expresiones dadas por los alumnos.

De las cifras anteriores puede deducirse que el número de alumnos que confunden el área y el perímetro conceptualmente no es nada significativo. Si a esto añadimos que ningún alumno de 3° E.M. ni de 5° F.M. lo ha hecho, podemos concluir que los estudiantes en su casi totalidad, diferencian el área del perímetro.

Quisimos comprobar si esta confusión se mantendría en un caso práctico en el que, aunque no de forma explícita, aparecían implicados estos dos conceptos, área y perímetro. Por ello estudiamos el comportamiento de estos alumnos en su respuesta al ítem 1.4, donde dada el área de un cuadrado debían determinar la longitud del lado. Se encontró que: 7 de los 9 alumnos de 8° de E.G.B., así como los 2 de C.O.U.-L que se habían referido al área de una superficie como un perímetro determinaron la longitud del lado del cuadrado a partir de la expresión: $4l=36$. No sucedió lo mismo con el alumno de C.O.U.-C y los alumnos de 2° de B.U.P., que todos, a excepción de uno que respondió de forma errónea pero incatalogable, realizaron correctamente el cálculo de la longitud del lado. Luego estos últimos, aún a pesar de que lo que manifiestan hace pensar en que poseen una concepción errónea de área saben cómo proceder correctamente desde un punto de vista computacional. Lo que nos hace pensar que en esos casos, los alumnos trabajan de forma rutinaria sin recapacitar sobre lo que realmente están calculando. Esto último nos lleva a reflexionar sobre el valor que debemos dar a los cálculos, tanto correctos como erróneos, como fuentes suministradoras de información sobre lo que los alumnos comprenden o no, del concepto de área. Veamos algunas de estos casos:

Alumno 2º B.U.P.-45. Calculó correctamente el área del rectángulo, triángulo y paralelogramo del ítem 1.2.

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

es la longitud que ocupa la base.

4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm^2, ¿cuál es la longitud de sus lados?

$\sqrt{36}$ | 6 ; 0 ; 6 cm ; 6 cm

Alumno 2º B.U.P.-60. Calculó correctamente el área del rectángulo y del círculo del ítem 1.2.

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

LO QUE MIDE EL PERIMETRO DE ESA SUPERFICIE.

4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm^2, ¿cuál es la longitud de sus lados?

$A = X^2 = 36\ cm^2 \Rightarrow \cancel{(X = \frac{A}{2} = \frac{36}{2} =)}$

$X = 6\ cm.$

Alumno 2º B.U.P.-83. Calculó correctamente el área del rectángulo, círculo, triángulo y paralelogramo del ítem 1.2.

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

LA LINEA QUE HAY POR FUERA DE LAS FIGURAS GEOMETRICAS, ETC...

4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm^2, ¿cuál es la longitud de sus lados?

$A = l^2$

$A = 36$

$l = \sqrt{36} = 6cm$

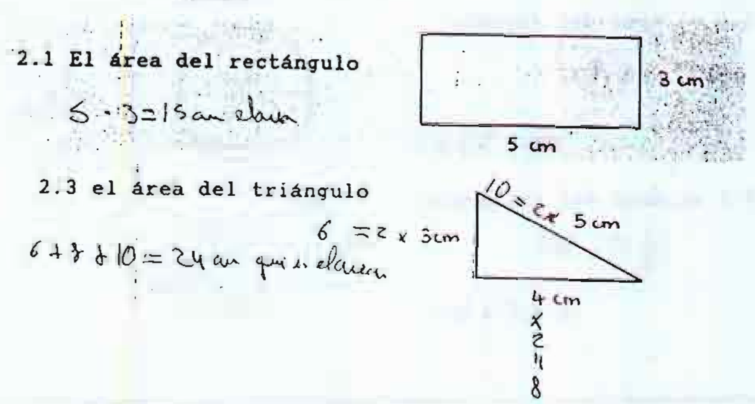
Confusión operacional. La siguiente tabla contiene la información referente al número de alumnos que por su modo de proceder en el cálculo del área del rectángulo, triángulo y paralelogramo del ítem 1.2, hacía pensar en la existencia de una posible confusión entre el área y el perímetro. Los porcentajes están referidos al total de alumnos que en cada curso respondieron al ítem.

	rectángulo	triángulo	paralelogramo
8º E.G.B.	2'1% (2 alumnos)	4'8% (4 alumnos)	1'6% (1 alumno)
2º B.U.P.	0'8% (1 alumno)	0'8% (1 alumno)	3'8% (3 alumnos)
C.O.U.-L	0 alumnos	0 alumnos	0 alumnos
C.O.U.-C	0 alumnos	0 alumnos	0 alumnos
3º E.M.	0 alumnos	0 alumnos	0 alumnos
5º F.M.	0 alumnos	0 alumnos	0 alumnos

Tabla 17. Alumnos que calculan el perímetro en lugar del área en el ítem 1.2.

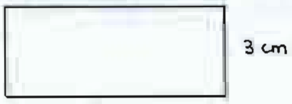
Al estudiar si los alumnos que habían procedido de este modo para calcular, por ejemplo, el área del rectángulo también lo habían hecho en el triángulo y paralelogramo, se pudo comprobar que no era así, que en cada polígono procedían de forma diferente y además, que los alumnos eran distintos en cada caso. Lo que viene a confirmar, que el error no es causado por una confusión conceptual entre el área y el perímetro, que les llevaría a actuar siempre del mismo modo, sino motivado por un desconocimiento de cómo proceder para el cálculo del área. Como ejemplo de ello veamos el modo de actuar de tres alumnos de 8º de E.G.B.

Alumno 8º E.G.B.-71. Sólo calcula el área del rectángulo y la del triángulo. En el primer caso bien y en el segundo de forma incorrecta dando la medida de una magnitud lineal.



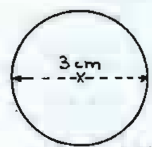
Alumno 8º E.G.B.-8. **Todos sus cálculos del área de las distintas figuras son incorrectas, salvo el del rectángulo, y sólo en el caso del triángulo da el perímetro como su área.**

2.1 El área del rectángulo



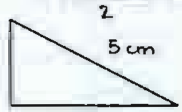
A= b· altura =15 cm

2.2 el área del círculo



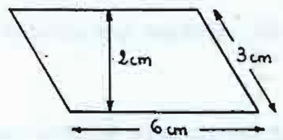
C= 3 cm · 6'14 / 2 = 9'21 cm

2.3 el área del triángulo



T=1+1+1 = 12 cm

2.4 el área del paralelogramo



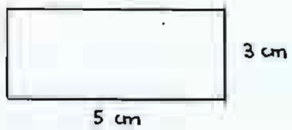
P= B · al / 2 = 9cm

Alumno 8º E.G.B.-83. **Sólo calcula de forma correcta el área del rectángulo, deja en blanco el caso del paralelogramo y procede a suma de dimensiones lineales en el círculo y triángulo.**

2.1 El área del rectángulo

15

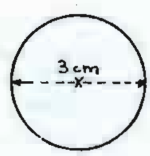
3 x 5 =



2.2 el área del círculo

9

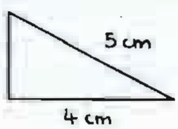
3+3=



2.3 el área del triángulo

60

3+5+4=



Se estudió también el comportamiento en el cálculo del área de estos tres polígonos, de los alumnos que habían manifestado la confusión entre el área y el perímetro, y se constató que la mayoría de ellos había procedido correctamente. Lo que de nuevo viene a confirmar la falta de relación entre lo que los alumnos manifiestan y lo que calculan.

Por otra parte y como ya hemos comentado en el apartado anterior algunos alumnos calcularon la longitud del lado del cuadrado del ítem 1.4, a partir de la expresión 4l=36, concluyendo que l=9. Respuesta que nos puede hacer pensar en la existencia de una posible confusión entre el área y el perímetro por parte del alumno. Concretamente lo hicieron:

el 29'7% (27 alumnos) de 8º de E.G.B.
el 7'0% (9 alumnos) de 2º de B.U.P.
el 6'2% (6 alumnos) de C.O.U.-L.

Sin embargo, de todos estos alumnos, únicamente 5 de 8º de E.G.B. y 1 de C.O.U.-L habían manifestado una concepción errónea del área, al referirse a ésta como el perímetro en el ítem 1.1. Para el resto de los alumnos no se pudo relacionar este error cometido en el ítem 1.4 con una concepción errónea del área, ya que por el contrario se refirieron a ella de forma clara, como por ejemplo lo hicieron los siguientes alumnos:

Alumno 8º E.G.B.-4. Calculó correctamente el área del rectángulo, círculo y triángulo del ítem 1.2, y mal el del paralelogramo del mismo ítem.

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

Es el espacio que hay ~~en~~ dentro de esa superficie plana

4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm², ¿cuál es la longitud de sus lados?

9cm 9cm 9cm 9cm

36, |4
9

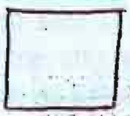
$\boxed{l \cdot l}$ $4 \cdot 9 = 36\ cm^2$

Alumno 8º E.G.B.-13. **Calculó de forma incorrecta todas las áreas de las figuras del ítem 1.2 salvo la del rectángulo, pero en ningún caso calculó un perímetro.**

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

El área para mi es una superficie plana que mide toda la figura es la parte sombreada de la figura

4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm², ¿cuál es la longitud de sus lados?



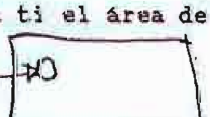
36 cm²

9cm² es la longitud de sus lados

$$36 \,\underline{|\, 4 \quad}$$
$$0 \quad 9$$

Alumno 8º E.G.B.-27. Calculó correctamente el área de todas las superficies del ítem 1.2.

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?



La superficie es el espacio que ocupa un objeto o cosa en plano

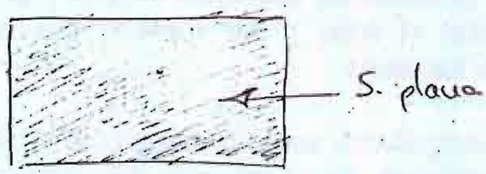
4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm², ¿cuál es la longitud de sus lados?

36 cm² : 4 36cm² | 4 0 9 cm²

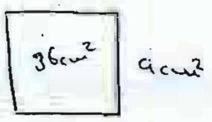
Alumno 8º E.G.B.-94. **Calculó correctamente el área del rectángulo y círculo, y mal la del triángulo y paralelogramo.**

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

El área de una superficie plana es para mí:



4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm^2 ¿cuál es la longitud de sus lados?



$36 \lfloor 4$
$0 \quad 9$

R = 9 cm^2 cada lado

Durante las entrevistas con los alumnos de 8º de E.G.B. se observó que el error estaba provocado fundamentalmente por el desconocimiento de la fórmula del área de un cuadrado por parte de los alumnos. A continuación se expone un fragmento del protocolo correspondiente a la entrevista mantenida con un alumno de 8º de E.G.B. que, poseyendo una concepción correcta de área, dio como longitud del lado 9 cm, como resultado de la operación 36/4.

Alumno 8º E.G.B.-3.

E: Entrevistador.
A: Alumno.

[...]
E: ¿Tú sabes lo que representan estos 36 cm²"?
A: Sí, el área.
E: ¿Podrías indicármelo sobre una figura?
A: Sí. (Él mismo dibuja un cuadrado y raya su interior, diciendo a la vez que lo hace que eso es el área).
E: Y ¿qué es lo que debes calcular?
A: Lo que mide esto. (Señala el lado del cuadrado).
E: ¿Por qué el 36 lo divides entre 4?
A: Porque el cuadrado tiene 4 lados.
E: Si yo ahora te diera un cuadrado cuyo lado midiera 3 cm (se dibuja un cuadrado indicando la longitud del lado), ¿cuál sería su área?

A: Según esto (y señala su respuesta a este ítem 1.4, el área sería 3x4=12 cm^2.
E: ¿Estás seguro que de este modo, es como se calcula el área del cuadrado?
A: No.
E: ¿No te acuerdas de la fórmula?
A: No.

Todo ello nos permite concluir que, cuando un alumno para calcular el área de un polígono, para lo que él recuerda que existía una fórmula, procede calculando un perímetro, no se debe inferir de este error que confunde los conceptos de área y perímetro, sino tan sólo que no ha sabido cómo determinar el área, y por supuesto que no se para a pensar sobre el significado de lo que está haciendo.

A diferencia de otros investigadores, como Dickson et al. (1988), que ante un error de este tipo se refieren a la confusión área-perímetro del alumno, nosotros hemos preferido referirnos a él haciendo hincapié en que se trata de una confusión operacional que no tiene por qué tener asociada una conceptual, como la ambigüedad de esa expresión podría hacer pensar.

Relación entre el área y el perímetro en determinadas modificaciones de una superficie

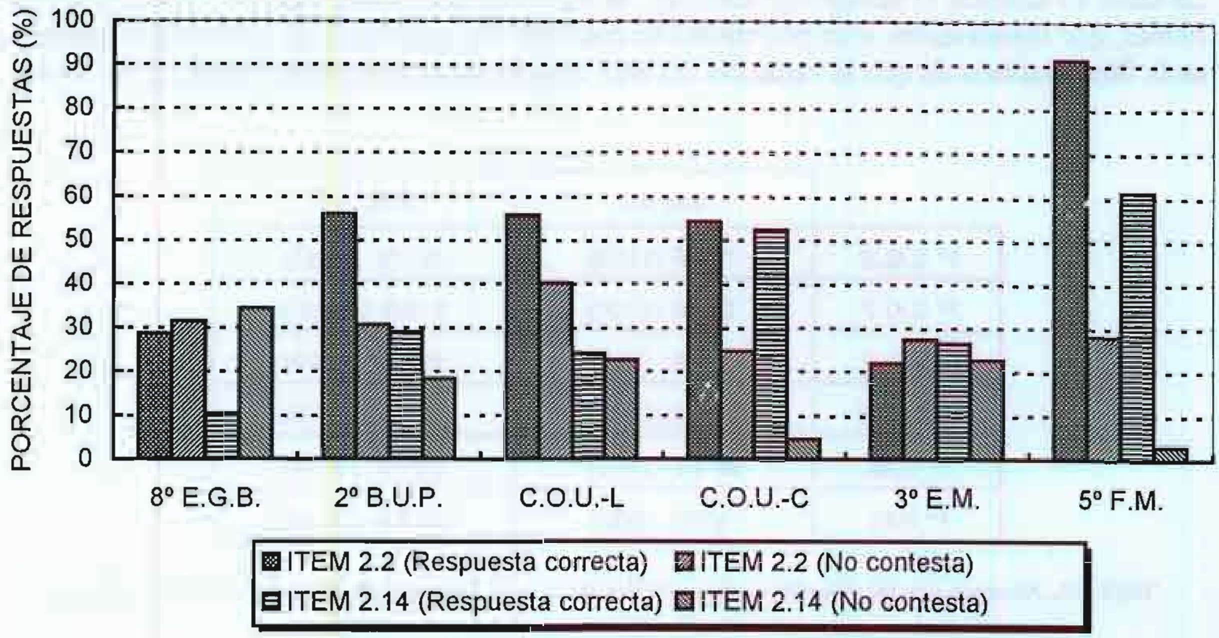
En los ítemes 2.2 y 2.14 se plantearon modificaciones de superficies en las que se imponían determinadas condiciones tanto al área como al perímetro, con objeto de estudiar el grado de limitación que, para los alumnos, el perímetro impone al área, y viceversa.

En el ítem 2.2 se le pedía a los alumnos que realizaran las modificaciones que consideraran oportunas sobre un rombo, de manera que obtuvieran una nueva superficie de *menor área y mayor perímetro*.

En el ítem 2.14, se le pedía a los alumnos que dibujaran un rectángulo de *menor área e igual perímetro* que uno dado, del que se proporcionaban las dimensiones de sus lados.

Mientras que en el ítem 2.2 se requiere la variación simultánea del área y perímetro, y se desarrolla en un contexto puramente geométrico, en el 2.14 sólo el área experimenta variación, desarrollándose en un contexto numérico. En cualquier caso, como inmediatamente comprobaremos, ninguna de estas dos tareas resultaron sencillas para una mayoría de estudiantes.

En la gráfica nº6 se recogen los datos correspondientes a los alumnos que dejaron en blanco cada uno de estos ítemes y a los que consiguieron realizar correctamente las construcciones pedidas, de entre todos aquéllos que los intentaron.



Gráfica nº6

El porcentaje de alumnos que dejó en blanco estos ítemes, junto con el tipo de respuestas dadas, y el bajo porcentaje de éxito alcanzado, pone de manifiesto la dificultad que este tipo de tareas ha supuesto para los alumnos.

Se aprecia un mayor número de alumnos que dejó en blanco el ítem 2.2 que el 2.14. Sin poder afirmarlo con rotundidad, pensamos que el hecho de estar planteada la tarea del ítem 2.14 en un contexto numérico, y ser un rectángulo - polígono muy familiar para los alumnos- la superficie implicada en ella animó a la práctica totalidad de los estudiantes a su resolución.

Si bien en un principio les pudo parecer a los alumnos más asequible la tarea numérica que la geométrica, la realidad fue muy distinta como muestran las cifras correspondientes al éxito alcanzado por ellos en cada caso. En la gráfica se puede comprobar que en todos los cursos, a excepción de 3º E.M., se registró un mayor número de alumnos que resolvió con éxito el ítem 2.2 que el 2.14.

En esta ocasión se observa que, a diferencia de lo que ha venido siendo la tónica general, no existe una evolución paulatina de los porcentajes de éxito en consonancia con el nivel de los cursos. Es de destacar la caída tan grande que se experimenta en 3º E.M., y el hecho de que el porcentaje de éxito logrado por estos alumnos en el ítem 2.2, haya sido inferior al de los de 8º de E.G.B. También sorprende que en este ítem, a diferencia de lo que ha ocurrido en otras ocasiones, no existe apenas diferencia entre los resultados obtenidos por los alumnos de los tres cursos de secundaria.

La tabla 18 muestra el número de alumnos, de entre los que respondieron a cada uno de los ítemes, que manifestaron la imposibilidad de construir las superficies demandadas, basándose en la falsa creencia de que la variación del área implica la misma del perímetro, y viceversa.

	ítem 2.2	ítem 2.14
8° E.G.B.	18'6% (13/70)	56'7% (38/67)
2° B.U.P.	11'0% (10/91)	57'0% (61/107)
C.O.U.-L	1'6% (1/61)	59'5% (47/79)
C.O.U.-C	20'5% (17/83)	35'2% (37/105)
3° E.M.	40'6% (13/32)	55'9% (19/34)
5° F.M.	0'0% (0/23)	35'5% (11/31)

Tabla 18. Alumnos que manifiestan la imposibilidad de la modificación solicitada en el ítem 2.2 y 2.14.

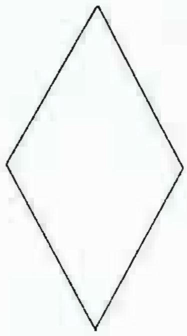
Si los datos correspondientes al ítem 2.2 ya alertan de la existencia de demasiados alumnos para los que el perímetro y el área están íntimamente relacionados, llama especialmente la atención el elevadísimo número de alumnos que en cada curso manifestó la imposibilidad de construir un rectángulo con las características solicitadas, dando argumentaciones como: "ya que si el área varía también deberá hacerlo el perímetro".

En el ítem 2.2, los alumnos argumentaban que si el área debía ser menor, también debería serlo el perímetro, o bien, si el perímetro tenía que ser mayor, también el área, por lo tanto las condiciones impuestas eran incompatibles. En el ítem 2.14, los argumentos fueron similares, ya que, por ejemplo, escribían cosas como "si disminuyo el área, el perímetro también disminuirá y por lo tanto no puede ser el mismo". Veamos por ejemplo la dependencia que para dos alumnos de 3° de la Escuela de Magisterio, existe entre el área y el perímetro de una superficie.

Alumno 3º E.M.-2

Ítem 2.2

2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.

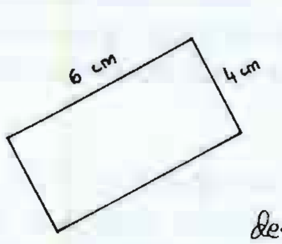


No se puede ya que el perímetro es la suma de los lados, y los lados siempre serán los mismos, y la zona comprendida en ellos, el área también siempre será la misma.

Ítem 2.14

14. Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.

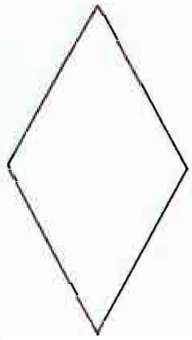


Es imposible.

Porque el área de la figura viene dada en función del perímetro de la figura, y si el perímetro es el mismo el área será la misma.

Alumno 3º E.M.-7

2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.



No se puede hacer ninguna modificación (en que se pueda conseguir una superficie de menor área y a su vez un perímetro mayor, ya que para que el perímetro sea mayor, los lados deben ser mayores, y para que los lados sean mayores también deben serlo sus diagonales (contradicción ya que a mayores diagonales mayor superficie).

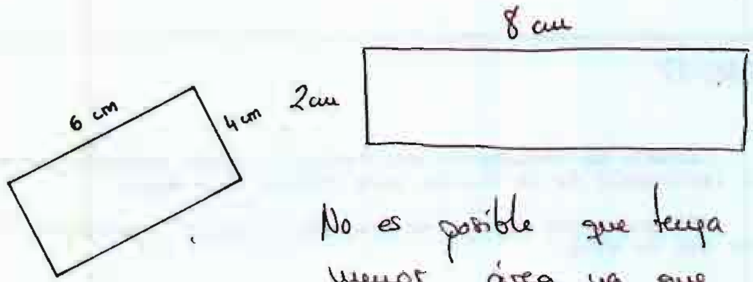
Como se puede apreciar, aunque los razonamientos erróneos expuestos por estos alumnos son diferentes, los dos son consecuencia de la deficiente formación que estos estudiantes poseen sobre la relación existente entre el área y las dimensiones lineales de una superficie plana, y en consecuencia con el perímetro.

A continuación mostramos las respuestas dadas por dos alumnos de C.O.U. en el ítem 2.14, donde se puede apreciar cómo aún teniendo dibujado el rectángulo solicitado, de igual perímetro y menor área que el dado, afirman que es imposible la modificación solicitada. Este hecho pone de manifiesto la fuerte dependencia que para estos alumnos existe entre el área y el perímetro del rectángulo.

Alumno C.O.U.-L-37

14. **Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.**

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.

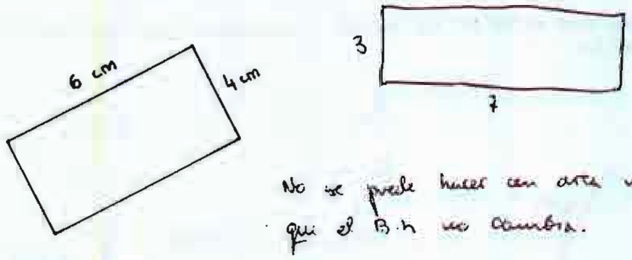


No es posible que tenga menor área, ya que tiene el mismo nº de perímetro con lo cual la extensión es la misma, es decir, la superficie limitada.

Alumno C.O.U.-C-89

14. **Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.**

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.



No se puede hacer con área menor puesto que el B.h no cambia.

De los datos mostrados en la Tabla 18 sorprende el porcentaje tan elevado de alumnos de 5° F.M. que en el ítem 2.14 manifiestan que es imposible la construcción pedida, cuando en el ítem anterior, ninguno de ellos contestó en este sentido. De todas estas respuestas hemos escogido para mostrar aquí, las correspondientes a tres alumnos de 5° curso de la Facultad de Matemáticas por el "choque" que ocasiona la conclusión a la que llegan con el procedimiento que les conduce a ella.

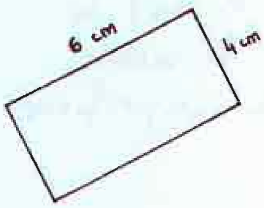
Alumno 5° F.M.-17

14. **Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.**

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.

$p = 6+6+4+4 = 10+10 = 20$

$a = 6 \cdot 4 = 24$



Si $a' < 24 \Rightarrow$ algún lado tiene que ser menor que 6 ó 4 para tener < 24

$\Downarrow$

perímetro será menor

contradicción.

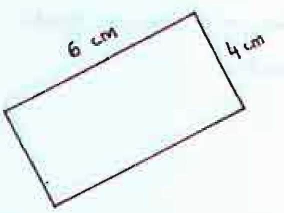
Alumno 5° F.M.-24

14. Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.

$P_r = 20$ $\quad$ 5'5

$A_r = 24$ $\quad$ 4



$2b+2a = 20$

$\cancel{2a}\; b \cdot a \leq 24$

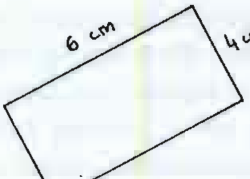
$a = 24/b$

Esta stma solo tiene una solución

Alumno 5º F.M.-23

14. Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.



El perímetro de este rectángulo es 20 ⇒ la suma del lado mayor y el menor es 10. Así, el área será el producto de dos nº cuya suma sea 10, y hay que minimizarlo.

Min $x \cdot y$

$x+y=10 \rightarrow x=10-y$

Queremos minimizar $x \cdot y = 10y - y^2$. Derivamos e igualamos a 0 para hallar los valores.

$10-2y=0 \rightarrow y=5 \rightarrow x=5$ y es un cuadrado.

Además el área es mayor ⇒ el menor área es el que ya tenemos.

Al analizar estas respuestas dudamos de si estos alumnos realmente se han planteado la resolución del problema, resultando ser el planteamiento y/o proceso erróneo el que les conduce a una respuesta equivocada, o simplemente se han limitado ha plantear un supuesto razonamiento que les permitiera justificar lo que ya ellos pensaban a priori, que la superficie solicitada era imposible de construir. Esto último vendría a confirmar la fuerza con que esta falsa dependencia entre el área y el perímetro de una superficie está arraigada en los estudiantes, incluso en los de mayor formación matemática.

Comparando los resultados obtenidos por los alumnos en cada uno de estos dos ítemes, tanto en lo que se refiere al número de ellos que consigue dar la construcción correcta como al número que ha manifestado la imposibilidad de ésta, se podría pensar que a los alumnos, variar sólo una de las propiedades de la superficie, bien el área o el perímetro, les resulta más difícil que variar las dos simultáneamente. Sin embargo, no se ha podido constatar si estos resultados se podrían generalizar a cualquier transformación de este tipo o son sólo el resultado de estos casos en concreto, por lo tanto no deja de ser una suposición pendiente de estudio. En cualquier caso, sí creemos poder afirmar que la conservación del área les resulta más sencilla a los alumnos que la del perímetro.

Todo lo anterior pone de manifiesto que un gran número de alumnos, independientemente del curso al que pertenezcan, piensan en el área y en el perímetro como en dos propiedades de la superficie íntimamente ligadas, concepción errónea que les impide ver el área como una propiedad de la superficie independiente del perímetro, que les dificulta e incluso imposibilita realizar transformaciones de superficies bajo determinadas condiciones.

De inmediato nos surgen las preguntas ¿cómo pueden estos alumnos de secundaria enfrentarse con éxito a los problemas de maximización y/o minimización de perímetros, áreas y volúmenes, por otra parte tan habituales en el programa de matemáticas de este nivel, si creen que estas modificaciones son imposibles? ¿Cómo es posible que existan en 5° de F.M. tantos alumnos que crean que variar el área de una superficie lleva consigo necesariamente la variación del perímetro? Parece que en esta ocasión la formación que han recibido estos alumnos y los conocimientos que poseen no han resultado ser suficientes para erradicar el error aquí comentado. Luego evitar o corregir esta falsa relación entre el perímetro y el área requerirá de instrucción específica.

Aprovechamos las entrevistas para averiguar si el pensamiento que lleva a un alumno a manifestar que la transformación solicitada en el ítem 2.14 es imposible, tiene algún tipo de relación con la posible creencia de que no pueden existir superficies de igual perímetro y diferente área. Es por ello que a cada uno de los entrevistados se les preguntó si figuras de igual perímetro podían tener diferente área. Los que respondieron que no, efectivamente habían dejado en blanco, o habían manifestado la imposibilidad de la modificación pedida en este ítem. Por otro lado, de los que respondieron que sí, unos habían dibujado el rectángulo pedido, otros lo habían intentado sin conseguirlo y algunos se habían referido a la imposibilidad de su construcción. Estos últimos, al mostrarles la respuesta que habían dado en el ítem y al intentarlo de nuevo sin éxito, rectificaron su respuesta dada durante la entrevista y ratificaron la imposibilidad de crear un rectángulo manteniendo invariable el perímetro y disminuyendo el área. Así pues, ello nos lleva a concluir que los alumnos que manifiestan que no pueden existir superficies de igual perímetro con diferente área no podrán realizar la transformación solicitada en el ítem 2.14, pero no al contrario.

Cuando se plantearon estos dos ítemes con objeto de estudiar la relación entre el área y el perímetro, se consideró un rombo y un rectángulo, en el ítem 2.2 y 2.14 respectivamente, como figuras a modificar porque se quería observar también, los efectos que la utilización de figuras "regulares" podía ocasionar en los alumnos. Para el estudio del efecto del rombo en el ítem 2.2 se seleccionaron para las entrevistas, en cada curso, alumnos que hubieran dado los distintos tipos de respuestas. A todos ellos se les pidió que intentaran una modificación similar a la solicitada en el ítem, pero en este caso, sobre un polígono cóncavo, pensando que la forma de la superficie les podría proporcionar alguna idea acerca del modo de proceder. Sin embargo, no se produjeron apreciables diferencias en sus comportamientos, ya que generalmente el alumno que consiguió realizar la modificación sobre el rombo, lo hizo también sobre el polígono cóncavo, incluso el alumno que lo había hecho respetando la forma de la superficie original comentaba, que le resultaba más difícil la modificación del polígono cóncavo. Por otro lado, el alumno que no tuvo éxito trabajando con el rombo, tampoco lo tuvo con el polígono cóncavo. Así pues, creemos que la utilización de una superficie como el rombo, muy familiar a los alumnos, en esta ocasión no ha influido significativamente en el éxito o fracaso de los alumnos en conseguir la modificación solicitada.

Sin embargo, no podemos decir lo mismo de lo ocurrido con el rectángulo en el ítem 2.14, ya que algunos alumnos en sus respuestas al ítem en el test y, otros durante las entrevistas, manifestaron que podrían encontrar otra figura de menor área e igual perímetro, pero no otro rectángulo, ya que como dijo un alumno "los cuatro ángulos rectos lo hacen imposible". Luego el rectángulo es una superficie que no sólo no facilitó la búsqueda de la transformación sino que la dificultó e incluso en más de una ocasión la impidió. Por lo tanto este caso nos informa de la influencia negativa que el uso del rectángulo ha supuesto para demasiados alumnos y nos advierte de la importancia que posee la forma de la superficie en determinadas transformaciones y en la formación de algunas concepciones de los alumnos.

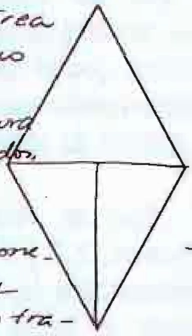
Con el fin de estudiar si existía algún tipo de relación entre los comportamientos manifestados por los alumnos en estos dos ítemes, 2.2 y 2.14, definimos una misma variable categórica para cada uno de ellos, que representaba las cuatro posibles respuestas que un alumno había podido dar en ellos, es decir si había dado una modificación correcta, incorrecta, indicaba que era imposible o bien la había dejado en blanco. Realizado el test de la χ^2 y a partir de los p-valores se detectó una cierta dependencia entre estas dos variables en 8° de E.G.B. (p=0'01663 (*)), en 2° de B.U.P. (p=0'04611 (*)), en 3° E.M. (p=0'00351 (**)) y en 5° F.M. (p=0'02509 (*)), no así en C.O.U.-L (p=0'14924) y C.O.U.-C (p=0'13890). Al estudiar las tablas de contingencia correspondientes a cada curso (ver Anexo 4) observamos que el número de casos es inferior a cinco en una mayoría de las celdas, registrándose en algunas de ellas unos y ceros. Esto nos lleva a advertir de la precaución con la que se deben interpretar los p-valores resultantes del contraste de hipótesis, ya que para que éstos se consideren fiables se debe verificar que el número de casos en cada una de las celdas de la tabla de contingencia posea al menos 5 casos. Por ello hemos centrado nuestra atención en el análisis de las tablas de doble entrada, y del que se deduce que en todos los cursos los alumnos que dejaron en blanco el ítem 2.14 mayoritariamente lo hicieron también en el ítem 2.2 y, que la mayor parte de los alumnos que dijeron que la modificación solicitada en el ítem 2.2 era imposible, se manifestaron en el mismo sentido en el 2.14. Esto último viene a confirmar que aún a pesar de la influencia negativa que el rectángulo pudo tener en los alumnos en el ítem 2.14, realmente el factor que más influyó en el éxito o fracaso de éstos fue la dependencia que algunos estudiantes establecen entre el área y el perímetro. Como ejemplo de ello mostramos los razonamientos de dos alumnos de C.O.U.-L que realizaron correctamente la transformación demandada en el ítem 2.2 pero no así la del 2.14.

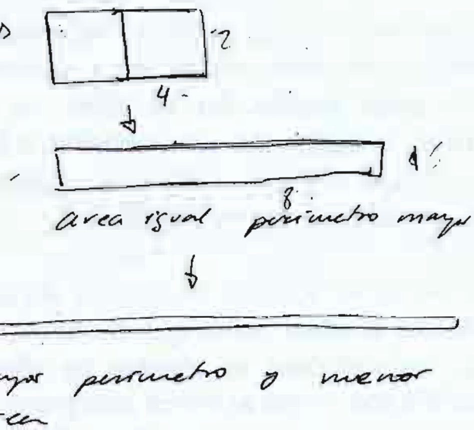
Alumno C.O.U.-L-28

ítem 2.2

2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.

Como la mayor área en un paralelogramo se encuentra en el cuadrado; y esta figura es como dos cuadrados, se puede aplicar la 'teoría' ~~de~~ si lo modificamos y le ponemos mucha base y poca altura, encontraremos una superficie de menor área, pero con un perímetro mayor.

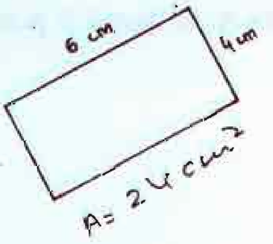




ítem 2.14

14. Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.

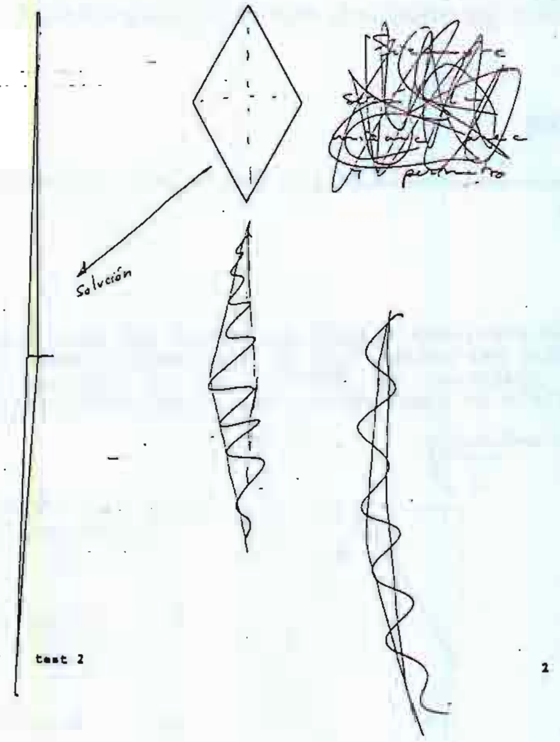


No es posible
Sería posible que tuviera un área igual y un perímetro mayor como en el ejercicio nº 2, alargando la figura, quitándole altura, pero así no se puede hacer

Alumno C.O.U.-L-44

ítem 2.2

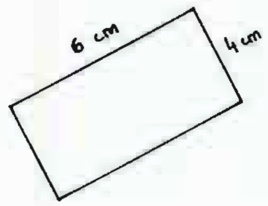
2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.



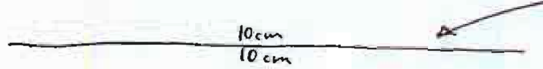
ítem 2.14

14. Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.



Es imposible. porque si a de tener el mismo perimetro, el area sera la misma, a no ser que:



$A=0$

Por último hemos seleccionado algunas respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.2 como representantes de la distinta naturaleza de los procedimientos que los estudiantes utilizaron para justificar sus transformaciones. Pudimos comprobar que los procedimientos numéricos fueron utilizados fundamentalmente por los alumnos de 8º de E.G.B. y C.O.U.-L, los algebraicos por los de 5º de F.M., y los geométricos por los alumnos de los distintos cursos. Pensamos que ello va en consonancia con el grado de dominio que los alumnos poseen de los distintos lenguajes, gráfico (geométrico), numérico y algebraico.

PROCEDIMIENTOS NUMÉRICOS

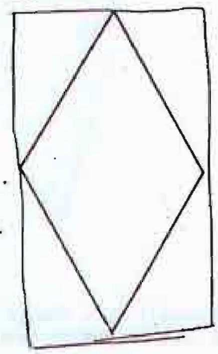
Alumno 8º E.G.B.-17

2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.

$\cancel{A = \frac{D \cdot d}{2}}$ $A = b \cdot A$

$P_{ro} = 16$ cm

$P_{re} = 24$ cm.



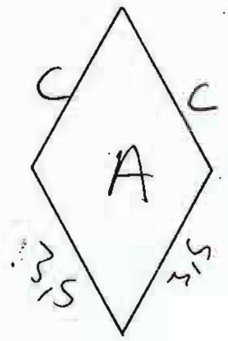
$A = \frac{4 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2}$

$A = \frac{12 \text{ cm}^2}{2}$

$A = 6 \text{ cm}^2$

Alumno C.O.U.-L-101

2. **La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.**



$$\text{area} = C \times C = C^2$$
$$= 3{,}5^2$$

Si la figura es un circulo

$$3{,}5^2 = 2\pi r^2$$

busco r 3,14

y con la formula del perimetro

$$\Rightarrow 2\pi r$$

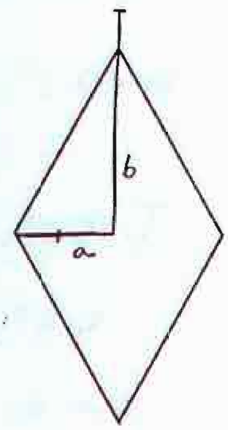
$$P_A = 3{,}5 \times 4 = 14$$
$$A_A = 3{,}5^2$$

$$\frac{3{,}5^2}{3{,}14} \approx 3{,}7 \quad 3{,}7$$

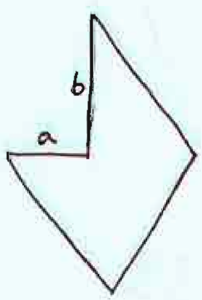
PROCEDIMIENTOS ALGEBRAICOS

Alumno 5º F.M.-1

2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.



$A_1 = a \cdot b + a \cdot b = 2a \cdot b$ $\qquad P_1 = 4 \cdot (\sqrt{a^2+b^2})$



$(a+b)^2 > a^2+b^2.$

$\sqrt{(a+b)^2} > \sqrt{a^2+b^2} \Longrightarrow$

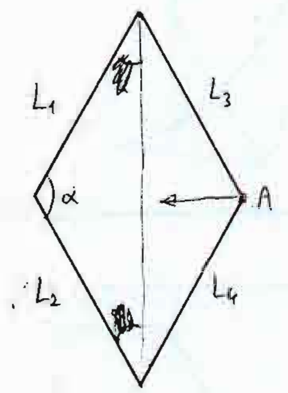
$P_2 = 3\sqrt{a^2+b^2} + a+b >$

$4\sqrt{a^2+b^2} = P_1$

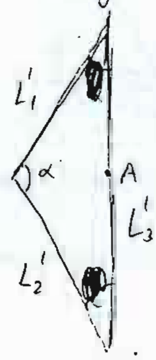
$A_2 = A_1 - \frac{a \cdot b}{2}$

Alumno 5º F.M.-21

2. **La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.**



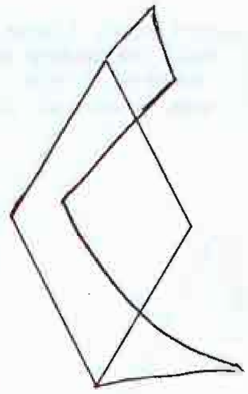
Conservando el ángulo α, llevo el vértice A hasta la diagonal mayor, con lo que me queda el triángulo



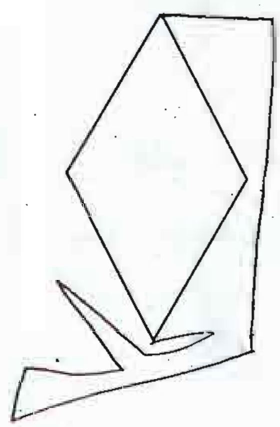
El área es menor, y el perímetro mayor puesto que $L_1' > L_1$ y $L_2' > L_2$ $(L_3' = L_3 + L_4)$

PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS

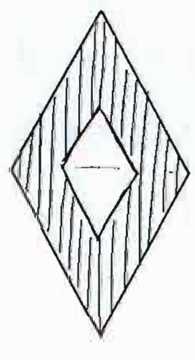
Alumno 8º E.G.B.-67



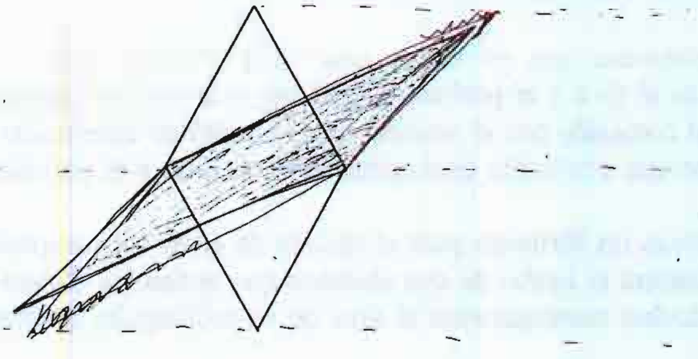
Alumno 2º B.U.P.-104



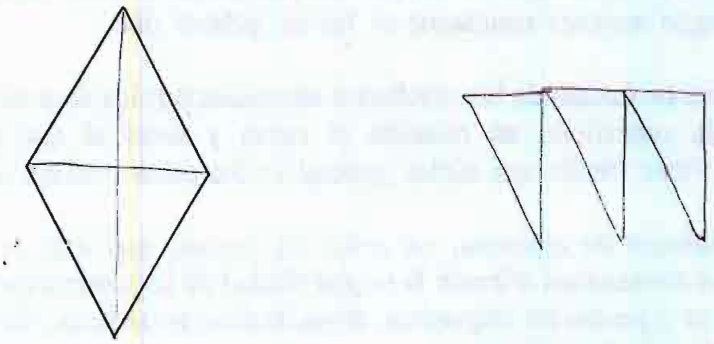
Alumno C.O.U.-L-8



Alumno C.O.U.-C-66. **Del dibujo realizado por este alumno se deduce que conoce y comprende que el área de un triángulo depende de su base y su altura.**



Alumno 5º F.M.-5



Conclusiones más relevantes del estudio sobre la relación entre el área y el perímetro de una superficie

- Se ha diferenciado entre una confusión conceptual, que se produce cuando un alumno se refiere clara y expresamente al perímetro como el área de la superficie, y la confusión operacional que se produce cuando un alumno, ante su desconocimiento de cómo calcular el área de un polígono para lo que recuerda existe una fórmula, procede a la suma de las longitudes de los lados del polígono.

- La totalidad de los alumnos de C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M., así como la práctica totalidad de los de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L tienen clara la diferencia conceptual entre el área y el perímetro.

- No se detectó ninguna confusión operacional en los cálculos realizados por los alumnos de C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M. Por el contrario, sí se detectaron algunos errores de este tipo en alumnos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L, si bien en un número bastante bajo y sólo algo significativo en 8º de E.G.B.

- Se ha podido constatar que no existe una clara relación entre lo que los alumnos manifiestan que es el área y el perímetro, y el modo como los calculan. Por lo tanto, del error operacional cometido por el alumno en su intento de determinar el área no se debe inducir que posee una confusión conceptual entre el área y el perímetro.

- Los alumnos utilizan las fórmulas para el cálculo de áreas sin comprender su significado, como así lo demuestra el hecho de que alumnos que entienden el área como el perímetro del polígono, calculan correctamente el área de un rectángulo, aplicando su fórmula.

- Las tareas de transformación de una superficie en otra basadas en la modificación del área y/o del perímetro resultan de gran dificultad a una mayoría de alumnos, independientemente del curso al que pertenezcan.

- Este tipo de tareas planteadas en un contexto geométrico, en un primer momento desaniman a un mayor número de alumnos que las planteadas en uno numérico, aunque posteriormente obtengan mejores resultados en las del primer tipo.

- No se ha detectado una evolución de los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas de transformación de superficies en relación al curso y nivel al que pertenecen, a diferencia de lo que viene siendo una tónica general en los otros conceptos a estudio.

- Existe un altísimo número de alumnos, en todos los cursos, que ante la dificultad de encontrar la superficie demandada afirman la imposibilidad de la construcción de ésta bajo las condiciones de área y perímetro impuestas, amparándose en la falsa relación que para ellos existe entre el área y el perímetro.

- De la afirmación de los alumnos relativa a la imposibilidad de construir un rectángulo de menor área e igual perímetro que uno dado no puede inferirse que no admitan que puedan existir superficies de igual perímetro con diferente área. Por el contrario, los alumnos que manifiesten que superficies de igual perímetro no pueden tener diferente área no podrán afrontar esta transformación.

- Se ha encontrado que más del 50% de los alumnos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P., C.O.U.-L y 3º E.M., y el 35% de los de C.O.U.-C y 5º F.M., en un contexto de transformación de una superficie, creen que las propiedades de la superficie, área y perímetro, son íntimamente dependientes una de la otra.

- Para evitar o rectificar la falsa relación que los alumnos establecen entre el área y el perímetro es necesario plantear instrucción específica, ya que la formación matemática general adquirida por éstos a lo largo de sus estudios se ha revelado insuficiente.

- La conservación del área resulta más sencilla a los estudiantes que la del perímetro.

- Tal vez, la variación simultánea de las propiedades área y perímetro de una superficie resulta más asequible a los alumnos que la de sólo una de ellas, debiendo permanecer invariante la otra.

- Se ha constatado que el uso del rectángulo como superficie a transformar ha dificultado e incluso impedido a los alumnos encontrar la modificación solicitada, ya que parece que la "rigidez" de la figura que imponen los cuatro ángulos rectos, les impide la deformación que ellos creen requiere la superficie.

3.4.5. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y LA FORMA DE UNA SUPERFICIE

Tras el análisis de las respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.2 se observó que mientras que algunos alumnos realizaban la modificación del rombo sin preocuparse por la forma de la nueva superficie, otros no abandonaban durante sus intentos la forma de la superficie original, es decir la de rombo. Estudiado este fenómeno se constató que de entre todos los alumnos que habían intentado la modificación, el 56'1% (32/57) de los de 8° de E.G.B., el 41'3% (33/80) de los de 2° de B.U.P., el 45% (27/60) de los de C.O.U.-L, el 34'8% (23/66) de los de C.O.U.-C, el 26'3% (5/19) de los de 3° E.M. y el 21'7% (5/23) de los de 5° F.M., habían conservado la forma de la superficie original. Estas cifras ponen de manifiesto el peso que la forma de la superficie ha tenido en un gran número de alumnos en el momento de realizar una modificación del área. Así pues, parece que no está completamente asumido por los alumnos que el área de una superficie esté totalmente desligada de su forma.

El ítem 2.8, donde se le pedía a los alumnos que construyeran cuatro figuras (no cuadradas) diferentes que tuvieran de área un centímetro cuadrado, tenía como objetivo comprobar si los alumnos admiten que superficies de formas distintas pueden tener igual área. Como ya se comentó en el apartado 3.3.5.2., se pudo comprobar durante las entrevistas que los alumnos que habían fracasado en este ítem manifestaban que si dos superficies tenían la misma área deberían tener la misma forma. Así pues los porcentajes correspondientes a los alumnos de los distintos cursos que no fueron capaces de construir ninguna de las cuatro figuras pedidas en este ítem (Tabla 19) nos proporcionan una idea acerca de la cantidad de alumnos que en los distintos cursos no llegan a disociar el área de la forma de la superficie.

El bajo número de alumnos que en cada curso no respondió al ítem 2.8 hace pensar que la tarea solicitada les resultó asequible a la gran mayoría de los estudiantes.

Son especialmente significativas las cifras correspondientes a 8° de E.G.B. y a 3° E.M. La primera porque representa a un número elevado de alumnos, y la segunda porque si bien la cifra por si sola no es elevada sí los es dado el nivel académico de los alumnos. De nuevo, los resultados obtenidos por los alumnos de C.O.U.-L son prácticamente iguales a los de 2° de B.U.P., existiendo gran diferencia con respecto a los de C.O.U.-C.

	no consiguen dibujar ninguna figura en el ítem 2.8	no contestan
8° E.G.B.	33'0% (29/88)	13'7% (14/102)
2° B.U.P.	10'1% (12/119)	9'2% (12/131)
C.O.U.-L	10'0% (9/90)	11'8% (12/102)
C.O.U.-C	1'9% (2/105)	4'5% (5/110)
3° E.M.	16'3% (7/43)	2'3% (1/44)
5° F.M.	0'0% (0/31)	3'1% (1/32)

Tabla 19. Alumnos que no consiguen dibujar correctamente ninguna figura en el ítem 2.8, o lo dejan en blanco.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la relación entre el área y la forma de una superficie

- Ante la necesidad de modificar el área de una superficie existe una gran tendencia a conservar la forma de ésta.

- Se ha observado que no todos los alumnos de los distintos niveles educativos tienen perfectamente claro que superficies de igual área puedan tener formas diferentes. El porcentaje más alto y significativo corresponde a los alumnos de E.G.B. En secundaria este comportamiento se ha detectado en los cursos de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, y en el nivel universitario sólo en el curso de 3° E.M.

- Se ha constatado que para los alumnos en general, el área está ligada de algún modo a la forma de la superficie. Sin embargo, esta relación de dependencia entre estas dos propiedades es mucho más frágil que la existente entre el área y el perímetro, ya que si bien es cierto que ha influido y en consecuencia ha condicionado el comportamiento de los alumnos, sólo en muy pocos casos les ha conducido a error.

3.4.6. BIDIMENSIONALIDAD DEL ÁREA

Relación entre la variación de las dimensiones lineales y la variación ocasionada en el área

A continuación se exponen de forma conjunta los datos correspondientes a los tipos de comportamiento manifestados por los alumnos en los ítemes 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 y 2.19, con los que se quería estudiar en qué modo afectaban al área las modificaciones realizadas en las dimensiones lineales de determinadas figuras, círculo, cuadrado y triángulo.

El objetivo de los ítemes 2.15 y 2.16 era sugerir a los alumnos el recubrimiento de la figura con baldosas de igual forma que la de la figura dada, como un posible procedimiento que les permitiera abordar los ítemes posteriores 2.17, 2.18 y 2.19, sin necesidad de recurrir a un procedimiento numérico, consistente en el cálculo de las dimensiones lineales de la nueva superficie para posteriormente determinar su área.

La práctica totalidad de los alumnos de cada curso resolvió estos ítemes, con un alto porcentaje de éxito, que en los dos casos estuvo muy próximo del 100%, si bien éste resultó ser en el caso del triángulo un poco inferior al del rectángulo. Los resultados permiten afirmar que casi todos los alumnos comprenden la tarea y la resuelven con éxito.

Los ítemes 2.17, 2.18 y 2.19 ya no resultaron ser tan asequibles a los alumnos como los anteriores, como lo ponen de manifiesto el número de alumnos que los dejó en blanco, y el bajo número de ellos que los resolvió con éxito.

	ítem 2.17 (círculo)		ítem 2.18 (cuadrado)		ítem 2.19 (triángulo)	
	correcto	no contesta	correcto	no contesta	correcto	no contesta
8° E.G.B.	5'3% (4/75)	26'5%	46'1% (41/89)	12'7%	7'5% (5/67)	34'3%
2° B.U.P.	10'5% (11/105)	19'8%	58'2% (71/122)	6'9%	15'9% (14/88)	32'8%
C.O.U.-L	5'3% (4/76)	25'5%	55'6% (50/90)	11'8%	4'3% (3/69)	32'4%
C.O.U.-C	38'8% (40/103)	6'4%	83'5% (91/109)	0'9%	39'3% (35/89)	19'1%
3° E.M.	23'1% (9/39)	11'4%	68'2% (30/44)	0'0%	11'1% (4/36)	18'2%
5° F.M.	87'1% (27/31)	3'1%	100'0% (32/32)	0'0%	68'0% (17/25)	21'9%

Tabla 20. Alumnos que resuelven correctamente el ítem 2.17, 2.18 y 2.19 o lo dejan en blanco.

El ítem 2.19 correspondiente al del triángulo fue el que desanimó al mayor número de alumnos, resultando ser el del cuadrado el más asequible.

Como puede observarse el porcentaje de éxito alcanzado por los alumnos en los distintos casos y cursos fue muy bajo, incluso excesivamente bajo para el caso del cuadrado en el que un sencillo embaldosamiento permitía llegar a la solución correcta. Luego se constata que en general los alumnos no están habituados a enfrentarse a tareas de este tipo, que indiscutiblemente para ellos encierran gran dificultad.

Los procedimientos utilizados por los alumnos han sido variados:

A) Razonamiento algebraico: Buscan la relación entre las áreas de las dos figuras, a partir de la modificación del elemento o elementos de los que depende el área.
B) Razonamiento numérico: A partir de la fórmula del área, calculan el valor del elemento o elementos de los que depende el área de la primera figura, para el posterior cálculo del área de la figura modificada.
C) Mediante el recubrimiento de la superficie establecen la relación entre las áreas, determinando el número de figuras iniciales que recubren la nueva.
D) Duplican o triplican directamente el valor del área de la figura original.
E) Otros razonamientos erróneos.

La distribución de los alumnos en cada uno de estos tipos de procedimientos se muestra en la tabla siguiente.

	ítem 2.17 (círculo)				ítem 2.18 (cuadrado)				ítem 2.19 (triángulo)			
	algebraico	numérico fórmula	por recubrimiento	duplican	algebraico	numérico fórmula	por recubrimiento	triplican	algebraico	numérico fórmula	por recubrimiento	duplican
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
8° E.G.B	0'0%	2'7%	1'3%	62'7%	0'0%	5'6%	33'7%	30'3%	0'0%	3'0%	13'4%	46'3%
2° B.U.P	1'0%	7'6%	1'9%	70'5%	0'0%	18'0%	28'7%	27'0%	0'0%	2'3%	11'4%	60'2%
C.O.U-L	1'3%	1'3%	0'0%	76'3%	0'0%	20'0%	31'1%	35'6%	1'4%	0'0%	5'8%	76'8%
C.O.U-C	41'7%	3'9%	11'6%	32'0%	4'6%	24'8%	50'4%	13'8%	23'6%	1'1%	28'1%	38'2%
3° E.M	17'9%	12'8%	0'0%	59'0%	4'5%	38'6%	22'7%	18'2%	11'1%	2'8%	11'1%	66'7%
5° F.M	51'6%	45'2%	0'0%	3'2%	28'1%	43'8%	28'1%	0'0%	68'0%	0'0%	28'0%	4'0%

Tabla 21. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de los ítemes 2.17, 2.18 y 2.19.

Si bien los diferentes procedimientos utilizados por los alumnos están asociados al curso al que pertenecen y en consecuencia a su formación matemática, esta tabla pone de manifiesto que además de ésta, la elección se ha visto condicionada primeramente, por el grado de dificultad que el cálculo del área ha supuesto al alumno en cada caso.

Mientras que los procedimientos numérico y de recubrimiento mediante baldosas de igual forma que la superficie dada, resultan ser procedimientos disponibles para los alumnos de todos los cursos y niveles (aunque no estén por todos consolidados de la misma forma), no ocurre así con el algebraico, que es privilegio de los alumnos con una ya determinada formación matemática. Así pues, al margen del error cometido por los alumnos al duplicar o triplicar directamente el área dada, los alumnos de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L se inclinan por el uso mayoritario del procedimiento de embaldosado, los de C.O.U.-C y 3° E.M. utilizan indistintamente los tres procedimientos, mientras que existe una clara tendencia de los de 5° F.M. al uso del numérico y algebraico.

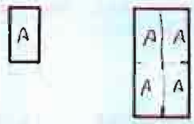
Esta forma de resolver los problemas de los alumnos ha hecho que el éxito alcanzado en el cálculo del área del triángulo (ítem 2.19) por los alumnos de 8° de E.G.B. y 2° de B.U.P. haya resultado superior al obtenido por ellos en el cálculo del área del círculo (ítem 2.17). Del mismo modo, el error consistente en la duplicación directa del área original ha sido inferior en estos cursos, contrariamente a lo que ha sucedido en los otros, especialmente en 3º E.M. y 5º F.M.

Veamos el modo de proceder de algunos alumnos.

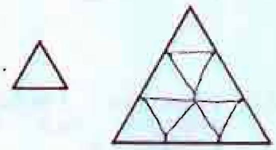
Alumno 5º F.M.-23.

Este alumno establece algebraicamente las relaciones correctas entre las áreas de cada par de figuras.

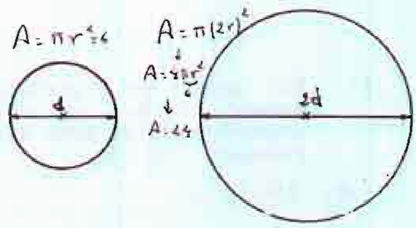
15. ¿Cuántos rectángulos pequeños hay en el grande?. ....4....



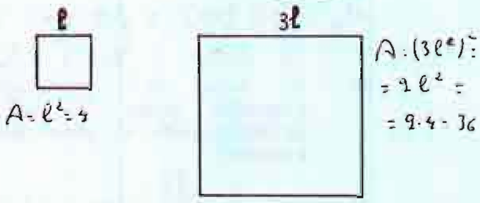
16. ¿Cuántos triángulos pequeños hay en el grande?. ....9....



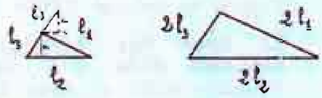
17. El área del círculo pequeño mide 6 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.
...Area = 24 cm^2...



18. El área del cuadrado pequeño mide 4 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.
...Area = 36 cm^2...



19. El área del triángulo pequeño mide 1'5 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.
...Area = 6 cm^2...



La altura del 2' triángulo es el doble que la altura del 1º, y la misma relación siguen las bases.

$$A = \frac{2b \cdot 2a}{2} = 4\underbrace{\frac{b \cdot a}{2}}_{=1'5} = 6$$

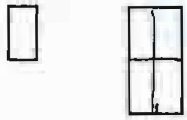
Sin embargo, este modo de proceder no siempre permitió a los alumnos de los cursos superiores determinar correctamente el área en los tres casos, fracasando, como ya hemos comentado anteriormente, en el caso del triángulo y como le ocurrió al alumno siguiente.

Alumno 3º E.M.-23

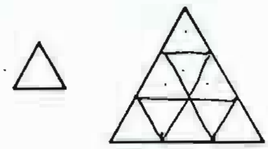
Divide la figura grande en varias pequeñas.

Indica el razonamiento que utilices para responder a cada una de las situaciones que a continuación se te plantean.

15. ¿Cuántos rectángulos pequeños hay en el grande?. 4



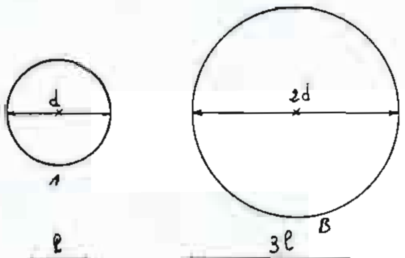
16. ¿Cuántos triángulos pequeños hay en el grande?. 9



17. El área del círculo pequeño mide 6 cm², ¿cuánto mide el área del grande?. $R = 2r$.

$A_A = 2\pi r^2 = 6$

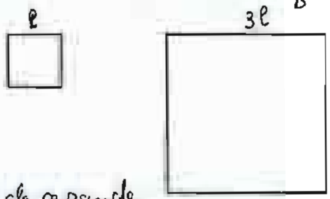
$A_B = 2\pi(2r)^2 = 2\pi 4r^2 = 4 \cdot 2\pi r^2 = 4 \cdot 6 = 24 cm^2$.



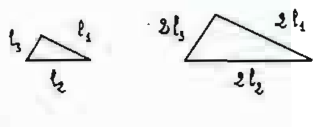
18. El área del cuadrado pequeño mide 4 cm², ¿cuánto mide el área del grande?.

36

Hallo $l = 2$ y luego $3l$.
Despues es obtener el area del cuadrado grande.



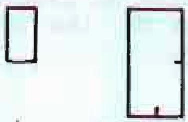
19. El área del triángulo pequeño mide 1'5 cm², ¿cuánto mide el área del grande?.



Otros se vieron enfrascados en arduos razonamientos algebraicos que no les condujeron a ningún resultado concreto, como por ejemplo:

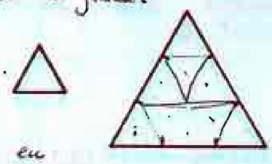
Alumno 5º F.M.-11

15. ¿Cuántos rectángulos pequeños hay en el grande?. ....4........



he visto cuantos rectángulos iguales que □ se podía dividir el grande.

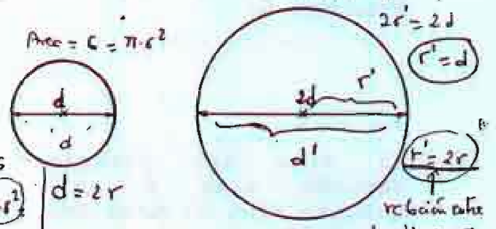
16. ¿Cuántos triángulos pequeños hay en el grande?. ....9..........



he descompuesto el triángulo grande en suma de triángulos pequeños.

17. El área del círculo pequeño mide 6 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.

$4 \cdot \underset{6}{(\pi \cdot r^2)} = 24\ cm^2$ ....



Área $= C = \pi \cdot r^2$

$d' = 2d \rightarrow$ $2r' = 2d$ $r' = d$

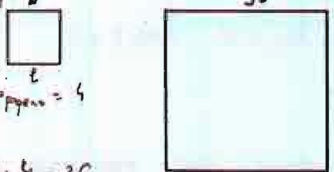
$r' = 2r$ relación entre el radio pequeño r y r'

$d = 2r$

$Área_{grande} = \pi (r')^2 = \pi \cdot (2r)^2 = 4 \cdot \underset{6}{(\pi \cdot r^2)} = 4 \cdot 6 = 24$

18. El área del cuadrado pequeño mide 4 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.

..........$36\ cm^2$..........



Área pequeño = 4

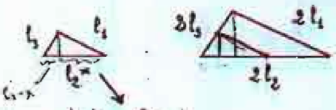
llamo ℓ' al lado del cuadrado grande

$\boxed{\ell' = 3\ell}$ relación entre el ℓ' y ℓ

$Área_{cuadrado\ grande} = (\ell')^2 = (3\ell)^2 = 9 \cdot \ell^2 = 9 \cdot 4 = 36$

19. El área del triángulo pequeño mide 1'5 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.

....



$Área = \frac{b \cdot h}{2} - \frac{\ell_2 \cdot h}{2}$

$h^2 = \ell_1^2 + \ell^2$

$h \Rightarrow \ell_3^2 - (\ell_2 - x)^2 = h^2$

$h = \sqrt{\ell_3^2 - (\ell_2 - x)^2}$

$Área_{grande} = \frac{2 \cdot \ell_2 \cdot h'}{2}$

$h' = ?$

$2\ell_3^2 - [2(\ell_2 - x)]^2 = h'$

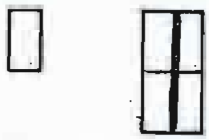
$2\ell_3^2 - 4(\ell_2 - x)^2 = 2[\ell_3^2 - 2(\ell_2 - x)^2]$

El siguiente ejemplo corresponde al cálculo de las áreas realizado por un alumno de 8º de E.G.B. mediante el procedimiento de recubrimiento, lo que le permite determinar con sencillez y rapidez las áreas en el caso de los polígonos pero no así en el círculo. La sencillez de esta respuesta contrasta con la complejidad de la anterior.

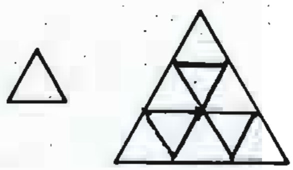
Alumno 8º E.G.B.-55

Indica el razonamiento que utilices para responder a cada una de las situaciones que a continuación se te plantean.

15. ¿Cuántos rectángulos pequeños hay en el grande?. 4 ....

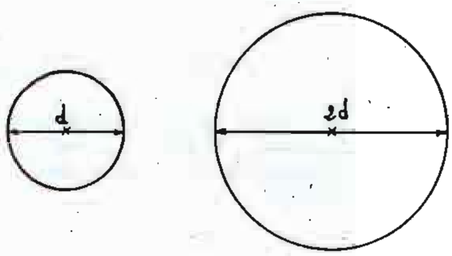


16. ¿Cuántos triángulos pequeños hay en el grande?. 9 ....



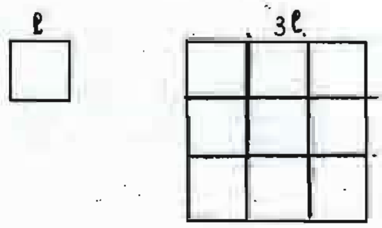
17. El área del círculo pequeño mide 6 cm², ¿cuánto mide el área del grande?.

no lo se hacer...



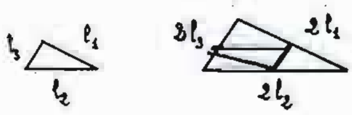
18. El área del cuadrado pequeño mide 4 cm², ¿cuánto mide el área del grande?.

......36 m²..........



19. El área del triángulo pequeño mide 1'5 cm², ¿cuánto mide el área del grande?.

....6cm².............

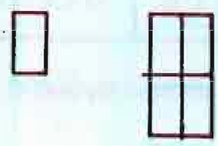


Sin embargo, y a pesar de los ejemplos mostrados un número muy elevado de alumnos en cada curso no utilizó ningún procedimiento geométrico (recubrimiento), ni numérico, ni algebraico para determinar las áreas del círculo, cuadrado y triángulo, limitándose a extender la modificación experimentada por las dimensiones lineales al área. A excepción del caso del cuadrado, una mayoría de alumnos en todos los cursos, salvo los de C.O.U.-C y 5º F.M., cometieron este error. Sus respuestas eran como las que se muestra a continuación.

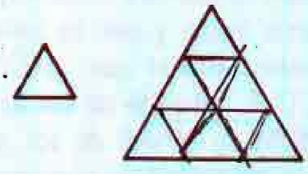
Alumno 2º B.U.P.-21

Indica el razonamiento que utilices para responder a cada una de las situaciones que a continuación se te plantean.

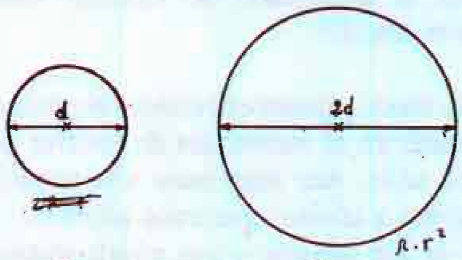
15. ¿Cuántos rectángulos pequeños hay en el grande?. 4 .... la regla



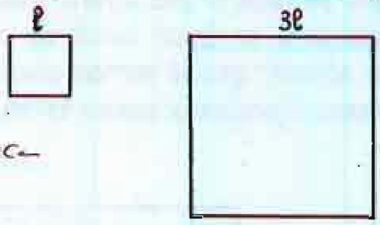
16. ¿Cuántos triángulos pequeños hay en el grande?. 9 .... imaginación



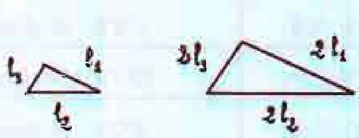
17. El área del círculo pequeño mide 6 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?. 12 cm^2 .... lógica



18. El área del cuadrado pequeño mide 4 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?. .... lógica
9 veces más



19. El área del triángulo pequeño mide 1'5 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?. El doble .... lógica



Con objeto de averiguar cuántos alumnos procedían de este modo sistemáticamente estudiamos el número de ellos que duplicaron o triplicaron el área directamente en una, dos o las tres ocasiones, obteniéndose los siguientes resultados. Los porcentajes que se muestran están referidos al total de alumnos de cada curso.

	8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
una vez	24'5% (25)	22'1% (29)	20'6% (21)	24'5% (27)	22'7% (10)	6'3% (2)
dos veces	18'6% (19)	23'7% (31)	24'5% (25)	15'5% (17)	27'3% (12)	0'0% (0)
las tres veces	13'7% (14)	17'6% (23)	23'5% (24)	6'4% (7)	15'9% (7)	0'0% (0)

Tabla 22. Alumnos que duplican o triplican el área en los ítemes 2.17, 2.18 y 2.19, en una, dos o las tres ocasiones.

Considerando que aquellos alumnos que hayan cometido el error en dos o tres casos tienen sistematizado este error y por lo tanto en una mayoría de los casos es de esperar que lo cometan, podemos afirmar que: el 32'3% de los estudiantes de 8° de E.G.B., el 41'3% de los de 2° de B.U.P., el 48% de los de C.O.U.-L, el 21'9% de los de C.O.U.-C y el 43'2% de los de 3° E.M. y el 0% de los de 5° F.M. aplican directamente la misma variación sufrida por una magnitud unidimensional a una bidimensional. Por lo tanto todos ellos desconocen el significado del carácter bidimensional del área y de su relación con las dimensiones lineales.

Del mismo modo, quisimos conocer el número de alumnos, por curso, que había dado el área correctamente en al menos dos de los tres ítemes, y como se puede comprobar al observar la próxima tabla, éste representa una pequeñísima fracción del total de los estudiantes. No nos atrevemos a afirmar que estos alumnos conocen y comprenden el carácter bidimensional del área, ya que pensamos que podría tratarse de alumnos que salen airosos de este tipo de situaciones gracias a su buen nivel en cálculo numérico y algebraico. Sin embargo, sí creemos poder afirmar que al menos estos alumnos no tienen interiorizado que la variación de las dimensiones lineales ocasiona la misma variación al área.

	área correcta en 2 ítemes	área correcta en los 3 ítemes
8° E.G.B.	5'9% (6 alumnos)	0'9% (1 alumno)
2° B.U.P.	10'7% (14 alumnos)	3'1% (4 alumnos)
C.O.U.-L	6'9% (7 alumnos)	0'0% (0 alumnos)
C.O.U.-C	32'7% (36 alumnos)	16'4% (18 alumnos)
3° E.M.	27'3% (12 alumnos)	0'0% (0 alumnos)
5° F.M.	50'0% (16 alumnos)	43'7% (14 alumnos)

Tabla 23. Alumnos que dan el área correcta en al menos dos de los tres ítemes 2.17, 2.18 y 2.19.

Relación entre la variación que sufre el área de una superficie y la variación ocasionada en las dimensiones lineales

Como ya se comentó en el capítulo 1, dedicado a la presentación de los antecedentes del tema, las investigadoras Douady y Perrin-Glorian (1983, 1985, 1989) observaron que la designación que habitualmente se realiza de 1 cm^2 como el área de un cuadrado de lado 1 cm, provocaba en los alumnos su extensión a 1/2 cm^2, considerándolo como el área de un cuadrado de lado 1/2 cm.

Con objeto de comprobar si este modo de presentar el cm^2 a los alumnos, que también se realiza en España, provoca en ellos la misma confusión que la detectada en la investigación que acabamos de citar, se incluyeron el ítem 2.7, y el ítem 2.12.

Al observar a los alumnos durante la administración del test se pudo comprobar que la tarea demandada en ítem 2.7 no les resultó nada sencilla y además les requirió bastante tiempo. Los comportamientos observados fueron diferentes:

- A partir del cuadrado de área 1 cm^2, intentaban mediante un procedimiento geométrico la construcción del cuadrado buscado. Finalmente, después de dedicar bastante tiempo sin lograr la figura deseada, abandonaban el ítem, dejándolo en blanco. Pocos fueron los alumnos que consiguieron la construcción demandada.

- Tras un determinado tiempo dedicado a la búsqueda del cuadrado mediante un método geométrico, optaban por el procedimiento numérico que conocida el área les proporcionaba la longitud del cuadrado buscado. Esta forma de proceder, se observó fundamentalmente en los alumnos de los cursos superiores (C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M.).

- Algunos alumnos dibujaron una figura de 1/2 cm^2 de área pero no cuadrada. Cuando se les indicaba que la figura debía ser un cuadrado procedían a borrarla, y en la mayoría de las ocasiones se quedaban bloqueados, dejando en blanco el ítem.

- Otros alumnos, mayoritariamente los de 8º de E.G.B., confundieron 1/2 con 1'5. Este error vendría a justificar el 71'1% de respuestas incorrectas obtenidas por estos alumnos en este ítem.

En definitiva, procediendo de un modo u otro, fueron muy pocos los alumnos que en cada curso consiguieron resolver con éxito este ítem, ya que el mejor porcentaje corresponde a los estudiantes de 5º F.M. con un 55'25%.

La siguiente tabla muestra el porcentaje de alumnos que respondiendo al ítem construyeron un cuadrado de lado 1/2 cm de longitud.

8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
20'0%	33'3%	41'2%	18'1%	48'8%	17'9%

Tabla 24. Porcentaje de alumnos que en el ítem 2.7 para la construcción de un cuadrado de 1/2 cm^2 de área, construyeron un cuadrado de lado 1/2 cm de longitud.

De estas cifras es de destacar el alto porcentaje de alumnos de 3° E.M. que han cometido este error, y el correspondiente a los de 5° de F.M., que aún siendo el más bajo, creemos que es excesivo para su nivel.

A diferencia de lo ocurrido en el ítem 2.7, en el 2.12 la mayoría de los alumnos en los distintos cursos, salvo en 8° de E.G.B. y C.O.U.-L, estableció de forma correcta la relación entre las unidades de medida, encontrando que el cuadrado de lado 1/2 cm de longitud era la cuarta parte del cuadrado de lado 1 cm de longitud, y en consecuencia cuadruplicaron el número por ellos dado como área del polígono del ítem 2.10. Luego esta tarea resultó mucho más sencilla a los alumnos que la del ítem 2.7. Creemos que el hecho de que en el ítem 2.12 el alumno pueda comparar el área de dos superficies dadas le facilita la respuesta y le evita llegar de forma irreflexiva a una conclusión errónea. Sin embargo un elevado número de alumnos en todos los cursos salvo en 5° de F.M. no comparó estas dos superficies y se limitó a duplicar el número correspondiente a la medida del área de la superficie, utilizando como unidad de medida un cuadrado de lado 1 cm de longitud.

Planteamos un estudio comparativo de las respuestas dadas por los alumnos en estos dos ítemes con el fin de comprobar si los alumnos que habían construido un cuadrado de lado 1/2 cm de longitud en el ítem 2.7 había duplicado la medida del área en el ítem 2.12, y viceversa. Realizado este estudio en cada curso se concluyó que no existía ningún tipo de relación entre las respuestas dadas por los alumnos en estos dos ítemes. Confesamos que nosotros sí esperábamos detectar, si bien no un p-valor en todos los cursos que nos advirtiera de la existencia de una dependencia entre estas respuestas, al menos sí algún indicio en algún curso que mostrara una determinada relación entre ellas, cosa que como ya hemos comentado no se produjo, y que realmente no sabemos como interpretar.

Reflexionando sobre el tipo de error cometido en el ítem 2.7, pensamos que el elevado número de alumnos que construyó un cuadrado de lado 1/2 cm de longitud cuando se les pidió construir un cuadrado que tuviera de área la mitad que la de un cuadrado de lado 1 cm de longitud, está fundamentalmente causado por su falta de comprensión del carácter bidimensional del área, que les lleva a extender la variación sufrida por el área a las dimensiones lineales o viceversa, antes que por una extensión de la denominación de 1 cm^2 como el área de un cuadrado de 1 cm de lado como así lo indican Douady y Perrin-Glorian. Si bien está claro que esta denominación no sólo no beneficia en nada, sino que por el contrario perjudica, en tanto que favorece la confusión anterior, y además porque supone asociar un área a una forma determinada.

Carácter bidimensional de las fórmulas del área

Cuántas veces preguntados los alumnos por una determinada fórmula para el cálculo de un área, por ejemplo la del círculo, dan sin mayor problema una expresión que nunca podría corresponder a una magnitud bidimensional como es el área, como por ejemplo: $A=2\pi r$ o $A=\pi r$ o $A=2\pi r^3$, expresiones erróneas ya que son fórmulas de carácter unidimensional o tridimensional.

Con el fin de estudiar hasta qué punto los alumnos de los distintos cursos han reflexionado sobre el carácter dimensional de una fórmula y comprenden la bidimensionalidad del caso concreto del área diseñamos el ítem 2.21. Este ítem fue excluido del ejemplar del test que fue administrado a los alumnos de 8° de E.G.B., por considerar que no estaban preparados para abordarlo significativamente.

Durante la administración del test se pudo comprobar, a través de la preguntas realizadas por los alumnos, que una mayoría de los de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L no entendía el significado de la tarea demandada en este ítem, lo que viene a justificar el alto porcentaje de respuestas en blanco registradas en estos cursos.

2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
58'8%	58'8%	32'7%	36'4%	18'7%

Tabla 25. Porcentaje de alumnos que dejan en blanco el ítem 2.21.

Si bien las cifras correspondientes a los otros cursos son inferiores a las de 2° de B.U.P. y C.O.U.-L son también muy elevadas considerando el nivel de los alumnos implicados, lo que viene a confirmar que los alumnos no están familiarizados con el carácter dimensional de una fórmula.

Si a todo esto añadimos el que un elevado número de alumnos de los que se decidieron a resolver el ítem realizaron una elección incorrecta e injustificada (ver Tabla 26), podemos concluir que la práctica totalidad de los alumnos de secundaria y 3° E.M., y un importante número de los de 5° F.M., no reconocen el carácter bidimensional de las fórmulas de área.

2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
98'2%	95'2%	73'0%	83'1%	30'8%

Tabla 26. Porcentaje de alumnos que realizan una elección errónea de las fórmulas de área en el ítem 2.21.

De las cifras correspondientes a los alumnos que utilizaron un razonamiento correcto, sólo 7 alumnos de C.O.U.-C, 2 de 3° E.M. y 11 de 5° F.M. han conseguido seleccionar correctamente todas las fórmulas de área.

Utilizando de nuevo el test de la χ^2 se ha comprobado que las variables que representan si la respuesta dada es correcta o incorrecta en el ítem 2.21 y en los ítemes 2.17, 2.18 y 2.19 son independientes. Se constató que los alumnos que habían dado correctamente el área del círculo, cuadrado y triángulo no habían conseguido la selección correcta de las fórmulas de área y viceversa. Únicamente los alumnos de 5° F.M. que habían seleccionado correctamente las fórmulas correspondientes a un área en el ítem 2.21 calcularon correcta y mayoritariamente el área de las tres figuras (ítem 2.17, 2.18 y 2.19).

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la bidimensionalidad del área

- Determinar el área de un cuadrado a partir de la de otro y de la relación existente entre los elementos de los que depende la fórmula del área, se ha manifestado más sencilla para todos los alumnos, que el determinar en las mismas condiciones el área de un círculo y de un triángulo.

- El uso mayoritario por parte de los alumnos de 8° de E.G.B. y 2° de B.U.P. del recubrimiento de la superficie mediante baldosas de igual forma que ésta, como procedimiento para determinar la relación entre las áreas de las dos superficies dadas en cada caso, convirtió para estos estudiantes el cálculo del área del triángulo (ítem 2.19) en tarea más sencilla que la del círculo (ítem 2.17) donde el embaldosamiento resultaba verdaderamente difícil. Por el contrario, para los alumnos de 3° E.M. y 5° F.M., resultó ser más compleja el cálculo del área del triángulo que la del círculo ya que ellos optaron por establecer la relación entre las áreas algebraicamente o bien determinando el valor numérico del área a partir de la fórmula.

- El 32'3% de los estudiantes de 8° de E.G.B., el 41'3% de 2° de B.U.P., el 48% de los de C.O.U.-L, el 21'9 de los C.O.U.-C y el 43'2% de los de 3° E.M., creen que si la razón entre las dimensiones lineales de dos superficies es "k", también la razón entre sus áreas será "k". También se ha encontrado que un número de alumnos -bastante similar al que acabamos de indicar- creen que si el área de un cuadrado se reduce a la mitad también lo hará la longitud de sus lados, al comprobar que, presentar a los alumnos el cm^2, simplemente, como el área de un cuadrado de 1 cm de lado, provoca su extensión a 1/2 cm^2 como el área de un cuadrado de 1/2 cm de lado. Luego estos estudiantes no comprenden la relación que existe entre el área, magnitud bidimensional y las magnitudes unidimensionales a partir de las que se obtiene.

- La construcción de un cuadrado de 1/2 cm^2 de área sobre una malla cuadrada de 1 cm de lado, supuso una tarea de gran dificultad para todos los alumnos. En ella fracasaron el 45% de los alumnos de 5° F.M. y la gran mayoría de los demás cursos.

- La definición de cm^2 como el área de un cuadrado de 1 cm de lado, además de provocar en un importante número de alumnos de todos los cursos, su extensión a 1/2 cm^2, como ya hemos comentado anteriormente, colaborando de ese modo a la confusión ya existente para los alumnos entre el área de una superficie y las dimensiones lineales de las que depende, supone asociar un área a una forma determinada. Ello nos lleva a concluir que no es conveniente dar esta definición de cm^2, si ésta no va acompañada de la instrucción suficiente para evitar todas estas posibles confusiones.

- La práctica totalidad de los alumnos de 2° de B.U.P., C.O.U.-L, y la gran totalidad de los de 3° E.M., así como el 73% de los de C.O.U.-C y el 30'8% de los de 5° F.M. no conoce el carácter bidimensional de las fórmulas del área.

- No se puede concluir que los alumnos que no aplican la misma variación experimentada por las dimensiones lineales al área, reconocen el carácter bidimensional de la fórmula de área, y viceversa. Esto último sólo se ha verificado para los alumnos de 5° F.M.

3.4.7. FORMULAS PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS

Conocimiento de la fórmula del área del rectángulo, círculo, triángulo y paralelogramo

La siguiente tabla muestra, por curso, el porcentaje de alumnos, que respecto del total, dio las fórmulas correctas del rectángulo, círculo, triángulo y paralelogramo.

	fórmula correcta del rectángulo	fórmula correcta del círculo	fórmula correcta del triángulo	fórmula correcta del paralelogramo
8° E.G.B.	80'4%	27'4%	48'3%	13'7%
2° B.U.P.	95'4%	56'5%	74'8%	30'5%
C.O.U.-L	97'1%	28'4%	85'3%	17'6%
C.O.U.-C	98'2%	53'6%	96'3%	62'7%
3° E.M.	100'0%	40'9%	95'5%	56'8%
5° F.M.	100'0%	87'5%	100'0%	57'7%

Tabla 27. Porcentaje de alumnos que conocen las fórmulas del área del ítem 1.2.

A esta tabla podemos añadir la información que el ítem 1.4 nos proporciona acerca del conocimiento que poseen los alumnos sobre el área del cuadrado. Sorprende que más del 50% de los alumnos de 8° de E.G.B. desconozca la fórmula del área del cuadrado.

fórmula correcta del cuadrado					
8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
44'1%	86'2%	81'4%	100%	97'7%	100%

Tabla 28. Porcentaje de alumnos que conocen la fórmula del área del cuadrado.

Como cabría esperar, las fórmulas más recordadas por todos los alumnos han sido las correspondientes al rectángulo, cuadrado y triángulo, produciéndose un aumento progresivo de los porcentajes en relación al nivel del curso escolar. Sin embargo, en el caso del círculo y paralelogramo este aumento ha estado asociado a la formación matemática que corresponde a cada curso, como así lo pone de manifiesto el altibajo sufrido en C.O.U.-L, con porcentajes inferiores a los de 2° de B.U.P. y, en 3° E.M., inferiores a los de C.O.U.-C. Circunstancia ésta, que creemos está ocasionada por la falta de necesidad de estos alumnos de utilizar tales fórmulas en su vida diaria de estudiante.

Las cifras de la tabla siguiente se refieren al número de alumnos que por curso han conseguido dar al menos 3 fórmulas correctas de las cuatro solicitadas en el ítem 1.2. Del estudio hemos excluido el ítem 1.4, ya que no está planteado en los mismos términos que el ítem 1.2.

8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° E.M.
23'5%	53'4%	35'3%	72'7%	72'7%	93'7%

Tabla 29. Porcentaje de alumnos que han dado correctamente al menos 3 de las 4 fórmulas (rectángulo, círculo, triángulo y paralelogramo) del ítem 1.2.

De nuevo se detecta un aumento paulatino y progresivo de los porcentajes con respecto a los cursos, a excepción de la caída registrada en C.O.U.-L, disminución por otra parte que creemos natural, ocasionada por el abandono que estos alumnos han hecho de la asignatura de matemáticas.

Por otra parte es interesante observar que los porcentajes más bajos obtenidos, referidos a las fórmulas correctas del rectángulo, círculo, triángulo, paralelogramo y cuadrado corresponden a los alumnos de 8° de E.G.B., que el 14'7% de los estudiantes de este nivel escolar no alcanza a dar una sola fórmula correcta en ninguna de las cuatro ocasiones planteadas en el ítem 1.2, y que sólo el 23'52% de ellos consigue dar al menos tres fórmulas correctas, cuando son precisamente éstos los alumnos que más reciente tienen la instrucción sobre las fórmulas del área.

Entre los *errores* cometidos por los alumnos al plantear las fórmulas y posterior cálculo de las áreas, caben destacar:

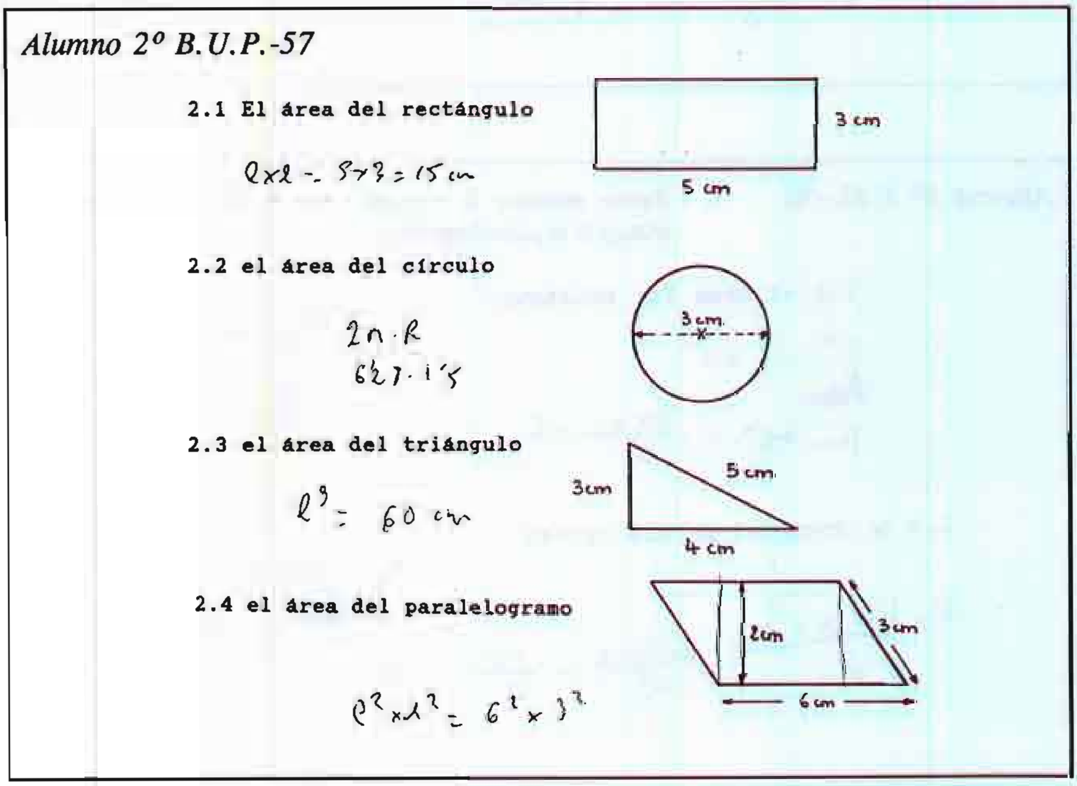
a) El cálculo del perímetro en lugar del área

Esta confusión ya fue comentada en el apartado dedicado al estudio de la relación existente entre el área y el perímetro. Pero recordemos que este error sólo fue cometido por muy pocos alumnos de 8º de E.G.B. y 2º de B.U.P., y por uno de C.O.U.-L.

b) El producto de tres dimensiones lineales

Para el cálculo del área del triángulo algunos alumnos de 8º de E.G.B. y 2º de B.U.P., procedieron multiplicando (o haciendo intervenir) las tres dimensiones dadas del triángulo. Este error se generalizó a todos los cursos en el caso del paralelogramo, en el que también se disponía de la medida de tres dimensiones, y afectó a un mayor número de alumnos. El porcentaje de los alumnos que procedieron de este modo, osciló entre el 2% de los de C.O.U.-C y el 25% de los de 8º de E.G.B.

Hemos comprobado que este comportamiento de algunos alumnos no tiene lugar de forma reiterada, ya que sólo muy pocos de los de 8º de E.G.B. y 2º de B.U.P. que lo manifestaron en el caso del triángulo vuelven a hacerlo en el paralelogramo. Lo habitual fue encontrar respuestas como las de los siguientes alumnos:


Alumno 2º B.U.P.-57

2.1 El área del rectángulo

$\ell \times \ell = 5 \times 3 = 15$ cm

2.2 el área del círculo

$2\pi \cdot R$

$6'28 \cdot 1'5$

2.3 el área del triángulo

$\ell^3 = 60$ cm

2.4 el área del paralelogramo

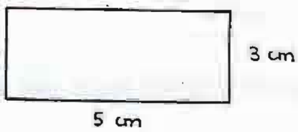
$\ell^2 \times \ell^2 = 6^2 \times 3^2$

Alumno 2º B.U.P.-13

2.1 El área del rectángulo

$A = l \times b = 5 \times 3$

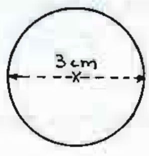
$A = 15 cm^2$



2.2 el área del círculo

$A = \pi r^2 = 3'14 \cdot 1'5^2$

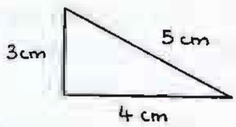
$A = 7'065 cm^2$



2.3 el área del triángulo

$A = \frac{b \cdot a \cdot l}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2}$

$A = 30 cm^2$



2.4 el área del paralelogramo

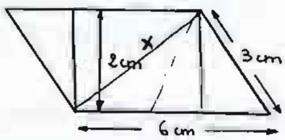
$A_{p\,paralel.} = 2A_{Triángulo}$

$A_T = \frac{3 \cdot 6 \cdot x}{2}$

Teorema de Pitágoras $x = \sqrt{3^2 + 6^2}$

$x = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 6'7$

$A_T = \frac{3 \cdot 6 \cdot 6'7}{2} = 60'3$ $\boxed{A_p = 120'6}$



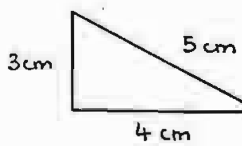
Alumno 3º E.M.-40.

Parece extender la fórmula para el cálculo del área del triángulo al paralelogramo.

2.3 el área del triángulo

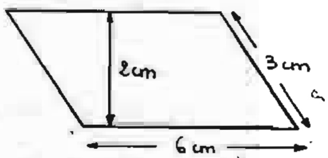
$h^2 = c^2 + c^2$

$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$



2.4 el área del paralelogramo

$A = \frac{b \times a \times h}{2} = \frac{6 \times 3 \times 2}{2} = \frac{36}{2} = 6 cm^2$



No creemos que exista una causa "profunda" detrás de este error, como ya vimos con la confusión operacional entre el área y el perímetro. Pensamos que cuando los alumnos se encontraron con la dificultad de calcular el área del paralelogramo sin recordar la fórmula correspondiente, fórmula que como ya se ha visto resultó ser la más desconocida para los alumnos, adoptaron dos actitudes bien distintas: bien dejarlo en blanco, o bien, "escribir algo". Ese "escribir algo" equivalía en unos casos a escribir directamente una fórmula que con toda probabilidad sería incorrecta o a buscar algún método alternativo para su cálculo. Los alumnos de menor formación matemática y por consiguiente con menos recursos, como son los de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, optaron por lo primero, mientras que los de C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M., lo hicieron por lo segundo. Es de esperar que cuando un alumno "inventa" una fórmula lo haga tomando como modelo las que conoce, y dado que como ya se ha visto no entiende el carácter bidimensional de la fórmula del área, no es de extrañar que cometa errores de este tipo.

Así pues esta extensión de fórmulas conocidas, a situaciones en las que éstas no son válidas, es un recurso utilizado, no de forma continuada sino más bien podríamos decir que "cuando se les ocurre", por los alumnos que disponen de escasos recursos numéricos y algebraicos.

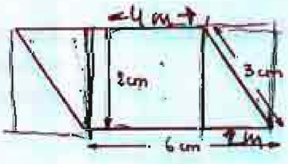
Veamos algunas respuestas correspondientes a distintos modos en los que los alumnos han determinado el área del paralelogramo.

Alumno 2° B.U.P.-31.

Determina el área del paralelogramo como suma del área de un rectángulo y de dos triángulos. Obtiene el valor correcto del área de forma casual ya que asigna a las dimensiones lineales del rectángulo y triángulo valores numéricos erróneos.

$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$

2.4 el área del paralelogramo



$\left(A = \frac{6+3}{2}\right.$ = No ~~tengo ni idea~~)

1° calcular el área del ~~cuadrado~~ rectángulo. $A = 4 \cdot 2 = 8$ cm²

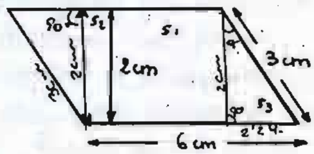
2° Calcular el área de un triángulo y multiplicarlo por 2.

$A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ cm² $\quad 2 \cdot 2 = 4$ cm² $\quad 8+4 = 12$ cm²

Alumno C.O.U.-C-61.

Determina el área del paralelogramo como suma del área de un rectángulo y de dos triángulos. Se ayuda de la trigonometría para determinar las dimensiones lineales de estos polígonos.

2.4 el área del paralelogramo



$\cos\alpha = \frac{\text{cat cont}}{h} = \frac{2}{3} =$ $55'34''$

$\arccos 2/3 = 48'184$

$\operatorname{sen} 48'184 = \frac{\text{cat op}}{h}$

$0'745 = \frac{\text{cat op}}{3}$

$\text{cat op} = 2'24$

$S_1 = 2 \cdot 3'76 = 7'52 \ cm^2$

$S_2 = S_3 = \frac{2'24 \cdot 2}{2} = 2'24$

$S_T = S_1 + S_2 + S_3 = 7'52 + 2'24 + 2'24 = 12 \ cm^2$

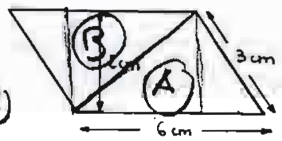
Alumno 3º E.M.-15.

Determina el área del paralelogramo como suma del área de dos triángulos.

2.4 el área del paralelogramo

$A_{paral} = 2 \times \left(\frac{6 \times 2}{2}\right) = 12$

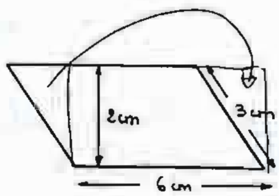
$A = B$



Alumno 3º E.M.-32.

Determina el área del paralelogramo transformándolo en un rectángulo de igual base y altura, por recorte y posterior reconfiguración por complementariedad de formas.

2.4 el área del paralelogramo



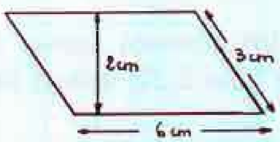
$A = b \times h = 6 \cdot 2 = 12 \ cm^2$

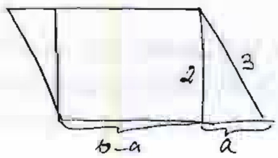
no me acuerdo de la fórmula

Alumno 5º F.M.-2.

Determina el área del paralelogramo como suma del área de un rectángulo y dos triángulos. Se ayuda del teorema de Pitágoras para determinar las dimensiones lineales de estos polígonos.

2.4 el área del paralelogramo





$a^2+2^2=3^2 \rightsquigarrow a^2=9-4 \rightsquigarrow a=\sqrt{5}$

$A=2(6-\sqrt{5})+\frac{2\sqrt{5}}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{2}=2(6-\sqrt{5})+\sqrt{5}+\sqrt{5}=12$

c) La identificación errónea de alguno de los elementos de la superficie del que depende el área.

En el caso del cálculo del área del círculo el error más habitual cometido por los alumnos de todos los cursos fue sustituir en la fórmula el radio por el valor del diámetro. Los porcentajes oscilaron entre el 12'5% de los de 5º F.M. y el 38'1% de los de 3º E.M.

En el triángulo y paralelogramo se observó que algunos alumnos identificaban de forma incorrecta la altura de estos dos polígonos, concretamente en el paralelogramo confundían el lado con la altura. Sin embargo, este error no fue mayoritario en los alumnos y no se detectó en ningún alumno de 5º F.M.

Comprensión del área del triángulo

Conocido el número de alumnos que recuerdan la fórmula del área del triángulo, nuestro objetivo fue intentar determinar cuántos de éstos saben aplicarla, conocen su significado y su origen. Para ello se estudió de forma conjunta las respuestas dadas por estos alumnos en los ítemes 2.5, 2.13 y 2.22, todos ellos referidos al área de un triángulo.

¿CONOCEN LOS ALUMNOS EL ÁREA DEL TRIÁNGULO?

Las cifras siguientes representan el número de alumnos que, respecto del total de cada curso, da una respuesta correcta en el ítem 1.2 apartado 3.

8º E.G.B.	2º B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3º E.M.	5º F.M.
48'1% (49)	74'8% (98)	85'3% (87)	96'4% (106)	95'4% (42)	100% (32)

Tabla 30. Alumnos que dan correctamente la fórmula del área del triángulo en el ítem 1.2.

¿UTILIZAN LOS ALUMNOS CORRECTAMENTE LA FÓRMULA, DADA LA BASE Y ALTURA DEL TRIÁNGULO, Y COMPRENDEN SU SIGNIFICADO? ¿CONOCEN LOS ALUMNOS QUE EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO ES LA MITAD DE LA DEL RECTÁNGULO DE IGUAL BASE Y ALTURA QUE LO CONTIENE?

En el ítem 2.5, los alumnos debían comparar el área de dos triángulos en un contexto numérico, y en el ítem 2.22, debían hacerlo en un contexto geométrico.

Para resolver el problema planteado en el ítem 2.5 es suficiente que el alumno conozca la fórmula y la sepa aplicar, mientras que para resolver la situación planteada en el ítem 2.22 es necesario que el alumno comprenda que el área de un triángulo depende de dos de sus elementos, base y altura.

Por todo ello, pensamos que estudiando los alumnos que procedieron correctamente en el ítem 2.5 y en el 2.22, podremos determinar el número de alumnos que conocen y utilizan correctamente la fórmula del área del triángulo y comprenden su significado.

Por otra parte, el ítem 2.13 donde los alumnos debían determinar el área de un triángulo a partir de la de un rectángulo de igual base y altura, permitía observar si los alumnos utilizaban el hecho de que el área del triángulo era la mitad de la del rectángulo y en consecuencia demostraban ser conocedores de la relación entre las áreas de estos dos polígonos. Podemos aportar que el 50'8% de los de 8° de E.G.B., el 28'8% de los de 2° de B.U.P., el 31'1% de los de C.O.U.-L, el 23'2% de los de C.O.U.-C, el 29'3% de los de 3° E.M. y el 6'9% de los de 5° F.M., no supieron encontrar la relación entre el área del rectángulo y el triángulo.

En la tabla siguiente se muestra de forma conjunta, el número de alumnos que siendo conocedores de la fórmula del triángulo, demostraron poseer los otros conocimientos sobre el área del triángulo aquí comentados. De esta tabla se concluye que el conocimiento de una fórmula no lleva asociado su comprensión, ni tan siquiera la garantía de su correcta aplicación. Como puede apreciarse existe un elevado número de alumnos que conociendo la fórmula del triángulo no la han aplicado correctamente, y todavía mayor es el número de alumnos que no la comprenden. En definitiva, constatamos que sólo un bajísimo número de alumnos de cada curso ha demostrado conocer y saber utilizar correctamente y con comprensión la fórmula del triángulo.

Es importante recordar que los porcentajes de la Tabla 31 están referidos al total de alumnos que en cada curso dio la fórmula correcta del área del triángulo.

	de los alumnos que conocen la fórmula del triángulo, la aplican correctamente	de los alumnos que conocen la fórmula del triángulo, la aplican correctamente y saben analizar el área a partir de su base y altura	de los alumnos que conocen la fórmula del triángulo, la aplican correctamente, saben analizar el área a partir de su base y altura, y conocen la relación entre el área del triángulo y el rectángulo de igual base y altura que lo contiene
8° E.G.B.	61'2% (30)	26'5% (13)	8'2% (4)
2° B.U.P.	66'3% (65)	44'9% (44)	30'6% (30)
C.O.U.-L	64'4% (56)	37'9% (33)	25'3% (22)
C.O.U.-C	92'4% (98)	73'6% (78)	56'6% (60)
3° E.M.	90'5% (38)	54'8% (23)	38'1% (16)
5° F.M.	75'0% (24)	46'9% (15)	40'6% (13)

Tabla 31. Alumnos que dando correctamente la fórmula del área del triángulo en el ítem 1.2, han respondido de forma adecuada y correcta en los ítemes 2.5, 2.22 y 2.13.

¿UTILIZAN LOS ALUMNOS LA FÓRMULA PARA COMPARAR EL ÁREA DE DOS TRIÁNGULOS EN UN CONTEXTO NUMÉRICO?

Antes de observar los modos de proceder de los alumnos en la tarea del ítem 2.5, se podría pensar que no tenía sentido cuestionarse algo así. Sin embargo, como inmediatamente veremos, un porcentaje significativo de los alumnos de menor formación matemática no utilizaron la fórmula para calcular las áreas de los dos triángulos y posteriormente comparar los números obtenidos, como requería esta tarea.

Es importante que antes de pasar a analizar los procedimientos utilizados por los estudiantes de cada nivel, recordemos que a los de 8° de E.G.B., C.O.U.-L y 2° de B.U.P., así como a cualquier alumno de otro curso que lo solicitara, se les proporcionó, al comienzo de la administración de la segunda parte del test, las fórmulas del área del triángulo y rectángulo.

Los distintos tipos de respuesta y formas de proceder de los alumnos en este ítem los hemos agrupado en:

A) Se fijan únicamente en una dimensión, bien sea la base o la altura.
B) Calculan las áreas con ayuda de las fórmulas y comparan los números obtenidos.
C) Se dejan orientar por su apreciación visual, dando argumentos del tipo: "es la misma figura en distinta posición", "parece la misma", "se ve", "(A) tiene una parte más que (B)", etc...
D) Afirman no poder emitir un juicio por falta de datos.
E) Otras respuestas erróneas, argumentadas con afirmaciones confusas o incatalogables.

En la Tabla 32 se resumen las cantidades de estudiantes que han procedido en cada una de las formas indicadas anterioremnte.

	se fijan en una sóla dimensión	calculan las áreas	utilizan su percepción visual	afirman no disponer de datos suficientes	otros incorrectos	no contestan
	A	B	C	D	E	
8° E.G.B.	8'3%	42'7%	31'4%	0'0%	17'7%	2'9%
2° B.U.P.	2'0%	54'5%	23'8%	2'0%	17'8%	3'1%
C.O.U.-L	3'8%	62'0%	20'3%	2'5%	11'4%	0'9%
C.O.U.-C	2'9%	89'3%	1'0%	2'0%	4'9%	0'0%
3° E.M.	2'4%	76'2%	9'6%	2'4%	9'5%	0'0%
5° F.M.	0'0%	86'2%	3'4%	6'9%	3'4%	6'3%

Tabla 32. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 2.5, y porcentaje de alumnos que lo deja en blanco.

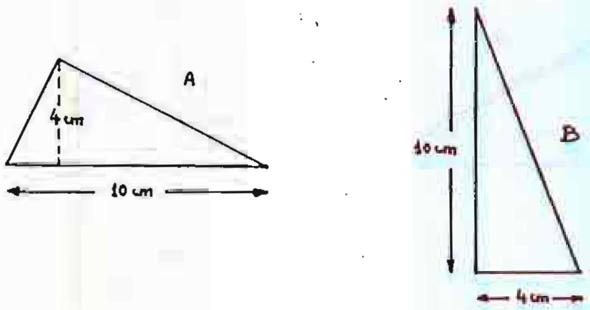
En todos los cursos ha habido algún alumno que se ha dejado guiar por su percepción (procedimiento C) en un contexto numérico como era éste. Si bien es cierto que los porcentajes referidos a C.O.U.-C y 5° F.M. no dejan de ser puramente anecdóticos ya que representan el comportamiento de un sólo alumno, los correspondientes a los de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L son ya relevantes, especialmente los referidos al primero. Es sorprendente no que un alumno emita un juicio basado en una apreciación suya, sino el poder que ésta puede tener en él. Más adelante en el apartado dedicado al estudio del papel que juega la percepción en la tareas de comparación, se muestra la respuesta dada por un alumno de C.O.U.-L en este ítem, en el que tras calcular correctamente las áreas de los dos triángulos utilizando la fórmula y obtener el mismo número, finalmente concluye no poder afirmar cuál de los dos tiene mayor área o si tienen la misma, refiriéndose a las longitudes del cateto e hipotenusa. Es indiscutible, que este alumno confía más en la "sensación" que el dibujo le transmite, que en una expresión algebraica que tras unas operaciones le proporciona un número, para él, carente de sentido.

La mayoría de los alumnos que se han dejado guiar por sus "sentidos" han llegado a la conclusión de que el área de (A) era mayor que la de (B) o viceversa, argumentando que uno tiene una parte más que el otro, utilizando para ello como único instrumento, su vista. Sin embargo, también algunos han llegado a que ambos triángulos tenían igual área ya que "más o menos, lo que le sobra a uno le falta al otro".

Veamos como la percepción visual lleva a alumnos de distintos cursos a conclusiones diferentes.

Alumno 8º E.G.B.-83

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B X............

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

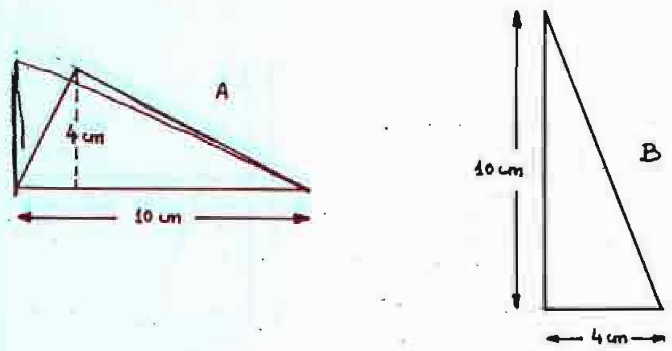
Da una razón para tu respuesta .El triángulo A es más ancho...

....

....

Alumno C.O.U.-L-31

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ....

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ..X.........

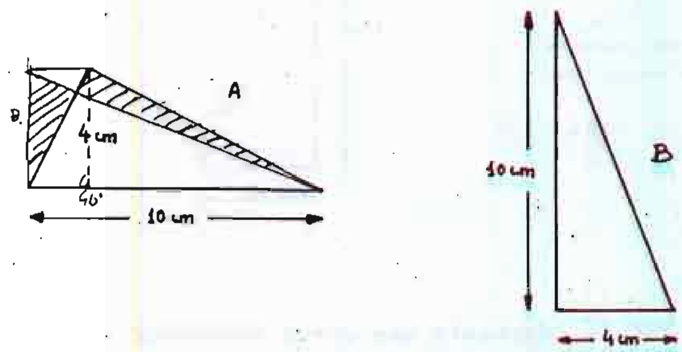
5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

Da una razón para tu respuesta .Tiene..el..triángulo..A.....
.menor...área..que..el..B...porque...al..observarlo...una.
.[illegible]...del...[illegible]...te...das...cuenta..que...el...B......
..es...mayor...su..área.................................

Alumno C.O.U.-C-61

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ....

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área .✓..............

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

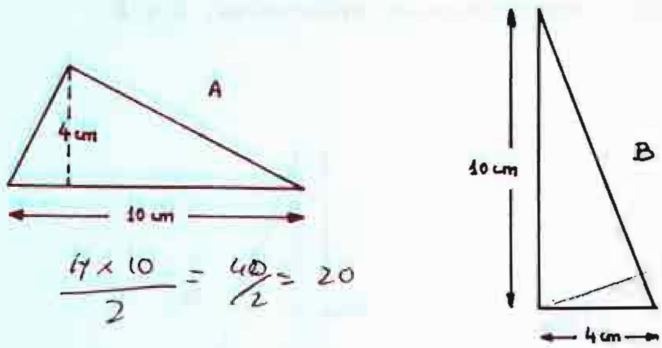
Da una razón para tu respuesta ...HACIENDO...UNA...SUPERPOSICIÓN ..DE..B....SOBRE...A,..SE..PUEDE..APRECIAR..QUE.LA..DIFERENCIA ..DE..SUPERFICIES.TIENE.UN.ÁREA..SIMILAR.....................

....

Por otra parte y aunque hayan sido muy pocos los alumnos que hayan razonado sobre una única dimensión del triángulo o hayan argüido no disponer de la suficiente información para comparar las áreas, creemos que es interesante reflexionar sobre la existencia de este tipo de respuestas, ya que ponen de manifiesto el desconocimiento por parte de estos alumnos del carácter bidimensional del área.

Alumno C.O.U.-L-39

La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



$$\frac{4 \times 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ....X.......

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

Da una razón para tu respuesta ..La altura del B...

..es + pequeña → área más pequeña

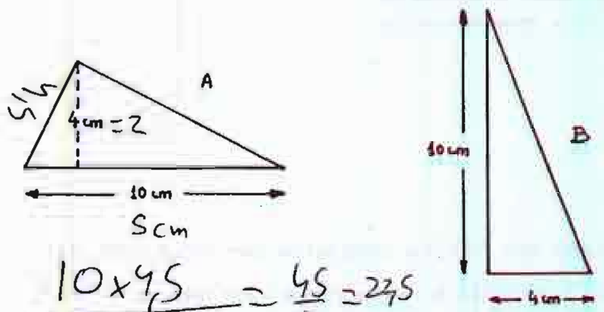
Lo que quedó patente tras la corrección de este ítem, en el que se pedía a los alumnos que emitieran una opinión acerca de cuál de los dos triángulos tenía mayor, menor o igual área que el otro, y por tanto explícitamente no se les pedía que calcularan el área de ninguno de ellos, es que el uso de la fórmula, bien para determinar el valor numérico de las áreas, o razonar sobre el valor de la base y la altura, no resultó ser un procedimiento utilizado por la mayoría de los alumnos. Concretamente el 57'3% de los de 8° de E.G.B., el 45'5% de los de 2° de B.U.P., el 38% de los de C.O.U.-L, el 10'7% de los de C.O.U.-C, el 23'8% de los de 3° E.M. y el 13'8% de los de 5° F.M., no comprendió el papel que la fórmula desempeñaba en la resolución de esta tarea, y optó por procedimientos alternativos, en este caso, erróneos.

También pudimos constatar que aplicar la fórmula no es una tarea que resulte sencilla para la totalidad de los alumnos como creíamos, ya que algunos de ellos, como los que a continuación mostramos, calcularon de forma incorrecta el área del triángulo (A).

Alumno C.O.U.-L-101

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.

escala
$1 \Rightarrow 0{,}5$
$2{,}25$



$$\frac{10 \times 4{,}5}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5 \qquad \frac{10 \times 4}{2} = 20$$

Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ...X.........

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

Da una razón para tu respuesta ..He calculado ambas areas.

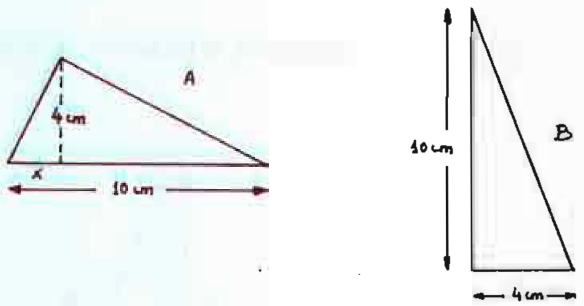
...y...así..lo.he..encontrado..pero..desde.el principio

...lo..vi.claro.......................................

....

Alumno C.O.U.-C-27

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ...X.........

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

Da una razón para tu respuesta ....

....

....

....

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$

$A = \frac{4 \cdot x}{2}$ cm^2

$A = \frac{4 \cdot 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$ cm^2

$A_A = (2x + 20)$ cm^2

$A_B = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20$ cm^2

test 2

Conclusiones más relevantes del estudio sobre el conocimiento que los alumnos poseen sobre algunas fórmulas para el cálculo de áreas

- Las fórmulas del área del rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo y paralelogramo, han sido, en este orden las más recordadas por los estudiantes de todos los cursos.

- Los alumnos que han demostrado un menor conocimiento de estas fórmulas del área han sido los de 8° de E.G.B. y C.O.U.-L. Por el contrario, los que mayor conocimiento poseen son los de 5° F.M.

- Los resultados muestran que los alumnos (a excepción de los de 5° de F.M.) poseen un bajo nivel de conocimiento de las fórmulas citadas, ya que sólo un porcentaje de alumnos inferior al 50% de los de 8° de E.G.B. y C.O.U.-L, y aproximadamente un 50% de los de 2° de B.U.P. y un 70% de los de C.O.U.-C y 3° F.M. han demostrado conocer al menos tres fórmulas de cuatro.

- Los alumnos con menor formación matemática, como son los de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, cuando no conocen la fórmula que necesitan para determinar el área pedida, tienden a escribir "cualquier" expresión algebraica que les resulte familiar. Expresiones erróneas, en las que se han podido detectar comportamientos repetidos como son: el cálculo del perímetro en lugar del área y el producto de tres dimensiones, cuando éstas les son proporcionadas.

- Algunos alumnos han identificado incorrectamente la altura en el triángulo y paralelogramo con el consiguiente error que ello ha ocasionado en el cálculo de su área.

- Un error muy común entre todos los alumnos, cometido en el cálculo del área del círculo, ha sido el considerar el diámetro como el radio.

- Que un alumno conozca la fórmula del área del triángulo no es garantía de que sepa cómo y cuándo utilizarla y ni mucho menos que sea consciente de que el área de un triángulo depende de su base y su altura, y que ésta representa la mitad del área del rectángulo de igual base y altura que lo contiene.

- En cada curso más del 20% de los alumnos (a excepción de 5° F.M. en el que sólo afecta a dos alumnos), aumentando este porcentaje hasta un 50% en 8° de E.G.B., no encontraron la relación que existe entre el área de un triángulo y la del rectángulo de igual base y altura que lo contiene.

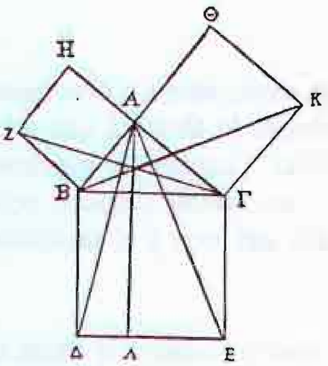
- Comparar las áreas de dos triángulos en un contexto numérico ha resultado mucho más sencillo para los alumnos de todos los niveles, que hacerlo en un contexto geométrico. Hecho éste que nos parece natural, ya que mientras que en el primer caso se requiere únicamente de la aplicación de una fórmula, que puede realizarse por parte de los alumnos de forma rutinaria y no necesariamente comprensiva, es imprescindible que en el segundo caso el alumno comprenda que el área del triángulo depende de su base y su altura.

- Se ha constatado que cuando el cálculo del área no está explícitamente solicitado, el uso de la fórmula para comparar áreas en un contexto numérico ha sido escasamente utilizada por los alumnos de menor formación matemática. Concretamente fue utilizado por un escaso 50% de los alumnos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L.

3.4.8. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El ítem 2.24 se diseñó con objeto de observar si los alumnos conocen el significado geométrico del teorema de Pitágoras. Teorema que mostramos a continuación como queda recogido en Euclides (1819).

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.



El porcentaje de alumnos que dejó en blanco este ítem fue especialmente elevado en los cursos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L. Sin embargo, sería injusto, especialmente en este caso, asociar ítem en blanco con desconocimiento del teorema de Pitágoras, ya que en esta ocasión en determinados centros y cursos, se les indicó a los alumnos que podían saltarse este ítem ante el temor a que les faltara tiempo para abordar ítemes más relevantes para el estudio, que éste. Si bien es cierto que, preguntados los alumnos de 8º de E.G.B., durante la administración del test, si conocían este teorema éstos respondieron mayoritariamente que no.

Así pues en esta ocasión no tiene sentido plantear un análisis cuantitativo ni extraer ninguna conclusión relativa al conocimiento o desconocimiento que los alumnos de cada curso poseen del Teorema de Pitágoras. Hemos centrado nuestro interés en el estudio del comportamiento mostrado por los alumnos que respondieron este ítem, fundamentalmente referido a si optaban por un método numérico o geométrico. Por ello, hemos diferenciado los alumnos que dan una respuesta errónea sin sentido de los que utilizan el teorema de Pitágoras, distinguido entre éstos últimos de los que utilizan la versión geométrica o la algebraica del teorema. Estos datos se recogen en la Tabla 33.

	teorema de Pitágoras		otros métodos erróneos
	versión algebraica	versión geométrica	
8° E.G.B.	28'6% (10/35)	5'7% (2/35)	65'7% (23/35)
2° B.U.P.	42'0% (29/69)	17'4% (12/69)	40'6% (28/69)
C.O.U.-L	62'6% (30/48)	4'2% (2/48)	33'3% (16/48)
C.O.U.-C	82'2% (74/90)	3'3% (3/90)	14'4% (13/90)
3° E.M.	62'5% (25/40)	12'5% (5/40)	25'0% (10/40)
5° F.M.	96'2% (27/28)	0'0% (0/28)	3'6% (1/28)

Tabla 33. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución del ítem 2.24.

El porcentaje de alumnos que utilizaron métodos erróneos sin sentido en 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L son de algún modo indicadores del desconocimiento que estos estudiantes poseen del teorema de Pitágoras. Los datos de la tabla 33 vienen a mostrar que el teorema de Pitágoras es conocido por los alumnos, no por la presentación que de él pueda hacerse en un curso determinado, sino gracias a las aplicaciones que de él se realizan para la resolución de otros problemas a lo largo de la vida académica del estudiante.

Es abismal la diferencia que existe entre el uso de la versión algebraica y geométrica, cuando el empleo de ésta última implica una resolución sencilla y rápida a diferencia de lo que supone la utilización de la algebraica.

Está clarísimo que los alumnos se inclinan mayoritariamente -y en algún curso, totalmente, como en 5° F.M.- por un cálculo algebraico, aún cuando su uso en este caso concreto no convenga, ya que complica el proceso y en consecuencia el cálculo, como así lo demuestran el gran número de alumnos que han cometido algún error durante el proceso.

Tras la corrección de diversos ítemes ya hemos podido constatar la tendencia de la gran mayoría de los alumnos -como consecuencia de su formación- a emplear procedimientos algebraicos y numéricos, antes que geométricos, aunque el uso de estos últimos en determinadas situaciones, supondría una resolución rápida y sencilla del problema. Aunque esto mismo puede haber sucedido en esta tarea, creemos que en esta ocasión el principal motivo ha sido el desconocimiento de la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

Es interesante reseñar el hecho de que todos los alumnos en todos los cursos que optaron por el procedimiento geométrico calcularon con éxito el área del cuadrado, mientras que no sucedió lo mismo en los que se decidieron por el algebraico-numérico. El error más habitual cometido por los alumnos de C.O.U.-C y detectado en todos los cursos, fue el confundir el área de los cuadrados dados con la longitud de sus lados.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre el concomiento que los alumnos poseen del significado geométrico del Teorema de Pitágoras

- La práctica totalidad de los alumnos que conoce el Teorema de Pitágoras, conoce la versión algebraica del teorema, pero no así la geométrica que resulta desconocida para casi todos ellos.

- El procedimiento geométrico les conduce siempre con éxito a la solución correcta, cosa que sucede con el procedimiento algebraico-numérico.

3.4.9. PAPEL DE LA PERCEPCIÓN VISUAL EN TAREAS DE COMPARACIÓN DE ÁREAS

El ítem 2.1, en el que se pedía a los alumnos que compararan el área de dos superficies irregulares dibujadas sobre papel blanco, se diseñó con objeto de observar el poder que la percepción visual ejerce en los alumnos.

A excepción de un alumno de 8° de E.G.B. y dos de C.O.U.-C, este ítem fue resuelto por la totalidad de los estudiantes de la muestra.

Como muestran los datos proporcionados en la siguiente tabla, un elevado número de alumnos, de distintos cursos, se dejó influir por su impresión perceptual en el momento de emitir un juicio sobre las áreas de las dos superficies.

8° E.G.B.	2° B.U.P.	C.O.U.-L	C.O.U.-C	3° E.M.	5° F.M.
66'4%	37'5%	39'2%	22'3%	22'8%	3'1%

Tabla 34. Porcentaje de alumnos que utilizan su percepción visual para la resolución del ítem 2.1.

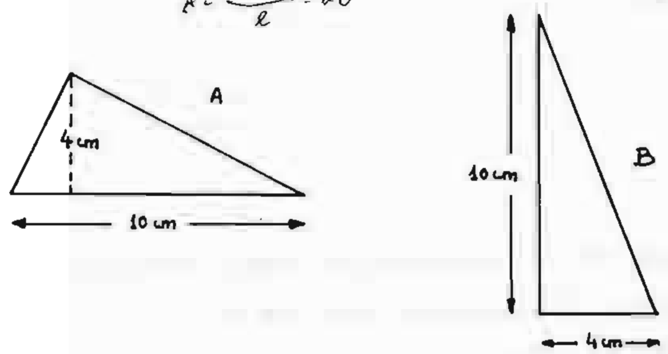
Todos estos alumnos decidieron emitir una opinión sobre el área de estas dos superficies aún cuando no existía dato alguno que lo permitiera. Luego se aprecia en los alumnos la tendencia a utilizar su percepción visual como aval de sus conclusiones. Tendencia mayoritaria en los estudiantes de 8° de E.G.B., que va disminuyendo gradualmente conforme el alumno evoluciona hacia cursos superiores, aunque con una presencia todavía significativa en cursos ya elevados como son C.O.U.-C y 3° E.M., para casi desaparecer en 5° F.M.

La percepción visual como ya hemos comentado, y seguiremos viendo a lo largo del análisis de las respuestas dadas por los alumnos en los distintos ítemes del test, se ha manifestado como el procedimiento utilizado por un cierto número de alumnos de los distintos cursos en todas aquellas tareas donde han tenido que comparar el área de dos superficies, tanto en un contexto geométrico como numérico. Ello supone que el nivel de razonamiento de estos alumnos es el más primario, en tanto que se fijan sólo en aspectos visuales de la figura y en consecuencia en atributos irrelevantes del área. A continuación mostramos respuestas dadas por algunos alumnos que ilustran lo comentado anteriormente y donde se puede apreciar cómo en determinados casos esta imprensión perceptual tiene más peso y validez para el alumno que un procedimiento numérico.

Alumno C.O.U.-L-12 (ítem 2.5)

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.

$A = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$ $A_B = \frac{4 \cdot 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ....

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

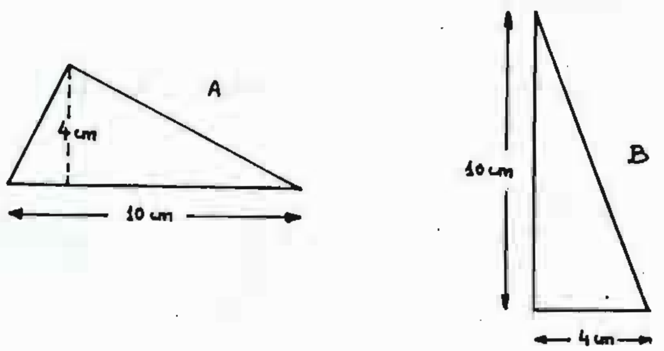
5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro .X.

Da una razón para tu respuesta ..matemáticamente.. diría.que .es..igual...pero..yo..pienso...que..una..hipotenusa.=10. .no.es..lo.mismo..que..un..cateto.=10....porque.la..hipotenusa .siempre..es..más..larga..que..~~los~~...catetos................

Alumno C.O.U.-C-5 (ítem 2.5)

5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ....

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....X..........

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro .~~X~~

Da una razón para tu respuesta .Los dos tienen la misma base y la misma altura, pero no puedo determinar cual tiene mayor area, o si son iguales. De todas formas, calculando el area por separado vemos que coinciden.

$$A_{T_A} = \frac{10\cdot 4}{2} = 20$$

$$A_{T_B} = \frac{10.4}{2} = 20$$

Las superficies (A) y (B) empleadas en el ítem 2.1 fueron así diseñadas con el fin de observar si sus formas originaban en los alumnos alguna tendencia que los hiciera inclinarse bien por (A), o por (B). Sin embargo, de entre todos los alumnos que se decidieron por escoger una de las dos superficies como la de mayor área, no existió un comportamiento general que permita suponer que existe una tendencia clara entre los alumnos a considerar una u otra como la de mayor área. Mientras que los alumnos de 8° de E.G.B. se inclinaron por escoger (B) como la de mayor área, los de C.O.U.-L lo hicieron por (A), no existiendo grandes diferencias entre los alumnos de los otros cursos.

Por otra parte se estudió si los alumnos que habían escogido la superficie (A) como la de mayor área, habían indicado en el ítem 2.22 que el triángulo más alargado tenía mayor área que el otro, y viceversa, si los alumnos que se inclinaban por la superficie (B) en el ítem 2.1, escogían el triángulo más "regular" en el ítem 2.22. Para ello se realizó el test de la χ^2 con objeto de detectar posibles dependencias entre las respuestas dadas por los alumnos en estos dos ítemes. Los resultados obtenidos permiten afirmar que no existe ninguna relación entre los comportamientos manifestados por los alumnos de los distintos cursos, en los ítemes 2.1 y 2.22, a excepción de 2° de B.U.P. donde sí se obtuvo un p-valor inferior al 0'05 (p= 0'03931). Sin embargo, a pesar de que el p-valor denota la existencia de una dependencia estadística entre las elecciones realizadas por los alumnos, el análisis de la tabla de contingencia (ver Anexo 4) no nos permite extraer ninguna conclusión clara que explique en qué consiste ésta, sólo podemos aportar que la mayoría de los alumnos que indicaron en el ítem 2.1 que las dos superficies tenían igual área también lo hicieron en el ítem 2.22, pero no al contrario.

Así pues, podemos concluir que no hemos constatado que exista una determinada tendencia entre los alumnos a considerar la superficie de aspecto más alargada y voluminosa en extensión como la de mayor área.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre el papel de la percepción visual en tareas de comparación de áreas

- La percepción visual se ha revelado como un procedimiento utilizado por un número significativo de alumnos en todos los cursos a excepción de 5° F.M.

- Este procedimiento es empleado mayoritariamente por los alumnos de 8° de E.G.B., y su uso va disminuyendo conforme aumenta el nivel escolar del curso, para ser abandonado completamente por los alumnos de 5° F.M.

- En algunos alumnos se ha constatado que optando por un procedimiento numérico correcto y por una apreciación visual, al final, ésta última ha pesado más en él en el momento de emitir un juicio.

- La percepción visual se muestra como fuente de errores en los alumnos.

- No se ha detectado que lo alumnos posean una concepción de área asociada al "aspecto" (si es más o menos compacta o más o menos alargada) de la superficie, y en consecuencia asociada a la noción de extensión.

3.4.10. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA DE UN ROMBO, PARALELOGRAMO Y TRAPECIO CON LA DE UN RECTÁNGULO

De las respuestas dadas por los alumnos a los ítemes 2.26, 2.27 y 2.28, se pudo comprobar que un considerable número de ellos de todos los cursos no supo dibujar un rectángulo de igual área que la del rombo, paralelogramo y trapecio isósceles proporcionados en los ítemes anteriores. En los tres casos la tarea estaba presentada en un contexto numérico.

De nuevo es necesario advertir de la no conveniencia de extraer cualquier conclusión sobre el porcentaje de alumnos que los dejó en blanco por el mismo motivo ya comentado en el apartado 3.4.8. correspondiente al estudio del teorema de Pitágoras.

Cierto número de alumnos que respondió a estos ítemes se limitó simplemente a dibujar un rectángulo en cada caso sin proporcionar pista alguna acerca del modo en el que habían procedido, por lo que sus respuestas carecen de interés ya que sólo nos permiten analizar el resultado del proceso seguido por el estudiante, si lo ha habido, pero no el proceso en sí.

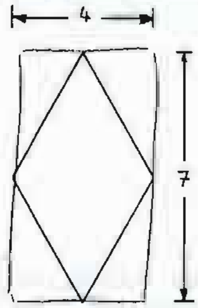
Por el contrario, los alumnos que sí justificaron el resultado de su proceso, utilizaron dos procedimientos de diferente naturaleza, uno geométrico basado en el recorte y pegado -y del que a continuación mostramos algunos ejemplos-, y el otro numérico, basado en la utilización de las fórmulas de área de los cuadriláteros involucrados. Tal vez el desconocimiento general que poseen los alumnos de la fórmulas del área hizo que se inclinaran mayoritariamente, en todos los cursos y en todos los casos, por la utilización del método geométrico. La única excepción se produjo en el caso del rombo cuando los alumnos de C.O.U.-C y 3º E.M. mayoritariamente se inclinaron por el método numérico.

Se pudo comprobar que los porcentajes de éxito alcanzados en estos ítemes fueron en general bastante superiores en aquellos alumnos que utilizaron el procedimiento geométrico a los que optaron por un procedimiento numérico.

Las siguientes respuestas son una muestra de cómo algunos alumnos procedieron geométricamente, construyendo el rectángulo por recorte y posterior reconfiguración por complementariedad de formas. En ellas se puede comprobar cómo dos alumnos resuelven correctamente los ítemes 2.27 y 2.28, pero no el 2.26. Este hecho fue bastante usual entre los alumnos que resolvieron estos tres ítemes, como puede comprobarse en la Tabla 35, y que confirma la reconfiguración del rombo en rectángulo como la más compleja para los alumnos de las tres planteadas.

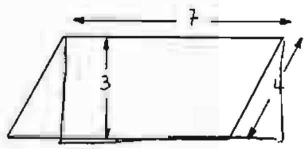
Alumno 8º E.G.B.-67

26. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura. Muestra como lo haces.



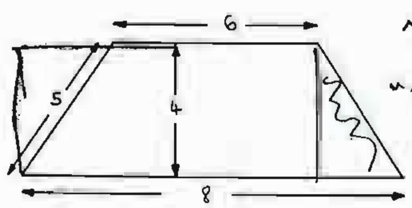
Uniendo los vértices.

27. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo de la figura. Muestra como lo haces.



"Moviendo" la figura.

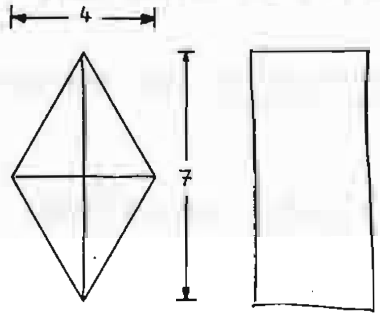
28. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el trapecio de la figura. Muestra como lo haces.



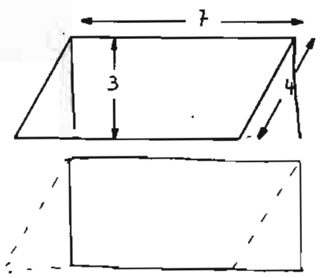
"Cortando" la parte sombreada y "poniendola" en el otro lado formando así un rectángulo.

Alumno 2º B.U.P.-27

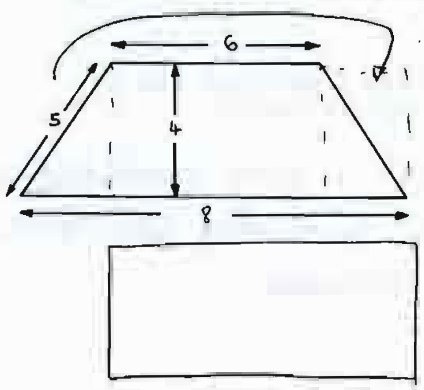
26. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura. Muestra como lo haces.



27. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo de la figura. Muestra como lo haces.

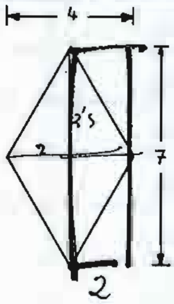


28. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el trapecio de la figura. Muestra como lo haces.



Alumno 2º B.U.P.-28

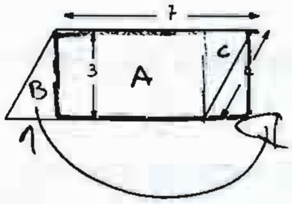
26. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura. Muestra como lo haces.



$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{2\cdot 3'5}{2} = 3'5$

$A_{Rect} = 3'5 + 3'5 + 3'5 + 3'5 = 14$

27. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo de la figura. Muestra como lo haces.



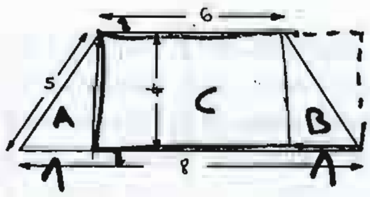
$A_A = b\cdot h = 6\cdot 3 = 18$

$A_B = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{1\cdot 3}{2} = 1'5$

$A_C = 1'5$

$A_T = 21$

28. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el trapecio de la figura. Muestra como lo haces.

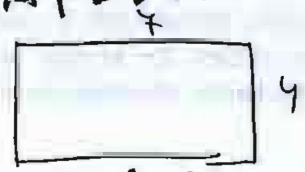


$A_A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{1\cdot 4}{2} = 2$

$A_B = 2$

$A_C = 6\cdot h = 6\cdot 4 = 24$

$A_T = 24+2+2 = 28$



en la figura marcado en verde

La siguiente tabla proporciona el número de alumnos que consiguieron dibujar el rectángulo apropiado a cada caso, de entre todos aquellos que lo intentaron.

	rombo (ítem 2.26)	paralelogramo (ítem 2.27)	trapecio (ítem 2.28)
8° E.G.B.	12'0% (6/50)	16'7% (6/36)	29'2% (7/24)
2° B.U.P.	37'0% (27/73)	67'2% (41/61)	56'4% (31/55)
C.O.U.-L	37'1% (23/62)	76'1% (35/46)	70'7% (29/41)
C.O.U.-C	76'5% (62/81)	92'8% (64/69)	65'2% (45/69)
3° E.M.	61'1% (22/36)	81'1% (30/37)	64'9% (24/37)
5° F.M.	80'0% (20/25)	85'7% (24/28)	79'2% (19/24)

Tabla 35. Alumnos que dan la respuesta correcta en el ítem 2.26, 2.27 y 2.28.

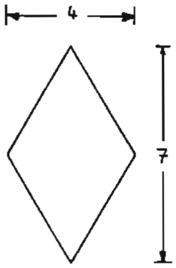
En general, la transformación que les resultó más sencilla a los alumnos fue la del paralelogramo y la más difícil, la del rombo.

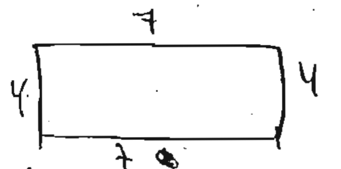
Estas cifras reflejan la dificultad que esta tarea supuso para todos los alumnos, especialmente para los alumnos de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P. y C.O.U.-L, siendo realmente sorprendentes las correspondientes a las de 8° de E.G.B., que demuestran la incapacidad de estos alumnos de relacionar el área del rectángulo con la de los tres cuadriláteros propuestos. Ello nos lleva a reflexionar sobre el modo en el que a los alumnos se les han enseñado las fórmulas del área de estos polígonos, y sobre el nivel de comprensión que en tales circunstancias pueden poseer estos estudiantes de las fórmulas del área.

Algunas de las transformaciones realizadas por los alumnos de 8° de E.G.B., ponen de manifiesto verdaderas incomprensiones. Transformaciones que pasamos a mostrar a continuación porque consideramos plantean interesantes puntos de reflexión sobre lo que los alumnos de este nivel conocen y comprenden realmente sobre las fórmulas del área, objeto principal y a menudo único en la enseñanza habitual del área. En ellas se aprecia cómo los alumnos asignan a una misma dimensión lineal medidas diferentes. Este modo de proceder nos ha llamado la atención, porque por un lado nos parece muy clara la evidencia del error y por otro, porque en contra de lo que se podía pensar este comportamiento no fue minoritario, sino que bastantes alumnos de 8° de E.G.B. y 2° de B.U.P. procedieron de forma similar.

Alumno 8º E.G.B.-19

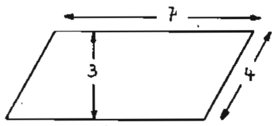
26. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura. Muestra como lo haces.

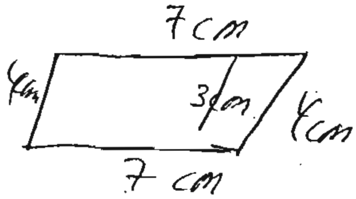




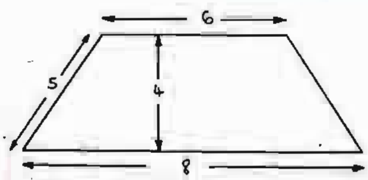
Yo creo que es esto solo

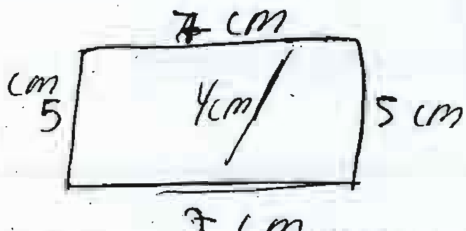
27. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo de la figura. Muestra como lo haces.





28. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el trapecio de la figura. Muestra como lo haces.





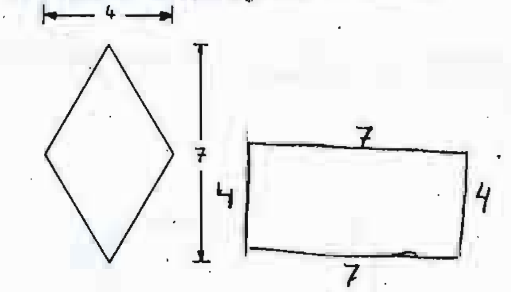
Yo creo que como la base era más grande que la altura lo temos partido por igual.

test 2

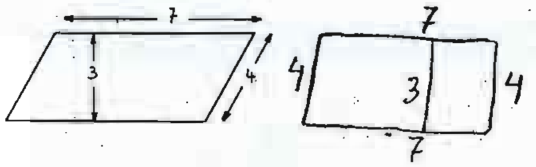
16

Alumno 8º E.G.B.-13

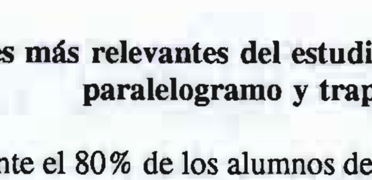
26. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura. Muestra como lo haces.



27. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo de la figura. Muestra como lo haces.



28. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el trapecio de la figura. Muestra como lo haces.



No se puede realizar

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la relación entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la de un rectángulo

- Prácticamente el 80% de los alumnos de 8º de E.G.B., que lo intentaron, no ha sido capaz de construir un rectángulo de igual área que la de un rombo, paralelogramo y trapecio dados, y aunque los porcentajes de éxito han ido aumentando en relación al nivel del curso, estos han resultado excesivamente bajos, considerando el tipo de tarea y nivel de los alumnos. Indicar como ejemplo de ello, que el 20% de los alumnos de 5º F.M. no consiguió resolver este ítem con éxito.

- El procedimiento mayoritariamente utilizado por los alumnos en todos los cursos ha sido el geométrico, consistente en el recorte y pegado, frente al numérico, basado en la utilización de las fórmulas del área de estos cuadriláteros, aún cuando la tarea está planteada en un contexto numérico.

- Un importante número de alumnos de todos los cursos, que va aumentando conforme el nivel del curso disminuye, hasta suponer una gran mayoría de los de 8º de E.G.B., ignora la relación que existe entre la fórmula del área del rectángulo y las de los cuadriláteros, rombo, paralelogramo y trapecio. Lo que hace pensar en la existencia de un excesivo número de alumnos que ignora el por qué de estas fórmulas y en consecuencia no comprende el significado de las fórmulas del área de estos cuadriláteros.

3.4.11. PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los ítemes 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8 fueron diseñados en el test con el objetivo de estudiar el modo de proceder de los estudiantes en la resolución de determinados problemas con unas características específicas, y conocer el grado de éxito que los alumnos alcanzan en su resolución. Además de ello, estos 6 problemas fueron diseñados con objeto de obtener información acerca de:

- Si el papel cuadriculado les sugiere el conteo de unidades cuadradas como un posible método para determinar el área de la superficie propuesta, y en consecuencia entienden el área como el número de unidades que recubren exactamente la superficie.

- Si los alumnos están familiarizados con los métodos geométricos: descomposición de las superficies en partes y comparación de éstas y reconfiguración de una superficie por complementariedad de formas.

- Si el contexto, bien numérico o geométrico (si están indicadas o no algunas de las dimensiones de la superficie), en el que se está planteado el problema es un factor que pueda influir en la actitud (en el interés) del alumno hacia el problema.

- Si el contexto numérico en el que está planteado el problema induce a los alumnos a resolverlo mediante el uso exclusivo de procedimientos numéricos, y en concreto aplicando directamente una fórmula, aún cuando la utilización de uno geométrico simplifique mucho los cálculos.

- Si el tipo de superficie (poligonal o no poligonal) añade un grado de dificultad a la resolución del problema.

A continuación se realiza un estudio individualizado de los problemas en el que se describen uno a uno, así como los procedimientos que los alumnos han utilizado en cada uno de ellos, mostrando algunas de las respuestas de los estudiantes para ilustrarlos. Posteriomente se presentan los resultados procedentes del estudio comparativo realizado entre los problemas.

Estudio individualizado de los problemas

Al comienzo del estudio de cada ítem se indican en una tabla las características del problema correspondiente, relacionadas con los objetivos anteriormente expuestos. En el apartado 3.2.2. donde se detalla el objetivo y el contenido del test se muestra una tabla donde se recogen de forma conjunta algunas de las características de estos problemas.

En cada ítem hemos agrupado los distintos procedimientos utilizados por los alumnos en tipos según sus características, y les hemos asociado una letra para referirnos a ellos de forma escueta y rápida. Con objeto de facilitar la identificación de los tipos que se han detectado en varios problemas, hemos usado la misma letra, concretamente la:

C: para el conteo de cuadrados contenidos en la superficie,
G: para los procedimientos geométricos, o numéricos simplificados por el uso de uno geométrico, y
E: para los procedimientos erróneos no descritos por falta de interés.

Ítem 1.3

Características del problema:

objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
cálculo del área de una superficie	no poligonal	sí	cuadriculado	numérico	geométrico en E.G.B. y numérico en el resto

Los procedimientos utilizados por los estudiantes de los distintos cursos para la resolución de este problema, y que se ilustran posteriormente mediante respuestas de algunos alumnos, han sido:

C) El conteo de cuadrados contenidos en la superficie.
T) Aproximaciones al área de la superficie curva mediante el cálculo del área de triángulos y/o rectángulos.
I) El Cálculo Integral.
E) Otros procedimientos erróneos difícilmente catalogables.

La siguiente tabla muestra el número de alumnos, de los que respondieron a este ítem, que han utilizado uno u otro procedimiento, así como las cifras correspondientes a los alumnos que no respondieron el ítem.

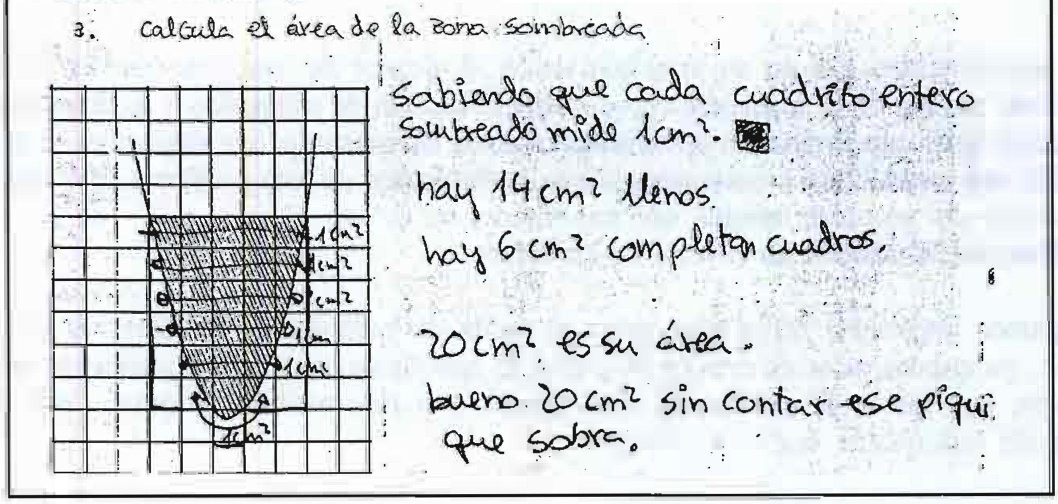
	C	T	I	E	no contesta
8º E.G.B.	65'3% (32/49)	32'6% (16/49)	0'0% (0/49)	2'0% (1/49)	51'9%
2º B.U.P.	25'9% (7/27)	29'6% (8/27)	0'0% (0/27)	44'4% (12/27)	79'4%
C.O.U.-L	13'0% (3/23)	4'3% (1/23)	56'5% (13/23)	26'1% (6/23)	77'5%
C.O.U.-C	8'6% (5/58)	3'4% (2/58)	79'3% (46/58)	8'6% (5/58)	47'3%
3º E.M.	47'4% (9/19)	5'3% (1/19)	31'6% (6/19)	15'8% (3/19)	56'8%
5º F.M.	3'2% (1/31)	0'0% (0/31)	96'9% (30/31)	0'0% (0/31)	3'1%

Tabla 36. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.3, y porcentaje de alumnos que lo deja en blanco.

Observando el porcentaje de alumnos que dejó en blanco el ítem o utilizó procedimientos erróneos (E) se constata que una mayoría de los alumnos no supo cómo abordarlo, resultando especialmente difícil para los de 2º de B.U.P. y C.O.U.-L. Sólo los alumnos de 5º F.M. salieron airosos aplicando sus conocimientos de Cálculo Integral.

Determinar el área mediante el conteo de los cuadraditos que recubren la superficie curva es un procedimiento que resultaba disponible a la totalidad de los alumnos. Sin embargo, sólo los estudiantes de dos cursos se decantaron mayoritariamente por él, 8º de E.G.B. y 3º E.M. Los del primero porque, como ya vimos en el apartado dedicado al estudio de la unidad de medida, están familiarizados con la unidad cuadrada, y los del segundo porque, como algunos de ellos nos comentaron, habían realizado algunas tareas de este tipo, de recubrimiento de superficies mediante unidades de medida de formas diversas, incluida la unidad cuadrada. En los otros cursos tan sólo una minoría de alumnos ha optado por este procedimiento, nada significativa en aquellos que poseen una mayor formación matemática como son los de C.O.U.-C y de 5º F.M. Como podemos ver a continuación el conteo de cuadraditos permitió a los alumnos cuantificar el área de la superficie con gran precisión.

Alumno 8º E.G.B.-69

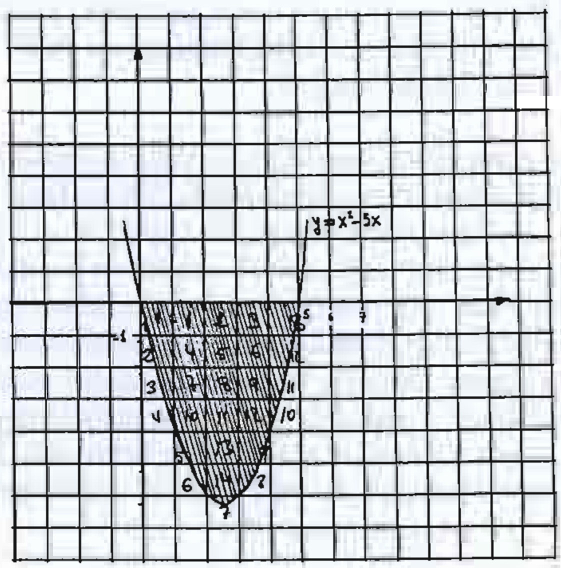

3. Calcula el área de la zona sombreada

Sabiendo que cada cuadrito entero sombreado mide 1cm².
hay 14 cm² llenos.
hay 6 cm² completan cuadros.
20cm² es su área.
bueno 20 cm² sin contar ese piquí que sobra.

El próximo ejemplo corresponde a la respuesta dada por un alumno de 3º E.M. que consigue obtener una buena aproximación del área de la superficie. No tendría nada de particular con respecto a otros alumnos que proceden al conteo de cuadraditos, si no es porque este estudiante ha sistematizado un método, que también utiliza para determinar el área de las superficies de los ítemes 1.5 y 1.7. En el ítem 1.5 este método le proporciona una medida errónea del área, bastante alejada del valor real, y en el 1.7 la medida exacta, como puede comprobarse en el apartado dedicado al estudio de este problema. Este alumno determina el área de las figuras sumando el número de cuadrados enteros y la mitad del número de cuadrados no enteros.

Alumno 3º E.M.-2

3. Calcula el área de la zona sombreada:



$S = 14 + \left[\frac{13}{2}\right] = 14 + 6.5 = 20.5$ cuadritos

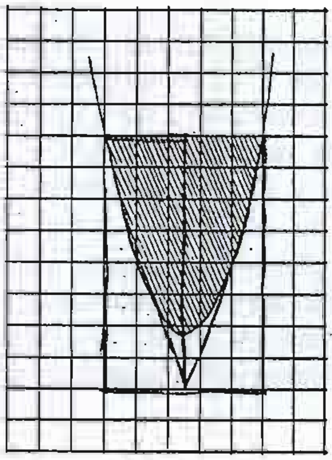
Otro procedimiento que en un principio estaba al alcance de cualquier alumno era el de aproximar el área de la superficie curva mediante el área de triángulos o rectángulos. Este método al igual que el descrito anteriormente debía de constituir una alternativa al Cálculo Integral, que posibilitara a cualquier alumno la resolución de este problema. Sin embargo, este modo de proceder resultó ser minoritario en 8º de E.G.B. y 2º de B.U.P. y prácticamente inexistente en el resto de los cursos.

Nos parece interesante reflexionar sobre el modo de proceder de los alumnos de 2º de B.U.P., ya que los datos de la tabla 36 ponen de manifiesto una mayor indefensión de estos alumnos, que los de 8º de E.G.B., aún cuando son más maduros y poseen una mayor formación matemática, que éstos últimos.

Las respuestas de los alumnos siguientes muestran dos formas diferentes de aproximar el área de la superficie curva.

Alumno 8º E.G.B.-75

3. Calcula el área de la zona sombreada:

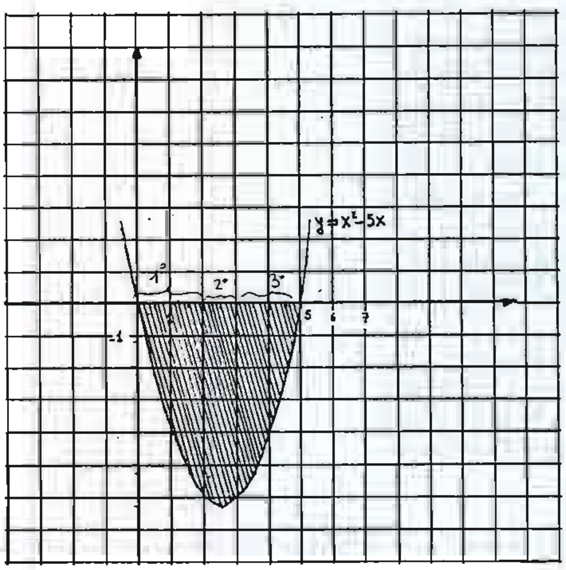


mide $1\,cm^2$ por cuadradito
$20 + 20\,cm^2$

Le he añadido los dos triangulos de los lados y media $40\,cm^2$ si se los quito como es la mitad nos quedaran $\boxed{20\,cm^2}$

Alumno 2º B.U.P.-27

3. Calcula el área de la zona sombreada:



$(y=x^2-5x)$

1° $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6\,cm$

2°- $A = b \cdot h = 1 \cdot 6 = 6\,cm$

3°- $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6\,m$

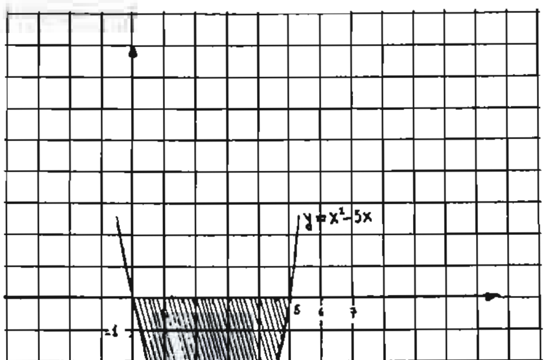
$At = 6 + 6 + 6 = 18\,cm$

El Cálculo Integral es un método con el que sólo podían estar familiarizados los alumnos de C.O.U.-C y 5° F.M., y algunos de C.O.U.-L y 3° E.M., dependiendo de las optativas que estos últimos alumnos hubieran escogido en secundaria. En razón a esto, este procedimiento fue mayoritariamente utilizado por los alumnos de estos cursos, a excepción de los de 3° E.M., aunque éstos últimos también lo emplearon. Sin embargo, los resultados fueron muy distintos ya que mientras que los estudiantes de C.O.U.-C y 5° F.M. lo emplean en su mayoría con éxito, más de la mitad de los de C.O.U.-L y la totalidad de los de 3° E.M. lo hacen de forma incorrecta.

Si bien era de prever que un determinado tipo de alumnos recurriría al Cálculo Integral, sorprendió el elevado número de alumnos de C.O.U.-L y de 3° E.M. que optaron por este procedimiento, a pesar de su débil formación en Cálculo Diferencial. Lo cierto es que las respuestas de estos alumnos transmitían la sensación de que recordaban que en algún momento habían visto, que algo que se llamaba integral y se representaba mediante ese símbolo tan peculiar se utilizaba para calcular áreas de este tipo. Como veremos a continuación los alumnos no sólo cometieron errores al plantear la integral definida o al calcularla, sino que algunos de ellos realizaron la asociación área-integral-derivada, que les llevó a calcular sin más la derivada de la función. Es evidente que estos "recuerdos" actúan como obstáculos en los alumnos, impidiendo que se plantearan otros modos de determinar el área de la superficie curva.

Alumno C.O.U.-C-32

3. Calcula el área de la zona sombreada:

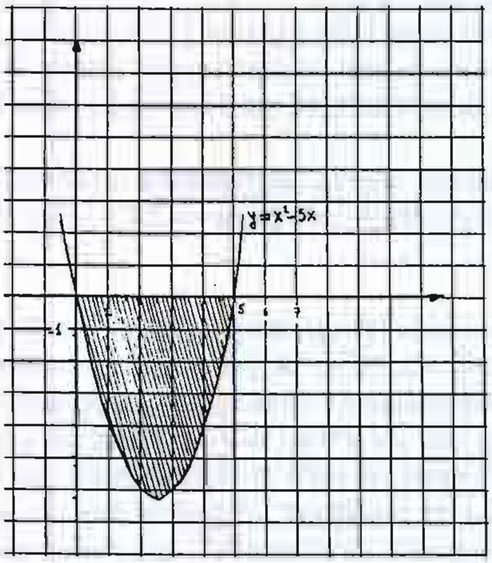


$y = x^2 - 5x$

$y' = 2x - 5$

Alumno 3º E.M.-16

3. Calcula el área de la zona sombreada:



$y = x^2 - 5x$

$\cancel{y = 5^2 - 5 \cdot 5 =}$

$\int_0^5 x^2 - 5x \, dx = \left[\frac{x^{2+1}}{1} - \frac{5^{1+1}}{1} \right]$

$\cancel{0^2 - 5 \cdot 0}$

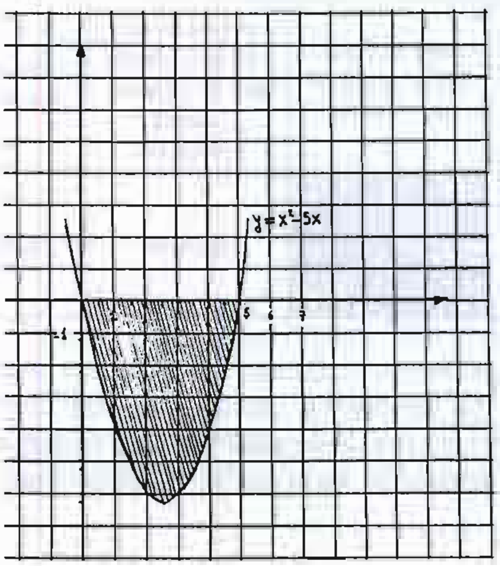
$\cancel{= [2x - 5]_0^5} =$

$= \left[\frac{x^3}{1} - \frac{5x^2}{1} \right] = \left[x^3 - 5x^2 \right]_0^5$

$= 5^3 - 5 \cdot 5^2 = 125 - 125 = \underline{0}$

Alumno 3º E.M.-18

3. Calcula el área de la zona sombreada:



$5\int_b^a x^2 - 5x = \int_{-5}^{-6} x^2 - 5x =$

$\cancel{= \int_b^a x^2 - 5x + \int_0^b x^2 - 5x =}$

$\cancel{= \{x^2 - 5x\}_0^a + [x^2 - 5x]_0^b =}$

$= /[36 + 30] + [25 + 25] =$

$= 66 + 50 = \underline{116}$

Respuestas sin sentido como estas últimas que acabamos de ver nos llevaron a estudiar la comprensión que estos alumnos poseen de la Integral Definida. Por ello durante las entrevistas realizadas a los alumnos y comentadas en el apartado 3.3.5.2. recopilamos información acerca de hasta qué punto un alumno que plantea y calcula una integral es consciente del significado que ésta posee, y en consecuencia si comprende lo que está calculando, y además de si en general los alumnos aceptan el conteo de cuadrados como un procedimiento válido para determinar el área. Como ya indicamos en 3.3.5.2. entrevistamos a alumnos de los distintos cursos que bien habían dejado en blanco este ítem o lo habían resuelto mediante Cálculo Integral, y de cuyas conversaciones pudimos comprobar que:

- Los alumnos de 5º F.M. y C.O.U.-C que habían resuelto el problema mediante Cálculo Integral, comprendían el significado del número obtenido a partir de éste, hecho éste que no se puede afirmar en los otros cursos.

- El conteo de cuadrados que recubren la superficie curva es propuesto por los alumnos de todos los cursos, a excepción de los de C.O.U.-L, como un posible procedimiento para determinar el área. Sin embargo, no todos estos alumnos consideraron adecuado emplear este procedimiento en esta ocasión, ya que uno de 2º de B.U.P. y dos de C.O.U.-C manifestaron que no lo utilizaron, aún habiendo pensado en ello, porque como ellos mismos afirmaban "se debía proceder de forma numérica". Como ya hemos indicado, ninguno de los alumnos de C.O.U.-L entrevistados, se le ocurrió pensar en el conteo de cuadrados como procedimiento alternativo para calcular el área de la superficie.

Ítem 1.4

Características del problema:

objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
cálculo del lado de un cuadrado a partir de su área	poligonal	no		numérico	numérico

Dada las características y sencillez de este problema, realmente no podemos hablar de la existencia de distintos procedimientos para su resolución, puesto que está claro que la longitud del lado se obtiene a partir del valor del área del cuadrado. Sin embargo, se han detectado diversas formas de proceder en el intento de los alumnos de determinar el valor de "l". Fundamentalmente han sido:

A_1) Si l^2 = 36 cm^2, l = 6 cm.
A_2) Si l^2 = 36 cm^2, l = 36/2 = 18 cm.
A_3) Si 4l = 36 cm^2, l = 36/4 = 9 cm.
E) Otras respuestas erróneas difíciles de catalogar.

En la siguiente tabla se muestra el número de alumnos que procedió en cualquiera de los modos descritos anteriormente. En la última columna se proporciona el porcentaje de alumnos, por curso, que lo dejó en blanco.

	A_1	A_2	A_3	E	no contesta
8° E.G.B.	49'5% (45/91)	12'1% (11/91)	29'7% (27/91)	8'8% (8/91)	10'8%
2° B.U.P.	88'3% (113/128)	1'6% (2/128)	7'0% (9/128)	3'1% (4/128)	2'3%
C.O.U.-L	85'6% (83/97)	4'1% (4/97)	6'2% (6/97)	4'1% (4/97)	4'9%
C.O.U.-C	100% (110/110)	0%	0%	0%	0%
3° E.M.	97'7% (43/44)	2'3% (1/44)	0%	0%	0%
5° F.M.	100% (32/32)	0%	0%	0%	0%

Tabla 37. Tipo de respuestas dadas por los alumnos en el ítem 1.4, y porcentaje de alumnos que lo deja en blanco.

Como se puede comprobar, salvo algunas excepciones, este ítem fue resuelto por la práctica totalidad de los alumnos de los distintos cursos.

Los datos proporcionados en la tabla indican que los cálculos incorrectos de "l" se manifestaron sólo en los alumnos de formación matemática más débil, registrándose el mayor número de ellos en 8° E.G.B., donde se pudo constatar que un elevado número de alumnos procedió como en (A_3) al no recordar la fórmula del área del cuadrado, como ya se comentó de forma extensa en el apartado 3.4.4., dedicado al estudio de la relación entre el área y el perímetro. Este hecho, agravado por la debilidad de los conocimientos de aritmética que poseen los alumnos de 8° de E.G.B., convirtió la resolución de este ítem en una tarea especialmente dificultosa de realizar para estos estudiantes, aún cuando este problema es uno de los problemas tipo planteados en la enseñanza habitual del área, desde que ésta se inicia.

Nos parece importante reflexionar sobre el motivo o motivos que pueden llevar a un alumno a actuar del modo descrito en (A_2) y (A_3), formas erróneas de calcular la longitud de "l", con el fin de poder determinar la base del problema e intentar subsanarlo. Consideramos que la naturaleza del error es distinta en cada uno de ellos. El error cometido en (A_2) está causado fundamentalmente por un desconocimiento del significado de las operaciones "potenciación y radicación", y en consecuencia está motivado por un desconocimiento de tipo aritmético.

El error cometido en (A_3) está fundamentalmente originado por el desconocimiento de la fórmula del área del cuadrado o también, por una posible confusión entre el área y el perímetro de la figura, y en consecuencia está motivado por un desconocimiento de tipo geométrico.

Pensamos que las respuestas siguientes dadas por algunos alumnos vienen a confirmar la naturaleza de los errores que acabamos de comentar.

CÁLCULO ERRÓNEO DE LA LONGITUD DEL LADO DEL CUADRADO: L=36/2

Alumno 8º E.G.B.-62

Sabiendo que el área de un cuadrado es de
[illegible] ¿Cuál [illegible] longitud de sus lados

Foo □ → $\boxed{l.l}$

36 cm² | 2
16   18 cm²
0

Alumno C.O.U.-L-33

4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm², ¿cuál es la longitud de sus lados?

$$36 = l \cdot l$$

$$l = \frac{36}{l} \qquad 36 = l \cdot \frac{36}{l}$$

$$36 = \frac{360}{l}$$

$$36 = 36$$

CÁLCULO ERRÓNEO DE LA LONGITUD DEL LADO DEL CUADRADO: L=36/4

Alumno 8º E.G.B.-69

Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm² ¿Cuál es la longitud de sus lados?

he dividido el área que me da del cuadrado, por cuatro que son los lados que tiene el cuadrado.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 4 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$

$\boxed{S = l \cdot l \cdot l \cdot l}$

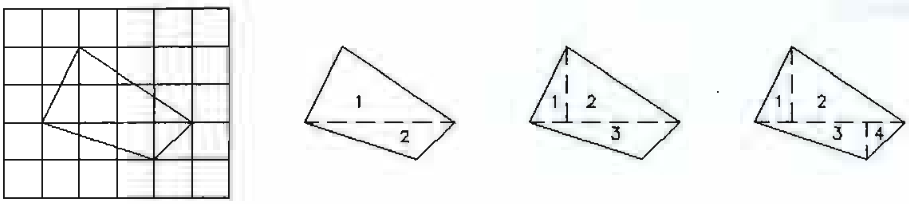
Ítem 1.5

Características del problema:

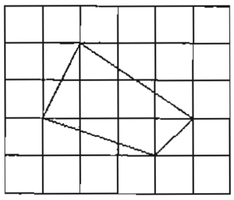
objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
cálculo del área de una superficie	poligonal	sí en E.G.B., no en el resto de cursos	cuadriculado	numérico, que se puede simplificar con uno geométrico	numérico

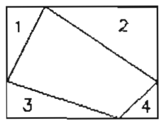
Los procedimientos empleados por los alumnos para calcular el área del cuadrilátero fueron diversos. Nosotros los hemos agrupado en:

A) El área del cuadrilátero resulta de la suma de las áreas de los triángulos en los que éste es descompuesto. El área de los triángulos se calculan aplicando directamente la fórmula. Se han observado descomposiciones diferentes del cuadrilátero: en dos triángulos escalenos, en dos rectángulos y uno escaleno, y en 4 rectángulos, como se indica en las figuras siguientes:



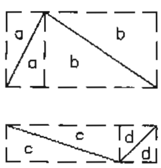
B) El área del cuadrilátero resulta de la diferencia entre el área del rectángulo que lo contiene y las áreas de los cuatro triángulos rectángulos sobrantes, como a continuación se muestra. También en este caso las áreas, tanto del rectángulo y triángulo se obtienen aplicando las fórmulas respectivas.





C) Conteo del número de cuadrados contenidos en el cuadrilátero.

G) El área del cuadrilátero resulta de la suma de las áreas de dos triángulos, cuyas áreas se determinan como la mitad del área de los rectángulos de igual base y altura que los contienen, como se muestra en la figura adjunta:



El procedimiento geométrico empleado, que como hemos visto consiste en una descomposición adecuada del triángulo y rectángulo y posterior análisis de las partes en las que éstos han quedado divididos, permite establecer la relación entre las áreas de estas dos superficies, y así determinar el área del cuadrilátero con gran sencillez.

E) En este apartado englobamos los procedimientos incorrectos utilizados por los alumnos. Uno de los procedimientos inadecuados más común entre los estudiantes, intentado especialmente por los de C.O.U.-L, C.O.U.-C y 5º F.M. fue determinar la longitud de los lados del cuadrilátero, quedando posteriormente bloqueados ante la imposibilidad de determinar el área del cuadrilátero a partir de ellos.

A continuación se muestra una tabla con la distribución de las respuestas entre los distintos procedimientos.

	A	B	C	G	E	no contesta
8º E.G.B.	0'0% (0/46)	2'2% (1/46)	47'8% (22/46)	10'9% (5/46)	39'1% (18/46)	54'9%
2º B.U.P.	37'9% (11/29)	24'1% (7/29)	3'4% (1/29)	0'0% (0/29)	34'5% (10/29)	77'9%
C.O.U.-L	31'3% (5/16)	0'0% (0/16)	6'3% (1/16)	0'0% (0/16)	62'5% (10/16)	84'3%
C.O.U.-C	51'9% (41/79)	5'1% (4/79)	3'8% (3/79)	6'3% (5/79)	32'9% (26/79)	28'2%
3º E.M.	37'5% (6/16)	6'3% (1/16)	37'5% (6/16)	0'0% (0/16)	18'8% (3/16)	63'6%
5º F.M.	58'3% (14/24)	12'5% (3/24)	0'0% (0/24)	4'2% (1/24)	25'0% (6/24)	25'0%

Tabla 38. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.5, y porcentaje de alumnos que lo deja en blanco.

Como puede apreciarse este problema desanimó a la mayoría de los alumnos de todos los cursos a excepción de los de C.O.U.-C y 5º F.M., presentando también estos cursos un elevado porcentaje de alumnos que lo dejó en blanco. Sin embargo, en principio cualquier alumno fuera cual fuera su nivel académico poseía los conocimientos suficientes para poder al menos intentar el cálculo del área del cuadrilátero, ya que era suficiente con conocer cómo calcular el área de un triángulo, o con entender el área como el número de unidades cuadradas que recubren la superficie.

La tabla anterior muestra una decantación clara de los alumnos de secundaria y 5º F.M. hacia el uso de los procedimientos numéricos, consistentes en el cálculo de áreas de las distintas figuras a partir de la aplicación sistemática de una fórmula -tipo (A) y (B)- con presencia anecdótica de algún alumno que ha contado las unidades cuadradas (C) o se ha ayudado de un razonamiento geométrico -tipo (G)-. Por el contrario estos últimos procedimientos son los utilizados por los alumnos de 8º de E.G.B. y 3º E.M.

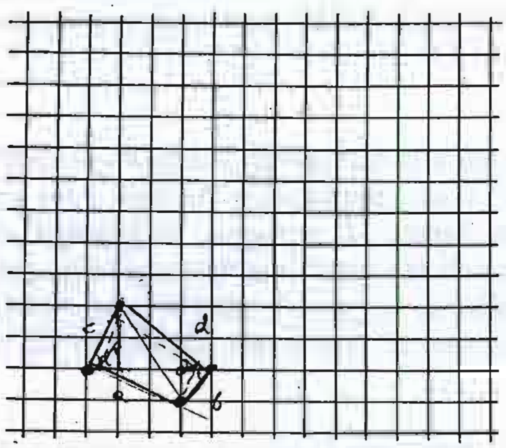
Hemos observado la existencia de un número significativo de alumnos que cuando determinan el área del cuadrilátero mediante la suma de áreas de triángulos, no optan por el camino más breve, que supondría la descomposición del cuadrilátero en 2 triángulos, sino que lo descomponen en 4 triángulos rectángulos, proceder éste, que se ha observado en otros momentos y que nos permite avanzar la preferencia de los alumnos a trabajar con triángulos rectángulos.

Observando el comportamiento de los alumnos de 8º de E.G.B., sorprende de nuevo la indefensión de los alumnos de 2º de B.U.P. y especialmente la de los de C.O.U.-L ya que el 62'6% de los alumnos que respondieron, que representa sólo el 16% del total, lo hizo utilizando un procedimiento incorrecto.

No quisiéramos abandonar el estudio de este problema sin antes mostrar algunos de los "increíbles" modos de proceder de alumnos de los cursos superiores -que por desgracia no representan casos aislados-, que ponen de manifiesto una clara "pérdida de norte" de estos alumnos en el cálculo, junto con un uso inadecuado e innecesario de otros conocimientos matemáticos, denotando todo ello la falta de formación y reducidos conocimientos que poseen en geometría, y en particular sobre el área.

Alumno C.O.U.-C-59

5. Encuentra el área de un cuadrilátero con vértices (2,2), (3,4), (5,1) y (6,2). Muestra todos los pasos que realices.



$\cancel{a = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}}$ $a = \sqrt{10}$

$\cancel{b = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}}$ $b = \sqrt{2}$

$\cancel{c = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}}$ $c = \sqrt{5}$

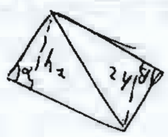
$\cancel{d = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}}$ $d = \sqrt{13}$

$\cancel{\text{Área} = a \cdot b + \frac{(c-b)\, a}{2}}$

$$\text{Área} = \frac{a \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot c}{2} + \frac{d \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot b}{2}$$

$h_1 = \operatorname{sen}\alpha \cdot c$

$h_2 = \operatorname{sen}\beta \cdot b$



Alumno C.O.U.-C-95

5. A Encuentra el área de un cuadrilátero con vértices (2,2), (3,4), (5,1) y (6,2). Muestra todos los pasos que realices. B D C

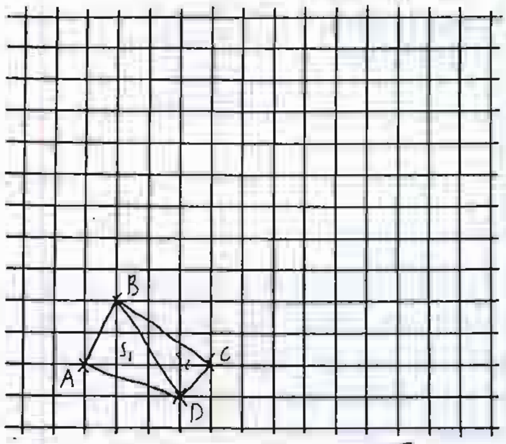
$\vec{BD} = (5,1)-(3,4) = (2,-3)$

$\vec{AB} = (3,4)-(2,2) = (1,2)$

$\vec{AD} = (5,1)-(2,2) = (3,-1)$

$\vec{CD} = (5,1)-(6,2) = (-1,-1)$

$\vec{CB} = (3,4)-(6,2) = (-3,2)$



$S_1 = \frac{1}{2} \cdot -5 = \frac{-5}{2} cm^2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1-9+\cancel{4}+2+3-\cancel{6} = -5$

$S_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\cancel{-3}+\cancel{3}+4-2-9+2) = \frac{-5}{2}$

$S_T = S_1 + S_2 = \frac{-5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-10}{2} = \boxed{-5 cm^2}$

Alumno 5º F.M.-31

5. Encuentra el área de un cuadrilátero con vértices (2,2), (3,4), (5,1) y (6,2). Muestra todos los pasos que realices.

las rectas que definen los lados del cuadrilátero son:

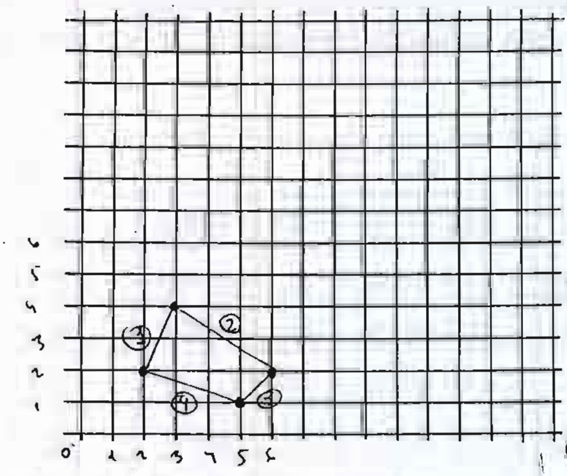
$y = mx + n$

① : $\left.\begin{array}{l} 2 = m2 + n \\ 4 = m3 + n \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} n = 2 - 2m \\ 4 = m3 - 2m + 2 \end{array}\right\} \to \boxed{m = 2} \to \boxed{n = -2}$

① : $y = 2x - 2$

② : $\left.\begin{array}{l} 4 = m3 + n \\ 2 = m6 + n \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} n = 4 - 3m \\ 2 = 6m - 3m + 4 \end{array}\right\} \to \boxed{m = -\frac{2}{3}} \to \boxed{n = 6}$

② : $y = -\frac{2}{3}x + 6$



③ : $\left.\begin{array}{l} 2 = m6 + n \\ 1 = m5 + n \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} n = 2 - 6m \\ 1 = 5m - 6m + 2 \end{array} \to \boxed{m = 1} \quad \boxed{n = -4}$

③ : $y = x - 4$

④ : $\left.\begin{array}{l} 1 = 5m + n \\ 2 = 2m + n \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} n = 2 - 2m \\ 1 = 5m - 2m + 2 \end{array}$

$\to \boxed{m = -\frac{1}{3}} \quad \boxed{n = \frac{5}{3}}$ ④ : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Ítem 1.6

Características del problema:

objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
comparar el área de dos superficies	poligonal	sí	blanco	geométrico	geométrico

Este problema únicamente podía ser resuelto buscando la descomposición de la superficie blanca en piezas idénticas a las de la zona sombreada, luego los intentos de los alumnos debían ir encaminados en esta dirección. A pesar de que no existía valor numérico alguno, algunos de los alumnos con mayor formación matemática aún intentaron como veremos a continuación, razonamientos algebraicos y numéricos. Los procedimientos utilizados por los estudiantes se basaron en:

G) Una descomposición de la superficie en piezas. Por G_c representaremos la descomposición correcta, y por G_i cualquier descomposición infructuosa.
N) Razonamientos algebraicos y numéricos, que en ningún caso les permitió resolver la tarea.
E) Respuestas erróneas difíciles de catalogar, entre las que cabe destacar la consistente en una afirmación dada en lenguaje verbal y avalada mediante un razonamiento inconsistente, por haber sido dada por un elevado número de alumnos.

La distribución de las respuestas dadas por los alumnos entre los distintos procedimientos se muestra en la tabla siguiente, junto con los datos referidos al porcentaje de alumnos que no contestó el ítem:

	G_c	G_i	N	E	no contesta
8º E.G.B.	10'9% (6/55)	18'2% (10/55)	0'0% (0/55)	70'9% (39/55)	46'1%
2º B.U.P.	41'7% (25/60)	8'3% (5/60)	1'7% (1/60)	48'3% (29/60)	54'2%
C.O.U.-L	30'3% (10/33)	9'1% (3/33)	0'0% (0/33)	60'6% (20/33)	67'6%
C.O.U.-C	66'2% (47/71)	12'7% (9/71)	4'2% (3/71)	16'9% (12/71)	35'5%
3º E.M.	37'5% (12/32)	6'3% (2/32)	6'3% (2/32)	50'0% (16/32)	27'3%
5º F.M.	76'5% (13/17)	5'9% (1/17)	17'6% (3/17)	0'0% (0/17)	46'9%

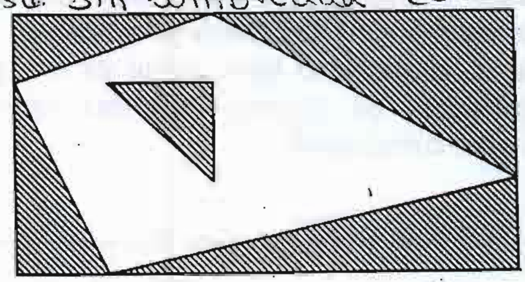
Tabla 39. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.6, y porcentaje de alumnos que lo deja en blanco.

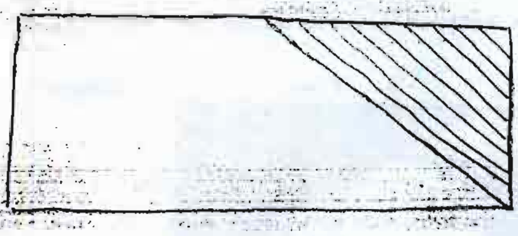
Si bien es cierto que encontrar la descomposición idónea no es una tarea fácil para un alumno que no está familiarizado con este tipo de procedimientos, se podría esperar al menos que el alumno procediera intentando descomposiciones comprendiendo que éste era el único modo de proceder que le permitiría resolver el problema. Sin embargo, además del elevadísimo número de alumnos que lo dejó en blanco en los distintos cursos, en todos ellos, a excepción de C.O.U.-C y 5º F.M., una mayoría de estudiantes no supo cómo proceder, demostrando encontrarse "desvalidos" al realizar planteamientos algebraicos y numéricos, totalmente desafortunados, o limitarse a dar una simple afirmación o negación carente de cualquier argumentación válida, del tipo de las que se muestran a continuación.

Alumno 8º E.G.B.-13

6. ¿La parte sombreada es la mitad del rectángulo?. Razónalo.

Sí, por que si ponemos la figora que esta sin sombreada como yo la e puesto se ve que el triangulo pequeño el que esta sombreado es el que le falta para ser un rectangulo

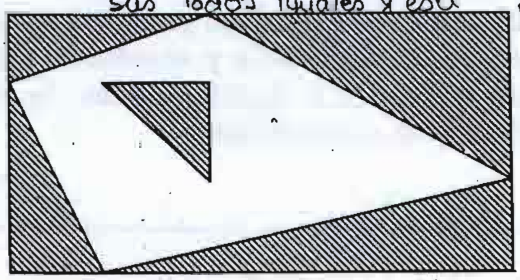




Alumno 8º E.G.B.-27

6. ¿La parte sombreada es la mitad del rectángulo?. Razónalo.

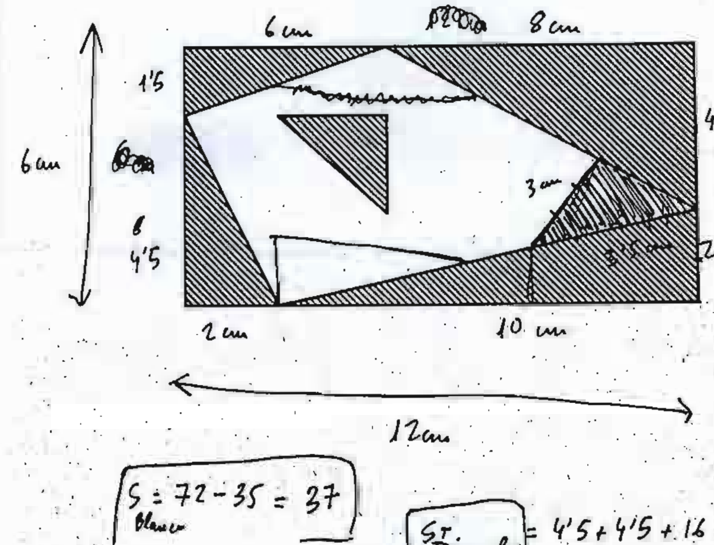
NO es la mitad del rectangulo porque el rectangulo tiene todos sus lados iguales y esta parte no tiene sus lados iguales.



Los razonamientos a partir de planteamientos numéricos o algebraicos realizados por los alumnos de mayor formación matemática resultaron ser todos ellos infructuosos. Es interesante reflexionar sobre la "fe" que estos alumnos demuestran poseer en el lenguaje algebraico al utilizarlo aún cuando nada en el problema hace pensar en esta posibilidad. Como muestran las respuestas seleccionadas de algunos de estos estudiantes los planteamientos y desarrollos poseen una gran complejidad.

Alumno 2º B.U.P.-95

6. ¿La parte sombreada es la mitad del rectángulo?. Razónalo.



$S = \frac{\cancel{6} \cdot 1'5}{\cancel{2}} = 4'5 \text{ cm}^2$

$S = \frac{\cancel{4} \cdot 8}{2} = 16 \text{ cm}^2$

$S = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 \text{ cm}^2$

$S = \frac{2 \cdot 4'5}{2} = 4'5 \text{ cm}^2$

$\boxed{S_{\text{Triangulos}}} = 4'5 + 4'5 + 16 + 10 = \boxed{35 \text{ cm}^2}$

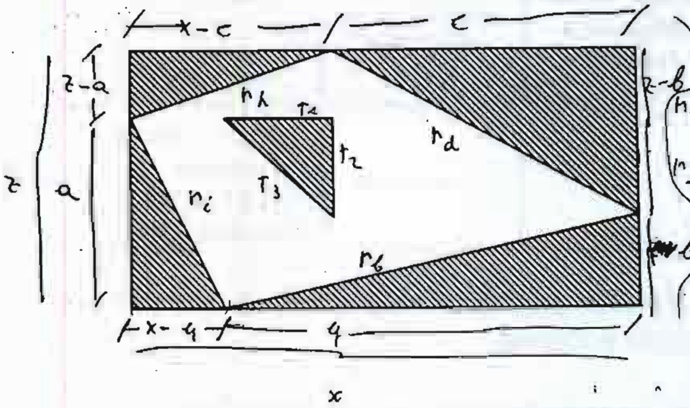
$\boxed{S_T} = b \times a = 12 \cdot 6 = \boxed{72 \text{ cm}^2}$

$\boxed{S_{\text{Blanco}} = 72 - 35 = 37}$

Si, más o menos es la mitad.

Alumno C.O.U.-C-59

6. ¿La parte sombreada es la mitad del rectángulo?. Razónalo.



A rectángulo $= x \cdot z$

$h_i = \sqrt{a^2 + (x-y)^2}$

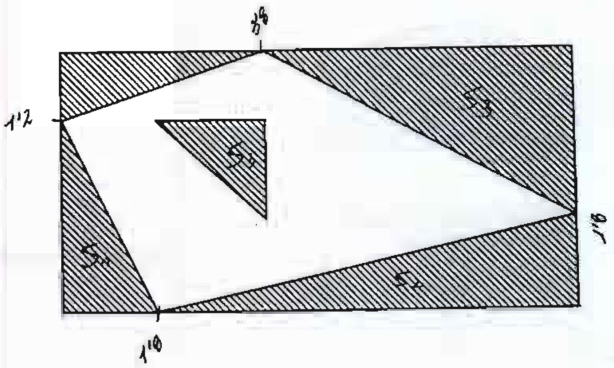
$h_b = \sqrt{b^2 + y^2}$

$h_h = \sqrt{(z-a)^2 + (x-c)^2}$

$h_d = \sqrt{c^2 + z - b^2}$

Alumno 5º F.M.-10

6. ¿La parte sombreada es la mitad del rectángulo?. Razónalo.



$S_1 = \frac{1'8 \cdot 1'2}{2}$ $\quad S_3 = \frac{5'8 \cdot 3'1}{2}$

$S_2 = \frac{8 \cdot 1'8}{2}$ $\quad S_4 = \frac{3'8 \cdot 1'2}{2}$

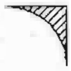
$S_5 = \frac{2'1 \cdot 1'9}{2}$

Ítem 1.7

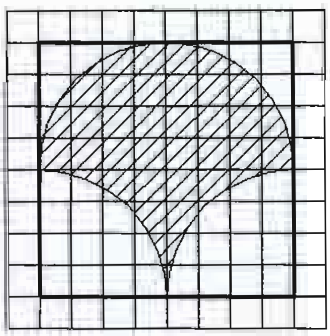
Características del problema:

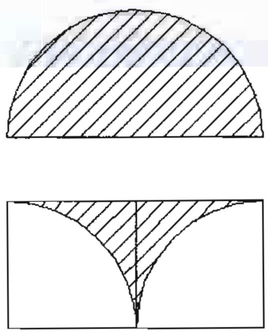
objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
cálculo del área de una superficie	no poligonal	sí	cuadriculado	numérico que se puede simplificar con uno geométrico	numérico

A continuación se detallan los diversos procedimientos utilizados por los alumnos para determinar el área de la superficie no poligonal.

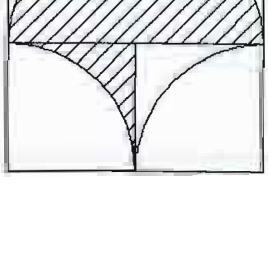
S) La superficie se descompone en un semicírculo y dos superficies de la forma  . Así pues la suma de estas áreas dará el área de la superficie buscada.

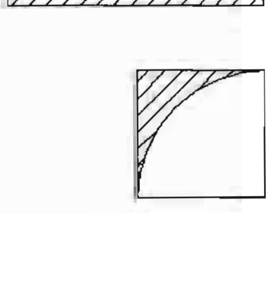
A continuación describimos los diferentes modos en los que han procedido los alumnos para determinar el área de las superficies de la forma  .



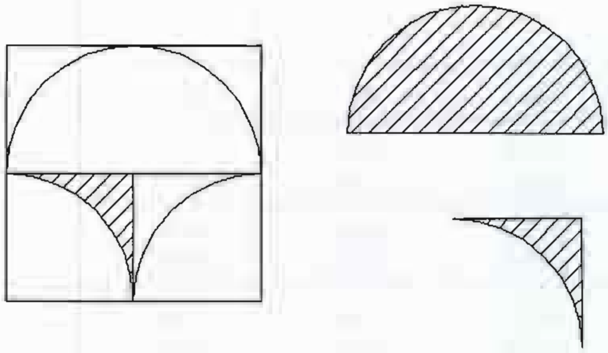


A(rectángulo) - A(semicírculo)





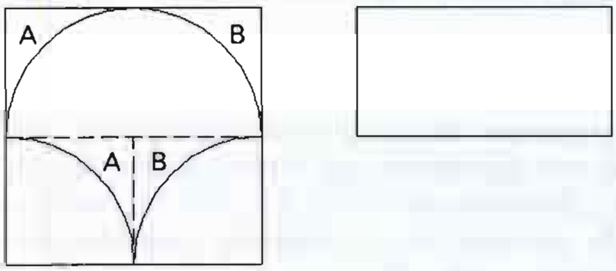
A(cuadrado) - 1/2 A(semicírculo)



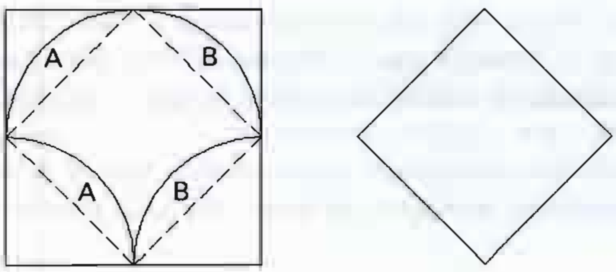
$$\frac{A(\text{cuadrado grande}) - A(\text{círculo})}{4}$$

C) La medida del área resulta del conteo del número de cuadrados contenidos en la superficie.

G_1) Se utiliza el procedimiento geométrico de recorte y encaje por complementariedad de formas, reconvirtiendo la superficie no poligonal en un rectángulo del que resulta muy sencillo determinar su área. La recomposición se explica en el dibujo siguiente:



G_2) Al igual que antes por recorte y encaje por complementariedad de formas se reconvierte la superficie no poligonal en un cuadrado. Sin embargo, en esta ocasión a diferencia del caso anterior, resulta complejo calcular área de la nueva figura. La recomposición realizada es:



E) Otros procedimientos erróneos utilizados por algunos alumnos.

La siguiente tabla muestra los porcentajes de alumnos que utilizaron cada uno de estos procedimientos descritos anteriormente.

	S	C	G_1	G_2	E	no contesta
8° E.G.B.	0'0% (0/41)	46'3% (19/41)	9'8% (4/41)	4'9% (2/41)	39'0% (16/41)	59'8%
2° B.U.P.	31'9% (23/72)	1'4% (1/72)	13'9% (10/72)	0'0% (0/72)	52'8% (38/72)	45'0%
C.O.U.-L	13'9% (5/36)	2'8% (1/36)	30'6% (11/36)	0'0% (0/36)	52'8% (19/36)	64'7%
C.O.U.-C	50'5% (46/91)	1'1% (1/91)	13'2% (12/91)	2'2% (2/91)	33'0% (30/91)	17'3%
3° E.M.	13'8% (4/29)	24'1% (7/29)	17'2% (5/29)	10'3% (3/29)	34'5% (10/29)	34'1%
5° F.M.	76'0% (19/25)	0'0% (0/25)	12'0% (3/25)	0'0% (0/25)	12'0% (3/25)	21'9%

Tabla 40. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.7, y porcentaje de alumnos que lo dejan en blanco.

El porcentaje de alumnos que han utilizado el procedimiento (G_1) o (G_2), es decir que se han ayudado de un procedimiento geométrico para determinar el valor del área, no ha superado el 15% en ningún curso, a excepción de C.O.U.-L y 3° E.M., donde se registran unas cifras un poco más elevadas. En cualquier caso, es patente que este tipo de proceder no es habitual entre los alumnos ya que no recurren a él cuando en este caso concreto el método requerido consistía en un sencillo recorte de la superficie en partes y posterior recomposición de éstas.

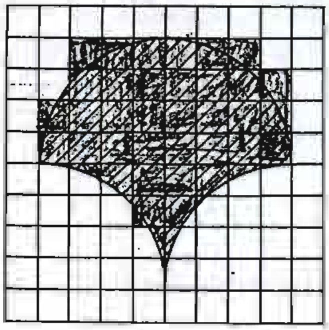
Por el contrario, como en otros casos, la mayoría de los alumnos se inclina por procedimientos numéricos sin importarles si éstos resultan largos y pesados, y por consiguiente sin buscar algún otro modo de proceder más sencillo y breve.

También se observa la actitud diferenciada de los alumnos de 8° de E.G.B. de la de los estudiantes de los otros cursos, que una vez más huyen de los procedimientos numéricos, consistentes en el uso de la fórmulas para el cálculo del área, para proceder a determinar el área de la superficie contando el número de cuadrados que la recubren. Este procedimiento ha sido utilizado también por algunos alumnos de 3° E.M. Sorprende la habilidad que algunos de estos alumnos han demostrado poseer en este tipo de proceder, al conseguir no sólo un buena aproximación de la medida del área, sino en alguna ocasión, la de su medida exacta.

Las siguientes respuestas son ejemplos de algunas de las formas de proceder anteriormente comentadas.

Alumno 8º E.G.B.-60. El modo de proceder de este alumno es el descrito en (C).

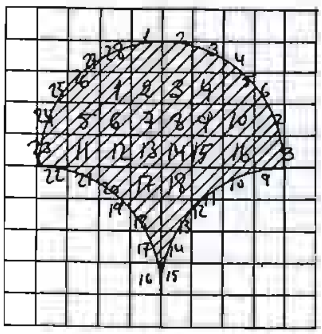
7. Encuentra el área de la zona sombreada.



32 cuadritos

Alumno 3º E.M.-2. Aunque este alumno procede al recuento de unidades cuadradas contenidas en la superficie, el modo de realizarlo, que él mismo indica en el ítem, le conduce por azar al valor exacto del área. Ya nos referimos a este alumno y a su peculiar forma de determinar el área cuando estudiamos el ítem 1.5.

7. Encuentra el área de la zona sombreada.

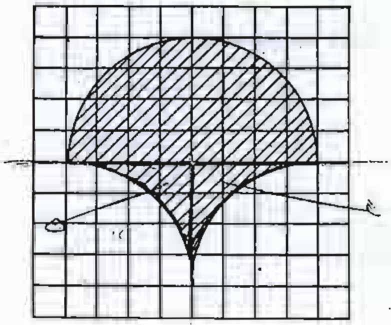


$$S = n^{o}\ \text{enteros} + \frac{n^{o}\ \text{no enteros}}{2} =$$

$$= 18 + \frac{28}{2} = 18 + 14 = 32\ \text{cuadros}$$

Alumno 8º E.G.B.-72. El procedimiento utilizado por este alumno es del tipo (G_1).

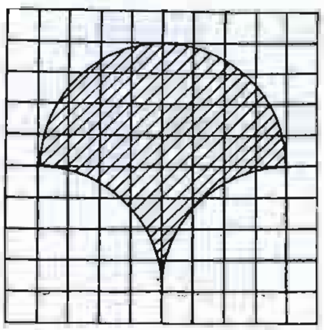
7. Encuentra el área de la zona sombreada.



Las partes de bajo (las señaladas con flechas), se pusieran en los huecos de arriba (los rellenados), encajaría y quedaría un rectángulo de 8·4, si suponemos que cada cuadradito mide 1 cm^2, el área sería de 32 cm^2.

Alumno C.O.U.-C-102. El modo de proceder de este alumno ha sido el más habitual entre los estudiantes, consistente en calcular el área de la superficie no poligonal a partir del área del semicírculo y de las dos figuras sobrantes - procedimiento del tipo (S)-. Si no hubiera cometido errores durante el cálculo, podría haber obtenido el valor exacto del área. Llamamos la atención sobre el elevadísimo número de errores que este alumno ha cometido, que se corresponden con cada una de las operaciones que ha realizado.

7. Encuentra el área de la zona sombreada.



$\pi . R^2$

$\frac{8 . \pi}{2} = 4\pi$ área de la mitad de la circunferencia

$8 . 8 = 16$ área del cuadrado donde está inscrita

La mitad sería $\underline{8}$

$8 - 4\pi =$ área sombreada $= 4'56$

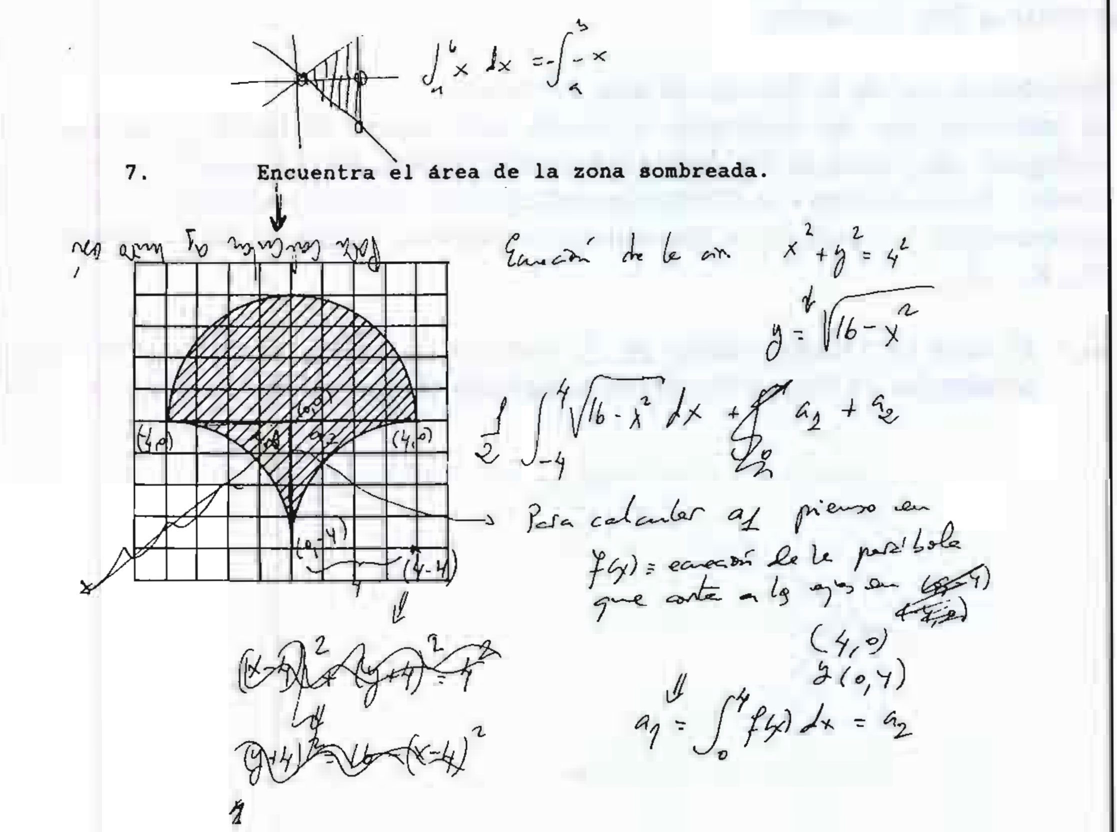
$4'56 + 4\pi = \underline{\text{área}}$

$$\begin{array}{r} 3'14 \\ \times\ 4 \\ \hline 12'56 \end{array}$$

En contraste con la sencillez de los procedimientos anteriores mostramos aquí el utilizado por un alumno de 5º F.M., que finalmente no le conduce al valor del área de la superficie no poligonal. Procedimientos de este tipo son los que hemos englobado en (E).

Como puede deducirse de las cifras que proporciona la columna (E), fueron muchos los alumnos que se enfrascaron en procedimientos numéricos o algebraicos sin sentido (como el mostrado), que les impidió poder determinar el área de la superficie. Estas cifras cobran un significado especial si consideramos en cada curso el número de estudiantes que resolvió el ítem.

Alumno 5º F.M.-17



Ítem 1.8

Características del problema:

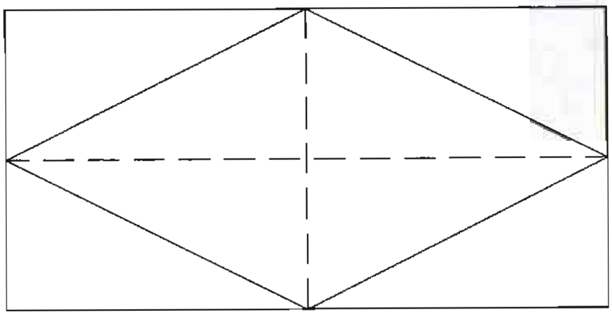
objetivo del problema	tipo de superficie	¿se proporciona el dibujo de la superficie?	tipo de papel sobre el que se da el dibujo	naturaleza del procedimiento que se requiere para su resolución	contexto en el que se plantea
cálculo del área de una superficie	poligonal	sí	blanco	numérico que se puede simplificar con uno geométrico	numérico

A continuación se detallan los diversos procedimientos utilizados por los alumnos para determinar el área del rombo.

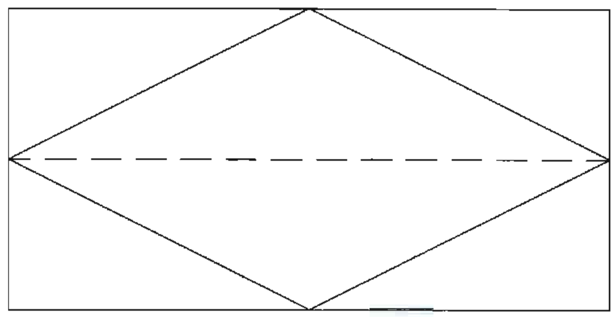
F) Mediante el uso de la fórmula del área del rombo.

R) A partir del área del rectángulo en el que está inscrito el rombo y del área de los triángulos resultantes de las distintas descomposiciones que los estudiantes realizan del rombo. Todas las áreas se determinan aplicando las fórmulas apropiadas. En este caso se observaron tres procederes distintos que mostramos a continuación y denotaremos por R_1, R_2 y R_3.

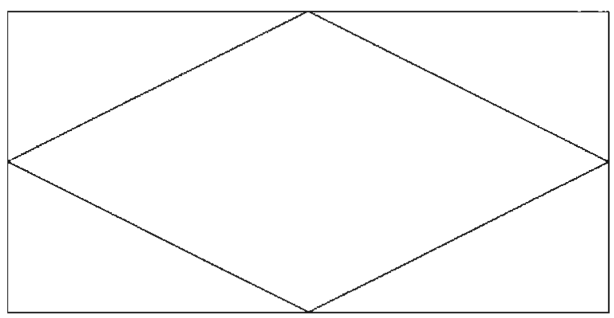
R_1: El área del rombo resulta de la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos en los que ha sido descompuesto el rombo como se indica en la figura:



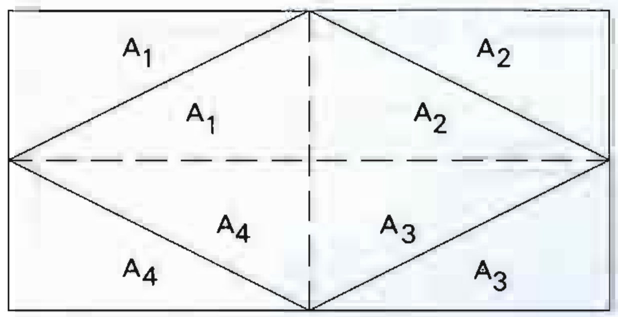
R_2: El área del rombo resulta de la suma de las áreas de los dos triángulos isósceles en los que ha sido descompuesto el rombo, como se muestra en la figura:



R_3: El área del rombo resulta de la diferencia entre el área del rectángulo y la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos que quedan en el exterior del rombo, como se muestra en la figura:



G) Mediante el procedimiento geométrico, consistente en una partición adecuada del rombo en cuatro triángulos rectángulos se establece que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo que lo contiene. Así pues para determinar el área del rombo, será sólo necesario calcular la del rectángulo en el que está inscrito. En el dibujo siguiente se muestra esta relación:



E) Otros procedimientos numéricos erróneos.

A continuación mostramos el número de alumnos que utilizó cada uno de estos procedimientos.

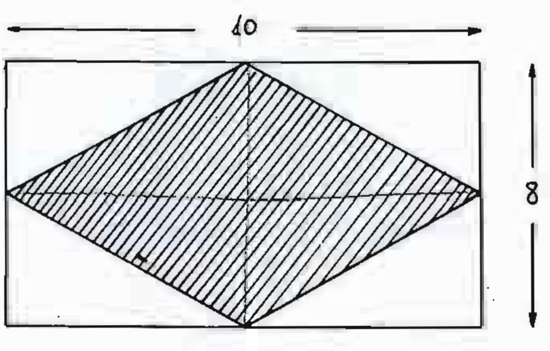
	F	R	G	E	no contesta
8º E.G.B.	47'7% (31/65)	4'6% (3/65)	27'7% (18/65)	20'0% (13/65)	36'3%
2º B.U.P.	18'8% (21/112)	39'3% (44/112)	23'2% (26/112)	18'8% (21/112)	14'5%
C.O.U.-L	31'9% (30/94)	46'8% (44/94)	11'7% (11/94)	9'6% (9/94)	7'8%
C.O.U.-C	21'8% (24/110)	60'0% (66/110)	10'9% (12/110)	7'3% (8/110)	0'0%
3º E.M.	25'6% (10/39)	41'0% (16/39)	20'5% (8/39)	12'8% (5/39)	11'4%
5º F.M.	3'3% (1/30)	83'3% (25/30)	13'3% (4/30)	0'0% (0/30)	6'3%

Tabla 41. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.8, y porcentaje de alumnos que lo deja en blanco.

Con estos datos se vuelve a confirmar el uso mayoritario por parte de todos los alumnos de procedimientos puramente numéricos. Son muy pocos los estudiantes que se han ayudado de un procedimiento geométrico, como el descrito en (G), aún cuando éste les proporcionaba una rápida y sencilla solución del problema. Ha sido en 8º de E.G.B. donde se ha registrado el mayor porcentaje de alumnos que ha optado por este tipo de proceder, y de los que hemos seleccionado una respuesta a modo de ejemplo.

Alumno 8º E.G.B.-72

8. Encuentra el área de la zona sombreada.



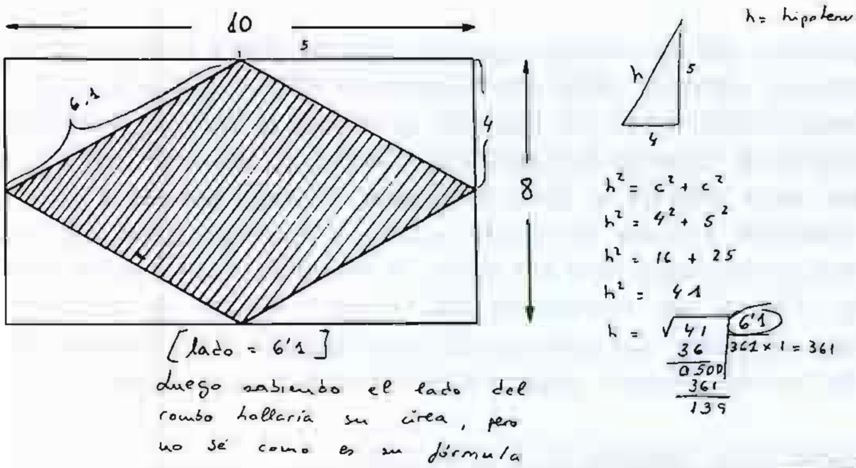
10·8 = 80.
Si la figura es la mitad, mide 40 cm².
Porque $\frac{80}{2} = 40$.

Por lo que respecta a los procedimientos numéricos, cabe resaltar la diferencia de comportamiento que se ha observado en los estudiantes de los distintos cursos entre el uso directo de la fórmula del área del rombo y el uso de razonamientos alternativos. Mientras que el mayor porcentaje de alumnos que utilizó la fórmula del área del rombo corresponde a 8º de E.G.B. y va disminuyendo de forma considerable conforme el nivel del curso aumenta, hasta quedar reducido este uso a un sólo alumno de 5º F.M., el porcentaje de alumnos que utilizó un método numérico alternativo para el cálculo del área del rombo aumenta en relación al nivel del curso, procediendo de este modo sólo 3 alumnos de 8º de E.G.B. frente al 83'4% correspondiente a los alumnos de 5º F.M.

Hemos podido comprobar cómo el conocimiento por parte de los alumnos de la existencia de una fórmula para calcular el área, obstaculiza la búsqueda de procedimientos alternativos aún cuando manifiestan claramente no recordarla. Respuestas como la que dio el siguiente alumno fueron, desafortunadamente, demasiado habituales.

Alumno 3º E.M.-36

8. Encuentra el área de la zona sombreada.



De entre los procedimientos numéricos alternativos al uso de la fórmula del área del rombo cabe destacar la manifiesta preferencia de los alumnos, ya detectada y comentada cuando se habló del ítem 1.5, de trabajar con triángulos rectángulos en lugar de con otro tipo de triángulos, aunque ello suponga un proceso más largo y en consecuencia deban realizar mayor número de cálculos.

Se aprecia la existencia de una minoría de alumnos que no supo encontrar un procedimiento adecuado para calcular el área del rombo. Si a esto añadimos que el porcentaje de alumnos que lo dejó en blanco fue muy bajo, ello nos lleva a poder concluir que este problema resultó asequible a la mayoría de los alumnos de todos los cursos.

Estudio comparativo de los problemas

Con el fin de disponer de mayor número de datos que nos permitan conocer e interpretar mejor el modo de proceder de los alumnos en la resolución de los problemas, hemos considerado interesante realizar, en primer lugar, un estudio para recabar información acerca de la dificultad que estos problemas han supuesto para los alumnos, y en segundo lugar, uno para detectar y analizar posibles dependencias entre el tipo de concepciones, tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de los problemas y curso al que éstos pertenecen.

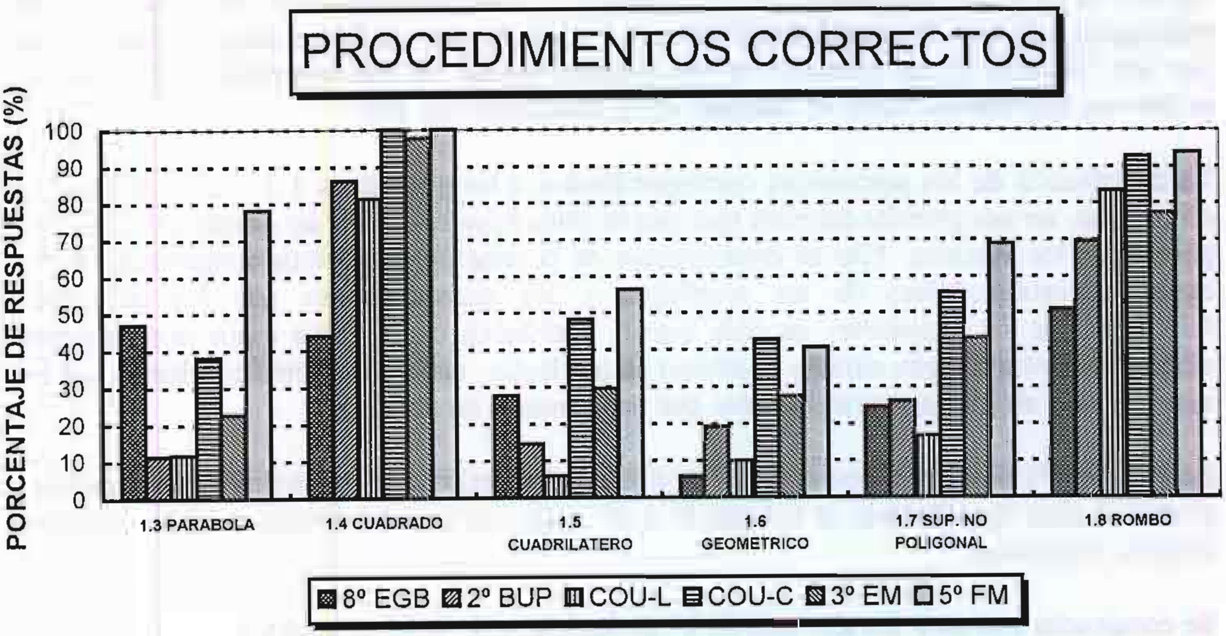
¿QUÉ DIFICULTAD HAN SUPUESTO LOS PROBLEMAS A LOS ALUMNOS?

Hemos asociado el grado de dificultad de un problema al porcentaje de éxito alcanzado por los alumnos en su resolución, entendiendo por porcentaje de éxito el que representa a los alumnos que han sabido cómo proceder. Por ello hemos estudiado el porcentaje correspondiente a los alumnos que han procedido de forma correcta en la resolución de cada uno de los problemas. El hecho de que pensemos que la principal causa de que los alumnos hayan dejado en blanco estos ítemes es su desconocimiento de cómo afrontar la resolución de las distintas tareas planteadas, nos ha llevado a referir el porcentaje al total de alumnos de cada curso.

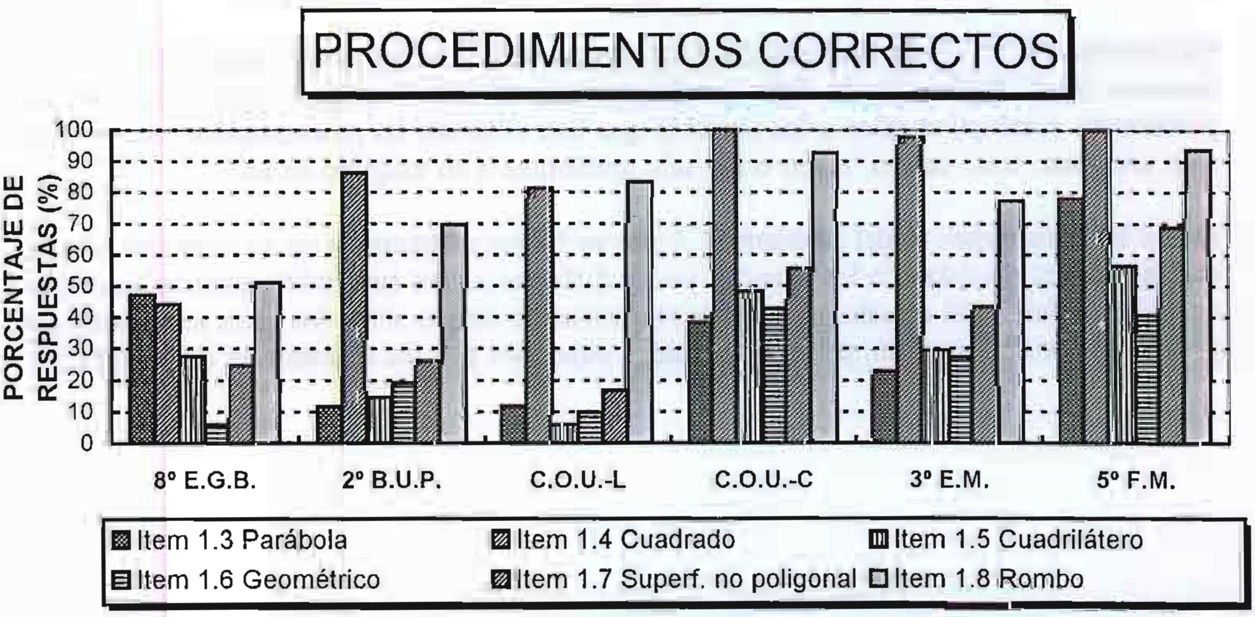
Es importante aclarar que los alumnos que proceden de forma correcta no necesariamente llegan a la respuesta correcta, dado que algunos de ellos cometieron durante el proceso errores de diferente índole, como por ejemplo, de cálculo aritmético, o consecuencia de una falta de habilidad en el recuento de cuadrados. Nuestro interés está centrado en estudiar si un alumno sabe cómo afrontar la tarea demandada en cada problema y no si durante su resolución ha cometido un error de cálculo, u otros errores que están motivados por otros desconocimientos ajenos al que aquí nos ocupa. A continuación indicamos para cada ítem la variable y los códigos que representan los distintos modos de proceder que hemos considerado como correctos, que se encuentran detallados en la codificación realizada de las respuestas dadas por los alumnos, y que puede consultarse en el Anexo 2 de esta memoria:

ítem 1.3: variable: x31; códigos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
ítem 1.4: variable: x41; códigos: 1.
ítem 1.5: variable: x51; códigos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
ítem 1.6: variable: x61; códigos: 1.
ítem 1.7: variable: x71; códigos: 1, 2, 3, 4, 5, 8.
ítem 1.8: variable: x81; códigos: 1, 2, 3, 4, 5.

Con el fin de facilitar un estudio comparativo entre los distintos problemas y cursos presentamos estos datos en dos gráficas, la primera muestra para cada problema el porcentaje de alumnos de cada curso que procede de forma correcta, y la segunda, para cada curso el porcentaje de alumnos que utiliza un razonamiento correcto en cada problema.



Gráfica nº7



Gráfica nº8

Observando globalmente los datos proporcionados en estas gráficas se comprueba que sea cual sea el nivel escolar de los estudiantes, éstos no están habituados a enfrentarse con algunas de las situaciones planteadas, aún cuando en principio disponen de los conocimientos suficientes para ello. De hecho los problemas 1.4 y 1.8, que son los resueltos correctamente por una mayoría de los alumnos de los distintos cursos, se corresponden con el tipo de problemas que normalmente se plantean en la enseñanza del área.

La distribución de los porcentajes correspondientes a los problemas 1.3, 1.5, 1.6 y 1.7, y cada curso, no nos permite concluir que uno de ellos haya resultado ser el más difícil o fácil para todos los alumnos. Ello es consecuencia de la relación que hemos comprobado existe entre las características de los problemas y los procedimientos con los que están familiarizados los estudiantes de cada curso. Podríamos decir, salvo casos excepcionales correspondientes a algún curso y problema en particular, que estos cuatro problemas son los que han sido abordados correctamente por una minoría de alumnos.

La gráfica nº8 nos indica que el grado de dificultad de estos seis problemas ha resultado ser el mismo para los alumnos de C.O.U.-C y 3º E.M., aunque los primeros hayan obtenido mejores resultados.

Se comprueba que para los alumnos de 8º de E.G.B. y 5º F.M. el problema que les supuso mayor dificultad fue el 1.6, para los de 2º de B.U.P., C.O.U.-C y 3º E.M. el problema 1.3, y para C.O.U.-L el 1.5. De hecho la gráfica nº7 nos permite afirmar que globalmente estos tres problemas son los que han resultado de mayor dificultad a los alumnos.

De entre todos los alumnos, los mejores resultados corresponden a los de C.O.U.-C y 5º F.M. Sin embargo, a excepción de su éxito en los problemas 1.4 y 1.8, en el resto de los problemas éste es bajo.

Finalmente con objeto de disponer de más datos acerca de la capacidad demostrada por los alumnos en la resolución de estos problemas planteamos el estudio, por curso, de los porcentajes correspondientes a los alumnos que han utilizado un procedimiento correcto en sólo uno, dos, tres, cuatro, cinco o los seis problemas o en ninguno de ellos.

Dadas las características del problema 1.4 que ya fueron comentadas en su momento y dado que la práctica totalidad de los alumnos en los distintos cursos supo cómo abordarlo, hemos decidido excluirlo del estudio para obtener información directa sobre los otros problemas que podría quedar enmascarada por los resultados obtenidos por los alumnos en este problema.

	procedimientos correctos		
	en 0 ó 1 problemas	en 2 problemas	en al menos 3 de los 5 problemas
8º E.G.B.	52'9% (54/102)	20'6% (21/102)	26'5% (27/102)
2º B.U.P.	55'7% (73/131)	26'7% (35/131)	17'6% (23/131)
C.O.U.-L	66'7% (68/102)	26'5% (27/102)	6'9 (7/102)
C.O.U.-C	29'1% (32/110)	13'6% (15/110)	57'3% (63/110)
3º E.M.	34'1% (15/44)	29'5% (13/44)	36'4% (16/44)
5º F.M.	9'4% (3/32)	21'9% (7/32)	68'8% (22/32)

Tabla 42. Alumnos que han utilizado en 0, 1, 2, 3, 4 y 5 veces un procedimiento correcto en la resolución de los ítemes 1.3, 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8.

Podemos completar esta información indicando que ningún alumno de 2º de B.U.P. ni de C.O.U.-L supo utilizar un procedimiento correcto en los cinco problemas, y que todos los alumnos de 5º F.M. han sabido abordar con corrección al menos un problema.

Estos datos ratifican lo que ya hemos comentado anteriormente y ponen de manifiesto que los mejores resultados han correspondido a los alumnos de 5º F.M. y C.O.U.-C, y los peores y en este orden a los de C.O.U.-L, 2º de B.U.P., 8º de E.G.B. y 3º E.M. De hecho, una amplia mayoría de estos últimos alumnos no supo cómo abordar más de dos problemas, de los cinco propuestos.

Estos resultados vienen a confirmar que la formación matemática ha resultado ser fundamental en tanto que ha permitido al alumno abordar los problemas con un porcentaje de éxito razonable, aún cuando éstos planteen a los estudiantes situaciones nuevas a las que nunca antes se habían enfrentado. Sin embargo, el que tampoco la totalidad o práctica totalidad de estos alumnos haya sabido proceder con éxito en todos los problemas, pone de manifiesto que para una correcta resolución de este tipo de tareas es imprescindible proporcionar instrucción específica a los alumnos.

Los resultados obtenidos por los alumnos de 8º de E.G.B. son débiles, sin embargo son peores los obtenidos por los de C.O.U.-L y 2º de B.U.P. Pensamos que ello viene a confirmar que la formación matemática que reciben estos alumnos y que todavía no han interiorizado funciona como un gran distorsionador, llevándoles a situaciones de indefensión al provocar sin intención de hacerlo, el olvido o abandono de los procedimientos que ya conocían al presentarles otros nuevos pero que todavía no han dispuesto del tiempo necesario para consolidar. Circunstancia ésta que pensamos nos debería hacer reflexionar sobre cómo se procede a la enseñanza de la matemática en secundaria.

¿EXISTE RELACIÓN ENTRE LAS CONCEPCIONES DEL ÁREA MANIFESTADAS POR LOS ALUMNOS Y EL TIPO DE PROCEDIMIENTO UTILIZADOS POR ELLOS EN LA RESOLUCIÓN DE LOS DISTINTOS PROBLEMAS?

Como resultado de los dos análisis loglineal efectuados para estudiar posibles dependencias entre tres variables, concretamente en el primero entre: curso, tipo de concepción y tipo de procedimiento (ver apartado 3.4.1) y en el segundo entre: curso, tipo de procedimiento y tipo de unidad (ver apartado 3.4.2.), se detectaron, entre otras interacciones a dos niveles, interacciones entre el curso y tipo de concepción, y entre el curso y tipo de procedimiento. Ello nos llevó a estudiar aquí la existencia de posibles dependencias entre las variables anteriormente citadas.

Nuestro objetivo se centró en el estudio de la existencia de algún tipo de relación entre la concepción manifestada por el alumno, el curso al que pertenece éste y el tipo de procedimiento utilizado en la resolución de los distintos problemas. Para ello, y para cada tipo de concepción (fórmula, geométrica, numérica con referencia a alguna unidad de medida, numérica sin referencia a la unidad de medida, y errónea) y problema realizamos el test de la χ^2 entre las variables: curso y tipo de procedimientos. Es importante advertir la precaución con la que se deben interpretar los p-valores resultantes de este contraste de hipótesis por no verificarse las condiciones idóneas para considerarlos fiables, como ya comentamos en el apartado 3.4.4., en tanto que en la mayoría de las tablas de doble entrada existen muchas celdas con un número inferior a 5 casos, y concretamente algunas con cero casos. A diferencia de lo que viene siendo una norma habitual a lo largo del análisis de los resultados, en esta ocasión no hemos incluido las tablas de contigencia en el Anexo 4, por la complejidad y la extensión que poseen como consecuencia del número tan elevado de variables consideradas en el estudio.

Considerando todas la advertencias anteriores, podemos decir que los resultados de estos tests nos advierten de la existencia de una dependencia estadística entre los cursos y el tipo de procedimiento utilizado en cada problema, en las concepciones geométrica y errónea. Por lo que respecta a las otras concepciones, se ha detectado una dependencia de este tipo en la concepción numérica que se refiere a una unidad de medida en los problemas 1.5 y 1.7, y en la numérica que no hace referencia a ninguna unidad en los problemas 1.3, 1.8. Finalmente, no existe ninguna dependencia entre los alumnos de los distintos cursos, que han manifestado una concepción fórmula, y el tipo de procedimientos por ellos utilizados en la resolución de problemas. En esta ocasión la distribución de los casos en las celdas de las distintas tablas de contingencia no nos ha ayudado a extraer conclusiones claras, ni de carácter general sobre los comportamientos de los alumnos.

Completamos esta información con algunas conclusiones que hemos extraído del análisis de las tablas de contingencia:

- La concepción fórmula mostrada por algunos alumnos de 8° de E.G.B., 2° de B.U.P., C.O.U.-L y C.O.U.-C resulta ser la más débil de entre las correctas en cuanto que la práctica totalidad de estos alumnos ha resuelto de forma incorrecta los problemas 1.3, 1.5, 1.6 y 1.7 (sólo una mayoría de los de 8º de E.G.B. resolvió correctamente el 1.3 utilizando el procedimiento basado en el conteo de cuadrados).

- Muy pocos de los alumnos que manifestaron una concepción numérica del área haciendo referencia a la unidad de medida, afrontaron la resolución de los problemas 1.3, 1.5 y 1.7 utilizando un procedimiento basado en el conteo de unidades cuadradas.

- En general los alumnos de los distintos cursos, que se refirieron al área como un número sin especificar nada más, obtuvieron un porcentaje de éxito en la resolución de estos problemas inferior al obtenido por aquéllos que sí se referían a la unidad de medida empleada. Por lo tanto, pensamos que esta última concepción pone de manifiesto una mayor comprensión del concepto del área.

- La concepción geométrica del área fue la mayoritariamente manifestada por los alumnos de los diferentes niveles educativos. Sin embargo, no se ha observado que estos alumnos hayan utilizado de forma mayoritaria un determinado procedimiento. Los porcentajes de éxito de estos alumnos en los distintos problemas son inferiores a los logrado por aquéllos que manifestaron una concepción numérica.

- Los alumnos de C.O.U.-C y 5º F.M. que manifestaron una concepción errónea, en general y de forma mayoritaria han utilizado un procedimiento correcto para resolver los diferentes problemas, lo que nos lleva a pensar que la concepción errónea de estos alumnos es más consecuencia de una forma de expresión poca afortunada que de una confusión conceptual, o bien que su potencial numérico solventa su confusión conceptual. Por el contrario, en 8º de E.G.B. la mayoría de los alumnos que habían mostrado una concepción errónea resuelven de forma incorrecta todos los problemas desde el 1.3 al 1.8, ambos inclusive. Ello viene a confirmar lo que ya detectamos durante las entrevistas, y es que a diferencia de lo que sucede con los estudiantes de los cursos superiores, la concepción errónea manifestada por estos alumnos está ocasionada por un desconocimiento o incomprensión del concepto de área.

- Los problemas correspondientes a los ítemes 1.4 y 1.8 han sido abordados correctamente por la totalidad o práctica totalidad de los alumnos de los distintos cursos que han manifestado una concepción errónea del área de una superficie plana, a excepción de los de 8º de E.G.B. Ello viene a confirmar que este tipo de problemas, que son precisamente los que habitualmente se plantean en la enseñanza del área, no requieren para su resolución de una concepción correcta del área y en consecuencia en ningún caso pueden medir la comprensión del alumno sobre este concepto.

Conclusiones más relevantes sobre el estudio de los procedimientos utilizados en la resolución de problemas

- El procedimiento basado en el conteo de unidades cuadradas que recubren la superficie ha sido utilizado de forma significativa por los alumnos de 8º de E.G.B. y por algunos de 3º E.M., pero no por los estudiantes de los otros cursos lo que nos hace pensar que el hecho de que la superficie se presente sobre papel cuadriculado sólo sugiere el conteo de unidades cuadradas a aquellos que ya están familiarizados con este procedimiento.

- Los alumnos no están familiarizados con los procedimientos geométricos. Una minoría de los estudiantes en cada curso ha mostrado saber relacionar el área de dos superficies mediante una descomposición adecuada de ellas en partes para su posterior comparación. El procedimiento geométrico de descomposición de una superficie en piezas para su posterior reconfiguración por complementariedad de formas ha sido utilizada por muy pocos alumnos en cada curso.

- El hecho de que un problema se presente en un contexto geométrico origina una actitud negativa en los alumnos hacia él, provocando un mayor número de abandonos que en uno esté planteado en un contexto numérico.

- Los alumnos de todos los cursos se inclinan claramente por el uso exclusivo de procedimientos numéricos aún cuando el uso de uno geométrico les simplificaría el cálculo del área de la superficie plana. Sólo en los alumnos de 8º de E.G.B. se ha detectado una tendencia a aplicar directamente una fórmula para el cálculo del área de la superficie en cuestión.

- Que la superficie de la que se desea calcular el área sea poligonal o no lo sea creemos que no añade un grado de dificultad significativo a los alumnos, sino que es más la circunstancia de que exista o no una fórmula que permita determinar el área la que ocasiona mayor trastorno a los alumnos. Prueba de ello ha sido el porcentaje de éxito tan bajo que han obtenido los alumnos de los distintos cursos en el problema correspondiente al ítem 1.5, en el que se debía calcular el área de un cuadrilátero, por debajo del alcanzado por estos mismos alumnos en el correspondiente al ítem 1.7, donde se debía calcular el área de una superficie no poligonal.

- Las concepciones sobre el concepto "integral definida" de los alumnos que no poseen una buena formación -en cuanto a comprensión del significado de los conceptos principales "derivada de una función" e "integral" se refiere- en cálculo diferencial, actúan como obstáculos en el momento de calcular áreas de superficies que les recuerda su aplicación, impidiéndoles buscar métodos alternativos, que les conduzcan correctamente al valor del área.

- Existe una clara preferencia en los alumnos de trabajar con triángulos rectángulos en lugar de con otro tipo de triángulos, aún cuándo ello suponga un proceso más largo.

- Los mejores resultados han correspondido a los alumnos de los cursos en el orden en el que a continuación se indican: 5º F.M., C.O.U.-C, 3º E.M., 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L.

- Los dos problemas que han resultado más sencillos para los alumnos de los distintos cursos han sido el 1.4 y 1.8, que responden a los problemas tipo de los que se plantean en la enseñanza habitual del área en E.G.B.

- Los problemas que en general han supuesto mayor dificultad para los alumnos de los distintos cursos han sido el 1.3, 1.5 y 1.6. Los dos primeros por las característica descritas en su estudio individual, y el segundo porque requiere para su resolución de un procedimiento geométrico no abordado en la enseñanza habitual y por lo tanto, con el que no están familiarizados los alumnos.

- No se ha observado una clara relación entre ninguna de las concepciones manifestadas por los alumnos y los procedimientos que ellos utilizan en la resolución de los problemas.

- La concepción fórmula que poseen algunos alumnos aparece como la más débil de entre las concepciones correctas manifestadas, en tanto que la práctica totalidad de estos alumnos resuelve de forma incorrecta los problemas.

- Los alumnos que han manifestado una concepción numérica han obtenido mayor porcentajes de éxito en la resolución de los distintos problemas que incluso los que poseen la geométrica que fue la mayoritaria. Lo que tal vez viene a indicar que el alumno que se refiere al área como una medida tiene, en general, una mayor formación que el que manifiesta la geométrica. Sí parece estar claro que este resultado nos permite concluir que la mayoría de los alumnos sabe lo que es el área, pero no sabe cómo calcularla

- Los problemas planteados en un contexto numérico y que requieren para su resolución únicamente de la aplicación de una fórmula, como por ejemplo el 1.4 y 1.8, no miden en ningún caso la comprensión que el alumno posee del concepto de área. De hecho son resueltos correctamente por alumnos que desconocen o poseen alguna confusión del concepto de área.

3.4.12. CONSERVACIÓN Y/O VARIACIÓN DEL ÁREA Y/O PERÍMETRO DE UNA SUPERFICIE CUANDO ÉSTA ES SOMETIDA A DETERMINADAS TRANSFORMACIONES

Observar el comportamiento de los alumnos relativo a la conservación o no del área y del perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a una determinada transformación en un contexto geométrico, constituye el último estudio que se ha realizado durante la etapa diagnóstica. El objetivo ha sido determinar el tipo de relación que los estudiantes establecen entre estas dos propiedades de una superficie y valorar sus consecuencias. Con ello se completa el estudio relativo a la conservación del área (apartado 3.4.3.) y relación entre área y perímetro (apartado 3.4.4.), ya comentados anteriormente en esta misma sección (3.4.).

Recordamos que en el diseño del test se optó por considerar los tres tipos de transformaciones de una superficie siguientes, planteadas en ítemes diferentes:

- Recorte y pegado. Transformación que conserva el área pero no el perímetro, planteada en los ítemes 2.3 (en un contexto geométrico) y 2.4 (en un contexto numérico).

- Deslizamiento de un vértice sobre una línea paralela a la base. Transformación que conserva el área pero no el perímetro, planteada en el ítem 2.22 (en un contexto geométrico).

- Abatimiento de un lado. Transformación que conserva el perímetro pero no el área, planteada en el ítem 2.23 (en un contexto geométrico).

Como los resultados correspondientes a transformaciones de recorte y pegado ya se mostraron en el apartado 3.4.3., a continuación se exponen sólo los relativos al estudio del comportamiento manifestado por los alumnos en los ítemes 2.22 y 2.23, correspondientes a transformaciones de los dos últimos tipos.

Dado que los alumnos han utilizado el mismo tipo de procedimientos para comparar el área y el perímetro de la superficies en cuestión en las dos transformaciones planteadas, y con objeto de presentar los resultados de la forma más clara y ágil posible, hemos decidido realizar el estudio simultáneamente, analizando en primer lugar los resultados procedentes del estudio del área, después los del perímetro y por último los relativos al estudio comparativo efectuado entre el área y el perímetro.

Estudio del área

A continuación relacionamos los distintos modos en los que los alumnos han procedido para comparar las áreas de los dos triángulos y los dos paralelogramos, que hemos agrupado según sus características.

A) Comparan las bases y alturas de los respectivos polígonos.

   En esta ocasión se han detectado algunas respuestas en las que los alumnos identifican de forma incorrecta la altura de uno o de los dos triángulos y/o paralelogramos, lo que les conducen a conclusiones erróneas, aunque el razonamiento sea válido.

B) Se dejan guiar por su percepción visual.

   Sin embargo, no todos los alumnos han llegado a la misma conclusión y se han manifestado en los mismos términos. Unos justifican su respuesta mediante afirmaciones del tipo: "lo intuyo", "me parece", "me da la impresión", etc... Otros afirman que la transformación efectuada sobre el triángulo sólo ha deformado la figura, y en consecuencia sólo cambia su forma y no su área, y que la efectuada sobre el paralelogramo sólo ocasiona un cambio de posición de éste y en consecuencia también su área permanece constante. Por último, en el caso del triángulo, algunos alumnos consideran que el área disminuye ya que el triángulo al estirarse se hace más pequeño.

C) Extienden la variación sufrida por el perímetro al área. Ello se recoge en las implicaciones siguientes: "un mayor perímetro lleva consigo una mayor área", en el caso del triángulo e "igual perímetro lleva consigo igual área" en el caso del paralelogramo.

Los alumnos emiten en primer lugar un juicio sobre el perímetro de las dos superficies, para luego extender la conservación o variación sufrida por el perímetro al área.

D) Estiman el área mediante un procedimiento geométrico, consistente en comparar los "trozos" en los que los alumnos descomponen los dos triángulos o los dos paralelogramos.

Finalmente algunos alumnos:

E) Afirman no poder emitir un juicio sobre las áreas de las dos superficies -bien sea en el caso del triángulo o paralelogramo- por no disponer de los datos necesarios para ello.

F) Utilizan otros procedimientos incorrectos difíciles de catalogar.

A continuación se muestran los porcentajes correspondientes a los alumnos de cada curso que utilizaron cada uno de los procedimientos anteriores. Los porcentajes están referidos al total de alumnos que respondieron el ítem 2.22 y el 2.23.

	A (comparan las bases y alturas)		B (utilizan la percepción visual)		C (extienden la variación del perímetro al área)		D (comparan los "trozos" en los que descomponen las superficies)		E (afirman no disponer de los datos necesarios)		F (utilizan procedimientos incorrectos)	
	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.
8° E.G.B.	23'5%	7'2%	20'1%	49'4%	2'4%	9'6%	1'2%	0'0%	15'3%	4'8%	37'6%	28'9%
2° B.U.P.	35'1%	13'3%	22'1%	61'4%	2'6%	8'4%	0'0%	1'2%	10'4%	2'4%	29'9%	13'3%
C.O.U.-L	26'8%	9'7%	32'8%	64'6%	3'0%	4'8%	0'0%	3'2%	13'4%	0'0%	23'9%	17'7%
C.O.U.-C	82'6%	52'0%	7'0%	29'3%	0'0%	6'7%	0'0%	8'0%	5'8%	1'3%	4'7%	2'7%
3° E.M.	69'4%	30'3%	13'9%	45'5%	0'0%	3'0%	0'0%	12'1%	13'9%	6'1%	2'8%	3'0%
5° F.M.	70'8%	32'2%	0'0%	21'4%	0'0%	14'3%	0'0%	10'7%	25'0%	17'9%	4'2%	3'6%

Tabla 43. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos para comparar el área en el ítem 2.22 y 2.23.

Completamos esta información con los datos correspondientes al número de alumnos que dejó en blanco la comparación de las áreas en estos ítemes, y de los que se constata que este estudio fue realizado por la práctica totalidad de los alumnos de cada curso, no existiendo apenas diferencia entre la actitud mostrada por los estudiantes en el caso del triángulo y paralelogramo.

	triángulo	paralelogramo
8º E.G.B.	9'8% (10/102)	8'8% (9/102)
2º B.U.P.	6'9% (9/131)	5'3% (7/131)
C.O.U.-L	11'8% (12/102)	12'7 (13/102)
C.O.U.-C	9'1% (10/110)	10'9% (12/110)
3º E.M.	6'8% (3/44)	9'1% (4/44)
5º F.M.	18'8% (6/32)	9'4% (3/32)

Tabla 44. Alumnos que dejan en blanco la comparación de áreas en el ítem 2.22 y 2.23.

Sólo son los alumnos de los cursos de C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M. los que de forma mayoritaria han procedido de forma correcta para comparar las áreas de los dos triángulos. Sin embargo, en el caso del paralelogramo, el único curso en el que una mayoría -muy próxima al 50%- de los alumnos lo ha resuelto de forma correcta ha sido C.O.U.-C.

Una mayoría significativa de los alumnos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L han emitido en las dos tareas una respuesta avalada por procedimientos incorrectos, o razonamientos inconsistentes. Comportamiento éste que también se ha producido en el 70% de los alumnos de 3º E.M. y en el 68% de los de 5º F.M., al comparar el área de los dos paralelogramos. Lo que de algún modo advierte de la dificultad que representa este tipo de tareas para los alumnos, independientemente del curso al que pertenezcan, manifestándose la transformación aplicada al paralelogramo más complicada para los alumnos que la aplicada al triángulo.

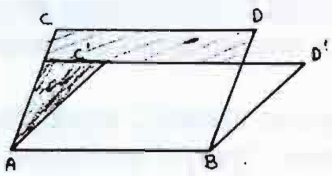
Estas tareas han permitido corroborar el hecho ya observado en otros momentos de esta investigación, de la existencia de un elevado número de alumnos que emiten juicios a partir de lo que su percepción visual les sugiere. Los datos reflejan que son los alumnos más débiles, en cuanto a formación matemática se refiere, los que se dejan guiar en mayor medida por sus sentidos, aunque también han mostrado que, al margen de la formación que posea el alumno, existe una fuerte tendencia que les lleva a dejarse guiar por la vista cuando al parecer no disponen de procedimientos alternativos, como ha sucedido en la tarea de comparación del área de los dos paralelogramos, donde un elevado porcentaje de alumnos de 5º F.M. han procedido también de este modo.

Mientras que en el caso de los triángulos han sido muy pocos los alumnos -correspondiendo éstos a los cursos inferiores- que han extendido la modificación o conservación experimentada por el perímetro al área, en el caso de los paralelogramos este comportamiento se ha detectado en un mayor número de alumnos y en todos los cursos. Es de destacar el hecho de que el mayor porcentaje de alumnos que ha procedido de este modo corresponda a los de 5º F.M. Pensamos que este modo de proceder es consecuencia de la creencia de los alumnos en la existencia de una relación (falsa relación) entre el área y el perímetro, que permanece oculta y "al acecho" en la mente de los estudiantes, surgiendo en el momento en el que estos dos conceptos y propiedades de la superficie se ven implicados, y cuando los alumnos no encuentran razonamientos alternativos.

Por otra parte, se observa cómo algunos alumnos, especialmente de los cursos superiores, han intentado con la comparación de los "trozos" en los que habían descompuesto cada uno de los dos paralelogramos buscar un procedimiento que les permitiera opinar acerca de sus áreas. La circunstancia de que los alumnos hayan acudido a este modo de proceder sólo en este caso y no cuando debían comparar el área de los dos triángulos podría estar motivado tanto porque están más familiarizados con el triángulo y con la transformación a la que éste es sometido que con el paralelogramo y su transformación. A continuación mostramos una respuesta del tipo aquí descrito.

Alumno 5º F.M.-20

23. El paralelogramo de la figura ABCD se ha transformado en un nuevo paralelogramo ABC'D'. Compara sus áreas y sus perímetros.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

a)

23.1 El paralelogramo ABCD tiene mayor área que el ABC'D'...X...

23.2 El paralelogramo ABCD tiene menor área que el ABC'D'..

23.3 Los dos paralelogramos tienen igual área ....

23.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro..

Da una razón para tu respuesta ..ABCD tiene la parte señalada con .... mas de área que ABC'D'
....

b)

- El paralelogramo ABCD tiene mayor perímetro que el ABC'D'...X...
- El paralelogramo ABCD tiene menor perímetro que el ABC'D'..
- Los dos paralelogramos tienen igual perímetro ......
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro ....

Da una razón para tu respuesta ....

....

Porque tiene la misma base y mayor altura.

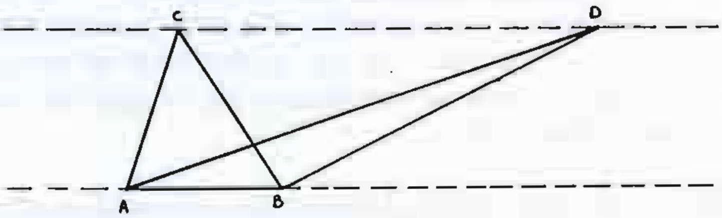
Las cifras correspondientes al porcentaje de alumnos que afirmaron no disponer de la información necesaria para poder emitir una opinión acerca del área ponen de manifiesto la existencia de un elevado número de estudiantes que se han encontrado desorientados ante la tarea planteada, especialmente los alumnos de 5° F.M. Creemos que el desconcierto ocasionado ha estado motivado por el hecho de estar planteada en un contexto geométrico.

La indefensión en la que se encuentran demasiados alumnos cuando son extraídos de las situaciones numéricas concretas queda perfectamente reflejada en las respuestas que a continuación se muestran, correspondientes a algunos alumnos de 5° F.M. Creemos que ello está ligado con el desconocimiento o incomprensión que estos alumnos poseen en concreto sobre el área del triángulo y paralelogramo, ya que la resolución de estas tareas requieren que el estudiante sea conocedor y además comprenda que el área de un triángulo y un paralelogramo depende de su base y altura.

En uno de los ejemplos siguientes hemos considerado conveniente mostrar la respuesta dada por el alumno tanto en lo que respecta al área como al perímetro con objeto de conocer su comportamiento en el conjunto del ítem.

Alumno 5º F.M.-14

22. El triángulo ABC se ha transformado en el nuevo triángulo ABD. Compara las áreas y los perímetros de estos dos triángulos.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

a)

22.1 El área de ABC es mayor que la de ABD ....

22.2 El área de ABC es menor que la de ABD ....

22.3 Los dos triángulos tienen igual área ....

22.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro X

Razona la respuesta ... Tendría que medir para ~~[illegible]~~ hallar la relación entre ambos triángulos. (necesito datos para ello).

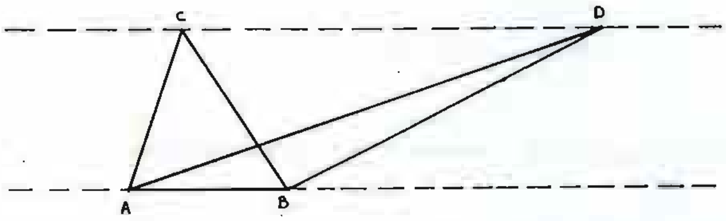
b)

- El perímetro de ABC es mayor que el de ABD ....
- El perímetro de ABC es menor que el de ABD ....
- Los dos triángulos tienen igual perímetro ....
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro X

Razona la respuesta ... lo mismo que en el área, tengo que operar o medir

Alumno 5º F.M.-17 (ítem 2.22)

22. El triángulo ABC se ha transformado en el nuevo triángulo ABD. Compara las áreas y los perímetros de estos dos triángulos.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

a)

22.1 El área de ABC es mayor que la de ABD ....

22.2 El área de ABC es menor que la de ABD ....

22.3 Los dos triángulos tienen igual área ....

22.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro. X

Razona la respuesta . No tengo poder analítico para poder opinar, necesito valores, necesito tierra donde pisar.

" Mucho años con estas preciosas matemáticas me han enseñado que la intuición engaña más de una vez."

b)

- El perímetro de ABC es mayor que el de ABD ....
- El perímetro de ABC es menor que el de ABD ....
- Los dos triángulos tienen igual perímetro ....
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro X

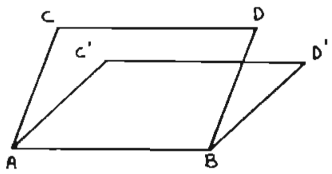
Razona la respuesta ....

.... Razonamiento análogo ....

....

Alumno 5º F.M.-17 (ítem 2.23)

23. El paralelogramo de la figura ABCD se ha transformado en un nuevo paralelogramo ABC'D'. Compara sus áreas y sus perímetros.



. Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

a)

23.1 El paralelogramo ABCD tiene mayor área que el ABC'D' ....

23.2 El paralelogramo ABCD tiene menor área que el ABC'D' ....

23.3 Los dos paralelogramos tienen igual área ....

23.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...X........

Da una razón para tu respuesta ..No tengo poder analítico, aunque mi intuición? me dice que el área es la misma.

b)

- El paralelogramo ABCD tiene mayor perímetro que el ABC'D' ....
- El paralelogramo ABCD tiene menor perímetro que el ABC'D' ....
- Los dos paralelogramos tienen igual perímetro ......
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro ....X........

Da una razón para tu respuesta ...No tengo poder analítico, aunque la intuición? me dice que tienen igual perímetro.

Con objeto de comprobar cuántos de los alumnos que habían dado la respuesta correcta lo habían hecho a partir de un razonamiento correcto, se procedió al estudio del tipo de razonamiento argüido por los alumnos que señalaron que los dos triángulos tenían igual área y que el paralelogramo transformado poseía menor área que el original. Los resultados de este estudio se recogen en la siguiente tabla.

	A (comparan las bases y alturas)		B (utilizan la percepción visual)		C (extienden la variación del perímetro al área)		D (comparan los "trozos" en los que descomponen las superficies)		F (utilizan procedimientos incorrectos)	
	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogram
8° E.G.B.	35'7%	71'4%	16'7%	28'6%	0'0%	0'0%	0'0%	0'0%	47'6%	0'0%
2° B.U.P.	42'6%	73'3%	25'5%	6'7%	0'0%	6'7%	0'0%	0'0%	31'9%	13'3%
C.O.U.-L	27'5%	33'3%	42'5%	13'3%	0'0%	0'0%	0'0%	6'7%	30'0%	46'7%
C.O.U.-C	88'3%	88'1%	6'5%	0'0%	0'0%	0'0%	0'0%	11'9%	5'2%	0'0%
3° E.M.	88'0%	77'8%	12'0%	0'0%	0'0%	0'0%	0'0%	22'2%	0'0%	0'0%
5° F.M.	93'8%	66'7%	0'0%	0'0%	0'0%	8'3%	0'0%	25'0%	6'3%	0'0%

Tabla 45. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos que dan la respuesta correcta en el ítem 2.22 y 2.23, al respecto del área.

Estas cifras muestran la existencia de un elevado número de alumnos, especialmente en los cursos de nivel inferior, que escogen la respuesta correcta, justificándola a partir de razonamientos incorrectos o inconsistentes, lo que viene a invalidar su elección. Ello confirma de nuevo la necesidad e importancia de conocer el procedimiento empleado por el alumno para poder analizar con corrección sus respuestas.

Al comparar el porcentaje de alumnos que han argumentado apropiadamente la respuesta correcta acerca del área en estas dos tareas, observamos que si bien el porcentaje de alumnos que indicaron que los triángulos tenían igual área fue en general superior al de los estudiantes que afirmaron que el paralelogramo transformado poseía menor área, ha sido en este último caso donde la elección ha sido mayoritariamente respaldada (en todos los cursos a excepción de C.O.U.-L) por un argumento correcto. Creemos que ello es consecuencia de las características de estas dos transformaciones, resultando ser la del triángulo más sencilla que la del paralelogramo, en tanto que el uso de procedimientos no adecuados como por ejemplo la percepción visual permiten llegar a la solución correcta, por ser más claras y evidentes las modificaciones experimentadas por las dimensiones del triángulo. Por el contrario, hemos podido comprobar que un elevado número de alumnos no llegan a reconocer la transformación sufrida por el paralelogramo.

En la línea de lo que acabamos de comentar los datos correspondientes a los alumnos que emiten un juicio guiados por su percepción visual nos indican que este procedimiento conduce a algunos alumnos a la respuesta correcta, registrándose, en general, mayores porcentajes en el caso del triángulo. Ello significa que la tarea del triángulo es más sencilla de resolver "visualmente" que la del paralelogramo, donde la apreciación visual del alumno le encamina en un mayor número de ocasiones a error. En el caso del paralelogramo se observa que ningún alumno de C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M. que ha dado la respuesta correcta se ha dejado guiar por su percepción. Por el contrario, los estudiantes de estos cursos que al parecer no supieron centrar su razonamiento sobre la base y altura de los paralelogramos optaron por un procedimiento geométrico que adecuadamente utilizado les ha conducido a la conclusión correcta.

Todo esto nos permite concluir que la transformación planteada en el paralelogramo resulta más selectiva que la del triángulo en cuanto que la mayoría de los alumnos que han dado correctamente la respuesta del área lo han hecho a partir de razonamientos correctos, a diferencia de lo ocurrido con la transformación planteada en el triángulo donde muchos alumnos han llegado a la solución correcta a través de razonamientos erróneos o inconsistentes.

Estudio del perímetro

Los procedimientos utilizados por los alumnos para comparar los perímetros de estos polígonos se exponen a continuación agrupados según sus características, y que como podrá comprobarse resultan ser similares a los empleados en el estudio del área.

A) Comparan las longitudes de los lados de los triángulos, o paralelogramos.

B) Se dejan guiar por su percepción visual.

Al igual que en el caso del área no todos estos alumnos han llegado a la misma conclusión y se han manifestado en los mismos términos. Mientras que unos justifican su respuesta, sólo, mediante afirmaciones del tipo: "lo intuyo", "me parece", "me da la impresión", etc..., otros afirman en el caso del triángulo, que un triángulo es la proyección del otro y por tanto poseen el mismo perímetro, y en el caso del paralelogramo, que sólo se ha abatido, sólo se ha desplazado o sólo ha cambiado de posición y por lo tanto sus perímetros son iguales.

C) Extienden la variación sufrida por el área al perímetro. Registrándose dos implicaciones distintas que pueden resumirse de la siguiente forma: "igual área lleva consigo un perímetro igual" en el caso del triángulo, o "mayor/menor área lleva consigo un mayor/menor perímetro" en el caso del paralelogramo.

Finalmente algunos alumnos:

D) Afirman no poder responder a esta pregunta por desconocer el significado del concepto "perímetro".

E) Manifiestan no poder emitir un juicio sobre el perímetro de estas superficies poligonales por no disponer de los datos necesarios para ello.

F) Utilizan otros procedimientos incorrectos difíciles de catalogar.

La siguiente tabla muestra los porcentajes correspondientes a los alumnos que utilizaron cada uno de los procedimientos relacionados anteriormente. Los porcentajes, al igual que en el caso del área, están referidos al total de alumnos que resolvieron cada una de estas dos tareas.

	A (comparan las longitudes de los lados)		B (utilizan la percepción visual)		C (extienden la variación del área al perímetro)		D (afirman no conocer el significado del perímetro)		E (afirman no disponer de los datos necesarios)		F (utilizan procedimientos incorrectos)	
	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.
8° E.G.B.	56'8%	23'6%	14'9%	37'5%	2'7%	0'0%	0'0%	0'0%	6'8%	5'6%	18'9%	33'3%
2° B.U.P.	65'9%	35'4%	12'9%	35'4%	4'7%	5'1%	0'0%	0'0%	3'5%	1'3%	12'9%	22'8%
C.O.U.-L	73'8%	20'4%	16'4%	53'7%	1'6%	14'8%	0'0%	0'0%	1'6%	1'9%	6'5%	9'3%
C.O.U.-C	80'5%	45'2%	15'8%	30'2%	0'0%	0'0%	1'2%	1'4%	1'2%	1'4%	1'2%	21'9%
3° E.M.	80'0%	39'4%	5'7%	27'3%	5'7%	6'1%	0'0%	0'0%	5'7%	6'1%	2'9%	21'2%
5° F.M.	82'8%	32'1%	0'0%	25'0%	0'0%	0'0%	0'0%	0'0%	10'3%	21'4%	6'9%	21'4%

Tabla 46. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos para comparar el perímetro en el ítem 2.22 y 2.23.

La tabla siguiente (Tabla 47) muestra el número de alumnos que dejó en blanco este estudio en cada uno de estos ítemes. En ella se observa que una amplia mayoría de los alumnos de cada curso realizó el estudio del perímetro. Al comparar los datos de esta tabla con los de la Tabla 44, se comprueba que en general se registra un número igual o mayor de alumnos que dejan en blanco la comparación de los perímetros, que los que lo hicieron en la comparación del área. A diferencia de lo que resulta ser la tónica general, se observa que la comparación del perímetro de los dos triángulos ha resultado ser, en un principio, más asequible a los alumnos de 5° F.M. que la comparación del área.

	triángulo	paralelogramo
8° E.G.B.	17'6% (18/102)	16'7% (17/102)
2° B.U.P.	6'1% (8/131)	7'6% (10/131)
C.O.U.-L	15'7% (16/102)	15'7% (16/102)
C.O.U.-C	9'1% (10/110)	14'5% (16/110)
3° E.M.	6'8% (3/44)	9'1% (4/44)
5° F.M.	6'3% (2/32)	9'4% (3/32)

Tabla 47. Alumnos que dejan en blanco la comparación de perímetros en el ítem 2.22 y 2.23.

Al comparar las tablas 43 y 46 se observa que el modo de comportarse de los alumnos para emitir una opinión acerca de los perímetros ha sido en general muy similar al manifestado por éstos en el estudio del área. Si bien se detecta en el estudio del perímetro una disminución de los porcentajes correspondientes a los alumnos que han empleado procedimientos incorrectos o inconsistentes y un aumento en el uso de los correctos.

Nos sorprende, dada la sencillez que creemos caracteriza el estudio de los perímetros, el que aproximadamente el 43% de los alumnos de 8° de E.G.B., el 34% de los de 2° de B.U.P., el 26% de los de C.O.U.-L, y el 20% de los alumnos correspondientes a los cursos de mayor nivel, no hayan sido capaces de realizarlo correctamente en el caso del triángulo y sólo una minoría en el caso del paralelogramo.

El número de alumnos que se dejan guiar por su percepción visual para comparar los perímetros, en general, disminuye sensiblemente en todos los cursos si lo comparamos con el número que así actuó para comparar las áreas.

Del mismo modo se detecta también una disminución, respecto del caso del área, del número de alumnos que en cada curso afirmó no poder dar ninguna respuesta acerca de los perímetros por no disponer de la información suficiente para ello, pero sólo en la transformación del triángulo, ya que en la del paralelogramo fueron prácticamente los mismos alumnos los que actuaron del mismo modo tanto en el estudio del área como en el del perímetro.

Se detecta un número muy bajo de alumnos que argumentan su respuesta refiriéndose a la falsa relación que ellos mismos establecen entre el área y el perímetro. En esta ocasión y a diferencia de lo ocurrido en el estudio del área, ningún alumno de C.O.U.-C y 5° F.M. ha dado una justificación de estas características. Los datos indican que el comportamiento de los estudiantes de 2° de B.U.P. y 3° E.M. ha sido bastante similar en los dos casos, triángulo y paralelogramo, no ocurriendo lo mismo en los de 8° de E.G.B. y C.O.U.-L.

Es interesante disponer del dato de que sólo un alumno de C.O.U.-C ha manifestado no recordar el significado de "perímetro", ya que nos permite suponer que en general la mayoría de los razonamientos erróneos emitidos por los alumnos de los distintos cursos no han sido originados por el desconocimiento de este concepto.

A continuación se muestran los razonamientos empleados por los alumnos que dieron la respuesta correcta acerca de los perímetros de los triángulos y paralelogramos.

	A (comparan las longitudes de los lados)		B (utilizan la percepción visual)		C (extienden la variación del área al perímetro)		F (utilizan procedimientos incorrectos)	
	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogramo	triángulo	paralelogramo
8° E.G.B.	80'4%	27'6%	15'6%	41'4%	0'0%	0'0%	0'0%	31'0%
2° B.U.P.	75'0%	43'1%	12'5%	41'6%	0'0%	4'6%	12'5%	10'7%
C.O.U.-L	80'0%	25'0%	14'5%	65'9%	0'0%	6'8%	5'4%	2'3%
C.O.U.-C	84'4%	58'9%	15'6%	37'5%	0'0%	0'0%	0'0%	3'6%
3° E.M.	86'2%	48'1%	6'9%	33'3%	3'4%	7'4%	3'4%	11'1%
5° F.M.	92'0%	52'9%	0'0%	35'3%	0'0%	0'0%	8'0%	11'8%

Tabla 48. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos que dan la respuesta correcta en el ítem 2.22 y 2.23, al respecto del perímetro.

Las cifras muestran claramente que el estudio del perímetro de los paralelogramos ha resultado mucho más difícil a los alumnos que el de los triángulos: mientras que de los alumnos que habían efectuado la elección correcta del perímetro en cada uno de los casos, una elevada mayoría de ellos, en el caso del triángulo, la justifica mediante razonamientos correctos, sólo es una minoría la que lo consigue en el caso del paralelogramo.

En el caso de la transformación del triángulo, los porcentajes que se refieren a los alumnos que en el estudio del perímetro dan la respuesta correcta y la argumentan correctamente han sido mucho mayores que los correspondientes a los del área. Esto vendría a confirmar que la tarea de comparar los perímetros de los dos triángulos ha resultado mucho más sencilla a los alumnos que la de la comparación de las áreas. Este hecho no es tan evidente en la transformación del paralelogramo. Sin embargo sí podemos aportar que se han registrado mayor número de respuestas correctas en el problema del perímetro, que en el del área, tanto en la transformación del triángulo como en la del paralelogramo.

Estudio comparativo entre el área y el perímetro

Durante la corrección de estos dos ítemes (2.22 y 2.23) observamos una cierta tendencia en los estudiantes a escoger la misma respuesta para el área y el perímetro, aunque sus argumentaciones fueran de diferente índole y no hicieran referencia expresa a una relación entre la variación experimentada por el área y la experimentada por el perímetro. Es decir, si un alumno afirmaba, por ejemplo, en el caso del paralelogramo, que los dos tenían igual área, también indicaba que tenían igual perímetro. Ello nos llevó a ver si existía algún tipo de relación entre las respuestas dadas por los alumnos en el caso del área y del perímetro, y en consecuencia si los alumnos creen que existe una relación entre el área y el perímetro de una superficie. Para ello realizamos el test de la χ^2 para contrastar si las variables categóricas que representaban la elección realizada (mayor, menor, igual o no se puede) por cada alumno en el área y en el perímetro de los triángulos y paralelogramos eran o no independientes.

El estudio fue realizado en cada curso y se obtuvieron en cada uno de los casos (triángulo y paralelogramo) p-valores todos ellos inferiores al 0'00001, a excepción de 5° F.M. que en el triángulo el p-valor resultante fue 0'04543. Estos resultados confirmaron la existencia de una dependencia estadística entre la elección que realiza un alumno en el área y la que realiza en el perímetro. Sin embargo, es necesario advertir, como en ocasiones anteriores, la precaución con la que se deben interpretar estos p-valores por su escasa fiabilidad, consecuencia del reducido número de casos en las celdas de las tablas de doble entrada.

A pesar de ello y con objeto de estudiar esta dependencia nos pareció interesante proceder al análisis de las tablas de contingencia correspondientes, que se muestran en el Anexo 4. De ellas hemos podido extraer algunas implicaciones importantes, referidas a determinados comportamientos que han resultado ser comunes en los alumnos independientemente del curso al que pertenezcan, y que pasamos a comentar a continuación:

ÍTEM 2.22. DESLIZAMIENTO DEL VÉRTICE DEL TRIÁNGULO SOBRE UNA LÍNEA PARALELA A SU BASE. TRANSFORMACIÓN QUE CONSERVA EL ÁREA Y AUMENTA EL PERÍMETRO.

- La mayoría de los alumnos que dejan en blanco el problema de las áreas también dejan el de los perímetros, y viceversa.

- La mayoría de los alumnos que afirman no poder emitir una opinión acerca del perímetro también lo hacen en el caso del área. La implicación contraria sólo se ha dado en 8° de E.G.B., 3° E.M. y 5° F.M., mientras que en 2° de B.U.P., C.O.U.-L y C.O.U.-C los alumnos que afirmaban no poder opinar sobre las áreas de los dos triángulos mayoritariamente han realizado la comparación correcta de los perímetros.

- La mayoría de los alumnos que de forma incorrecta afirmaron que el triángulo original (A) tenía menor área que el resultante tras la transformación (B), también afirmaron que su perímetro sería menor. Sin embargo, también los alumnos que erróneamente habían considerado que el triángulo (A) tenía mayor área que el (B), mayoritariamente indicaron que el perímetro de (A) era menor que el de (B) (elección correcta). Pensamos pues que no se debería extraer ninguna conclusión al respecto de la existencia de algún tipo de implicación entre el área y el perímetro en el caso de estos alumnos, ya que creemos son alumnos que no han sabido cómo comparar las áreas y sí los perímetros. Tarea ésta última que, como ya se ha visto, ha resultado mucho más sencilla a los alumnos.

- La mayoría de los alumnos que indicaron que los dos triángulos tenían igual área (respuesta correcta), señalaron que el perímetro de (A) era menor que el de (B) (respuesta correcta), y viceversa.

- La mayoría de los alumnos, próxima a la totalidad, que han considerado que los dos triángulos tenían el mismo perímetro, también han afirmado que tenían igual área.

- Los alumnos que erróneamente habían indicado que el triángulo original (A) era de mayor perímetro que el que resulta tras la transformación (B) se han inclinado mayoritariamente por considerar que los dos triángulos eran de igual área. Circunstancia ésta que no hemos sabido cómo justificar.

ÍTEM 2.22. ABATIMIENTO DEL LADO PARALELO A LA BASE DEL PARALELOGRAMO. TRANSFORMACIÓN QUE DISMINUYE EL ÁREA Y CONSERVA EL PERÍMETRO.

- La mayoría de los alumnos que deja en blanco el problema del área también deja el del perímetro, y viceversa.

- La mayoría de los alumnos que afirman no poder emitir una opinión acerca del perímetro por falta de datos, también lo hacen en el caso del área, y viceversa. Sólo los alumnos de 2º de B.U.P. no se comportan de este modo, ya que los que afirmaron no disponer de la información suficiente para opinar sobre el perímetro, mayoritariamente analizan correctamente el área, y los que afirmaron no poder opinar acerca del área, mayoritariamente dan la respuesta correcta sobre el perímetro.

- La mayoría de los alumnos que indicaron que el paralelogramo original (A) tenía menor área que el resultante de la transformación (B) afirmaron también que el perímetro de (A) era menor que el de (B), a excepción de los estudiantes de C.O.U.-C y 3º E.M. Por el contrario, del comportamiento tan disparar mostrado por los alumnos de los distintos cursos, que afirmaron que el perímetro de (A) era menor que el de (B), en el estudio del área, no puede extraerse en este sentido ninguna conclusión.

- En todos los cursos una amplia mayoría de los alumnos que afirmó que los dos paralelogramos poseían igual área, también concluyeron que poseían igual perímetro, y viceversa.

- En los cursos de 8º de E.G.B., 2º de B.U.P. y C.O.U.-L los alumnos que afirmaron que el área del paralelogramo (A) era mayor que la de (B) (respuesta ésta correcta) se reparten prácticamente por igual entre los que dan la respuesta correcta en el caso del perímetro, afirmando que el perímetro se conserva, y los que afirman que el perímetro de (A) será mayor que el de (B). Sin embargo, la mayoría de los alumnos de los cursos restantes, C.O.U.-C, 3º E.M. y 5º F.M. que dan la respuesta correcta sobre el área de los paralelogramos también lo hacen acerca del perímetro de éstos.

Así pues, esta información nos advierte de la existencia, para un elevado número de alumnos en cada uno de los cursos, de un fuerte lazo entre el área y el perímetro, que les lleva a extender de forma indistinta, la modificación o no sufrida por el área al perímetro y viceversa. Pensamos que este comportamiento vendrá marcado por la dificultad que posean en determinar bien el área o bien el perímetro.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie que es sometida a determinadas transformaciones

- El estudio de la transformación del paralelogramo, consistente en el abatimiento del lado paralelo a la base, ha supuesto una gran dificultad a los alumnos de todos los cursos, mayor que el estudio de la transformación del triángulo, consistente en el deslizamiento de un vértice sobre una línea paralela a la base.

- El contexto geométrico en el que estaban enmarcadas estas dos transformaciones ha causado un importante trastorno a los alumnos de los distintos cursos, pero especialmente a los de 5° F.M, que en elevado número y en cada caso han manifestado no poder dar una respuesta por falta de datos. Ello viene a confirmar la necesidad de proporcionar a los estudiantes de una buena y específica enseñanza del concepto de área ya que, como hemos visto, la formación matemática en general, aunque sea elevada, no ha solventado el vacío conceptual que poseen los alumnos sobre el área de superficies planas, concretamente sobre la comprensión de las fórmulas para el cálculo del área del triángulo y paralelogramo.

- En el caso del estudio del área de los triángulos, los porcentajes correspondientes a los alumnos que escogieron la respuesta correcta varía entre el 42'15% de los de 8° de E.G.B. y el 78'18% de los de C.O.U.-C. Estas respuestas fueron argumentadas apropiadamente por sólo una mayoría de alumnos de los cursos de C.O.U.-C, 3° E.M. y 5° F.M. En el caso del paralelogramo más del 50% de los alumnos de cada curso emitió una opinión incorrecta acerca del área, verificándose que de los alumnos de los distintos cursos que dieron la respuesta correcta, únicamente fueron los de C.O.U.-C los que de forma mayoritaria avalan su respuesta adecuadamente.

- El estudio del perímetro en las dos transformaciones ha resultado ser mucho más fácil que el estudio del área para los alumnos de los distintos cursos.

- Un elevado número de alumnos en cada curso se ha dejado guiar por su percepción visual en el momento de emitir un juicio tanto en el caso del estudio del área como en el del perímetro en las dos transformaciones. Este uso fue especialmente elevado durante el estudio del área de los paralelogramos.

- La transformación sufrida por el triángulo es visualmente más clara que la del paralelogramo.

- Se observa una cierta relación entre el hecho de que un alumno se deje guiar por una apreciación visual y la dificultad o falta de recursos que éste posee para resolver la tarea planteada.

- Se ha constatado en cada curso y en cada transformación una clara dependencia entre las respuestas dadas por los alumnos en el caso del área y del perímetro. Lo que de nuevo viene a confirmar la existencia para los alumnos de una fuerte relación entre el área y el

perímetro de una superficie, que en el caso del estudio del área y el perímetro de una superficie que es sometida a una determinada transformación se traduce en que los estudiantes extienden la variación o conservación experimentada por una de estas dos propiedades a la otra. Concretamente las implicaciones que de forma mayoritaria hemos detectado en todos los cursos y en las dos transformaciones han sido las siguientes:
- · Si no se puede emitir una opinión acerca del perímetro por falta de los datos necesarios, tampoco se dispone de los datos para opinar sobre el área.
- · Si los polígonos tienen igual perímetro entonces tendrán igual área.

- Los alumnos que en cada curso han dado la respuesta correcta acerca del área de los dos polígonos también lo han hecho en el caso del perímetro. La implicación contraria no se ha dado.

3.5. CONCLUSIONES DE LA ETAPA DIAGNÓSTICA

La exposición detallada que se ha realizado en la sección 3.4. acerca del análisis de los resultados del test proporciona la información acerca de los conocimientos, errores y dificultades más frecuentes que los estudiantes de los distintos cursos han mostrado poseer en los distintos aspectos del área y conceptos relacionados con ésta, así como sobre los procedimientos que suelen emplear los estudiantes de los distintos niveles en la resolución de problemas, consistentes en tareas de comparación y medida de áreas.

El análisis realizado de las respuestas dadas por los alumnos a los distintos ítemes del test, nos ha permitido extraer, además de las conclusiones particulares ya expuestas, otras de carácter más global, que dan respuesta a los objetivos generales planteados en la etapa diagnóstica, mostrados en el apartado 3.2.1., y que exponemos a continuación:

- Todos los alumnos de la muestra manifestaron haber estudiado el concepto de área, sólo, en el último ciclo de E.G.B (cursos de 6°, 7° y 8°). Únicamente un grupo de los dos de 3° de E.M indicaron que habían visto algo sobre el área en el curso anterior.

- La práctica totalidad de los estudiantes comprende el significado del área de una superficie plana, pero carece de formación acerca de cómo calcularla. Esto se refleja en que no hemos podido establecer ninguna conexión clara entre las concepciones manifestadas por los alumnos y los procedimientos que utilizan para comparar o calcular áreas de superficies planas.

- Si bien la formación específica de los alumnos de los distintos cursos sobre el área era más o menos la misma, los resultados han mostrado importantes diferencias entre ellos. Más concretamente:

  - · Se ha detectado una evolución en la comprensión de los distintos aspectos del concepto de área a estudio por parte de los alumnos en relación a su nivel académico. En general, los mejores resultados han correspondido por este orden a los alumnos de 5º F.M., C.O.U.-C, 3º E.M., 2º de B.U.P., C.O.U.-L y 8º de E.G.B. Esta ordenación de los cursos está realizada en relación al éxito alcanzado por sus alumnos en sus respuestas a los ítemes del test.

- Los alumnos de 8º de E.G.B., de los que tal vez se podría pensar que tenían ventaja sobre los estudiantes de los otros cursos al tener mucho más reciente la instrucción sobre el área, son precisamente los que han obtenido los peores resultados y han mostrado a través de sus respuestas el mayor grado de desconocimiento e incomprensión sobre el área. Creemos que estos resultados ponen de manifiesto la inadecuada instrucción que habitualmente recibe el alumno cuando se aborda la enseñanza del área.

- La formación matemática de un alumno ha sido un factor decisivo en la gradual mejora de la comprensión por parte del estudiante del concepto de área. Por el contrario, la formación humanista del alumno no se ha manifestado como un factor relevante en la mejora de esta comprensión, como puede deducirse de los deficientes resultados obtenidos por los alumnos de C.O.U.-L. Estos alumnos poseen al menos los mismos conocimientos matemáticos que los de 2º de B.U.P. y además han cursado un año escolar más que éstos, y sin embargo sus resultados han sido inferiores a los obtenidos por los de 2º de B.U.P. Sin embargo, pensamos que la actitud negativa que los alumnos de C.O.U.-L (alumnos que han elegido la opción de letras) poseen hacia las matemáticas, y que tal vez ésta resulta ser uno de los factores más decisivos en la elección de sus estudios, es una de las principales causas de los malos resultados obtenidos por estos alumnos. Creemos que la mejor forma de ilustrar este sentimiento existente en los alumnos de la opción de letras es mostrar el comentario que dos de ellos nos hicieron en el momento de responder al primer ítem del test:

Alumno C.O.U.-L-81

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

las dimensiones de ~~[illegible]~~, anchura y largo

Es absurdo que nos pregunte cosas de Matemáticas cuando estamos en LETRAS PURAS y con lo cual quiere decir que nos hemos metido en Letras porque no tenemos mínimo interés en las ciencias, es absurdo como preguntar a alguien de ciencias las declinaciones de Latín. Y las cosas de no practicarlas constantemente se olvidan por muy bien que se hayan aprendido...

Alumno C.O.U.-L-83

1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

SIENTO NO HABERLE AYUDADO

LA DEJO EN BLANCO AL
IGUAL QUE TODAS LAS DEMAS PORQUE
NUNCA LLEGUÉ A ENTENDER Y MOSTRAR
~~IMPORTANCIA~~ POR COSAS QUE NUNCA TUVIERON
INTERES IMPORTANCIA PARA MI.
LO CUAL NO QUIERE DECIR
QUE TENGA MUCHA IMPORTANCIA PARA
MUCHA OTRA GENTE

Así pues la hipótesis planteada al inicio de la etapa diagnóstica (apartado 3.2.1.) debería ser reformulada en los siguientes términos: se observa una gradual mejora de la comprensión del concepto de área, con mejores resultados en la resolución de problemas relativos a este concepto, conforme un estudiante va evolucionando a lo largo de los distintos niveles educativos, como consecuencia del desarrollo de su formación matemática.

- Si bien la formación matemática general, adquirida a lo largo de los cursos, indirectamente mejora el conocimiento que los alumnos poseen sobre el concepto de área, ésta no provoca el mismo efecto en todos los aspectos del área estudiados. Mientras que en algunos de ellos la mejora ha sido apreciable, en otros no ha sucedido lo mismo, mostrándose la formación matemática general, en estos casos, claramente insuficiente. Ello viene a confirmar que determinados aspectos del área y algunos relacionados con ella requieren para su conocimiento y mejora de un estudio específico.

En relación al nivel académico de los alumnos se ha observado una mejora considerable, que puede considerarse como satisfactoria, en:

- el conocimiento y comprensión de la unidad de medida,
- el conocimiento de la conservación del área,
- el conocimiento de la independencia entre el área y la forma de una superficie,
- el conocimiento de las fórmulas del área del rectángulo, cuadrado, triángulo, paralelogramo y círculo, y
- el conocimiento y uso de métodos numéricos para el cálculo de áreas.

Por el contrario, no se ha detectado ninguna mejora o ésta ha resultado ser tan insuficiente que no puede considerarse como satisfactoria, en:

- el conocimiento de la independencia entre el área y el perímetro de una superficie,
- el conocimiento y comprensión del carácter bidimensional del área,
- la comprensión de las fórmulas para el cálculo de áreas, y
- el conocimiento y uso de los procedimientos geométricos para el estudio del área de superficies.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTACIÓN DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA

Esta fase de la investigación ha consistido en la organización y análisis de una secuencia de enseñanza del concepto de área de superficies planas dirigida a los alumnos de secundaria, con el fin de mejorar su comprensión de este concepto. Es importante recalcar el hecho de que en ningún momento la secuencia didáctica ha tenido por objeto introducir el concepto a los alumnos, sino completar su formación y corregir algunos de sus errores más habituales. El diseño de esta unidad de enseñanza lo hemos llevado a cabo teniendo en cuenta los resultados del estudio realizado durante la etapa diagnóstica. La experimentación se desarrolló en un grupo de 4° curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.). La evaluación de la experimentación fue realizada a partir del análisis de las respuestas dadas por los alumnos al test utilizado durante la etapa diagnóstica, que les fue administrado antes y después de la enseñanza de la unidad didáctica.

4.1. OBJETIVOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Esta etapa de la investigación tuvo dos objetivos:

- el diseño y experimentación de una secuencia didáctica para la enseñanza del área a alumnos de secundaria, y

- la evaluación de los efectos de la experimentación, consistente en un estudio de los cambios observados en el rendimiento de los alumnos y en los procedimientos y estrategias empleados en la resolución de problemas, así como en un análisis minucioso de los errores cometidos por los alumnos antes y después de la experimentación.

Objetivo y contenido de la secuencia de enseñanza

El análisis didáctico del concepto de área realizado y expuesto en el capítulo 2 de esta memoria, junto con los resultados obtenidos en la etapa diagnóstica, mostrados en el capítulo 3, y los correspondientes al pre-test administrado a los alumnos del grupo donde se iba a llevar a cabo la experimentación, nos llevó a diseñar una secuencia de enseñanza del área con objeto de mostrar a los alumnos:

- *El concepto de área disociado de la forma de la superficie y del número que la mide*, hecho este al que nos hemos referido ya con anterioridad, como "área como magnitud autónoma", con el objeto de que comprendan que superficies de formas distintas pueden tener igual área, y que al área de una superficie le pueden corresponder números distintos según la unidad de medida utilizada.

- *El concepto de área disociado del perímetro* de la superficie, a partir del estudio de la variación y/o conservación del área y/o perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones.

Objetivos éstos que deberían ser abordados tanto desde un *tratamiento cualitativo* del área como *cuantitativo*. Tratamientos que, además, poseían objetivos intermedios que relacionamos a continuación.

Objetivos del tratamiento cualitativo del área

- Trabajar la interpretación geométrica del área: "el área como porción de plano ocupado por una superficie".

- Estudiar la conservación del área de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones a partir del estudio de las propiedades del área: propiedad Aditiva, de Invarianza y de la Disección.

- Familiarizar a los alumnos con algunos procedimientos geométricos que les permitan comparar las áreas de diversas superficies, estableciendo relaciones de tipo cualitativo entre ellas, y en alguna ocasión de carácter numérico. Procedimientos basados en una:

  · Comparación directa, mediante una superposición de las superficies.
  · Comparación indirecta, mediante:
    · Recorte de una de las superficie en trozos y posterior reconfiguración de éstos, constituyendo una nueva superficie que permita la comparación.
    · Descomposición conveniente de las superficies en trozos y posterior comparación de éstos.
    · Reconfiguración de las superficies por complementariedad de formas.

Objetivos del tratamiento cuantitativo del área

- Trabajar la interpretación numérica del área: "el área como número de unidades que recubren exactamente la superficie".

- Diferenciar el área del número que la mide, mediante la utilización de diferentes unidades para medir la misma superficie.

- Estudiar las propiedades de la unidad de área:

- La unidad puede ser divida en partes para facilitar la medida. Carácter de no discretitud de la unidad de medida.
- La unidad debe recubrir exactamente la superficie. Carácter de recubrimiento de la unidad.
- Existe una relación inversa entre el número de unidades que recubren la superficie y el tamaño de la unidad escogida.

- Introducir la unidad cuadrada de medida.

- Justificar la introducción y uso del cm^2.

- Estudiar la relación del área del triángulo, paralelogramo y trapecio con la del rectángulo.

Nota.- Por falta de tiempo durante la experimentación, como se explica en la próxima sección 4.4., no fue posible abordar estos últimos objetivos, a pesar de que se habían diseñado actividades para ello. Sólo en algunas tareas se hizo alguna referencia a la unidad estándar cm^2 y únicamente fue posible plantear una tarea relativa a la relación del área del triángulo con la del rectángulo.

En las siguientes tablas se muestra de forma breve el contenido, en relación a los objetivos anteriormente expuestos, de las 33 actividades, que constituyen la secuencia de enseñanza y que se exponen en la sección 4.3. El tratamiento cualitativo del área constó de 18 actividades, y el cuantitativo de 15 actividades. Hemos considerado interesante incorporar al final de la tabla correspondiente al tratamiento cualitativo una columna en la que se especifica si la/s superficie/s, que debían estudiar los alumnos, se les daba o no, o se les sugería, ya que ello facilita información acerca del orden en el que las actividades fueron proporcionadas a los alumnos, atendiendo a la dificultad de la tarea.

Tratamiento cualitativo del área: Actividades

actividad	procedimientos de carácter geométrico basados en:				estudia la independencia del área		estudia la variación y/o conservación del área y/o perímetro a partir de transformaciones que			la descomposición de la superficie		
	comparación directa	comparación indirecta										
	superposición	recorte y pegado	descomposición conveniente	reconfiguración por complementariedad	de la forma	del perímetro	conservan el área	conservan el perímetro	cambian el área y el perímetro	viene dada	viene sugerida	no viene dada
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												

Tratamiento cuantitativo del área: Actividades

actividad	procedimientos de carácter numérico basados en:						utiliza una unidad bidimensional		estudia la diferencia entre el área y		
	la iteración de la unidad				el uso de fórmulas	estudia las propiedades de la unidad de medida	no cuadrada	cuadrada	la forma	el perímetro	el número que la mide
	se reproduce en la superficie un número entero de veces y de forma completa		no se reproduce en la superficie un número entero de veces de forma completa la unidad (su dibujo)								
	la unidad física (real)	la unidad reproducida (dibujo)	se fracciona la unidad	se recompone la unidad							
19		■				■	■				
20	■					■	■		■		■
21		■	■			■	■				■
22		■	■			■	■				■
23		■	■			■		■			
24		■				■	■				
25			■			■	■	■			
26		■						■	■	■	
27		■	■				■	■		■	
28		■						■	■	■	
29			■	■			■				
30			■	■			■	■			
31			■	■			■	■	■	■	
32			■	■				■			
33		■		■	■			■			

4.2. METODOLOGÍA

4.2.1. DISEÑO DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

Marcados los objetivos de la secuencia se procedió a la elaboración de las actividades. Parte de ellas fueron extraídas de libros de enseñanza de la geometría y de trabajos de investigación, adaptando algunas de ellas a los nuevos objetivos. Las restantes fueron diseñadas expresamente para esta investigación. En el apartado 4.3. donde se describen una a una las actividaes se indica también su procedencia.

La secuencia elaborada no se componía de una sucesión fija de actividades, sino que para actividades de determinadas características se disponía de una gama de ellas, con el fin de que fuera el comportamiento de los alumnos en la evolución de la secuencia el que determinara la/s actividad/es más conveniente/s para plantear en cada momento. Algún comentario al respecto se realiza más adelante en la descripción de la experimentación.

En el diseño de las actividades hubo dos aspectos que se cuidaron mucho: uno el tipo de papel sobre el que se presentarían las tareas a los alumnos, y el otro, el tipo de figura sobre la que los alumnos deberían trabajar. Por ello, las tareas fueron convenientemente escogidas o diseñadas de modo que los alumnos:

- trabajaran sobre papel blanco, cuadriculado y sobre distintos tipos de tramas de puntos, y

- manipularan superficies poligonales, tanto cóncavas como convexas, y no poligonales.

Con ello pretendíamos romper estereotipos, por desgracia muy habituales en la enseñanza de la geometría, que limitan el campo del conocimiento de los alumnos y que, como hemos podido comprobar, en ocasiones inducen a los estudiantes a determinados errores, como es el uso generalizado de formas "regulares" como por ejemplo el rectángulo, y que más adelante se explicitan.

Por último, creemos interesante indicar que sólo tres actividades tuvieron un carácter manipulativo, pues sólo en tres ocasiones se consideró necesario para alcanzar los objetivos previstos diseñar este tipo de tareas, que corresponden a las actividades: 1, 15 y 20.

4.2.2. DESCRIPCIÓN DE LOS ALUMNOS

Dado que el test se administró a los alumnos de enseñanza media, concretamente a los de segundo curso del Bachillerato Unificado Polivalente (B.U.P.) parece razonable que la experimentación se llevara a cabo en este mismo curso. Sin embargo, y como ya hemos comentado en alguna ocasión a lo largo de esta memoria, el concepto de área no es un contenido del currículum de este nivel educativo. Ello nos llevó a valorar el trastorno que podía ocasionar tanto a los alumnos como al profesor del curso escogido la "pérdida" de tiempo que provocaría la enseñanza de la secuencia didáctica sobre el área. Finalmente y aprovechando el hecho de que en estos momentos los estudios de B.U.P. se simultanean con los de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) del nuevo sistema educativo, pensamos que sería más conveniente realizar la experimentación en el 4° curso de E.S.O. -curso equivalente en edad de los alumnos al de 2° de B.U.P.- al considerar que las características del nuevo sistema educativo facilitaban nuestra experimentación.

La secuencia de enseñanza se desarrolló en un grupo de 24 alumnos de 15-16 años de edad, de 4° curso de E.S.O. del Instituto Faitanar de Quart de Poblet, localidad muy próxima a la ciudad de Valencia.

4.2.3. METODOLOGÍA DE TRABAJO EN CLASE

La experimentación se llevó a cabo en las clases que los alumnos de este grupo tenían asignadas en su horario semanal a la asignatura de matemáticas, tres sesiones de 55 minutos de duración cada una.

El responsable de la enseñanza y director de las sesiones fue el profesor de matemáticas del grupo, que siempre estuvo asesorado, antes y durante la experimentación, por la responsable de la investigación, que asistió en calidad de observadora a todas las clases, y participó en ellas, colaborando con el profesor en las tareas de asesoramiento y orientación a los alumnos durante sus sesiones de trabajo en grupo.

El medio escolar en el que se llevó a cabo la enseñanza de la secuencia didáctica fue el aula del curso, cuyas características físicas permitieron el trabajo en grupo de los alumnos, que fueron distribuidos en 6 grupos de 4 alumnos cada uno, y la utilización del retroproyector, que resultó ser esencial para la exposición pública del trabajo desarrollado por cada grupo.

Las actividades se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada alumno en fotocopias. Algunas de las tareas planteadas requerían para su realización de un material didáctico adecuado, material que les fue proporcionado en cada caso a los grupos y que se detalla junto a la exposición de las tareas. Además del material al que nos hemos referido, se pusieron a disposición tanto del profesor como de los alumnos durante toda la experimentación tijeras, reglas, y acetatos con cuadrículas de distintos tamaños y tramas de puntos, tanto cuadradas como isométricas, para su uso en el momento que se creyera conveniente.

Por lo que respecta al método y organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que propugna el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. De forma resumida, sus características más relevantes, (Corberán et al. (1994)) son:

Fase 1: Información

Es una fase de toma de contacto: El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar: los conceptos que van a manejar, los tipos de problemas interesantes que podrán resolver, los materiales que van a utilizar, el método de trabajo, etc...

Es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar.(...)

Fase 2: Orientación dirigida

En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio, resolviendo actividades y problemas basados en el material que les ha sido proporcionado por el profesor. (...) Se espera que los estudiantes comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, etc. del área que se está estudiando.

(...) Es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar: No se trata de actividades o problemas abiertos o complejos, sino de unos claramente dirigidos al descubrimiento y demostración (según los métodos del nivel de Van Hiele correspondiente) de los diferentes conceptos y propiedades.

La misión del profesor es dirigir a los estudiantes en la línea de la solución cuando lo necesiten, dándoles indicaciones que les ayuden a superar sus dificultades, aunque evitando siempre llegar a dar la solución por sí mismo, sin la participación activa de sus alumnos.

Fase 3: Explicitación

En esta fase los estudiantes intercambian sus experiencias, comentan lo que han observado, explican cómo han resuelto las actividades, etc., todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o la de sus compañeros), que ordenarlas y que expresarlas con claridad.

(...) En realidad, esta tercera fase no hay que entenderla como un período de diálogo después de haber completado el trabajo de la segunda fase y antes de iniciar el de la cuarta. Habría que considerarla, más bien, como una actitud continua de diálogo tras cada problema o grupo de problemas durante las otras 4 fases.

Fase 4: Orientación libre

Ahora los estudiantes deberán aplicar y combinar los conocimientos que han adquirido en las fases anteriores para realizar nuevas actividades. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo (...). Esto se consigue mediante el planteamiento por el profesor de problemas que, preferiblemente puedan desarrollarse de diversas formas o que admitan diferentes soluciones.

(...) En estos problemas deben intervenir varios conceptos o propiedades del campo a estudio, que los estudiantes tendrán que combinar de forma adecuada para llegar a su solución. La misión del profesor es dar a los estudiantes indicios sobre la vía de solución de los problemas y fomentar la discusión sobre diferentes alternativas cuando las haya.

Fase 5: Integración

A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han aprendido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente. En esta fase el profesor debe fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales mediante una acumulación, comparación y combinación de los conocimientos que ya tienen. El trabajo que se realiza en esta fase y las actividades que se

planteen, no deben tener como objetivo producir conocimientos nuevos, sino que deben ayudar a organizar los que ya se han aprendido.

Las fases del modelo de van Hiele tienen como objeto conseguir un progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes, hecho este que no es el objetivo de nuestra enseñanza, por lo que las tareas propuestas no han sido secuenciadas de modo que permitan recorrer todas y cada una de las fases de aprendizaje. Sin embargo, las fases nos han proporcionado unas pautas de gran utilidad para la organización de la instrucción, de especial influencia en lo que se refiere al papel del profesor en los diferentes momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y a la actitud metodológica, concretamente en lo que respecta a las componentes que deben ser habituales en la dinámica del trabajo en grupo de los alumnos.

A continuación mostramos las 33 actividades que les fueron planteadas a los alumnos y que constituyen la unidad de enseñanza. En cada actividad además del enunciado con el que se presentó a los alumnos se especifican los objetivos que se persiguen alcanzar con ella. En algún caso hemos considerado oportuno realizar alguna/s aclaración/es que hemos presentado bajo el epígafre de observaciones. Finalmente queremos comentar que las actividades que hemos tomado de otros autores, tanto si son la misma como si la hemos adaptado las hemos indicado haciendo referencia al autor, en una nota, al finalizar el enunciado.

4.2.4. EVALUACIÓN

Como control de la experimentación y con objeto de poder proceder a la posterior evaluación de los efectos originados por ésta, y poder perfilar las tareas que integrarían la secuencia didáctica, se les administró a los alumnos de este grupo, antes y después de la experiencia, en calidad de pre y post-test, el test diseñado y ya comentado en el capítulo 3.

El pre-test fue administrado a los alumnos en el mes de diciembre de 1993 y el post-test en junio de 1994, aproximadamente un mes después de finalizar la experimentación, que constó de 28 sesiones que se desarrollaron en el período comprendido entre febrero y mayo de 1994.

La descripción del desarrollo de las sesiones se ha efectuado a partir de las notas tomadas durante cada una de ellas y de las grabaciones en magnetofón que se realizaron de todas las puestas en común, donde tenían lugar las fases de explicitación e integración a las que se refiere el modelo de enseñanza y aprendizaje de van Hiele.

La evaluación de la experimentación se ha realizado a partir del estudio comparativo de las respuestas dadas por los alumnos del grupo en el pre y post-test, para el que fue utilizado el paquete de técnicas estadísticas SPSS/PC+. En este análisis ha contribuido también, aclarando algunas respuestas o comportamientos de los alumnos, la información recabada durante cada una de las sesiones.

4.3. DESCRIPCIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

Tratamiento cualitativo

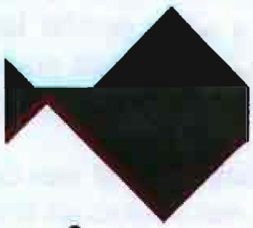
ACTIVIDAD 1

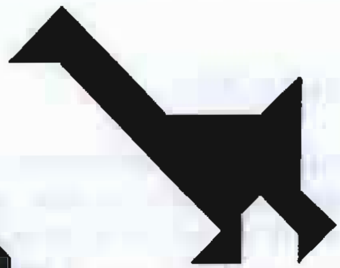
El tangram es un puzzle de siete piezas que procede de China, y con el que se pueden construir más de 300 figuras diferentes.

a) Construye con las siete piezas del tangram un cuadrado. Reprodúcelo en tus apuntes indicando la posición de las piezas.

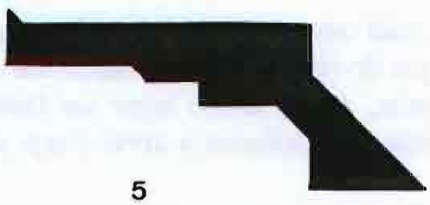
b) Construye con las siete piezas del tangram cada una de las figuras que a continuación se te presentan. Una vez construidas debes reproducirlas en tus apuntes indicando la posición de las piezas. Responde de forma razonada a las siguientes preguntas:
- ¿Tienen todas estas figuras la misma área?
- ¿Tienen el mismo perímetro?


1


2


3


4


5

Nota.- Las figuras fueron extraídas de Read (1965).

Material proporcionado a los alumnos:
- Dos tangrams de madera a cada grupo.
- Una fotocopia a cada alumno de un cuadrado seccionado en las 7 piezas que constituyen el tangram.

Objetivos de la Actividad 1

- Introducir a los alumnos suavemente en el tema a estudio, identificar los conocimientos previos que poseían sobre otros conceptos geométricos, y complementar los que poseían sobre el área y el perímetro.
- Comprobar que figuras de formas distintas tienen igual área.
- Comprobar que figuras de igual área no tienen el mismo perímetro.
- Estudiar las propiedades Aditiva, de la Invarianza, y de la Disección del área.
- Estudiar el uso de la propiedad transitiva en la comparación de áreas.
- Estudiar los procedimientos geométricos:
  de comparación directa: por superposición de las superficies.
  de comparación indirecta: por recorte y pegado de las piezas en las que queda descompuesta la superficie.

Observaciones

La actividad se desarrolló en dos fases diferenciadas. Primeramente los alumnos construyeron el cuadrado con las 7 piezas del tangram que el profesor les había proporcionado, y procedieron a la comparación de las distintas piezas entre sí. Con el fin de facilitar la divulgación de las distintas relaciones encontradas por los distintos grupos entre las piezas del tangram, el profesor procedió a la numeración de las 7 piezas tras la construcción del cuadrado.

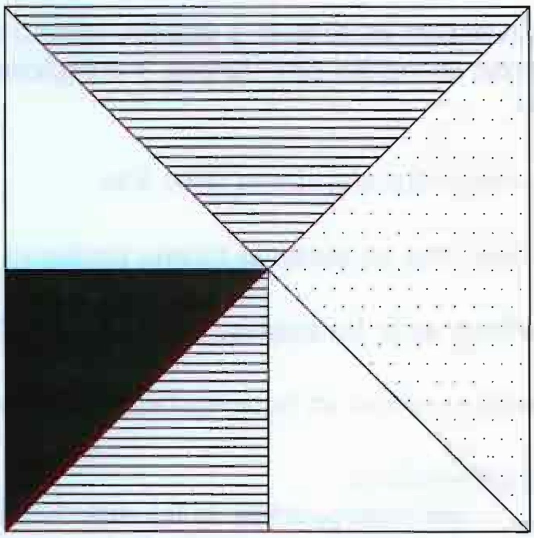
Posteriormente los alumnos de cada grupo construyeron las 5 figuras propuestas y emitieron un juicio sobre el área y perímetro de éstas. Finalmente y con objeto de sumarizar los aspectos más relevantes tratados durante la resolución de esta actividad, se les formularon las siguientes preguntas:

¿Qué es el área de una figura?
¿Qué es el perímetro de una figura?
¿Figuras de formas distintas pueden tener igual área?
¿Figuras de igual área tienen el mismo perímetro?
¿Qué procedimientos hemos utilizado para comparar las áreas de dos piezas del tangram y poder establecer una relación entre ellas?

ACTIVIDAD 2

¿Qué fracción de la parte interior del cuadrado de la figura representa la:

a) zona negra? b) zona blanca? c) zona punteada? d) zona rayada?



Nota.- Extraída de Hoffer (1979).

Objetivos de la Actividad 2

- Familiarizar al alumno con una partición del cuadrado.
- Establecer relaciones numéricas.

Observaciones

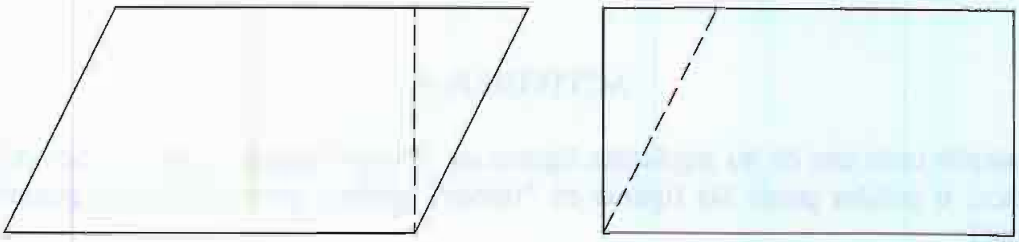
Se consideró conveniente introducir esta tarea, ya que del trabajo realizado por los alumnos en la Actividad 1 se constató que no están habituados a establecer relaciones seminuméricas.

ACTIVIDAD 3

La figura (A) ha sido cortada en 2 piezas que han sido reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura (B).

a) Compara sus áreas. ¿Tienen igual área?

b) Compara sus perímetros. ¿Tienen igual perímetro?



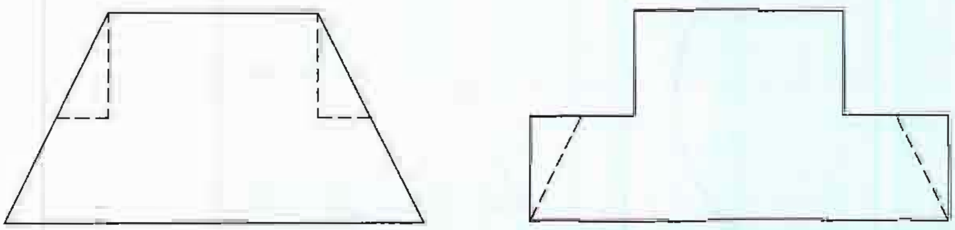
(A) (B)

ACTIVIDAD 4

La figura (A) ha sido cortada en 3 piezas que han sido reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura (B).

a) Compara el área de la figura (A) con la de (B). ¿Son iguales?

b) Compara sus perímetros. ¿Son iguales?



(A) (B)

Objetivos de las Actividades 3 y 4

- Estudiar la conservación del área y variación que experimenta el perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a una transformación por recorte en trozos y posterior pegado de éstos sin solapamiento.

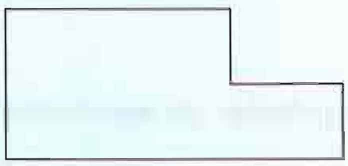
- Familiarizar a los alumnos con el procedimiento de comparación indirecta basado en el recorte y posterior reconfiguración por complementariedad de formas.

- Comprobar que superficies de formas distintas tienen igual área, y que superficies de igual área tienen diferente perímetro.

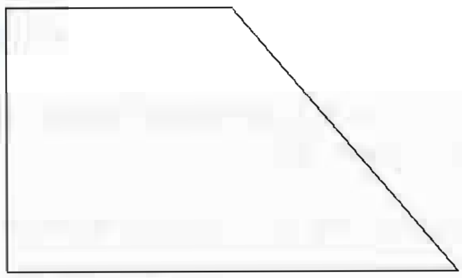
ACTIVIDAD 5

a) Descompón cada una de las siguientes figuras en "trozos" iguales. ¿Esta descomposición es única, o puedes partir las figuras en "trozos" iguales, pero de formas geométricas distintas?

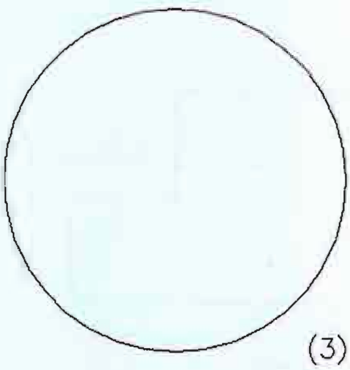
b) Expresa la relación entre el área de cada una de estas figuras y la de los "trozos" en las que ha sido descompuesta.



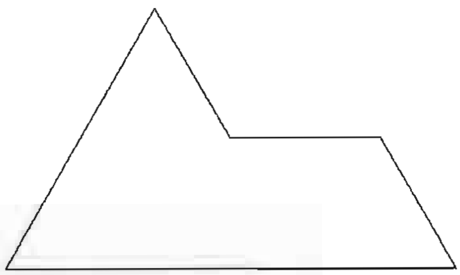
(1)



(2)



(3)



(4)

Nota.- Algunas figuras han sido extraídas de Gardner (1981).

Objetivos de la Actividad 5

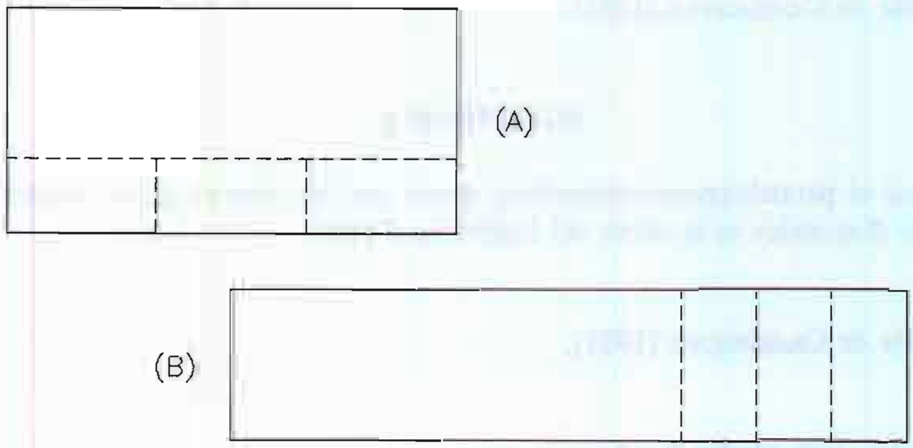
- Familiarizar al alumno con la partición de superficies en figuras congruentes.
- Comprobar que no siempre existe una única descomposición de una superficie, y por lo tanto se pueden buscar particiones alternativas hasta encontrar la más conveniente.
- Observar que el área se puede expresar a partir del número de partes iguales en las que ha sido descompuesta la figura.
- Presentar al alumno, aunque de forma implícita, la idea de unidad de área.
- Observar que el área de una superficie puede tener asociados distintos números, y que el número está en relación inversa al tamaño de la figura en la que ha sido descompuesta.

ACTIVIDAD 6

La figura (A) ha sido cortada en 4 piezas que han sido reorganizadas -sin superponerse- para construir la figura (B).

a) Determina el área de (B).

b) Determina el perímetro de (A) y (B).



Objetivos de la Actividad 6

Aunque en esta tarea los alumnos debían cuantificar el área y el perímetro de las superficies, ésta fue diseñado con objeto de observar si los alumnos determinaban el área de (B) mediante el uso de alguno de los procedimientos geométricos utilizados en las actividades anteriores, en lugar de uno numérico como suele ser habitual en los alumnos. Con ello pretendíamos, por un lado, valorar el efecto de la instrucción realizada hasta el momento sobre procedimientos geométricos, y por otro, hacer ver a los alumnos el papel que juegan este tipo de procedimientos en la simplificación, en determinadas ocasiones, del cálculo de áreas de superficies. Además de lo anterior, con esta actividad también se persiguen los mismos objetivos de las Actividades 3 y 4.

Observaciones

Dado que el objeto era valorar el efecto que los procedimientos geométricos utilizados en la resolución de las tareas anteriores, en concreto, el utilizado en las Actividades 3 y 4, podía tener en la resolución de una tarea similar pero planteada en un contexto numérico, consideramos conveniente no realizarla inmediatamente después, y por ello se intercaló una actividad entre ellas.

ACTIVIDAD 7

Dado un cuadrado ABCD, trazad las diagonales; por los vértices trazad las paralelas a estas diagonales. Obtendréis otro cuadrado; ¿cómo es éste respecto al cuadrado dado?

Nota.- Extraída de Castelnuovo (1981).

ACTIVIDAD 8

Demostrad que el paralelogramo obtenido al trazar por los vértices de un cuadrilátero las paralelas a las diagonales es el doble del cuadrilátero dado.

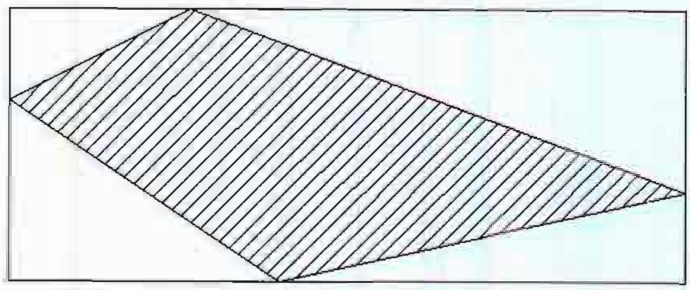
Nota.- Extraída de Castelnuovo (1981).

Objetivos de las Actividades 7 y 8

- Familiarizar al alumno con el procedimiento basado en la descomposición de las superficie en "trozos" convenientes, que permitan la comparación del área de las superficies.

ACTIVIDAD 9

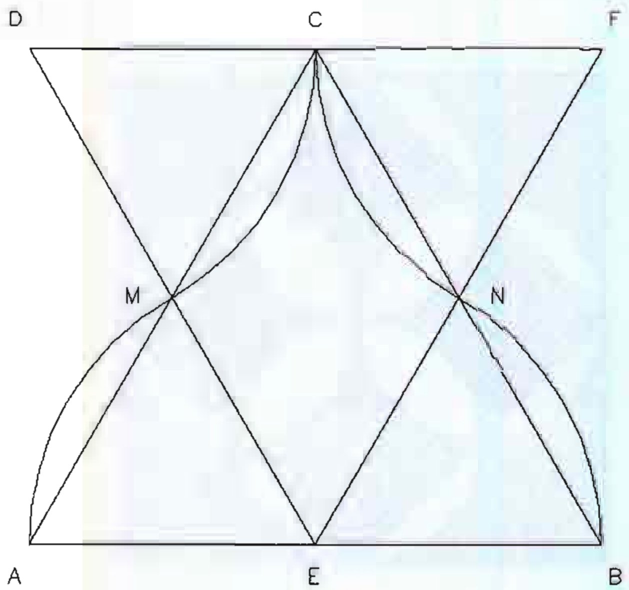
Busca la relación entre el área del rectángulo y la del cuadrilátero sombreado.



Nota.- Extraída de Clapponi (1991-1992).

ACTIVIDAD 10

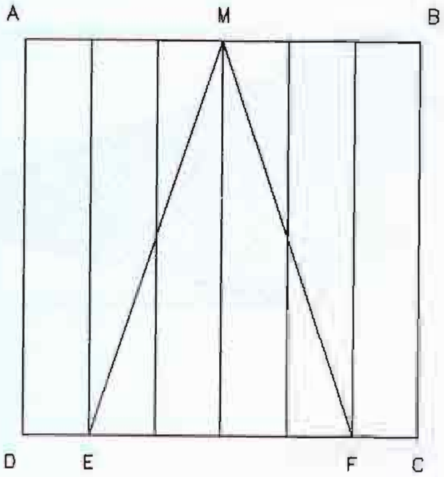
El arco persa utilizada a menudo en decoración se puede construir fácilmente con regla y compás dibujando triángulos equiláteros iguales. Probad que el área comprendida entre el arco y la base AB es igual al área del triángulo ABC.



Nota.- Extraída de Castelnuovo (1981).

ACTIVIDAD 11

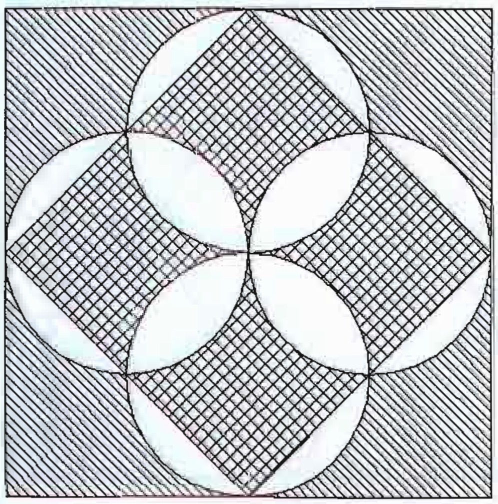
ABCD es un cuadrado partido en bandas iguales. Prueba que las áreas AMED, MEF y MBCF son iguales.



Nota.- Extraída de Padilla (1990).

ACTIVIDAD 12

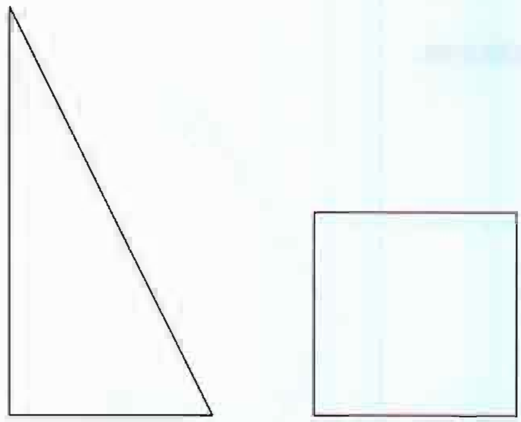
Compara el área total sombreada de fuera de los círculos con el área total sombreada del interior de los círculos.



Nota.- Extraída de Musser y Burger (1988).

ACTIVIDAD 13

Compara el área de estos dos polígonos.



Nota.- Extraída de Hughes, Bell y Rogers (1975) y Hughes (1979).

Objetivos de las Actividades 9, 10, 11, 12 y 13

- Estudiar el efecto que las actividades anteriores a éstas causan en el comportamiento de los alumnos para la resolución de este tipo de tareas.

- Evaluar el grado de éxito de los alumnos en tareas de comparación del área de superficies mediante el uso de los procedimientos geométricos de:

  descomposición conveniente de las superficies en partes para su posterior comparación, y

  descomposición de las superficies en partes y su posterior reconfiguración por complementariedad.

- Familiarizar a los alumnos con los procedimientos geométricos de comparación de áreas mencionados en el punto anterior.

Observaciones

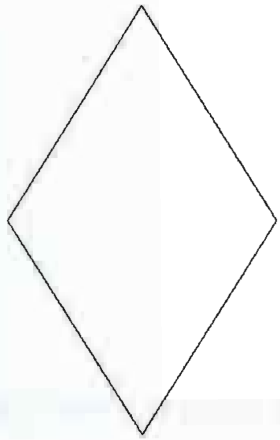
Tras comprobar la sencillez con que la práctica totalidad de los alumnos resolvió con éxito todas estas actividades, consideramos oportuno cerrar el estudio explícito de los procedimientos geométricos con la actividad n°13, y pasar al estudio de la variación y/o conservación del área y/o perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones.

ACTIVIDAD 14

Transforma el rombo del dibujo en otra superficie de:

a) Igual área y menor perímetro.

b) Igual área y mayor perímetro.



Objetivos de la Actividad 14

- Estudiar la independencia entre el área y el perímetro, observando que hay superficies de igual área con diferente perímetro.
- Estudiar la conservación del área y la variación del perímetro de una superficie cuando ésta experimenta determinadas transformaciones.

ACTIVIDAD 15

Sitúa una cartulina sobre el corcho. Con el hilo que se te ha dado, y procurando que éste siempre esté tenso, pínchalo sobre el corcho con ayuda de las chinchetas de modo que construyas diferentes polígonos. Posteriormente reproduce cada una de estas figuras sobre el papel.

a) ¿Tienen todos los polígonos construidos la misma área?

b) ¿Tienen todos los polígonos construidos el mismo perímetro?

c) Extrae todas aquellas conclusiones que creas de interés y que estén relacionadas con los resultados de los anteriores apartados.

Material proporcionado a cada grupo:
- Varias láminas de cartulina de tamaño folio.
- Dos tableros de corcho.
- Trozos de hilo de diferente longitud, pero cerrados para que el perímetro sea constante, y de un grosor que permita su fijación al corcho con las chinchetas.
- Una caja de chinchetas.

Objetivos de la Actividad 15

- Estudiar la independencia entre el área y el perímetro, observando que superficies de igual perímetro tienen áreas diferentes.

- Estudiar para un perímetro dado la variación del área, con objeto de proporcionar a los alumnos determinados conocimientos que les permitan abordar comprensivamente el análisis de la variación y/o conservación del área y/o perímetro cuando la superficie sufre determinadas transformaciones.

Observaciones

Una vez expuestas y analizadas en conjunto las respuestas dadas por los alumnos a los apartados a) y b) procedimos a abordar el estudio propuesto en el apartado c). Para ello el profesor planteó a los alumnos de forma sucesiva las siguientes preguntas con objeto de orientar la reflexión de los alumnos sobre sus resultados y así poder concluir que para un perímetro dado, de entre los polígonos de igual número de lados el convexo tiene mayor área que el cóncavo, que de entre los polígonos convexos el regular es el que posee mayor área, y finalmente que de entre los polígonos regulares el de mayor número de lados es el de mayor área, y así llegar a que el círculo es la superficie de mayor área, por ser considerado el "polígono" regular de mayor número de lados. Consideramos interesantes estas preguntas y sus respuestas porque permiten a los alumnos observar cómo superficies de igual perímetro poseen diferente área según las características que éstas posean, y también porque permite recordar las propiedades de los polígonos cóncavos, convexos, y regulares.

Entre dos polígonos de igual número de lados, ¿cuál tendrá mayor área, el cóncavo o el convexo?

Entre polígonos convexos de igual número de lados, ¿cuál tendrá mayor área?

De entre los polígonos regulares convexos, ¿cuál tendrá mayor área?

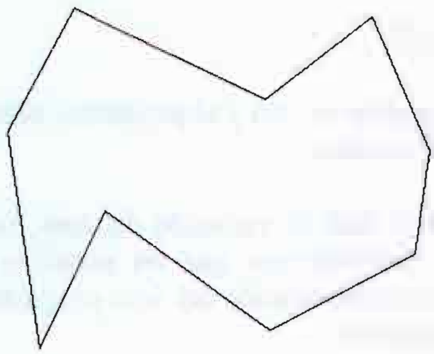
¿Cuál será la figura que para un perímetro dado tendrá la mayor área posible?

ACTIVIDAD 16

Modifica la superficie del dibujo de manera que se obtenga una nueva superficie con:

a) Mayor área y menor perímetro.

b) Menor área y mayor perímetro.

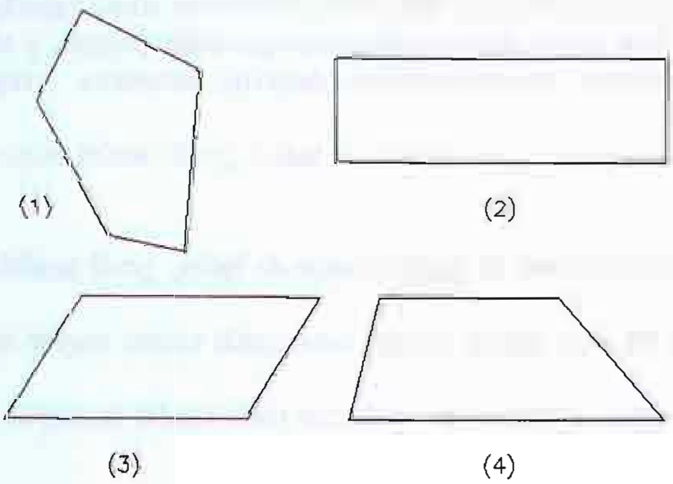


ACTIVIDAD 17

Modifica cada una de las siguientes superficies de manera que en cada caso se obtenga una nueva superficie con:

a) Menor área y mayor perímetro.

b) Mayor área y menor perímetro.



Objetivos de las Actividades 16 y 17

- Estudiar la independencia entre el área y el perímetro de una superficie a partir de modificaciones de la superficie con variaciones contrarias del área y del perímetro.

- Estudiar modificaciones comprensivas para la variación del área y perímetro de una superficie.

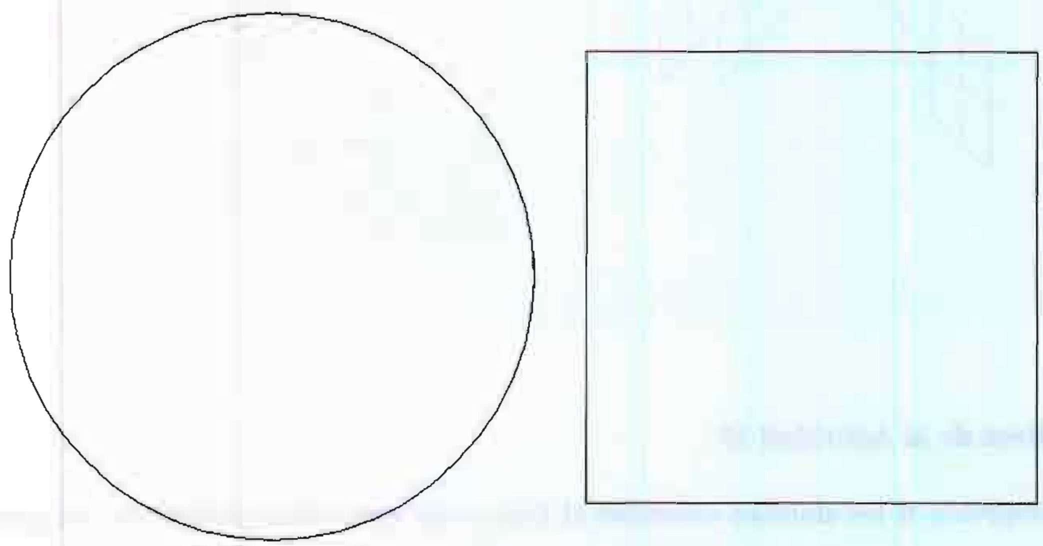
Observaciones

Además de los objetivos citados anteriormente, con estas dos actividades se pretendía, en cierto modo, poner a prueba la formación que el trabajo desarrollado en las Actividades 14 y 15 había podido proporcionar a los alumnos acerca de la variación y/o conservación del área y/o del perímetro de una superficie sometida a determinadas transformaciones. Es por ello, que se creyó oportuno plantear variaciones del área y del perímetro en superficies poligonales tanto cóncavas como convexas.

Los razonamientos aportados por los alumnos en las distintas tareas nos hicieron pensar que los objetivos se habían cumplido, y por ello decidimos que era el momento de iniciar el estudio cuantitativo del área. Sin embargo, antes de ello consideramos apropiado plantear a los alumnos alguna tarea (Actividad 18) que justificara este nuevo tratamiento del área, jugando el papel de enlace entre el estudio cualitativo y cuantitativo.

ACTIVIDAD 18

Compara las áreas de las siguientes figuras:



Objetivos de la Actividad 18

- Introducir la necesidad de abordar un tratamiento cuantitativo del área, a partir del estudio de la limitación que poseen los procedimientos geométricos para comparar determinadas superficies y/o en determinadas condiciones.

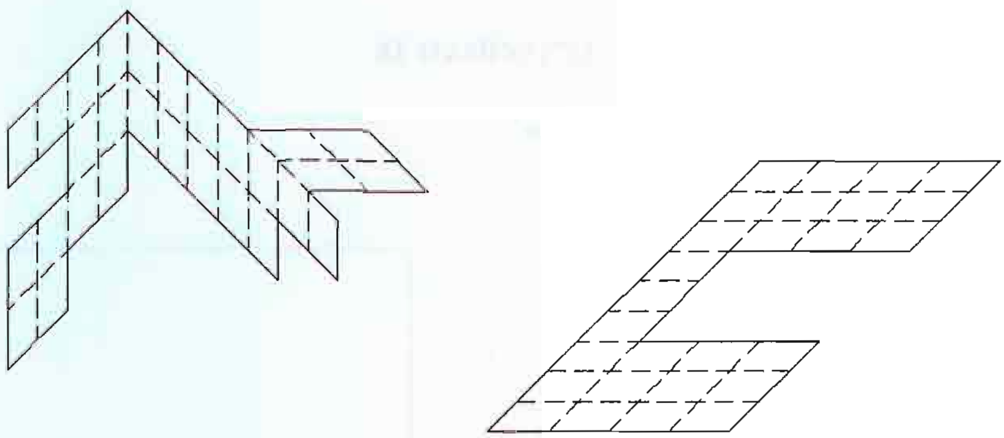
Observaciones

Finalizada esta actividad, y antes de iniciar el estudio cuantitativo del área, se pidió a cada alumno que elaborara un informe que recogiera de forma resumida lo estudiado hasta este momento. Este resumen tenía un doble objetivo, por un lado contribuir a la fase de sumarización realizada por el alumno, y por otro, proporcionar información al profesor y a la investigadora acerca de los conceptos o aspectos estudiados durante el tratamiento cualitativo del área que más habían impactado a los alumnos.

Tratamiento cuantitativo

ACTIVIDAD 19

Compara el área de las siguientes figuras:



Objetivos de la Actividad 19

- Comprobar si los alumnos entienden el área en términos de recubrimiento de espacio.

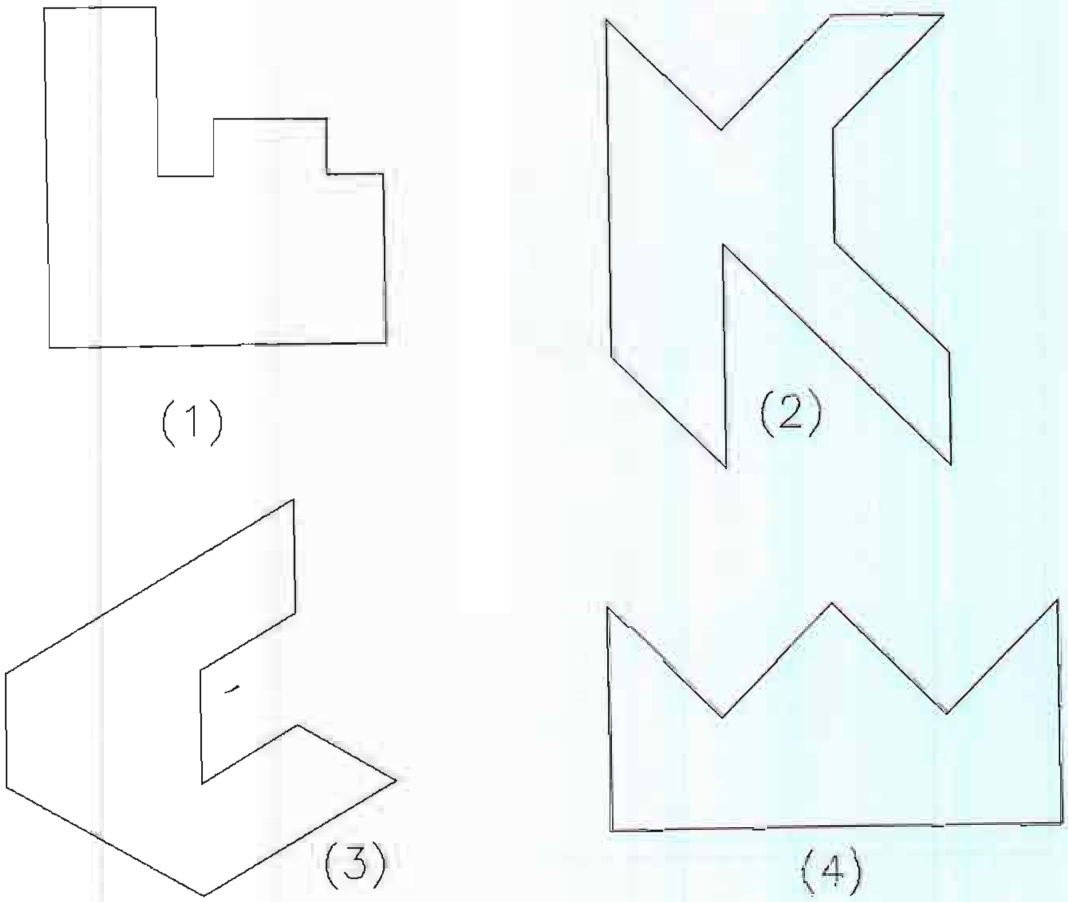
- Introducir la idea de unidad de medida.

ACTIVIDAD 20

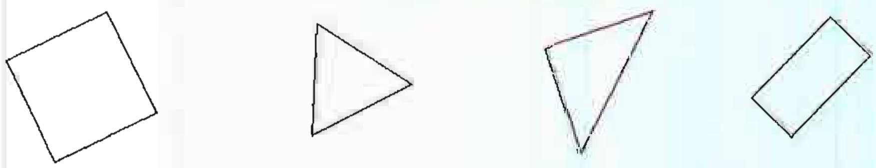
a) Mide el área de cada una de las siguientes superficies. Para ello dispones de 4 superficies diferentes.

b) Establece la relación entre las áreas de cada una de las superficies (1), (2), (3) y (4).

Polígonos cuyas áreas se desean determinar a escala reducida:

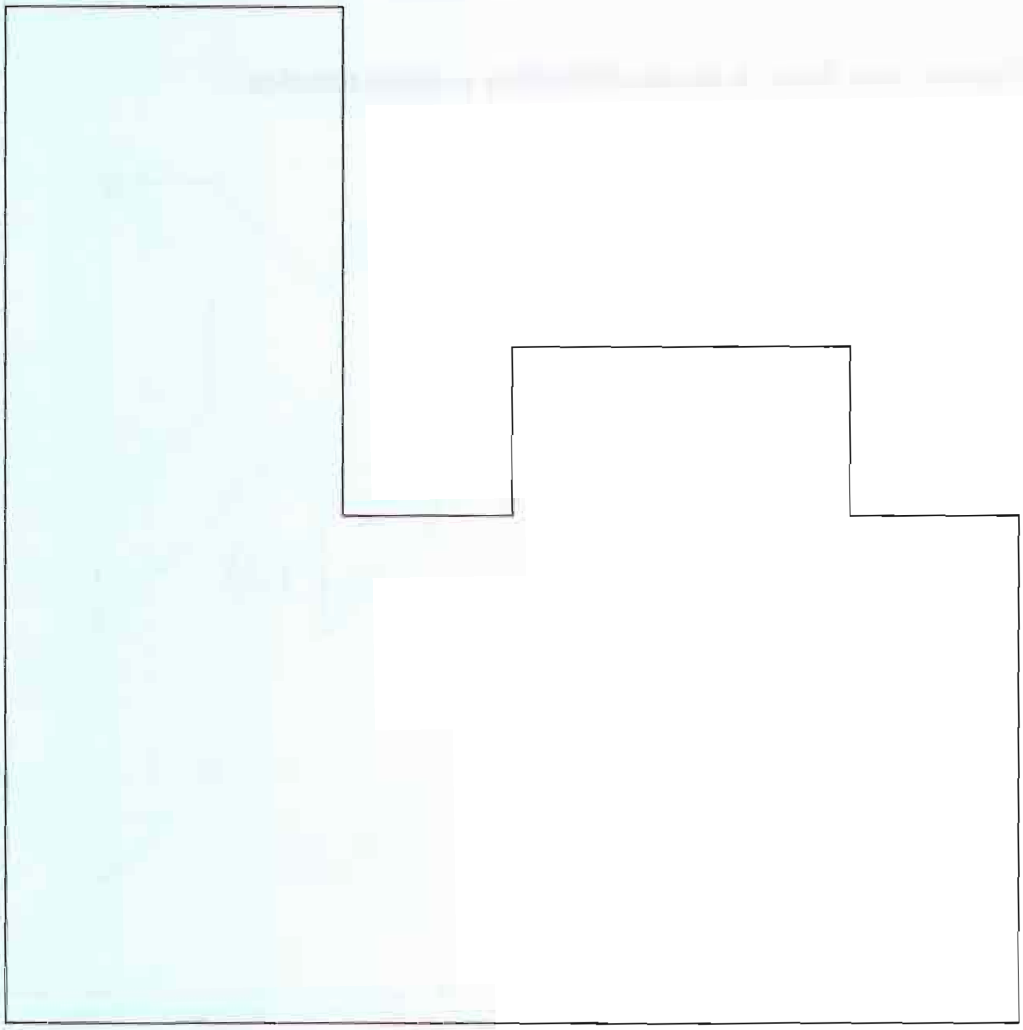


Superficies utilizadas como unidades a escala reducida:

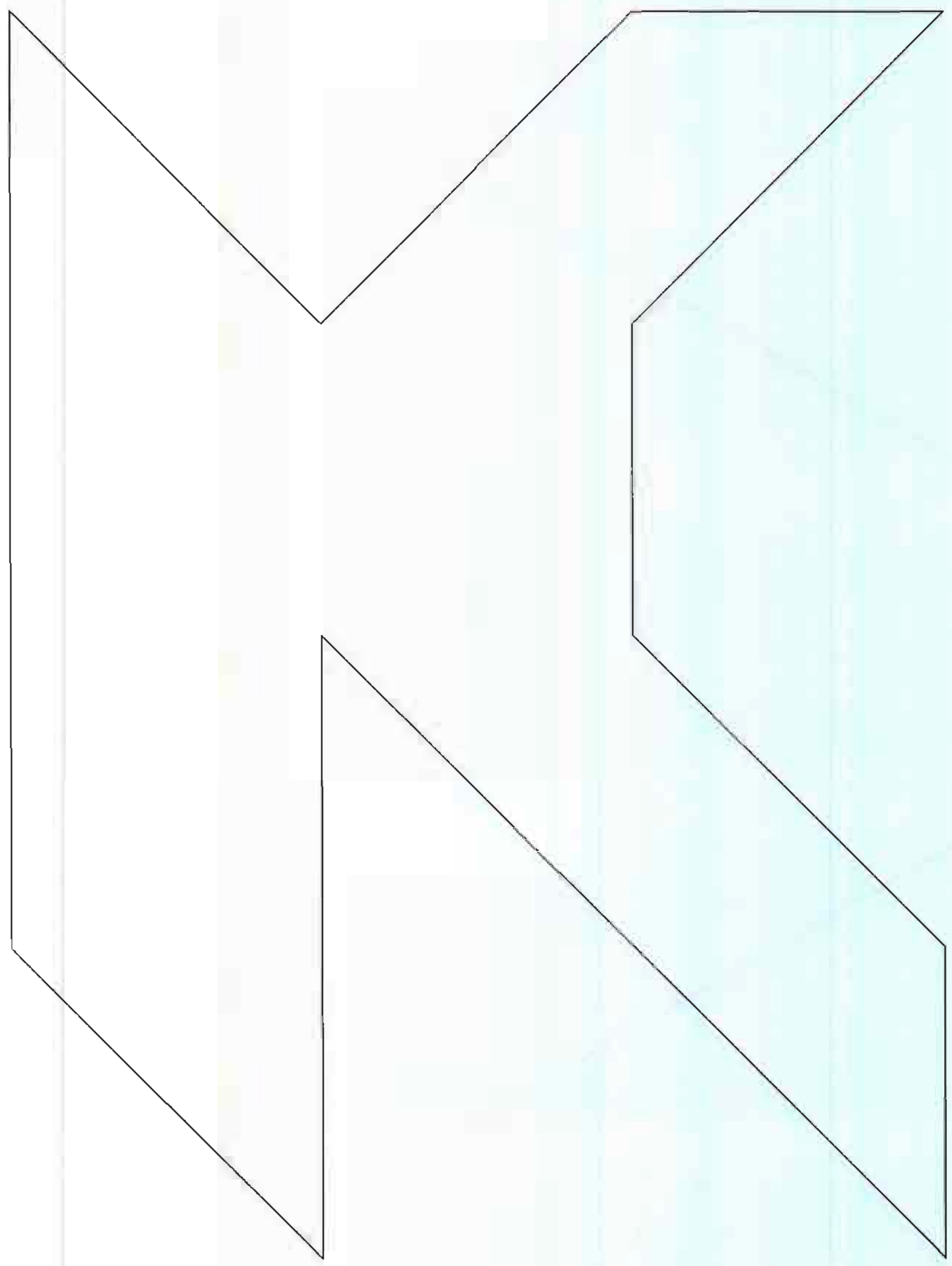


Nota.- En las páginas siguientes se muestran los polígonos y las unidades a tamaño real.

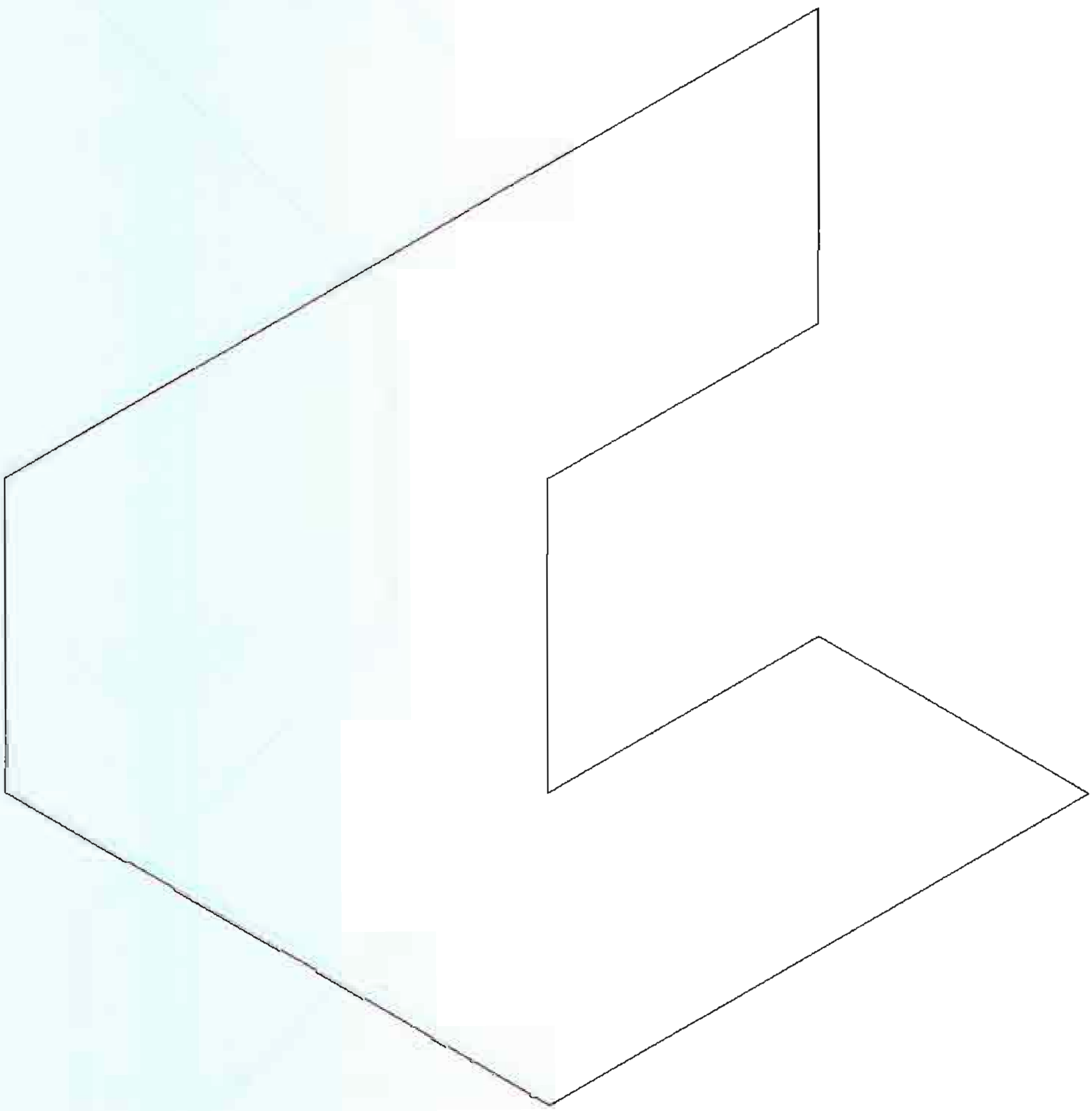
Superficie (1)



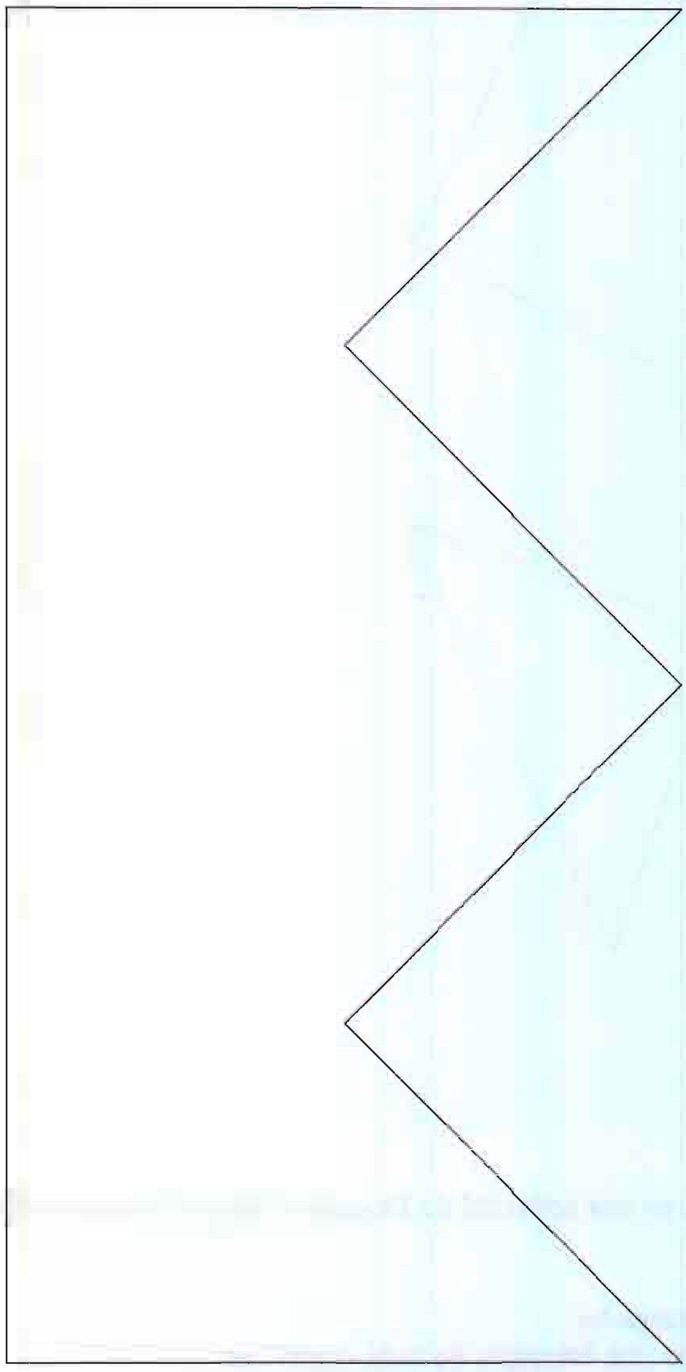
Superficie (2)



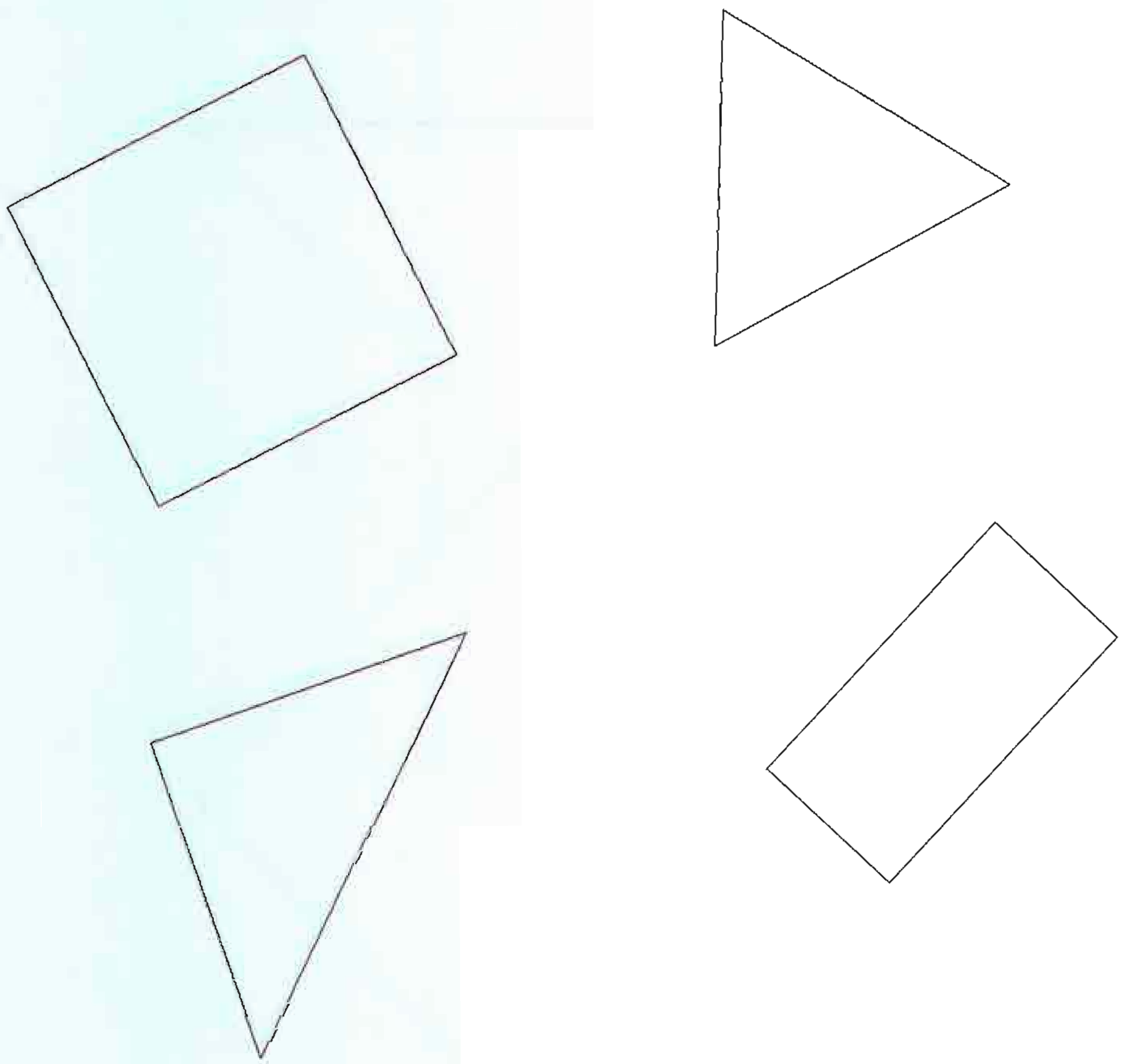
Superficie (3)



Superficie (4)



Unidades:



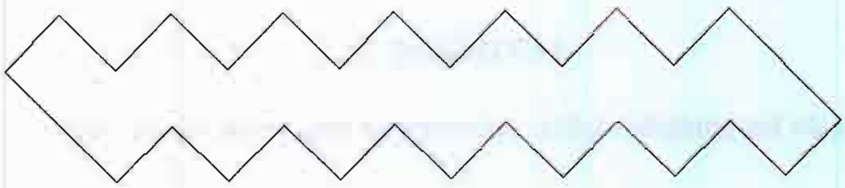
Nota.- Inspirada en una actividad de Douady y Perrin-Glorian (1983).

Material proporcionado:
- A cada alumno una fotocopia de cada superficie.
- A cada grupo cuatro piezas de plástico de cada unidad para medir el área.

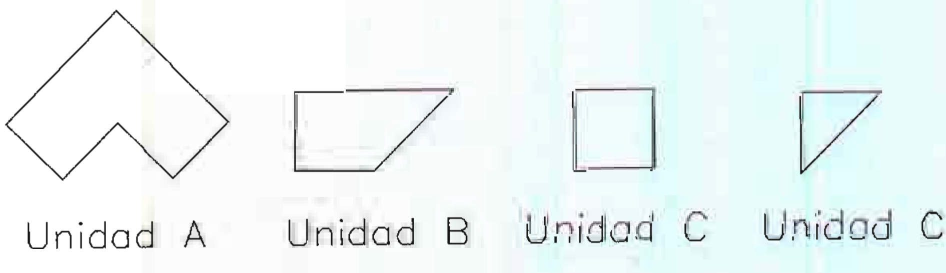
ACTIVIDAD 21

a) Mide el área de la superficie (S) utilizando las unidades A, B, C y D. Completa la tabla siguiente:

	medida del área de (S)
unidad "A"	
unidad "B"	
unidad "C"	
unidad "D"	



(S)



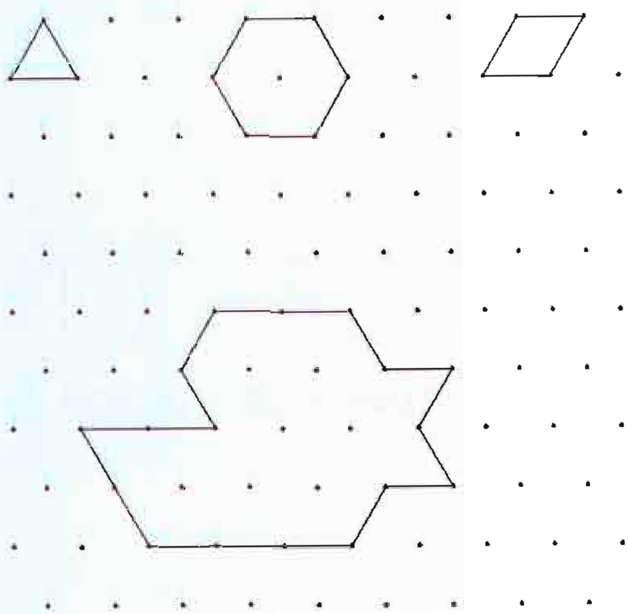
b) Completa la tabla:

	unidades			
	A	B	C	D
objeto geométrico				
A				
B				
C				
D				

Nota.- Extraída de Peterson (1973).

ACTIVIDAD 22

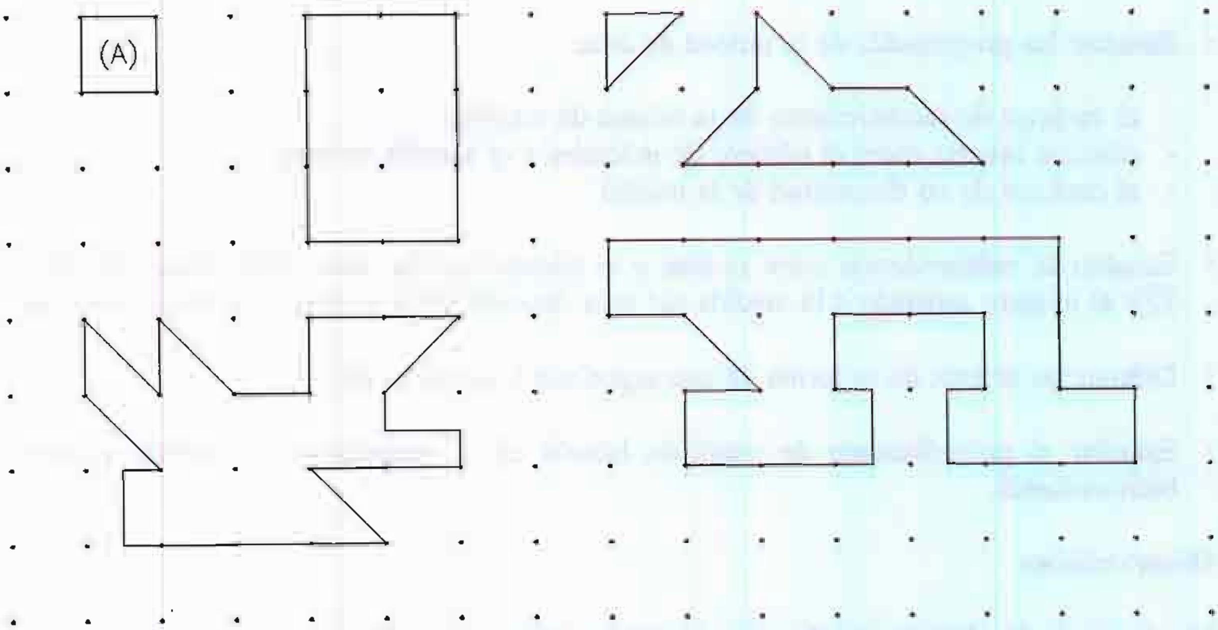
Usando cada una de las unidades dadas, encuentra el área de la figura mayor.



Nota.- Extraída de Musser y Burger (1988).

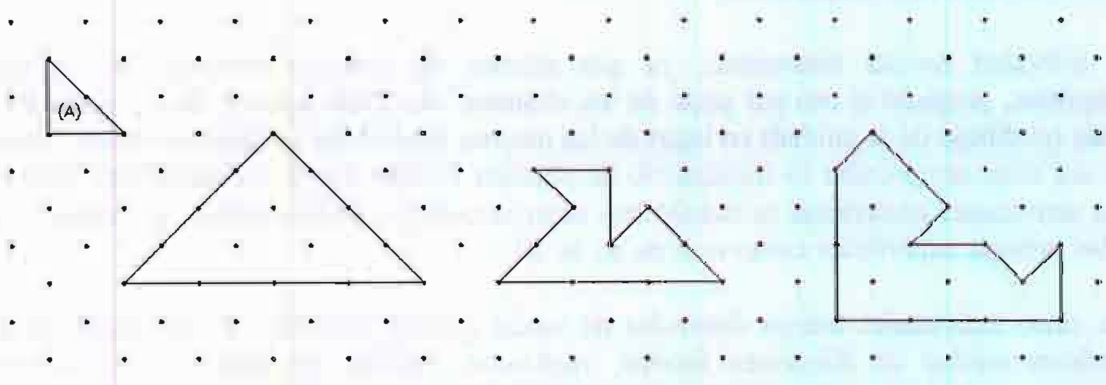
ACTIVIDAD 23

Calcula la medida del área de cada una de las siguientes superficies, utilizando como unidad de medida el cuadrado (A).



ACTIVIDAD 24

Calcula la medida del área de cada una de las siguientes superficies utilizando como unidad de medida el triángulo (A).



Objetivos de las Actividades 20, 21, 22, 23 y 24

- Estudiar el área en términos de recubrimiento de espacio.
- Estudiar el significado de la unidad de área. Papel que juega en la medida.
- Estudiar las propiedades de la unidad de área:
  - el carácter de recubrimiento de la unidad de medida,
  - relación inversa entre el número de unidades y el tamaño de ésta, y
  - el carácter de no discretitud de la unidad.
- Estudiar la independencia entre el área y el número que la mide (Actividades 20, 21 y 22): el número asociado a la medida del área depende de la unidad de medida escogida.
- Diferenciar el área de la forma de una superficie (Actividad 20).
- Estudiar el procedimiento de medición basado en la iteración de la unidad de área bidimensional.

Observaciones

Las 4 piezas de plástico (rectángulo, cuadrado, triángulo rectángulo isósceles y triángulo equilátero) proporcionadas a los alumnos en la Actividad 20 fueron extraídas de un material geométrico manipulativo que se compone de diferentes superficies planas, siendo seleccionadas de manera que al menos entre algunas de ellas se pudiera establecer algún tipo de relación.

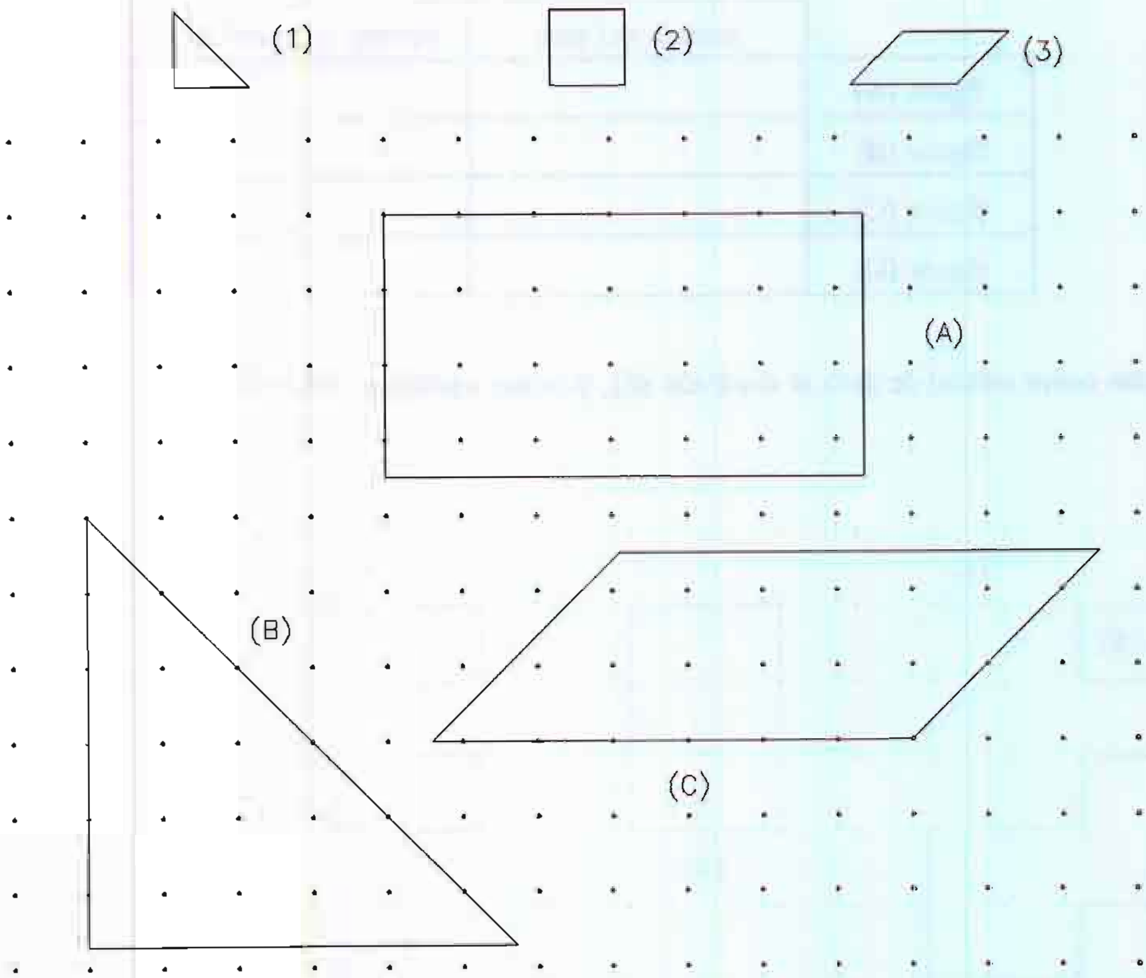
El objeto de no proporcionar a cada grupo el número necesario de las piezas de plástico para poder recubrir en su totalidad cada superficie de la que se deseaba determinar su área fue el de provocar la medida del área mediante la combinación de varias unidades, y de ese modo inducir a los alumnos a establecer relaciones entre las medidas efectuadas, bien fueran de la misma o de diferentes superficies.

Esta actividad resultó interesante, ya que además de permitir alcanzar los objetivos perseguidos, propició el uso por parte de los alumnos, de forma natural, de los patrones de medida (el dibujo de la unidad) en lugar de las mismas superficies unidad (unidades físicas). Esto nos hizo comprender lo innecesario de plantear futuras tareas manipulativas. Por ello en las actividades posteriores se trabajó con representaciones de las superficies unidad, y no con las mismas superficies como ocurría en la 20.

Estas cinco actividades fueron diseñadas de modo que los alumnos se familiarizaran con superficies unidad de diferentes formas, realizaran medidas de superficies poligonales diversas, y trabajaran sobre tipos de papel diferentes: papel blanco, y trama de puntos diversas.

ACTIVIDAD 25

Calcula el área de las superficies (A), (B) y (C), utilizando para ello y en cada caso la unidad que consideres más apropiada de las dadas (1), (2) y (3).



Objetivos de la Actividad 25

Esta actividad además de los objetivos planteados en las anteriores actividades pone su acento especialmente en:

- Estudiar la necesidad de realizar subdivisiones, en algún caso sucesivas, de la unidad de área con el fin de poder efectuar una medida precisa del área de la superficie.

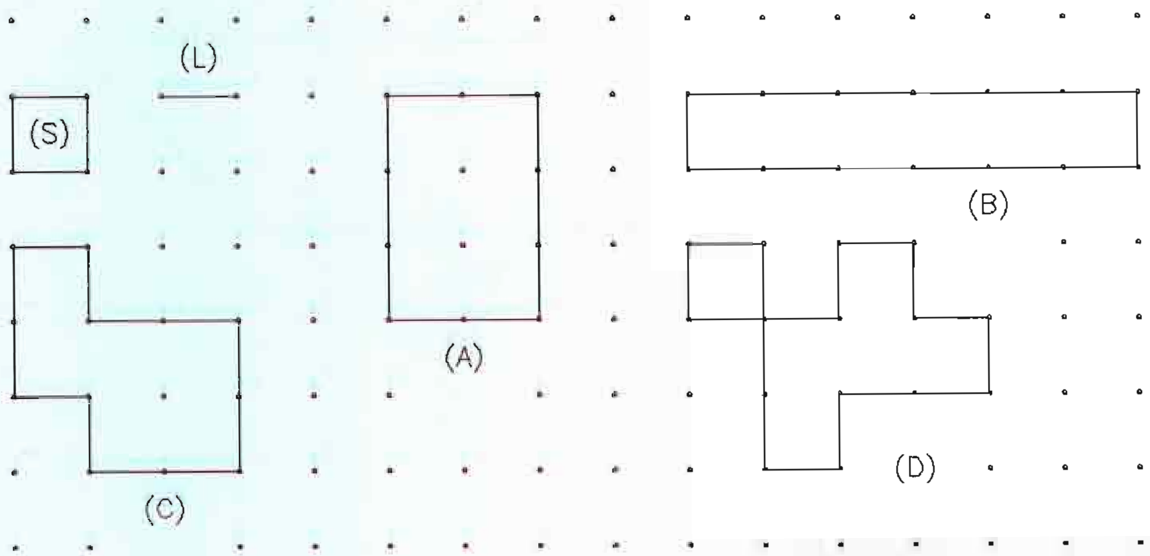
- Estudiar las ventajas que generalmente presenta el uso de la unidad cuadrada frente a otras de formas distintas, por lo que se refiere a la descomposición de la unidad en partes iguales de forma más sencilla y más precisa. Todo esto con el fin de justificar el uso generalizado del cuadrado como unidad de área.

ACTIVIDAD 26

Completa la tabla siguiente

	medida del área	medida del perímetro
figura (A)		
figura (B)		
figura (C)		
figura (D)		

Toma como unidad de área el cuadrado (S), y como unidad de longitud (L).

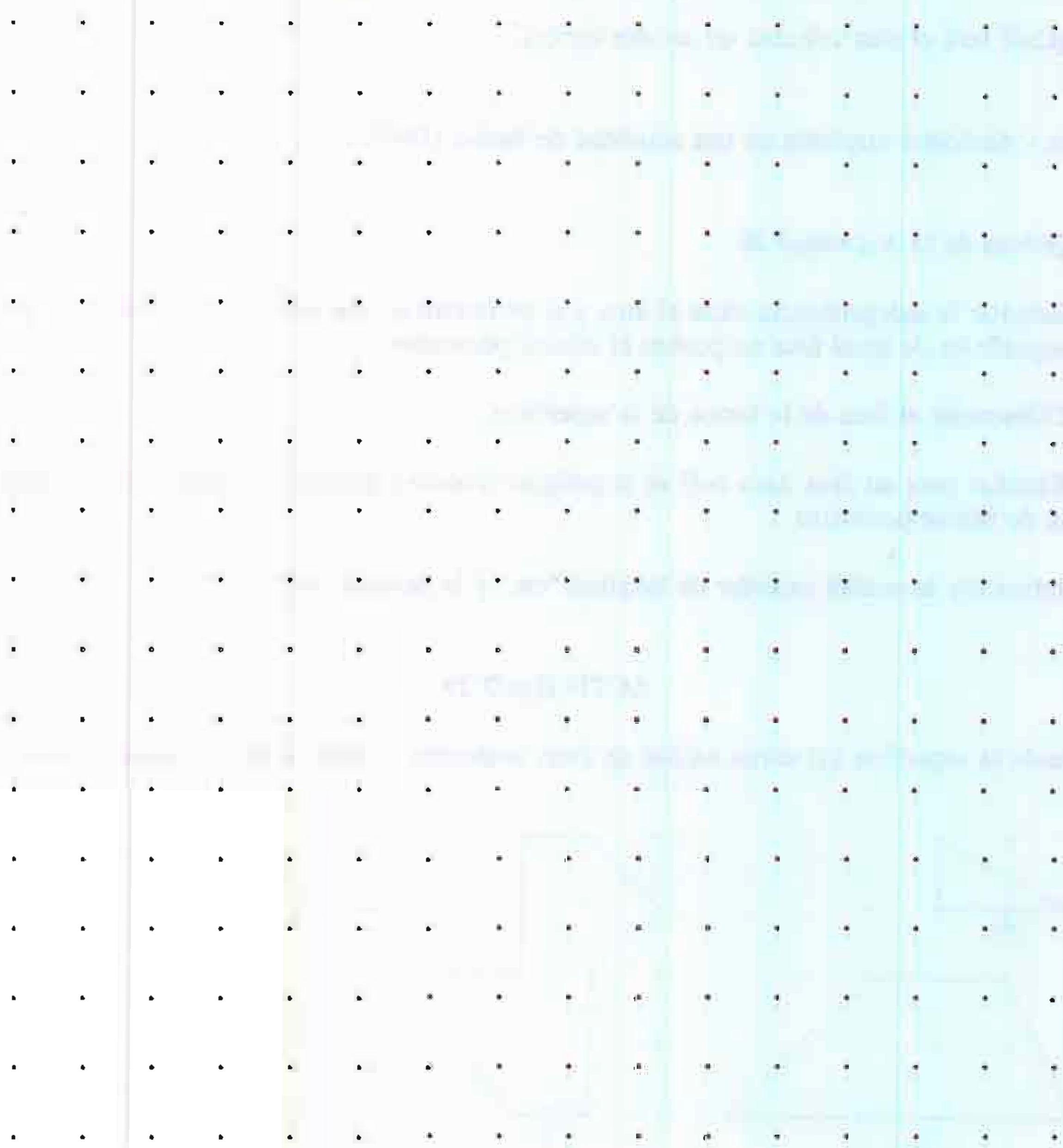


Objetivos de la Actividad 26

- Estudiar la independencia entre el área y el perímetro de una superficie, observando que superficies de igual área poseen diferente perímetro.
- Diferenciar el área de la forma de la superficie.

ACTIVIDAD 27

Dibuja sobre la trama cuadrada de puntos superficies de igual perímetro y diferente área.



Objetivos de la Actividad 27

- Estudiar la independencia entre el área y el perímetro de una superficie, observando que superficies de igual perímetro no poseen igual área.

ACTIVIDAD 28

a) ¿Cómo habrá que disponer 36 cuadrados de 1 cm de lado para formar dos tapices, de manera que el perímetro de uno sea el menor posible, y el del otro, el mayor posible?

b) ¿Cuál será el área cubierta en los dos tapices?

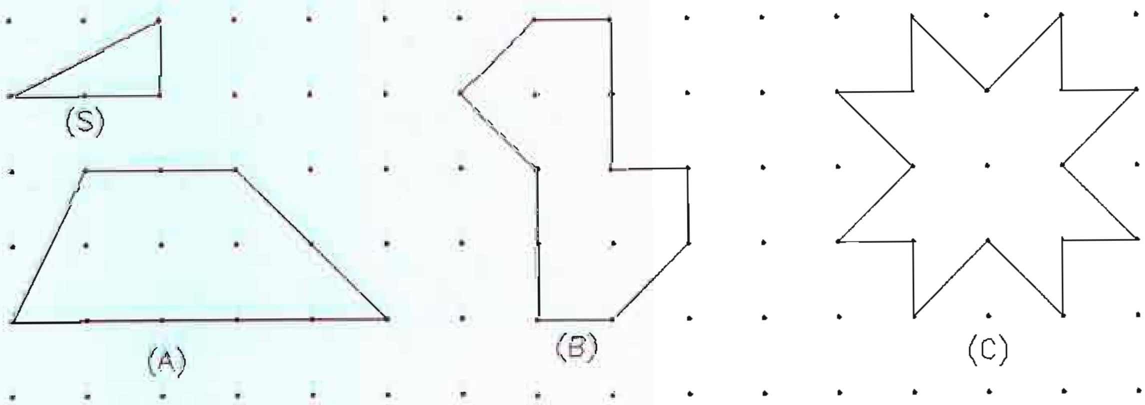
Nota.- Actividad inspirada en una actividad de Bruño (1951).

Objetivos de la Actividad 28

- Estudiar la independencia entre el área y el perímetro de una superficie, observando que superficies de igual área no poseen el mismo perímetro.
- Diferenciar el área de la forma de la superficie.
- Estudiar para un área dada cuál es el polígono convexo con mayor perímetro, y cuál es el de menor perímetro.
- Introducir la unidad estándar de longitud "cm" y la de área "cm^2".

ACTIVIDAD 29

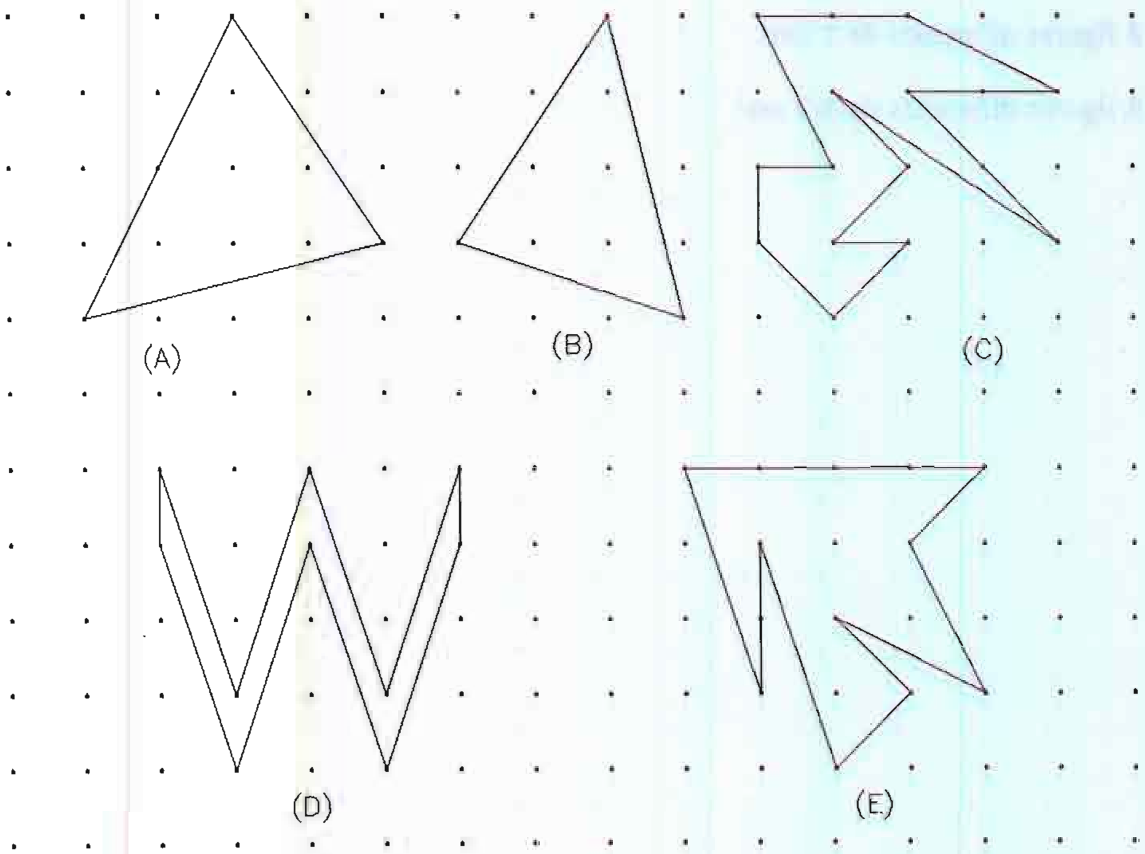
Usando la superficie (S) como unidad de área, encuentra el área de las siguientes figuras:



Nota.- Extraída de Musser y Burger (1988).

ACTIVIDAD 30

Calcula el área de cada una de las figuras siguientes:



Nota.- Extraída de O'Daffer y Clemens (1977).

Objetivos de las Actividades 29 y 30

- Concienciar a los alumnos del interés de compaginar procedimientos geométricos y numéricos, con objeto de facilitar la medida de un área. En concreto, con estas actividades se propicia el uso del procedimiento geométrico de partición de la superficie en trozos y posterior reconfiguración de éstos por complementariedad de formas para crear una nueva superficie de área fácilmente cuantificable.

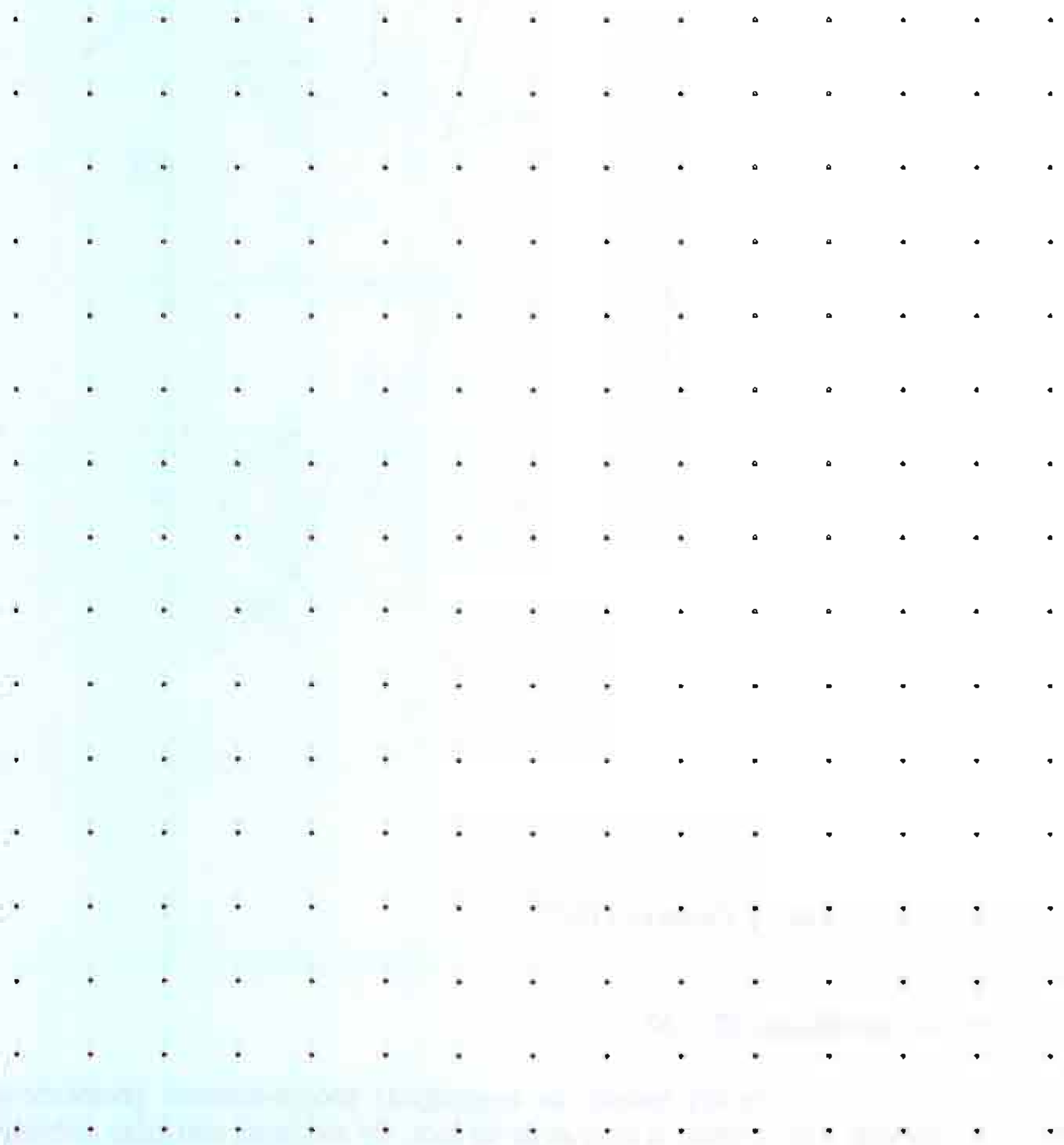
ACTIVIDAD 31

Sobre la trama cuadrada de puntos dibuja:

a) 4 figuras diferentes de 1/2 cm^2.

b) 8 figuras diferentes de 1 cm^2.

c) 8 figuras diferentes de 3/2 cm^2.



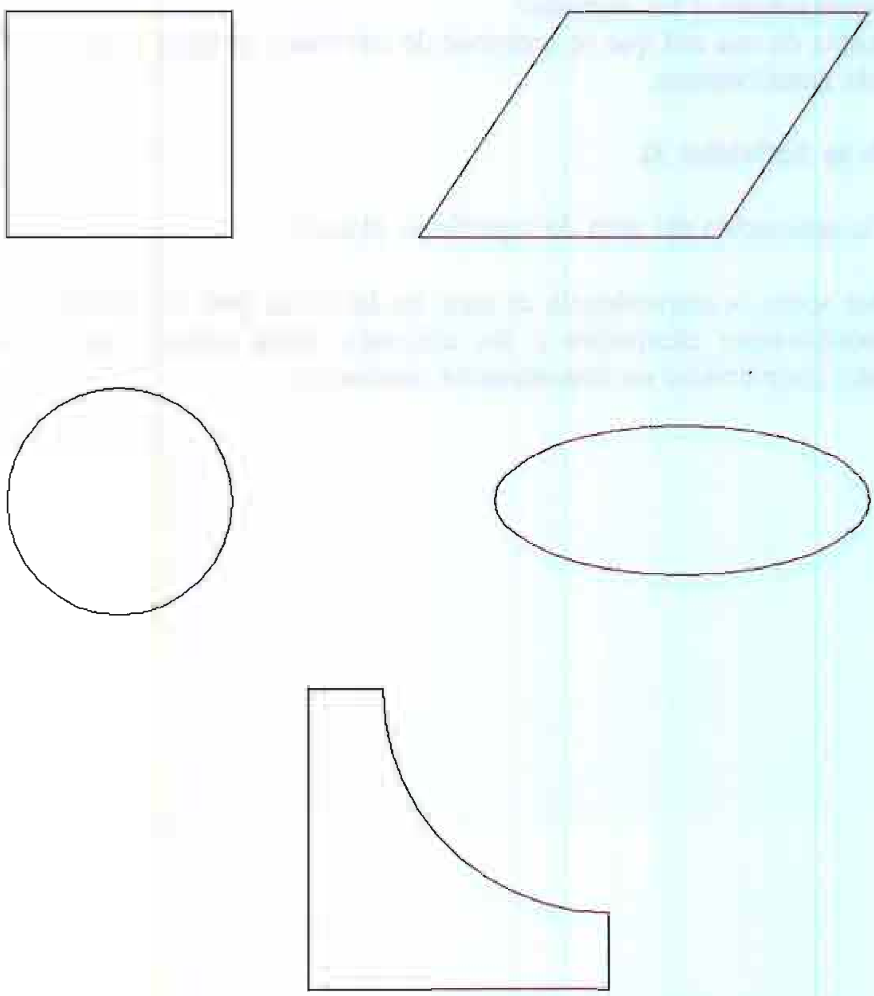
Nota.- Adaptada de una actividad de O'Daffer y Clemens (1977).

Objetivos de la Actividad 31

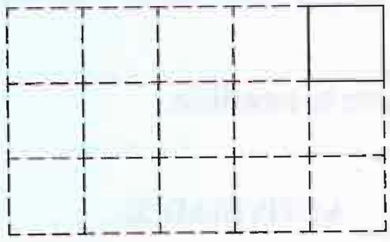
- Estudiar el "cm^2" a partir de la unidad cuadrada, pero disociando el "cm^2" del área de un cuadrado de 1 cm de lado.
- Diferenciar el área de la forma de la superficie.

ACTIVIDAD 32

Mide el área de cada figura. Utiliza para ello la red con el centímetro cuadrado como unidad.



Tipo de red proporcionada a los alumnos para medir el área:



Nota.- Extraída de O'Daffer y Clemens (1977).

Material proporcionado a los alumnos:
- Una fotocopia de una red que se compone de cuadrados de lado 1 cm de longitud, como la mostrada anteriormente.

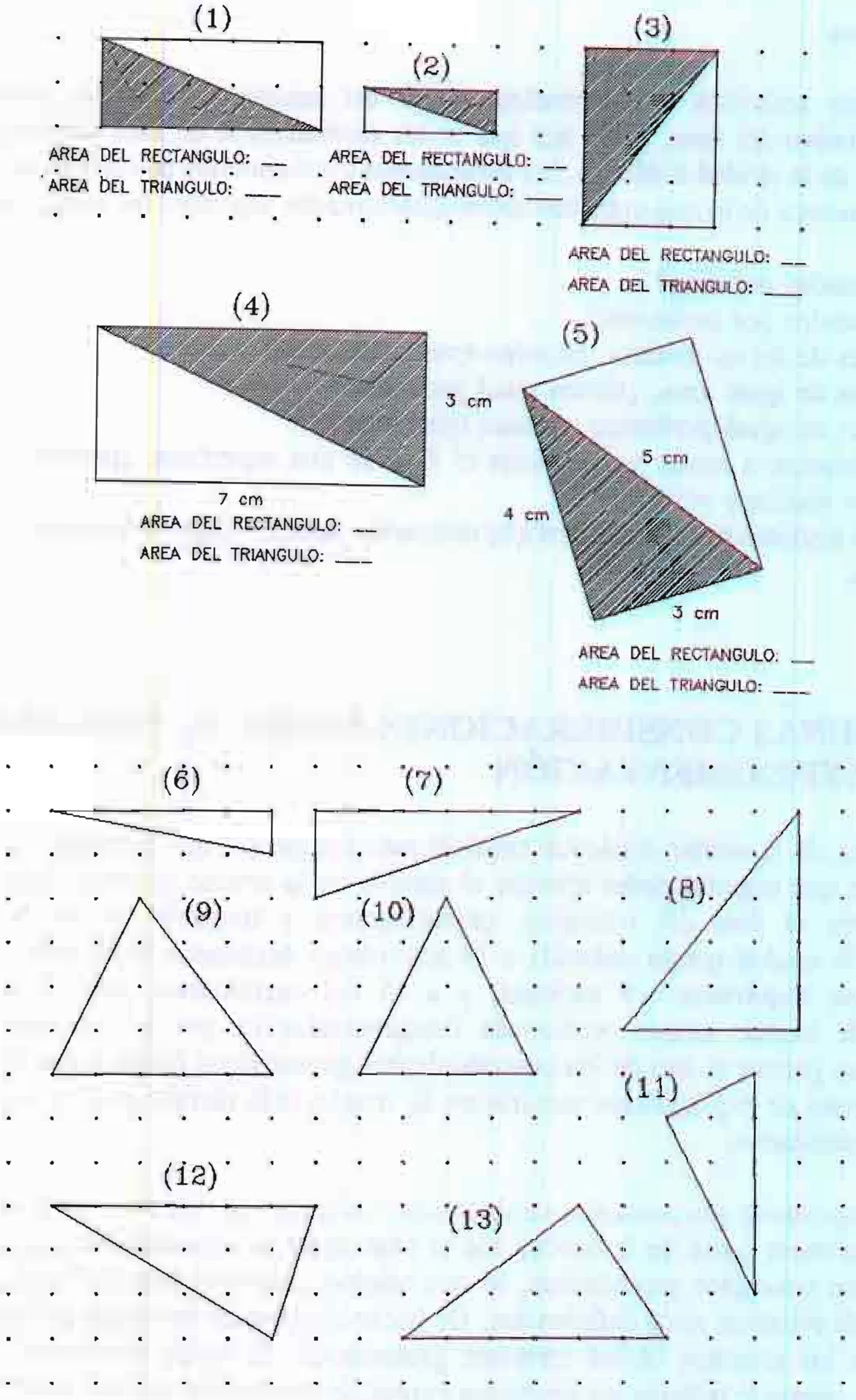
Objetivos de la Actividad 32

- Trabajar la estimación del área de superficies planas.

- Reflexionar sobre la conveniencia de usar las fórmulas para el cálculo exacto del área, como procedimiento alternativo a los utilizados hasta ahora, que se han mostrado insuficientes (imprecisos) en determinados momentos.

ACTIVIDAD 33

Determina las áreas que en cada caso se te indica:



Nota.- Adaptada de una actividad de SMP 11-16 (1985).

Objetivos de la Actividad 33

- Estudiar la fórmula del área del rectángulo y la relación del área del triángulo con la del rectángulo que lo contiene.

Observaciones

Finalizada esta actividad, e independientemente del resumen que se les solicitó sobre el estudio cualitativo del área, y del test que se les administraría un mes después de finalizar la enseñanza de la unidad didáctica, les formulamos a los alumnos con objeto de recabar más información acerca de lo que opinaban sobre determinados aspectos, las siguientes preguntas:

¿Qué entiendes por área?
¿Qué entiendes por perímetro?
Superficies de forma distinta, ¿pueden tener igual área?
Superficies de igual área, ¿tienen igual perímetro?
Superficies de igual perímetro, ¿tienen igual área?
Se ha procedido a medir varias veces el área de una superficie, ¿podría ocurrir que se obtuvieran distintos números?
Indica los distintos procedimientos que utilizarías para comparar el área de dos superficies diferentes.

4.4. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

La enseñanza de la unidad didáctica requirió más tiempo del que habíamos previsto en un principio, lo que impidió poder abordar el estudio de la unidad estándar "cm^2", y el de la relación entre el área del triángulo, paralelogramo y trapecio con la del rectángulo. Finalmente la unidad quedó reducida a 18 actividades destinadas al tratamiento cualitativo del área, que requirieron 18 sesiones, y a 15 del cuantitativo, con 10 sesiones. Esta diferencia de tiempo estuvo ocasionada fundamentalmente por la variedad de tipos de respuesta que genera el uso de los procedimientos geométricos frente a los numéricos, por lo que las fases de explicitación requirieron de mucho más tiempo en el estudio cualitativo que en el cuantitativo.

Un factor importante que pensamos también pudo influir en la "lentitud" con la se evolucionó durante la primera parte de la unidad fue el bajo nivel de conocimientos que los alumnos poseían sobre conceptos geométricos, lo que originó continuas intervenciones del profesor con objeto de subsanar estas deficiencias. De hecho durante las primeras sesiones la práctica totalidad de los alumnos utilizó términos geométricos de forma incorrecta y/o con gran imprecisión, como lo reflejan las siguientes expresiones extraídas de afirmaciones de algunos alumnos:

Un alumno/a se refiere a los dos triángulos mayores del tangram en la Actividad 1, que son iguales, del siguiente modo:

> Cuando me refiero a dos triángulos semejantes, quiero decir iguales. Los triángulos "1" y "2" son semejantes en cuanto a forma y área.

Un alumno/a en la Actividad 1 para indicar que dos piezas del tangram son triángulos rectángulos, afirma:

> La figura "1" es igual que la "7" pero el área de la figura "1" es mayor. Son dos figuras de la misma familia.

Otro alumno/a también en la Actividad 1 se refiere al perímetro cómo:

> La suma de todos sus lados.

Un grupo en la Actividad 9 para referirse a los triángulos rectángulo en los que habían descompuesto el cuadrilátero utilizaron la expresión siguiente, que por otro lado hemos comprobado que es bastante habitual entre los alumnos:

> Lo hemos descompuesto en rectángulos más pequeños.

Mientras que las incorrecciones estaban causadas bien por el desconocimiento del significado del término o por un conocimiento erróneo de éste, las imprecisiones estaban originadas por la incomprensión de los alumnos de la importancia que tiene expresarse con corrección en cualquier tipo de lenguaje. A lo largo del desarrollo de las sesiones el uso incorrecto de los términos disminuyó significativamente gracias a las aclaraciones realizadas por el profesor. Sin embargo persistió la tendencia de los alumnos a expresarse con imprecisión.

Un ejemplo más de la pobreza de los conocimientos que poseen los alumnos en el campo geométrico es el hecho de que cuando los alumnos se enfrentaron a la resolución de la Actividad 8, la mayoría de los alumnos consideró como cuadrilátero un cuadrado, y al comprobar que les resultaba la misma tarea que habían realizado en la actividad nº7, afirmaron que las Actividades 7 y 8 eran iguales. Ello obligó al profesor a intervenir para hacerles reflexionar sobre el enunciado de la tarea, y hacerles hincapié en que se hablaba de un cuadrilátero y no de un cuadrado, por lo que les sugirió la utilización de un cuadrilátero irregular. Aún a pesar de esta aclaración, los cuadriláteros considerados por los distintos grupos fueron, un rectángulo, un rombo, un paralelogramo, un trapecio isósceles, y dos cuadriláteros convexos irregulares. Lo que viene a mostrar el campo tan limitado y pobre de experiencias que se les ha proporcionado a estos alumnos durante su enseñanza de geometría.

A continuación exponemos algunas consideraciones sobre el comportamiento mostrado por los alumnos durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza en los aspectos que nos han parecido más relevantes.

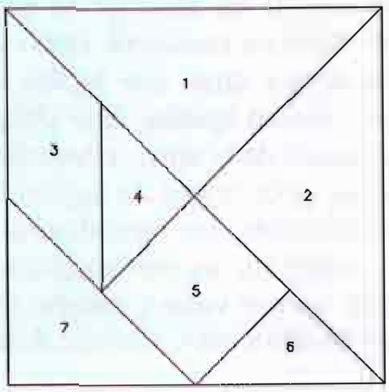
Conceptos de área y perímetro

Los alumnos no necesitaron en ningún momento aclaración alguna sobre el significado del concepto de área de una superficie plana. Todos ellos y desde un principio pensaban en el área como el espacio que ocupa la superficie en el plano, pudiendo comprobar durante y al final de la experimentación que todos los alumnos preguntados por el significado de este concepto se referían a la concepción geométrica del área. Sólo un alumno, una vez finalizada la experimentación, se refirió a ella como la medida del espacio que ocupa. Está claro pues que el estudio cuantitativo del área realizado no modificó el modo como los alumnos se referían al área ya desde un principio, aún teniendo el completo convencimiento de que los alumnos habían abordado con total comprensión las distintas actividades planteadas para llevar a cabo este estudio, y que si bien los alumnos comprendían que el área venía dada por el número de unidades que la recubrían, no se refirieron a ello en ningún caso. Lo que nos hace pensar que los cambios en la concepción de los estudiantes del área están ligados a largos y laboriosos procesos de enseñanza, así como a una madurez matemática del alumno.

No se puede decir lo mismo del perímetro para el que en determinadas ocasiones fue necesario realizar algunas precisiones, y del que se detectó una concepción errónea. Algunos alumnos creen que el perímetro de un polígono depende del número de lados que posee, como se puede apreciar en el diálogo mantenido entre el profesor y un alumno, durante la resolución de la Actividad 1:

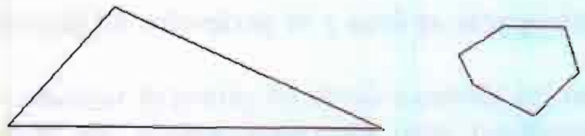
A: Alumno
P: Profesor

A: La figura "1" respecto a la "3" tiene el perímetro menor y el área mayor. La figura "3" tiene un lado más. La figura "1" tiene más área que la "5" pero menos perímetro. La figura "1" tiene un lado menos.



P: Entonces, ¿el perímetro depende del número de lados?
A: Sí. Es mayor el perímetro porque tiene un lado más.
P: Entonces, un polígono de 6 lados tiene mayor perímetro que un triángulo, ¿no? ¿Sea cuál se éste?
A: Sí.

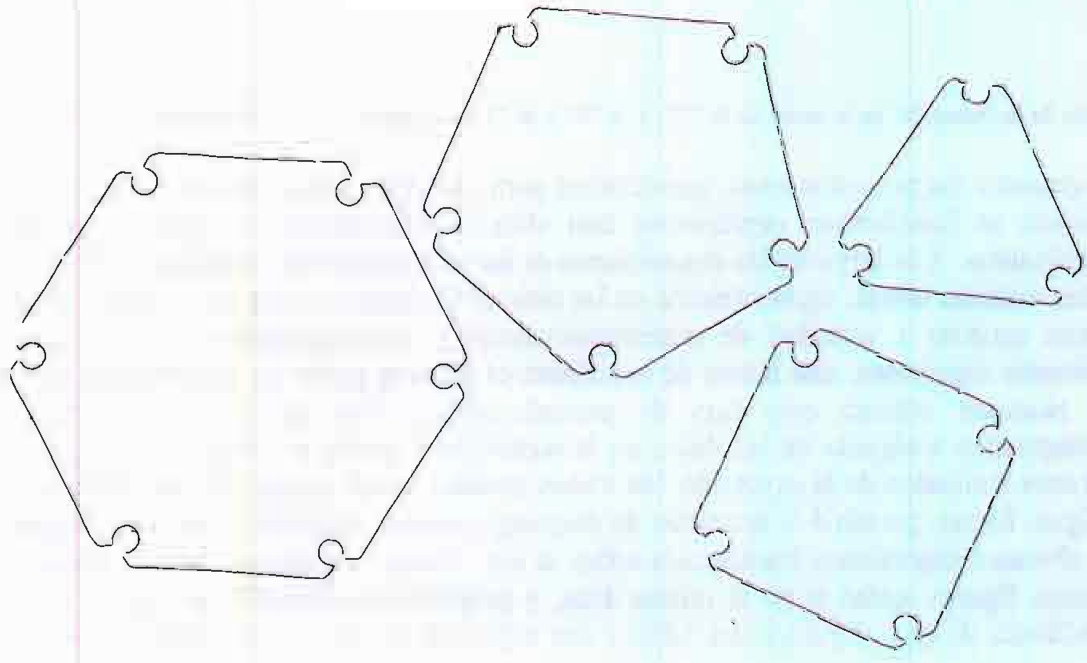
P: ¿Quieres decir que este polígono tiene mayor perímetro? (El profesor se refiere al exágono y al triángulo que ha dibujado en la pizarra, y le señala el exágono a la vez que le formula la pregunta).



(El alumno permanece en silencio sin responder, mientras que el resto de los alumnos comentan que no es cierto lo que afirma. Finalmente responde)

A: No. El triángulo tiene mayor perímetro. Estaba equivocado.

Si bien en un principio pensamos que con la aclaración dada por el profesor el error quedaría subsanado, nos equivocamos completamente, y pudimos comprobar con preocupación cómo esta concepción se manifestó posteriormente en varias ocasiones, y por diferentes alumnos, aún cuando cada vez que surgía se aclaraba, y aparentemente los alumnos comprendían el error cometido. Sorprendidos por la persistencia de este error intentamos encontrar su origen, llegando a creer que podría estar asociado con el modo en el que habitualmente se presentan a los alumnos los polígonos. Conforme el polígono posee mayor número de lados se reproduce de mayor tamaño con objeto de apreciar con claridad sus características, y en consecuencia efectivamente poseen mayor perímetro, hecho éste que se ve agravado por el hecho de que los polígonos que normalmente se les muestra a los alumnos son los regulares. Hemos comprobado que este hecho también se produce en los polígonos regulares, que forman parte de materiales didácticos, y que están diseñados para ser encajados, como por ejemplo el que se conoce con el nombre de troquelado, y de los que, aunque en escala reducida, presentamos aquí una muestra:



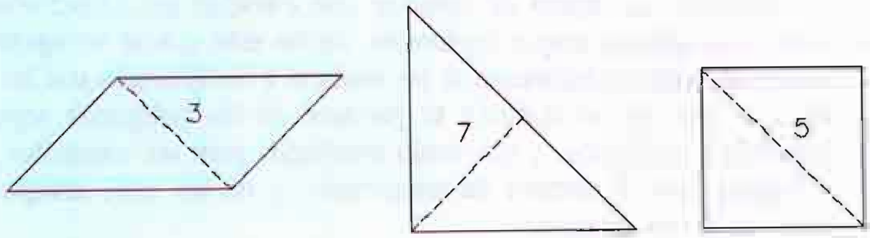
De ese modo el alumno que conserve la imagen de una secuencia como la anterior, y que no se haya enfrentado a otro tipo de situaciones podría pensar erróneamente que el perímetro de un polígono depende de su número de lados.

Procedimientos para comparar el área y el perímetro de dos superficies

Hemos observado cómo los alumnos desde un principio utilizan en sus procedimientos de forma implícita (inconsciente) pero comprensivamente las propiedades Aditiva, de la Invarianza y de la Disección del área. Del mismo modo ha sucedido con la propiedad transitiva, que ha sido utilizada por algunos alumnos y en determinadas ocasiones para emitir una opinión sobre las áreas de dos superficies cuando éstas no podían compararse directamente. Como ejemplo mostramos las conclusiones a las que llegaron los alumnos de dos grupos al comparar el área de algunas piezas del tangram en la Actividad 1:

A: Alumno

A: **Las figuras "3", "5" y "7" tienen la misma área, ya que con las figuras "4" y "6" conseguimos la figura "3", "5" y también la "7". (Dibujan los siguientes polígonos y refiriéndose a ellos dan la afirmación siguiente).**



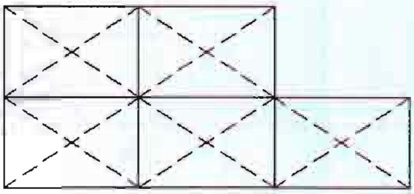
A: **Si la figura "6" es la mitad de la "7", y la "5" y la "7" son iguales, la "6" también será la mitad de la "5".**

En cuanto a los procedimientos geométricos para comparar áreas, hemos constatado que los alumnos se familiarizan rápidamente con ellos, produciéndose un aprendizaje rápido y significativo. A lo largo de las exposiciones de los razonamientos aportados por los alumnos en las distintas tareas, especialmente en las últimas destinadas al estudio cualitativo del área, hemos asistido a variedad de descomposiciones y reconfiguraciones de las superficies realmente ingeniosas, que ponen de manifiesto el elevado grado de comprensión con el que los alumnos utilizan este tipo de procedimientos. Las siguientes descomposiciones corresponden a algunas de las dadas en la Actividad 5 donde la interpretación que algunos alumnos realizaron de la expresión "en trozos iguales" como figuras de igual área aunque no de igual forma, permitió la aparición de descomposiciones originales, que ocasionaron entre los alumnos discusiones interesantes sobre si los "trozos" en los que habían descompuesto algunas figuras tenían o no la misma área, y propició la utilización por parte de algunos estudiantes de reconfiguraciones hábiles con objeto de justificar la igualdad de área.

Figura (1)

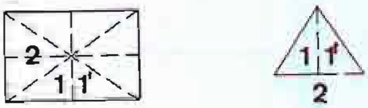
Grupo 4

Los alumnos de este grupo proponen la siguiente descomposición



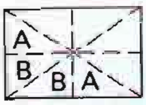
A: Alumno
P: Profesor

P: ¿Crees que esos triángulos son iguales?
A: Si estuvieran bien hechos sí. En perímetro no son iguales pero en área sí. (Los alumnos de los otros grupos dicen que no). (En ese momento otro compañero del grupo toma la palabra y se expresa del siguiente modo).
A: Si divides el triángulo "1" por la mitad y las inviertes juntándolos obtienes el triángulo "2".



(Como parece que los otros alumnos no lo entienden, este último alumno realiza la siguiente explicación)

A: Los triángulos "1" y "2" tienen igual área porque estos triángulos son iguales (simultáneamente a como lo va diciendo señala los triángulos de la figura que ha dibujado en la pizarra, y que es la que se indica a continuación). (Tras esta explicación el resto de los alumnos quedan convencidos y se acepta la descomposición realizada por este grupo).



Grupo 6

Descomponen la figura en 5 triángulos rectángulos.

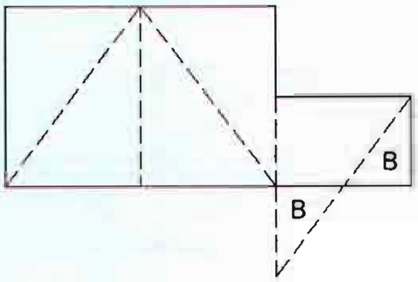
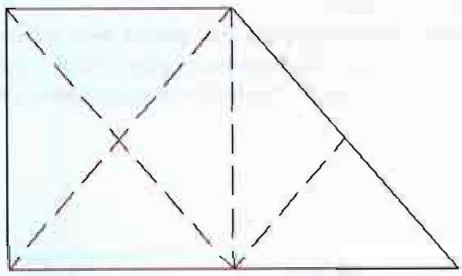


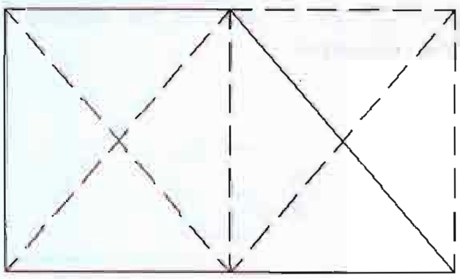
Figura (2)

Grupo 4

Este grupo presenta la siguiente descomposición:



Como algunos alumnos no aceptan que todos estos triángulos tengan igual área, los alumnos de este grupo lo justifican a partir de la siguiente figura:



Grupo 1

El representante del grupo afirma: "Nosotros hemos descompuesto la figura (2) en 4 rectángulos iguales".

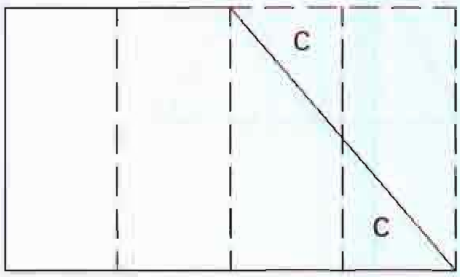
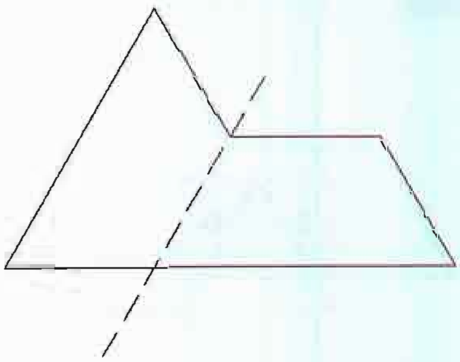


Figura (4)

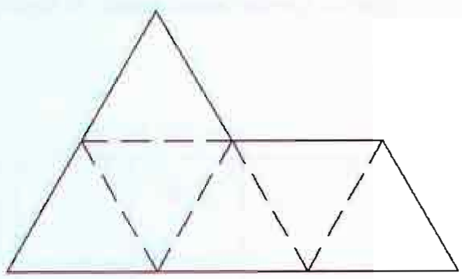
Grupo 1

A: Alumno
P: Profesor

A: Hemos descompuesto la figura en dos trapecios.

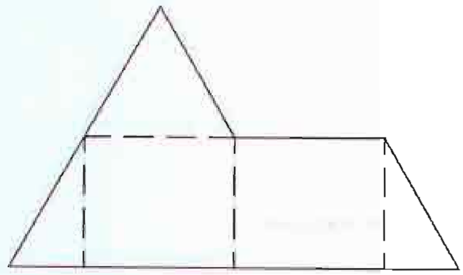


P: ¿Cómo podéis garantizar que tienen igual área?
A: Porque contienen los mismos triángulos. (El alumno procede a descomponer la figura (4) en triángulos como se muestra en la figura siguiente).

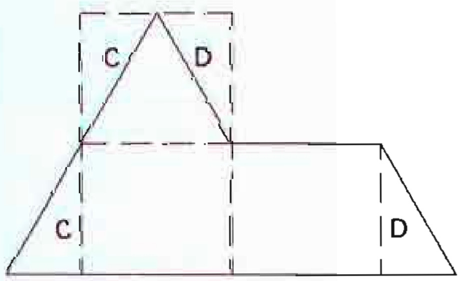


Grupo 6

Este grupo descompone la figura (4) en tres cuadrados iguales, como se muestra a continuación.



El resto de compañeros les preguntan: ¿Donde están los cuadrados? (Entonces el reprresentante del grupo en esa ocasión dibuja la figura siguiente).

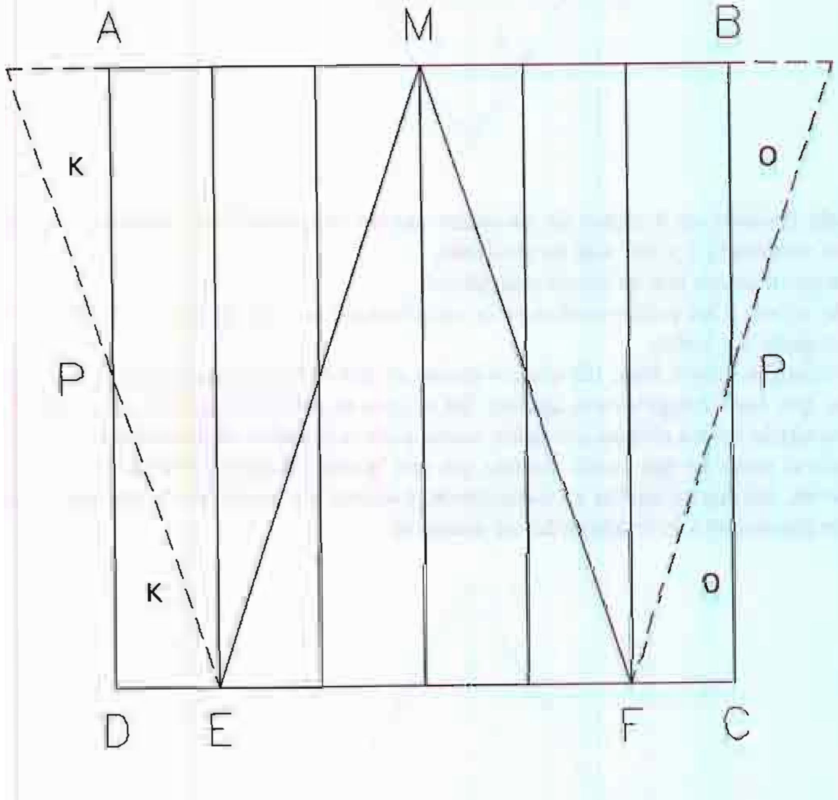


Algunas de estas descomposiciones condujeron de forma natural a la necesidad de utilizar razonamientos de un nivel superior al utilizado hasta ese momento para justificar la igualdad del área de los distintos trozos en los que la superficie había sido descompuesta. Es decir, en los primeros casos la igualdad de las piezas en las que se descomponía la superficie era tan evidente que no se necesitaba sino afirmar que poseían igual área porque eran iguales, sin embargo en determinadas descomposiciones ya más sofisticadas y menos evidentes, algunos alumnos frente a la demanda de los otros debieron justificar la igualdad de dos polígonos razonando sobre la igualdad de sus elementos. Por ejemplo, dos triángulos obtenidos tenían igual área al ser iguales por así serlo sus lados y ángulos. Veamos lo que sucedió cuando los alumnos de determinados grupos propusieron su resolución en las Actividades 11 y 14.

Actividad 11

Grupo 1

Los alumnos de este grupo afirmaron que habían llegado a la conclusión de que las figuras AMED, BMFC y MEF eran iguales porque (y mostraron el siguiente dibujo):



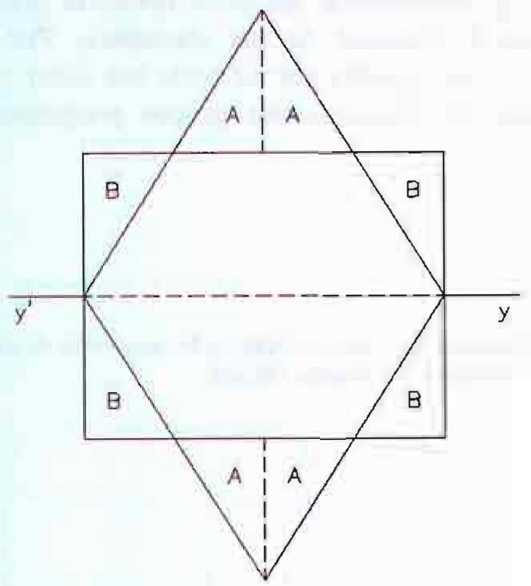
Como el dibujo no era muy bueno otros alumnos les dicen que no lo ven. Entonces el profesor les pide que expliquen cómo han realizado la construcción, ya que de ello dependerá que admitamos o no que esos trozos tengan igual área. El representante del grupo indica que los puntos P y P' son los puntos medios del lado, y comienza a razonar sobre los ángulos y lados de los triángulos, llegando a afirmar que son iguales pero invertidos, y que por lo tanto tienen igual área.

Actividad 14

a) Transforma el rombo del dibujo en otra superficie de igual área y menor perímetro

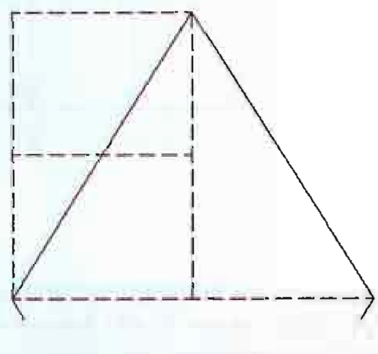
Grupo 2

Los alumnos de este grupo realizaron la siguiente transformación:



A: Alumno
P: Profesor

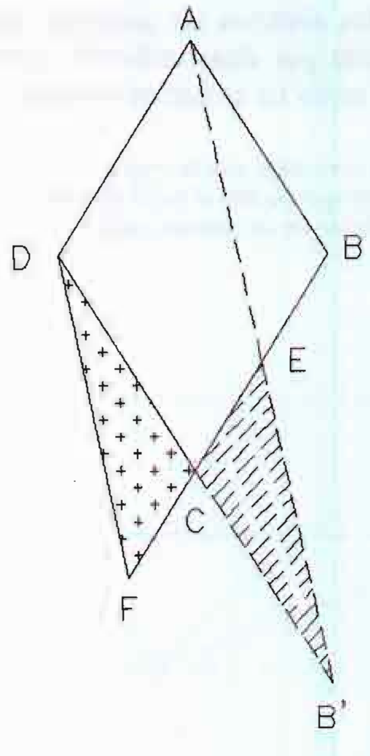
A: El rombo ha sido dividido en 4 partes de las cuales hemos cogido las 2 del medio y hemos trazado dos paralelas por los vértices (y') y nos sale un cuadrado.
P: ¿Las paralelas están trazadas por un punto cualquiera?
A: Por la mitad. (Se refiere a los puntos medios de la semidiagonal mayor). (Entonces un alumno de otro grupo le formula la pregunta siguiente).
A: No sé por qué tienen la misma área. (El alumno insiste en que tienen la misma área porque son iguales).
P: Intenta justificar que esos triángulos son iguales. (El alumno se queda bloqueado y no sabe cómo proceder. Mientras esto sucede la misma alumna que había cuestionado la igualdad de área de las figuras A y B, afirma haber descubierto el modo en que puede mostrar que son iguales. Realiza el siguiente dibujo y compara las 4 piezas resultantes, los dos triángulos y cuadriláteros, y afirma que así se ve que los triángulos tienen igual área, pareciendo convencer a la totalidad de los alumnos).



b) Transforma el rombo del dibujo en otra superficie de igual área y mayor perímetro

Grupo 4

Los alumnos de este grupo muestran la siguiente transformación:



A: Alumno
P: Profesor

A: Para obtener igual área y mayor perímetro hemos trazado un segmento que va desde el vértice A hasta el centro del lado BC superponiendo la figura 2 sobre la zona rayada. También llevando la figura 2 a la zona de cruces se obtiene una figura de iguales características a la anterior ya que la hipotenusa de la figura 2 se transforma en un lado de la nueva figura.

P: ¿Por qué el triángulo 2 es idéntico al rayado? (El alumno no sabe responder).

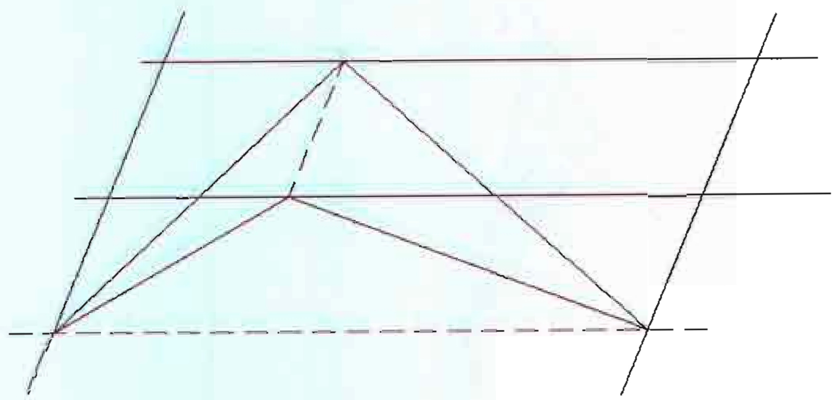
P: Está claro que las dos figuras tienen la misma área, ya que puedes recortar y pegar, pero lo que ya no está tan claro es que la nueva figura sea exactamente un triángulo, y para ello deberías justificar la igualdad lado a lado. (El alumno continúa sin saber cómo proceder. Está totalmente bloqueado, y tampoco ningún otro compañero sabe cómo hacerlo. Ante esta situación el profesor opta por no insistir más y le pregunta acerca del perímetro).

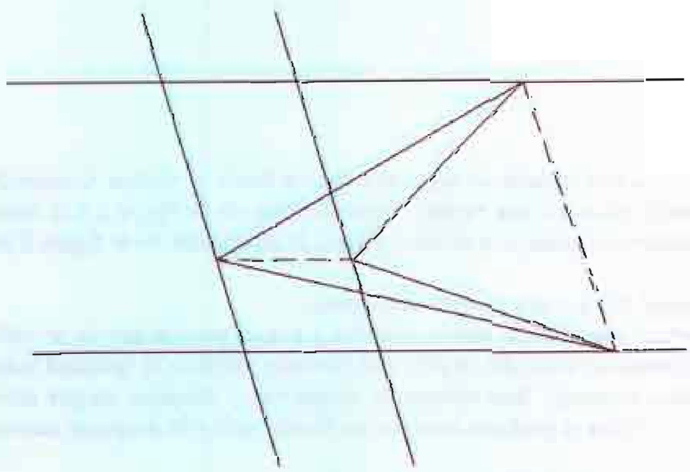
P: Bueno, explica por qué la nueva figura posee mayor perímetro que el rombo.

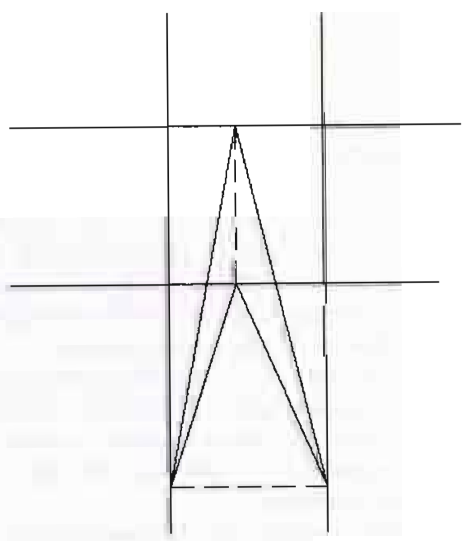
A: Porque, CE y EB son iguales, AB=CB', y añado el lado EB'.

También otras situaciones geométricas surgidas durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza requirieron para su correcta resolución de un nivel de razonamiento y de conocimiento superior al que los alumnos poseían. Por ejemplo en la Actividad 8 se planteó una situación que no estaba prevista, ya que como consecuencia de la insistencia del profesor a los alumnos a considerar cuadriláteros irregulares, un grupo planteó el estudio sobre un cuadrilátero cóncavo. Esta circunstancia no sólo no perjudicó sino que por el contrario enriqueció la actividad dado que aportó un nuevo caso donde además no se cumplía la relación entre las áreas que se daba entre cuadriláteros convexos cualesquiera, pero donde, como veremos a continuación, los alumnos no pudieron justificar su respuesta de forma adecuada, ya que el procedimiento por ellos utilizado carecía, en este caso, del rigor y precisión necesarios. Veamos el modo en el que procedieron los alumnos de este grupo:

A: **El área del nuevo cuadrilátero no es el doble que la original, ya que si cerramos más el polígono se puede apreciar que tendrá mayor área pero que no será el doble.**(Entonces el alumno muestra la siguiente serie de cuadriláteros cóncavos que ha utilizado en su razonamiento).







P: ¿Pero cómo has llegado a esa conclusión?
A: En el primer caso yo he recortado las piezas y las he ido encajando, y quedan incluidas pero no creo que sea el doble.
P: ¿No puedes argumentarlo de otro modo?
A: No. (Es en ese momento cuando el profesor comenta la necesidad de utilizar otro procedimiento que permita concluir con seguridad que el área del paralelogramo construido sobre el cuadrilátero cóncavo no es el doble de éste último, y de no llegar a conclusiones a partir de apreciaciones).

Durante el tratamiento cuantitativo del área hemos podido constatar el correcto y adecuado uso que los alumnos han hecho de los procedimientos geométricos, cuando ha resultado difícil medir directamente el área de una superficie y ha sido necesario proceder a su reconfiguración en otra más fácilmente medible.

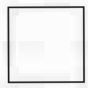
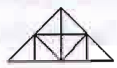
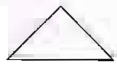
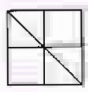
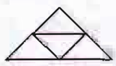
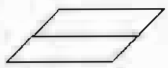
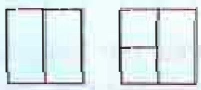
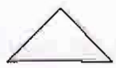
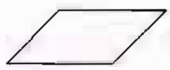
Algunos alumnos mostraron un comportamiento diferenciado por lo que respecta a la comparación de áreas y perímetros de superficies planas: Mientras que en un contexto geométrico la totalidad de los alumnos comparan el área de dos superficies mediante procedimientos geométricos, no sucede de igual forma al comparar los perímetros, donde se ha detectado una tendencia en los alumnos a utilizar instrumentos de medida para determinar la longitud de los lados.

Los procedimientos numéricos para la medición de áreas se quedaron reducidos a uno sólo, basado en la iteración de una unidad de medida, y posterior recuento del número de veces que ésta está contenida en la superficie, ya que si bien el estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas estaba previsto en el diseño inicial de la unidad, no fue posible abordarlo por falta de tiempo. Sólo de forma anecdótica, por dedicar una sola actividad a ello, se procedió al estudio de las fórmulas del área del rectángulo y triángulo.

La práctica totalidad de los alumnos comprendieron el papel que juega la unidad de área en la medida del área. De hecho a la pregunta: "Se ha procedido a medir el área de una superficie, ¿podría ocurrir que se obtuvieran distintos números?", que fue formulada a los alumnos una vez finalizada la experimentación, todos los alumnos a excepción de tres respondieron correctamente afirmando que el número obtenido dependería de la unidad de medida que se hubiera elegido.

Hemos observado cómo de forma natural los alumnos utilizan comprensivamente las propiedades de la unidad de área, y cómo la utilización de una reproducción de la unidad (dibujada) en lugar de la manipulación de la propia unidad física no les causa problema alguno. El uso de diferentes unidades de medida para cuantificar el área de una misma superficie tampoco les supuso ninguna dificultad, y les permitió disociar el área del número que la mide, y comprender que aún pudiendo utilizarse varias unidades de medida para medir el área de una superficie, siempre existirá/n alguna/s que será/n más adecuada/s que otra/s.

En la tabla siguiente se muestran las unidades utilizadas por los grupos para cuantificar el área de las tres superficies dadas en la Actividad 25, junto con las distintas subdivisiones realizadas en las unidades, y donde se aprecia que los grupos subdividieron de diferente modo una misma unidad según sus necesidades. En ella se indica también el modo en el que cada grupo procedió para medir el área de las distintas superficies. Para la medida del área los alumnos optaron bien por subdividir la unidad en partes iguales más pequeñas, según lo consideraron apropiado para poder realizar una buena estimación del área de los trocitos de las superficies donde no "cabía" de forma entera la unidad, o bien por recomponer la unidad con los trozos sobrantes de las superficies tras la iteración de la unidad. En el mayor número de ocasiones los estudiantes simultanearon estos dos procedimientos.

	SUPERFICIE (A)	SUPERFICIE (B)	SUPERFICIE (C)
GRUPO 1	subdividen la unidad y la recomponen 	subdividen la unidad y la recomponen 	recomponen la unidad 
GRUPO 2	subdividen la unidad  (*)	subdividen la unidad 	subdividen la unidad 
GRUPO 3	subdividen la unidad 	subdividen la unidad y la recomponen 	recomponen la unidad 
GRUPO 4	subdividen la unidad y la recomponen 	subdividen la unidad y la recomponen 	subdividen la unidad y la recomponen 
GRUPO 5	subdividen la unidad y la recomponen 	subdividen la unidad y la recomponen 	subdividen la unidad y la recomponen 
GRUPO 6	subdividen la unidad y la recomponen 	recomponen la unidad 	subdividen la unidad y la recomponen 

(*) No hemos indicado la subdivisión de la unidad utilizada por el grupo 2 en la medida del área del rectángulo porque no siempre utilizaron la misma subdivisión de la unidad, sino que combinaron diferentes particiones, aunque todas ellas eran del tipo como la utilizada por este mismo grupo en el caso del triángulo.

Se observa cómo la unidad de medida más usada por los alumnos fue la unidad cuadrada, lo que evidencia una clara inclinación de éstos por ella, justificada en esta ocasión porque permite una subdivisión más sencilla y precisa que las otras, como así lo confirma la respuesta dada por el representante del grupo 2 cuando se le preguntó por el motivo de su elección: "la utilizamos por comodidad, porque es más fácil de dividir que las otras unidades, pero también se puede hacer con las otras", como de hecho así han procedido otros grupos aún cuando sus mediciones han resultado más dificultosas por resultar la subdivisión de la unidad triangular y la del paralelogramo mucho más compleja que la de la unidad cuadrada. Sin embargo, no todos los alumnos han considerado la comodidad de la medición como criterio para elegir la superficie unidad, ya que los alumnos de los grupos 5 y 6 adoptaron como criterio de elección la forma que posee tanto las superficies unidad como las de las que se desea determinar su área, escogiendo en cada caso una unidad de forma similar a la de la superficie dada.

Tras comportamientos de los alumnos como el descrito anteriormente y en sucesivos cálculos del área realizados en distintas actividades hemos constatado, que si bien existe una tendencia entre los alumnos a utilizar la unidad cuadrada como unidad de área, ya que la reproducen con facilidad y la pueden fraccionar fácilmente con objeto de poder efectuar la medida con cierta precisión, ello no significa que la utilicen siempre ni que su uso surja de ellos de forma natural, puesto que realmente no les incomoda emplear otras superficies de formas distintas como unidades de área. Sin embargo, tras la explicación de los motivos que justifican el uso generalizado de la unidad cuadrada de área frente a otras, los alumnos aceptan el uso de ésta sin mayor problema.

Independencia entre el área y la forma de una superficie

Desde el inicio de la enseñanza de la unidad, durante y una vez finalizada ésta se pudo comprobar que todos los alumnos tienen claro que superficies de formas distintas pueden tener igual área.

Independencia entre el área y perímetro de una superficie

Ya desde un primer momento se recogieron manifestaciones de algunos alumnos que nos alertaron de la existencia de la falsa relación que los estudiantes establecen entre el área y el perímetro de una superficie. Por ejemplo en la Actividad 1 el representante de un grupo al comparar las distintas piezas del tangram afirmó:

> Si el área de "6" es la mitad de la de "7", entonces su perímetro será también la mitad.

En la misma actividad otro grupo al referirse al área y al perímetro de las cinco figuras (pipa, pez, oca, camiseta, y pistola), construidas cada una de ellas con las 7 piezas del tangram, afirmó:

> [...] Los perímetros también son iguales porque los lados de las piezas han pasado de un sitio a otro, pero el perímetro es el mismo.

Está claro que los alumnos de este grupo confunden el perímetro de la figura con la suma de los perímetros de las piezas y cuando el profesor les preguntó sobre qué entienden por el perímetro de una figura, respondieron correctamente, e inmediatamente rectificaron sus conclusiones, comprendiendo "aparentemente" el error cometido. Así pues, pensamos que tras esta conclusión errónea, no existe un error conceptual del perímetro, sino la ausencia de un análisis sobre el significado del perímetro, pero que desgraciadamente les lleva a establecer una falsa relación entre el área y el perímetro: si las figuras están integradas por las mismas piezas (tienen igual área) tendrán también el mismo perímetro. Así pues creemos que cuando los alumnos concluyen que dos superficies poseen el mismo perímetro porque tienen igual área es consecuencia de la ausencia de un análisis sobre el significado del perímetro.

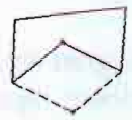
A pesar de nuestra manifiesta insistencia en el estudio de la independencia entre el área y el perímetro de una superficie, se pudieron recoger a lo largo de toda la unidad de enseñanza manifestaciones de alumnos en las que se constataba la dependencia que para ellos existía entre estas dos propiedades, afortunadamente en menor número y con menor frecuencia conforme avanzábamos en las actividades. Ejemplo de algunas de ellas fueron las realizadas por algunos alumnos en sus grupos de trabajo durante el estudio de la Actividad 15. Recordemos que en esta actividad los alumnos de cada grupo, ayudados de un tablero de corcho y de un trozo de hilo cerrado debían estudiar el área y el perímetro de los distintos polígonos construidos sobre él, con objeto de responder a una serie de preguntas que se les planteaban, resultando ser las primeras de ellas la siguientes: ¿los polígonos construidos, tienen todos la misma área?, ¿y el mismo perímetro? El siguiente diálogo forma parte de la conservación mantenida por los alumnos de un grupo con la investigadora cuando ésta se acercó para observar el trabajo que estaban realizando.

I: Investigadora.
A1: Alumno 1.
A2: Alumno 2.
A4: Alumno 4.

I: ¿Habéis llegado ya a alguna conclusión? ¿Todos los polígonos que habéis construido tiene igual área? (Responden simultáneamente dos alumnos del grupo).
A1: No.
A2: Sí.
I: Como no compartís todos la misma opinión, debéis intercambiaros vuestras opiniones e intentar convenceros unos a otros, si es posible.
A1: (Dirigiéndose a su compañero): Es que tú te estás refiriendo al perímetro, no al área.
A2: No, yo hablo del área (y al mismo tiempo que afirma esto, sobre el tablero de corcho donde hay construido un polígono, señala el interior de éste), de lo de dentro.

A1: Pues no es la misma. No ves que desde el principio estamos viendo que no hay relación entre el área y el perímetro.

I: (Dirigiéndose al alumno 1): ¿Podrías ponerle algún ejemplo que apoye lo que tú dices, con el fin de poderle convencer? (Este alumno junto con otro compañero del grupo (A4) afirman que sí, y sobre el mismo polígono cóncavo que tenían construido en el tablero hacen algo similar a lo mostrado en el siguiente dibujo).



A1: Es suficiente sacar este vértice (señala el vértice correspondiente al ángulo cóncavo).

I: ¿Queréis dibujarlo sobre el papel?

A4: (Dirigiéndose al alumno 2): Todos tienen el mismo perímetro pero diferente área. El último construido tiene mayor área. (Sorprendentemente el Alumno 2 sigue sin aceptar que los polígonos tengan diferente área).

I: ¿Estos dos polígonos (señalando a los anteriores) tienen la misma área?

A2: No.

I: ¿Y el mismo perímetro?

A2: Sí.

I: ¿Entonces? (Finalmente el Alumno 2 lo acepta, aunque creemos que no con un total convencimiento. Ante algo que tanto a nosotros como a sus compañeros de grupo, nos resulta tan evidente, después del ejemplo mostrado, no llegamos a entender cuál es la causa que no permite comprender a este alumno que los polígonos poseen igual perímetro y diferente área).

Sin embargo, y a pesar de situaciones como la que acabamos de comentar, las afirmaciones correctas dadas por los alumnos durante las Actividades 14, 15, 16 y 17 del estudio cualitativo y a lo largo de todo el estudio cuantitativo, y las manifestaciones realizadas por los alumnos en sus resúmenes confeccionados al finalizar los dos tipos de estudios, permitieron comprobar que eran conscientes de la existencia de superficies de igual área y diferente perímetro, y de igual perímetro y diferente área. Todo ello nos hizo pensar que las tareas propuestas habían cumplido con sus objetivos, y que los alumnos, en un futuro, serían capaces de emitir juicios razonados y correctos sobre el área y el perímetro de una superficie.

Algunas conclusiones

Las notas tomadas por la investigadora y las aportadas por el profesor en cada sesión, las grabaciones realizadas de las puestas en común de los alumnos, los resúmenes presentados por cada alumno una vez finalizado el estudio cualitativo y cuantitativo, y las respuestas dadas por los alumnos a las preguntas que se les formularon inmediatamente finalizada la enseñanza de la unidad nos han permitido extraer las siguientes conclusiones, a falta del análisis de los resultados del pre y post-test que se presenta en la próxima sección.

- Los alumnos a lo largo de la enseñanza de la unidad, y una vez finalizada ésta, dieron continuas muestras de ser conscientes de que uno de los principales estudios planteados en ella era la independencia que existe entre el área y el perímetro de una superficie.

- La creencia de que el perímetro de un polígono depende de su número de lados se ha revelado como un error difícil de erradicar dada la persistencia con la que ha reaparecido a lo largo de la secuencia de enseñanza. Pensamos que esta concepción errónea del perímetro está originada por la inadecuada presentación de los polígonos que habitualmente se realiza a los alumnos. Cuanto mayor número de lados poseen los polígonos, éstos se dibujan más grandes y en consecuencia sus perímetros son mayores.

- Los alumnos se han familiarizado con gran rapidez con los distintos procedimientos geométricos, consiguiendo descomposiciones ingeniosas.

- Al finalizar la secuencia de enseñanza todos los alumnos a excepción de uno se refirieron al área en su concepción geométrica y no en su concepción numérica, sin que ello haya tenido ninguna implicación en la destreza y corrección con la que cuantificaron el área de diversas superficies durante el tratamiento cuantitativo.

- La dificultad de las actividades ha estado acorde con los conocimientos que los alumnos poseían sobre conceptos geométricos generales y sobre el concepto de área en particular. Aunque creemos que a los alumnos en determinados momentos les hubiera resultado atractivo enfrentarse a tareas de mayor complejidad, no las planteamos pensando que el nivel de razonamiento requerido no estaba al alcance de ellos.

- Las actividades que se revelaron más interesantes por la riqueza de las discusiones que provocaron fueron la 1, 5, y especialmente la 15 por lo que respecta al tratamiento cualitativo del área, y la 20, 25, 27, y 32 del tratamiento cuantitativo del área. Algunas de ellas además de cumplir los objetivos para las que habían sido diseñadas propiciaron el análisis de otros conceptos geométricos además del de área y perímetro. Otras resultaron ser atractivas a los alumnos, hecho este que provocó un interesante intercambio de soluciones entre ellos.

- Creemos que las actividades tanto de forma individual como de forma conjunta cumplieron con los objetivos para las que fueron diseñadas.

- Aún pensando que la unidad didáctica ha cumplido con los objetivos planteados, creemos que hubiera resultado más completa si hubiéramos podido abordar también la enseñanza de las fórmulas para el cálculo del área de determinados polígonos. Consideramos que el conocimiento y comprensión por parte del alumno de que, por ejemplo, el área de un rectángulo, triángulo y paralelogramo depende de sus respectivas bases y alturas son necesarios para que pueda emitir juicios sobre el área de polígonos a partir de razonamientos basados en el análisis de algunos de sus elementos, y por lo tanto razonamientos de un nivel superior al utilizados durante esta secuencia de enseñanza. Esto permitiría abordar actividades de comparación de áreas de mayor complejidad que las que se han podido plantear en esta unidad de enseñanza, y estudiar la variación y/o conservación del área de una superficie sometida a una mayor variedad de transformaciones de las aquí presentadas, especialmente en contextos geométricos.

- La metodología de trabajo empleada durante la enseñanza de la unidad ha resultado adecuada para la consecución de los objetivos, pero resulta excesivamente lenta, y esto es un handicap pensando en su utilización en el marco de la enseñanza habitual de la asignatura de matemáticas. Las puestas en común necesarias para que cada grupo exponga su opinión y solución a cada tarea planteada, que constituyen un factor importante de la metodología empleada que busca la participación activa de los alumnos en debates colectivos para intercambio de opiniones, han consumido mucho tiempo de las sesiones. Ello hace difícil, si no imposible, que un profesor que quiera abordar en cada curso la enseñanza de todo el contenido que está previsto por ley pueda trabajar y diseñar las sesiones de trabajo como nosotros lo hemos hecho durante esta experimentación.

4.5. EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA

En la presente sección se exponen los resultados obtenidos tras el análisis comparativo de las respuestas dadas por los alumnos en el test, descrito en el capítulo 3 de esta memoria, administrado antes y después de la experimentación.

Como estaba previsto iniciar la experimentación en el mes de febrero, se administró a los alumnos del grupo el pre-test en diciembre con objeto de disponer información sobre sus conocimientos del concepto de área y así poder valorar la adecuación de los objetivos pretendidos con la unidad de enseñanza, planteados tras el análisis didáctico y la etapa diagnóstica. Los resultados obtenidos por los alumnos de este grupo de 4º de E.S.O. resultaron ser similares a los de sus compañeros de 2º de B.U.P., ya mostrados en el capítulo 3. Ello permitió confirmar la idoneidad tanto de los objetivos ya previstos para la unidad de enseñanza como de las actividades previstas que integraban lo que hasta ese momento era sólo un esbozo de la unidad, pasando a ser definitiva tras los retoques finales. El post-test se les administró a los alumnos un mes después de finalizada la enseñanza de la unidad didáctica. Los estudiantes desconocían que la prueba que se les iba a administrar se trataba de la misma que ya habían realizado antes de iniciarse la experimentación.

Dado que el test utilizado es el mismo que el ya descrito en el capítulo 3, hemos optado por presentar los resultados del estudio comparativo de las respuestas dadas en el pre y post-test de igual modo a como lo hemos hecho en la sección 3.4., refiriéndolos a cada uno de los aspectos del área estudiados. Sin embargo, en esta ocasión el objetivo del análisis de las respuestas es valorar los efectos de la experimentación y no determinar los conocimientos de los alumnos en los distintos aspectos. Por ello, durante el análisis no nos referiremos, o lo haremos simplemente de pasada, a aquellos aspectos del área, que no han sido abordados en la unidad de enseñanza, con son: el carácter bidimensional, y el significado geométrico del teorema de Pitágoras, puesto que es natural que no se produzca cambio alguno en el comportamiento de los alumnos.

Como ya hemos comentado nuestro interés se ha centrado en mostrar las variaciones apreciadas en los comportamientos de los alumnos, principalmente en lo que respecta a su rendimiento, procedimientos utilizados en la resolución de las tareas y errores cometidos. Por ello no nos entretenemos en detallar ni describir el tipo de respuestas a cada uno de los ítemes del test, ya realizado en la sección 3.4.

Al igual a como ya hicimos durante la sección 3.4. también durante este análisis se ha creído conveniente realizar en alguna ocasión el test de la χ^2 para estudiar la dependencia o independencia entre dos variables. Sin embargo, es muy importante advertir la necesaria precaución con la que se deben interpretar los resultados procedentes de este contraste de hipótesis, ya que al ser sólo 24 los alumnos a estudio, el número de casos en cada celda de las tablas de doble entrada generadas puede ser en alguna ocasión no adecuado para considerar fiable el p-valor resultante.

Finalmente comentar que dado que los 24 alumnos del grupo realizaron tanto el pre como el post-test, hemos decidido dar los datos en valor absoluto y sólo en alguna ocasión en forma de porcentaje.

A continuación describimos los resultados procedentes del análisis realizado de los comportamientos mostrados por los alumnos, antes y después de la experimentación, en cada uno de los aspectos del área estudiados en el test.

4.5.1. CONCEPCIONES DEL ÁREA

Como concepción de área, nos referimos al igual que en 3.4.1., a lo que el alumno escribió en el ítem 1.1 para expresar lo que para él es el área de una superficie plana.

Estudiaremos los cambios experimentados en las concepciones de los alumnos, a partir de los datos proporcionados por las tablas siguientes donde se muestra el número de alumnos que han manifestado una determinada concepción, diferenciando las concepciones erróneas de las no erróneas.

Recordemos que nos referimos a la concepción errónea asociada a la confusión área-perímetro cuando el alumno describe el perímetro como si se tratara del área, y a la ocasionada por la confusión área-superficie plana cuando el alumno describe lo que para él es una superficie plana en lugar del área de la superficie. Particularmente esta última concepción errónea está motivada por una incorrecta lectura del ítem, como así puede deducirse de la lectura de la misma proposición dada por el alumno: "Para mi una superficie plana, es una superficie que no tiene profundidad".

	confusión área-perímetro	confusión área-superficie plana	incatalogables
pre-test	1	0	2
post-test	0	1	0

Tabla 49. Concepciones erróneas manifestadas por los alumnos en el ítem 1.1.

	concepción fórmula	concepción geométrica	concepción numérica	
			con referencia a alguna unidad	sin referencia a unidad alguna
pre-test	1	17	1	2
post-test	1	21	1	0

Tabla 50. Tipo de concepciones no erróneas manifestadas por los alumnos en el ítem 1.1.

Se aprecia como tras la experimentación sólo un alumno se refiere al área de forma errónea, no produciéndose ninguna confusión con el perímetro.

Por lo que respecta a las concepciones no erróneas vemos que sólo un alumno en el pre y otro en el post-test asocia el área con una fórmula de cálculo, no tratándose del mismo alumno. Por lo que respecta a las concepciones geométricas y numéricas del área, si bien es cierto que ya en el pre-test una mayoría de los alumnos se refirió al área de una superficie plana como el espacio que ésta ocupa en el plano, tras la secuencia de enseñanza resultó ser la práctica totalidad del grupo el que se manifestó en este sentido. Los alumnos que en el pre-test manifestaron una concepción numérica del área en el post-test mostraron una geométrica, y el que dio la numérica en el post-test había dado una errónea, considerada como incatalogable, en el pre-test.

Estos resultados en cierto modo nos sorprenden en tanto en cuanto esperábamos que el estudio cualitativo del área realizado durante la enseñanza de la unidad didáctica, y en el que se potenciaba el estudio del papel de la unidad de medida, originara en los alumnos un aumento de las concepciones numéricas referidas a la unidad de medida. Hecho que puede comprobarse no ha sucedido.

Podemos completar la información indicando, que mientras que el alumno que en el pre-test se refiere a una unidad de medida, lo hace mencionando la unidad estándar de medida "m^2", el alumno que lo hace en el post-test se refiere a una unidad no estándar.

Además de estudiar el cambio de concepciones producido en algunos alumnos, nos pareció interesante también observar la forma en la que los alumnos se habían expresado antes y después de la secuencia de enseñanza.

El análisis del modo en el que los alumnos se expresaron en el pre y post-test nos permitió detectar importantes diferencias que comentamos a continuación. Observamos que un número importante de alumnos, en el pre-test, en su intento de explicar lo que para ellos es el área de una superficie plana, hace un insistente hincapié en atributos irrelevantes del área, especialmente en los elementos de las superficies, que normalmente son poligonales. Sin embargo, en el post-test cualquier referencia al tipo de superficie desaparece, y disminuye el uso incorrecto e impreciso de términos por parte de los alumnos. Todo ello ha propiciado que las afirmaciones sobre el área, realizadas por los alumnos en el post-test hayan sido más claras y concisas, como puede apreciarse en las siguientes "definiciones" de área, dada por algunos alumnos.

Alumno-3

Pre-test: Para mi el área de una superficie plana es el espacio que está dentro de los lados o lado (círculo). Esa superficie tiene que estar cerrada por todos los lados.

Post-test: El lugar o espacio que ocupa esa figura en la superficie del plano.

Alumno-6

Pre-test: El área de una superficie plana es el espacio que hay dentro de un polígono cerrado, ya bien sea el polígono regular e irregular.

Post-test: El área de una superficie es el espacio que ocupa un cuerpo en el plano.

Alumno-17

Pre-test: Es todo lo que ocupa esa figura. (Todo el interior). La distancia de un punto a otro. (Para aclarar esto dibuja un rectángulo y un círculo rayado, y señala el interior de éstos mediante una flecha, al lado de la cual escribe "área").

Post-test: La superficie que ocupa su interior, o sea, lo sombreado. (En esta ocasión dibuja un rectángulo, sombreado en su interior. No hay flecha).

Alumno-21

Pre-test: Es el espacio que ocupa dentro de la zona que hemos cerrado. Que tiene que estar el espacio cerrado por todos los lados, y da igual el número de lados.

Post-test: Es el espacio que ocupa una superficie en un plano.

Alumno-22

Pre-test: La parte de superficie que queda dentro de sus lados.

Post-test: Es la superficie del plano que ocupa dicha figura.

Alumno-24

Pre-test: Pues para mi el área de una superficie plana es cuanto mide lo que hay dentro de esa superficie no los lados eso no sólo lo que hay dentro de esas líneas cerradas. (Dibuja un rectángulo sombreado y con una flecha que sale de él indica "área todo lo pintado las líneas no sólo lo de dentro lo pintado").

Post-test: El área de una superficie plana es lo que ocupa esa superficie en un papel o plano, el espacio que ocupa.

Alumno-11

Pre-test: Para mi es la parte que comprende, es decir, que engloba dentro de sus los lados y sus vértices.

Post-test: El área de una superficie plana, es la superficie o territorio que describe una figura, es decir, que lo ocupa dentro de la figura.

Alumno-7

Pre-test: Es el espacio que ocupa esa superficie limitada. Se averigua mediante unas fórmulas. El espacio se calcula mediante cm^2.

Post-test: Es el lugar que ocupa sobre un plano.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre las concepciones manifestadas por los alumnos

Tras la experimentación se ha constatado:

- La total desaparición de las concepciones erróneas conceptuales.

- Una reafirmación de la concepción geométrica.

- Una disminución del número de alumnos que muestran una concepción numérica, hasta el punto de que sólo un alumno la ha mostrado en el post-test.

- La ausencia de cualquier referencia a una unidad estándar de medida.

- La desaparición, en las "definiciones" dadas por los alumnos del área, de las referencias a atributos de una superficie plana irrelevantes para el área, que fueron frecuentes en el pre-test.

- Una disminución del uso impreciso e incorrecto de términos geométricos en las "definiciones" dadas por los alumnos en el post-test, resultando éstas más escuetas, sencillas y claras.

4.5.2. UNIDAD DE ÁREA

Importancia del papel de la unidad en el proceso de medida

¿AUMENTA EL NÚMERO DE ALUMNOS QUE INDICAN LA UNIDAD DE MEDIDA UTILIZADA PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA SUPERFICIE, TRAS LA ENSEÑANZA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA?

Las siguientes tablas se refieren al número de alumnos que omitieron la unidad en 0, 1, 2, 3 o en los 4 casos del ítem 1.2, y en los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8. Recordemos que en los 4 casos del ítem 1.2 se proporcionaban las unidades lineales de medida, a diferencia de lo que ocurría en los otros cuatro ítemes donde no se explicitaba unidad de medida alguna.

	en 0 ocasiones	en 1 ocasión	en 2 ocasiones	en 3 ocasiones	en 4 ocasiones
pre-test	13 (54'2%)	5 (20'8%)	0 (0'0%)	2 (8'3%)	4 (16'7%)
post-test	15 (62'5%)	4 (16'7%)	3 (12'5%)	2 (8'3%)	0 (0'0%)

Tabla 51. Alumnos que omiten la unidad en 0, 1, 2, 3 o en los 4 casos del ítem 1.2.

	en 0 problemas	en 1 problema	en 2 problemas	en 3 problemas	en 4 problemas
pre-test	9 (37'5%)	10 (41'7%)	4 (16'7%)	1 (4'2%)	0 (0%)
post-test	10 (41'7%)	8 (33'3%)	6 (23'0%)	0 (0'0%)	0 (0%)

Tabla 52. Alumnos que omiten la unidad en 0, 1, 2, 3 o en los 4 ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8.

Los datos que proporcionan estas dos tablas nos muestran un cambio positivo de actitud en los alumnos hacia el uso de la unidad de medida en cuanto que se aprecia un mayor número de ellos que indican la unidad de área tras el cálculo de ésta. Este cambio se aprecia especialmente en las tareas del ítem 1.2, ya que en los otros ítemes la actitud mostrada por los alumnos en el pre y post-test es muy similar.

EN EL MOMENTO DE COMPARAR LOS NÚMEROS ASOCIADOS A LA MEDIDA DE DOS ÁREAS, ¿SE FIJAN LOS ALUMNOS EN LAS UNIDADES QUE ÉSTOS REPRESENTAN?

Ningún alumno ni antes ni después de la secuencia de enseñanza afirmó en el ítem 2.9 que la superficie (A) tuviera mayor área que la (B) porque 40 > 6, siendo éstos los números asociados a cada área. Por lo tanto ninguno de ellos comparó directamente los números sin tener en cuenta la unidad de medida utilizada en cada caso. Lo que pone de manifiesto que los alumnos sí se fijan en la unidad de medida utilizada.

Uso y reconocimiento de las unidades estándares (cm^2), y no estándares de medida

TRAS LA EXPERIMENTACIÓN ¿AUMENTA EL NÚMERO DE ALUMNOS QUE UTILIZAN CORRECTAMENTE LAS UNIDADES DE MEDIDA?

Las siguientes tablas nos muestran que la disminución de alumnos con tendencia a omitir la unidad de medida va acompañada de un aumento del uso correcto de la unidad.

	en 0 ocasiones	en 1 ocasión	en 2 ocasiones	en 3 ocasiones	en 4 ocasiones
pre-test	10 (41'7%)	1 (4'2%)	4 (16'7%)	5 (20'8)%	4 (16'7%)
post-test	8 (33'3%)	1 (4'2%)	3 (12'5%)	6 (25'0%)	6 (25'0%)

Tabla 53. Alumnos que dan la unidad correcta en 0, 1, 2, 3 o en los 4 casos del ítem 1.2.

	en 0 ocasiones	en 1 ocasión	en 2 ocasiones	en 3 ocasiones	en 4 ocasiones
pre-test	17 (70'8%)	5 (20'8%)	2 (8'3%)	0 (0'0%)	0 (0'0%)
post-test	4 (16'7%)	2 (8'3%)	10 (41'7%)	6 (25'0%)	2 (8'3%)

Tabla 54. Alumnos que dan la unidad correcta en 0, 1, 2, 3, o en los 4 ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 1.8.

Si bien las dos tablas reflejan un aumento del número de alumnos que utilizan correctamente la unidad de medida, existe una diferencia considerable entre la dos, ya que mientras que la tabla 53 muestra una leve mejora, la 54 pone de manifiesto una mejora muy significativa. Sin embargo, este resultado nos parece razonable en cuanto que en la secuencia de enseñanza se trabajó con unidades no estándares de área, y no con la estándar, y aún a pesar de ello parece que el trabajo desarrollado durante la unidad didáctica ha repercutido positivamente en el uso correcto de la unidad estándar de área "cm^2".

Al estudiar el comportamiento de los alumnos en lo que respecta al tipo de unidad de medida por ellos mencionada en cada uno de los ítemes 1.3, 1.5,1.7 y 1.8 hemos observado que existe una tendencia generalizada en los estudiantes a referirse, tras la experimentación, a una unidad de medida no estándar, resultando ser muy escasas las ocasiones en las que se refieren al cm^2. Pensamos que este cambio de actitud en los alumnos está asociado a la repercusión que la enseñanza ha tenido en ellos, mejorando su conocimiento y comprensión del papel que juega la unidad en la medida del área.

Al igual que en el apartado 3.4.2. procedimos, también en esta ocasión, al estudio de la existencia de posibles relaciones entre el tipo de procedimiento y tipo de unidad utilizada por los alumnos en cada uno de los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7. Los p-valores resultantes del test de la χ^2 realizado se muestran en la tabla siguiente:

	ítem 1.3	ítem 1.5	ítem 1.7
pre-test	p = 0'16530	p = 0'22313	p = 0'71653
post-test	p = 0'16071	p = 0'00018 (*)	p = 0'69584

Tabla 55. p-valores correspondientes al estudio de una posible relación entre el tipo de unidad utilizada y el tipo de procedimiento empleado en la resolución de los ítemes 1.3, 1.5 y 1.7.

Como se deduce de los datos de la tabla, sólo en el post-test y en el ítem 1.5 se detecta la existencia de dependencia entre el tipo de razonamiento empleado para el cálculo del área y la unidad utilizada para ello. Al analizar las tablas de contingencia (ver Anexo 4) correspondientes a este problema en el post-test, se observa que los alumnos que se han ayudado de un procedimiento geométrico o han contado las unidades cuadradas contenidas en la superficie para determinar el área, tienden a utilizar una unidad no estándar de medida. Este comportamiento también se ha podido apreciar en los otros dos ítemes 1.3 y 1.7 aunque en estos casos no se haya obtenido un $p < 0'05$.

¿SE OBSERVA UNA MEJORA EN LOS ALUMNOS EN EL RECONOCIMIENTO DE DIVERSAS UNIDADES DE MEDIDA, TANTO ESTÁNDARES COMO NO, DE LONGITUD, SUPERFICIE Y VOLUMEN?

La siguiente tabla muestra el número de alumnos que en el ítem 2.25 reconoció correctamente las unidades estándares y no estándares en cada magnitud.

	longitud		superficie		volumen	
	unidad estándar	unidad no estándar	unidad estándar	unidad no estándar	unidad estándar	unidad no estándar
pre-test	9	16	9	12	11	13
post-test	10	16	11	12	12	16

Tabla 56. Alumnos que realizan una clasificación totalmente correcta de las unidades estándares y no estándares de longitud, superficie y volumen en el ítem 2.25.

A estos datos podemos añadir que si bien el número de alumnos que clasificaron de forma incorrecta las unidades estándares y no estándares en cada magnitud resultó inferior en el post-test que en el pre-test, las diferencias fueron mínimas. En el caso concreto de la superficie, mientras que en el pre-test 12 y 7 alumnos dieron de forma incorrecta las unidades estándares y no estándares respectivamente, 9 y 7 lo hicieron respectivamente en el post-test.

Estos datos ponen de manifiesto una mejora, aunque ligera, en el reconocimiento correcto por los alumnos de las unidades estándares de medida en las tres magnitudes, y la ausencia de cualquier mejora por lo que respecta a las unidades no estándares, a excepción de la experimentada en el volumen. Éste es un hecho que en cierto modo nos ha sorprendido en cuanto que esperábamos que la enseñanza de la unidad didáctica produjera una mejora del conocimiento de los alumnos sobre las unidades no estándares, en concreto sobre las de superficie, ya que durante ésta se habían trabajado con unidades de este tipo, y porque en cierto modo parece que estos resultados contradigan los que se refieren a un mayor y mejor uso de las unidades en los problemas, comentados anteriormente.

A la información anterior podemos añadir que se han detectado 4 alumnos que tras la secuencia de enseñanza han escogido de entre todas la unidades no estándares de superficie, únicamente la unidad cuadrada, frente a dos alumnos que lo hicieron en el pre-test.

Podemos completar esta información con algunas cifras globales, que si bien muestran una mejora del conocimiento de los alumnos sobre el conjunto de las unidades, ésta no es tan significativa como esperábamos después de observar el modo de comportarse, y el conocimiento mostrado por los alumnos en la resolución de las distintas actividades durante la enseñanza de la unidad didáctica. Por otra parte, nos parece demasiado elevado el número de alumnos que tras la experimentación siguen desconociendo las unidades de medida.

La siguiente tabla muestra el número de alumnos que realizaron una clasificación de las distintas unidades totalmente errónea frente a los que la hicieron correctamente.

	clasificación errónea	clasificación correcta
pre-test	6 (25'0%)	7 (29'2%)
post-test	7 (29'2%)	9 (37'5%)

Tabla 57. Alumnos que realizan una clasificación totalmente errónea de las unidades dadas en el ítem 2.25, y los que la hacen completamente correcta.

A continuación se muestra el número de alumnos que clasificaron de forma errónea las unidades estándares y las no estándares.

	desconocen las unidades estándares	desconocen las unidades no estándares
pre-test	10 (41'6%)	6 (25'0%)
post-test	7 (29'7%)	7 (29'7%)

Tabla 58. Alumnos que realizan una clasificación totalmente errónea de las unidades estándares y no estándares de medida en el ítem 2.25.

¿ESTÁN FAMILIARIZADOS LOS ALUMNOS CON EL USO DE UNIDADES NO ESTÁNDARES DE SUPERFICIE?

Para ello estudiamos las respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.9, donde recordamos debían comparar el área de dos superficies medidas con dos unidades no estándares diferentes.

Los datos proporcionados por las siguientes tablas ponen de relieve que los resultados obtenidos por los alumnos en esta tarea han sido claramente mejores en el post-test que en el pre-test.

	identificación correcta de la unidad utilizada en la medida del área		
	A	B	A y B
pre-test	15 (62'5%)	14 (58'3%)	11 (45'8%)
post-test	20 (83'3%)	22 (91'7%)	19 (79'2%)

Tabla 59. Alumnos que identifican correctamente la unidad utilizada en la medida del área en los casos (A) y (B), y en los dos a la vez, del ítem 2.9.

Se comprueba que en el post-test la gran mayoría de los alumnos identificaron correctamente las unidades de medida utilizadas en cada caso. Así pues, es interesante observar cómo tras la secuencia de enseñanza los alumnos están familiarizados con las unidades de área, tanto si éstas aparecen reproducidas de forma completa recubriendo la superficie (caso (A)), como si aparecen fraccionadas (caso (B)).

Podemos indicar que mientras que en el pre-test sólo 5 alumnos dan la respuesta correcta al ítem tras identificar correctamente las unidades de las dos superficies, son 12 los que lo consiguen en el post-test.

Por otra parte, la mejora no es sólo patente en la correcta identificación de las unidades utilizadas en la medida del área de las dos superficies, sino también en la calidad de razonamientos argüidos por los alumnos para justificar sus respuestas. En la siguiente tabla se muestran los razonamientos utilizados por los alumnos que no intentaron establecer una relación entre las unidades de medida o bien no afirmaron no poder realizar la comparación de las áreas por tratarse de dos unidades diferentes, y en consecuencia procedieron de forma inadecuada.

	no hay datos	me parece	unidad A < unidad B	otras
pre-test	3 (12'5%)	2 (8'3%)	1 (4'2%)	2 (8'3%)
post-test	0 (0'0%)	0 (0'0%)	0 (0'0%)	2 (8'3%)

Tabla 60. Argumentaciones erróneas dadas por los alumnos para justificar su respuesta en el ítem 2.9.

Se aprecia en el post-test una clara disminución del número de alumnos que utilizan argumentaciones erróneas o inconsistentes para avalar sus respuestas. Ello nos hace pensar que la práctica totalidad de los alumnos ha comprendido tras la experimentación el papel que juega la unidad de área en su medida, pudiendo afirmar que en el post-test los alumnos han demostrado estar familiarizados con el uso de unidades no estándares de medida.

Carácter de no discretitud, iterativo y de recubrimiento de la unidad de medida

Del tipo de respuestas dadas por los alumnos en los ítemes 2.6 y 2.10, tanto en el pre como en el post-test se puede concluir que todos ellos conocen y comprenden que para poder medir el área, utilizando una unidad de área, ésta debe iterarse de forma que recubra exactamente la superficie de modo que, si no está contenida un número entero de veces en ella, debe ser fraccionada para poder facilitar la medida.

La diferencia entre las respuestas dadas por los alumnos en el pre y en el post-test, tanto en el ítem 2.6 como en el 2.10 no radica en el tipo sino en su grado de corrección. Es decir, el número de errores cometidos en el cálculo del área de las superficies disminuye en el post-test. En el ítem 2.10 además es interesante observar el cambio de actitud experimentado por los alumnos en cuanto al tipo de procedimiento utilizado para determinar el área de la superficie. Mientras que en el pre-test los alumnos se inclinan casi por igual por el conteo de las unidades que recubren la superficie y por el uso de la fórmula del área del rectángulo, en el post-test sólo tres alumnos utilizan la fórmula para determinar el área. Esta información se recoge en la siguiente tabla:

	recuento del número de unidades que recubren la superficie	utilización de la fórmula del área del rectángulo
pre-test	13 (54'2%)	11 (45'8%)
post-test	21 (87'5%)	3 (12'5%)

Tabla 61. Procedimientos utilizados por los alumnos para determinar el área del polígono del ítem 2.10.

Para nosotros este cambio de actitud observado en los alumnos nos parece interesante, porque creemos que es un indicador del efecto que la unidad de enseñanza ha tenido en ellos. Si bien no era un efecto que persiguiéramos con ella, sí creemos que es un buen resultado, ya que se ha logrado romper la tendencia habitual que poseen los alumnos a aplicar de forma rutinaria las fórmulas para el cálculo del área. No querríamos que con ello se pensara que no nos parece adecuado que los estudiantes utilicen las fórmulas. Lo que perseguimos es el uso comprensivo de ellas, hecho que hemos constatado no sucede en este nivel. Por ello nos alegra que hasta que eso ocurra los alumnos utilicen procedimientos alternativos, que simultáneamente les enriquecen, les ayudan a clarificar el significado del área y les preparan el camino para abordar el estudio significativo de las fórmulas.

Relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de unidades

La totalidad de los alumnos tanto en el pre-test como en el post-test respondió correctamente al ítem 2.11. Lo que nos permite concluir que los estudiantes comprenden que el número de unidades que recubren la superficie depende del tamaño de éstas, y que a mayor tamaño menor número de unidades, y viceversa.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la unidad de área

Tras la experimentación:

- Existe una clara disminución de la habitual tendencia de los alumnos a omitir la unidad de medida tras el cálculo del área, que afecta tanto a las unidades estándares como no estándares. Esta diferencia es mucho más significativa en lo que respecta a las unidades no estándares.

- Se observa un aumento en el uso correcto de las unidades no estándares de medida, y aunque en la unidad de enseñanza sólo se trabajó este tipo de unidad, se detecta también una repercusión en una mejora, aunque leve, en el uso del "cm^2".

- En los problemas donde no se han indicado ningún tipo de unidad de medida se ha constatado una clara inclinación de los alumnos hacia el uso de la unidad no estándar de medida frente a la estándar "cm^2".

- Es patente el elevado grado de familiaridad que los alumnos han alcanzado con el uso de las unidades no estándares en el cálculo de áreas.

- Se consolidan en todos los alumnos las propiedades de las unidad de área: carácter de no discretitud de la unidad, carácter iterativo y de recubrimiento de la unidad, y la relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de unidades que recubren la superficie.

- En contraposición a todo lo anterior, no se observa una mejora en el reconocimiento de distintas unidades no estándares de superficie. La mejora se ha apreciado, aunque de forma leve, en las unidades estándares. Sólo en el volumen se ha detectado una mejora en el reconocimiento correcto de las unidades no estándares de medida.

Todo esto nos permite concluir de forma global que tras la enseñanza de la unidad didáctica se ha producido una mejora en la comprensión de los alumnos del papel que juega la unidad en el medida del área de una superficie, así como un aumento y/o asentamiento de los conocimientos que los estudiantes poseían sobre las unidades de área y algunas de sus propiedades.

4.5.3. CONSERVACIÓN DEL ÁREA

Conservación del área de una superficie cuando ésta se transforma en una nueva superficie al ser divida en piezas que son posteriormente reorganizadas

La práctica totalidad de los alumnos reconocieron, en el pre y en el post-test, que el área de la superficie (A) se conserva al ser transformada en la (B) en el ítem 2.3. Pensamos, por el tipo de razonamiento dado, que tanto los dos alumnos que en el pre-test, y los tres que en el post-test (que no fueron los mismos alumnos) dieron una respuesta incorrecta en este ítem es consecuencia de una errónea interpretación de los dibujos de las dos superficies.

Veamos los razonamientos aportados por los alumnos al afirmar la conservación del área de la superficie tras la transformación a la que ha sido sometida.

	lo que se quita abajo, se añade arriba	es lo mismo dispuesto de otra forma	otros	omiten razonamiento
pre-test	12 (50'0%)	6 (25'0%)	2 (8'3%)	4 (16'7%)
post-test	8 (33'3%)	11 (45'8%)	2 (8'3%)	3 (12'5%)

Tabla 62. Argumentaciones dadas por los alumnos en el ítem 2.3.

Aunque las cifras de esta tabla observadas en su globalidad no muestran grandes diferencias, nos parece interesante el incremento del número de alumnos que afirman la igualdad de área de las dos superficies refiriéndose a que "es lo mismo dispuesto de otra forma", ya que esta referencia explícita a la forma de la superficie pensamos que puede ser consecuencia del estudio de la independencia entre el área y la forma de una superficie llevado a cabo durante la enseñanza de la unidad didáctica.

Veamos ahora la influencia que la experimentación ha podido tener sobre el modo de proceder de los alumnos en el ítem 2.4, donde se plantea una situación similar a la del anterior ítem pero enmarcada en un contexto numérico.

Los procedimientos utilizados por los alumnos han resultado ser similares a los empleados por los estudiantes de la muestra, ya comentados en el apartado 3.4.3. y que exponemos a continuación:

A) Utilizan la conservación para determinar el área o indican que las dos superficies tendrán igual área sin llegar a calcularla.
B) Determinan correctamente el área mediante un cálculo numérico, sin tener en cuenta la conservación del área.
C) Determinan incorrectamente el área mediante un cálculo numérico erróneo o planteamiento algebraico sin finalizar.
D) Afirman que no se puede determinar el área por falta de datos.
E) Respuestas erróneas con razonamientos confusos e incatalogables

La siguiente tabla que recoge los distintos modos de proceder de los alumnos para determinar el área del trapecio en el pre y post-test, pone de manifiesto un claro cambio en la actitud de los alumnos tras la secuencia de enseñanza.

	correcta por conservación	correcta por cálculo numérico	incorrecta por cálculo numérico	afirman que es imposible calcularla	otras erróneas
	A	B	C	D	E
pre-test	9 (37'5%)	4 (16'7%)	8 (33'3%)	3 (12'5%)	0 (0'0%)
post-test	20 (83'3%)	0 (0'0%)	2 (8'3%)	0 (0'0%)	2 (8'3%)

Tabla 63. Tipo de respuestas dadas en el ítem 2.4.

Los datos de esta tabla revelan que tras la experimentación una amplia mayoría de los alumnos sí ha considerado la transformación geométrica sufrida por el cuadrado a partir de la cual surge el trapecio. Hecho que les ha permitido concluir que las dos superficies poseen igual área, y en consecuencia poder determinar el área del trapecio del modo más breve y sencillo posible. Luego la enseñanza de la unidad didáctica, y en concreto el estudio cualitativo del área, ha contrarrestado el efecto distorsionador y negativo, que el contexto numérico causa en los alumnos.

Conservación del área de un triángulo cuando éste se transforma en uno nuevo al deslizar un vértice del triángulo sobre una línea paralela a la base

Para analizar la conservación del área de un triángulo sometido a una transformación de este tipo estudiamos las respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.22.

Mientras que en el pre-test 13 alumnos afirmaron que los dos triángulos poseían igual área, 17 lo hacían en el post-test. Información que podemos completar con el número de estos alumnos que argumentó correctamente la igualdad de áreas, refiriéndose a la base y altura de los triángulos, resultando ser 3 en el pre-test y 7 en el post-test. Todo esto viene a mostrar una mejora, aunque ciertamente leve, en el reconocimiento de la conservación del área de un triángulo sometido a una transformación del tipo aquí descrita.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la conservación del área

Tras la experimentación:

- La totalidad de los alumnos conocen la propiedad de la Disección y comprenden que el área de una superficie se conserva por recorte y pegado. Este conocimiento también lo poseían los alumnos antes de la experimentación.

- La práctica totalidad de los alumnos reconoce la propiedad citada anteriormente tanto en un contexto geométrico como numérico, a diferencia de lo ocurrido antes de la enseñanza de la unidad didáctica, cuando sólo una minoría la reconocía en el contexto numérico.

- Se detecta una ligero aumento del número de alumnos que conocen y analizan con corrección que el deslizamiento de un vértice del triángulo sobre una línea paralela a la base conserva el área de éste. Sin embargo, sigue representando este número a una minoría de los alumnos del grupo.

4.5.4. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y EL PERÍMETRO DE UNA SUPERFICIE

Como ya expusimos en el capítulo 3 de esta memoria la relación que algunos alumnos establecen entre el área y el perímetro de una superficie les conduce a resultados erróneos, cuando se refieren al área de una superficie, cuando calculan el área de una superficie concreta, y cuando comparan el área y el perímetro de una superficie con otra en la que ha sido transformada. También analizamos allí la naturaleza de las distintas causas que originan estos errores, concluyendo que éstos están ocasionados por una confusión conceptual o por una confusión operacional, acompañados siempre por una falta de reflexión.

Realizado ahora este estudio, y tras la corrección del pre y post-test hemos podido constatar que los alumnos del grupo en el que se llevó a cabo la experimentación no confunden los conceptos de área y perímetro, ya que en el pre-test sólo un alumno se refirió al perímetro como el área de una superficie plana, y ninguno lo hizo en el post-test. Así pues no se detecta ninguna *confusión conceptual*.

Por lo que respecta a la *confusión operacional*, veremos tras el estudio de los próximos datos que se detectan algunos casos, muy pocos, entre las respuestas dadas por los alumnos en el pre-test, y que éstos desaparecen por completo en las respuestas dadas por estos mismos alumnos en el post-test.

La siguiente tabla se refiere al número de alumnos que en el intento de determinar el área de las distintas superficies del ítem 1.2 calculó su perímetro. Error que, como ya comentamos en el apartado 3.4.4. de esta memoria, lo comete el alumno ante el desconocimiento de cómo proceder para determinar el área, pero que no conlleva un error conceptual entre el área y el perímetro.

	rectángulo	triángulo	paralelogramo
pre-test	0 (0%)	2 (8'3%)	0 (0%)
post-test	0 (0%)	0 (0'0%)	0 (0%)

Tabla 64. Alumnos que calculan el perímetro en lugar del área en el ítem 1.2.

Luego de todo ello se puede inferir que aunque ni la confusión conceptual ni la operacional tuviera una presencia significativa entre los alumnos antes de la enseñanza de la unidad didáctica, tras ésta se confirma su total desaparición.

Relación entre el área y el perímetro en determinadas modificaciones de una superficie

Con objeto de observar el efecto que ha podido causar la secuencia de enseñanza en la relación que suelen establecer los alumnos entre el área y el perímetro de una superficie cuando ésta sufre determinadas modificaciones, hemos estudiado las respuestas dadas por los alumnos en los ítemes 2.2 y 2.14. Estas respuestas las hemos agrupado en tipos como se indica a continuación, según el alumno:

A) Consigue una modificación correcta de la superficie dada.
B) Intenta la modificación pero no la consigue.
C) Afirma que no es posible realizar la modificación que se solicita.

	A		B		C		no contesta	
	ítem 2.2	ítem 2.14	ítem 2.2	ítem 2.14	ítem 2.2	ítem 2.14	ítem 2.2	ítem 2.14
pre-test	12 (50'0%)	2 (8'3%)	6 (25'0%)	6 (25'0%)	3 (12'5%)	15 (62'5%)	3 (12'5%)	1 (4'2%)
post-test	20 (83'3%)	5 (20'8%)	3 (12'5%)	11 (45'8%)	1 (4'2%)	6 (25'0%)	0 (0'0%)	2 (8'3%)

Tabla 65. Tipo de respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.2 y 2.14, y número de alumnos que los dejan en blanco.

En el post-test se observa un aumento significativo del número de alumnos que hacen frente a la modificación solicitada, con un consiguiente aumento de los que consiguen las modificaciones correctas, acompañado esto de una interesante disminución del número de alumnos que manifiestan la imposibilidad de la modificación. Todo ello nos hace pensar que tras la experimentación una mayoría de los alumnos es consciente de la independencia entre el área y el perímetro de una superficie, y por consiguiente si bien la unidad didáctica diseñada no ha conseguido este efecto en la totalidad del grupo si ha propiciado una importante mejoría.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la relación entre el área y el perímetro de una superficie

Tras la experimentación:

- Los pocos casos que se detectaron en el pre-test sobre confusión conceptual y operacional entre el área y el perímetro desaparecieron por completo en el post-test.

- Se observa en el post-test un aumento significativo del número de alumnos, que representa a una amplia mayoría de éstos, que intentan las modificaciones de las superficies en las que están implicadas simultáneamente el área y el perímetro de éstas, junto con una disminución de los que afirman su imposibilidad. Luego la mayoría de los alumnos es capaz de desligar el área del perímetro en la modificación experimentada por la superficie, y en consecuencia acepta la independencia entre el área y el perímetro de una superficie.

4.5.5. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA Y LA FORMA DE UNA SUPERFICIE

Tras el análisis de las respuestas dadas por los alumnos en el pre y post-test en los ítemes 2.2 y 2.8, hemos podido constatar una clara tendencia en los alumnos a desligar la forma de la superficie de su área.

En el post-test se detectó un incremento del número de alumnos, respecto del pre-test, que realizó la modificación solicitada en el ítem 2.2 no conservando la forma de rombo, forma de la superficie original. De hecho tras la experimentación el número de alumnos que realizó una modificación correctamente sin conservar la forma de la superficie se duplicó, como así se deduce de las siguientes cifras.

	conservan la forma	no conservan la forma
pre-test	4	8
post-test	4	16

Tabla 66. Alumnos que realizan correctamente la modificación solicitada, conservando o no la forma de la superficie original, en el ítem 2.2.

Estos datos confirman el efecto positivo que la secuencia de enseñanza ha podido tener en los alumnos por lo que respecta a la independencia entre la forma y el área de una superficie. Impresión que se refuerza al estudiar los resultados correspondientes al ítem 2.8, donde los alumnos debían dibujar cuatro superficies de igual área, pero de diferente forma. Al observar los resultados correspondientes a este ítem 2.8, que se muestran en la Tabla 67, se constata que prácticamente la totalidad de los alumnos responde correctamente, a diferencia de lo ocurrido en el pre-test. Si bien pensamos que esta mejoría ha podido estar propiciada por la confluencia de un conjunto de variables, como por ejemplo la familiarización adquirida por los alumnos durante la secuencia de enseñanza con tareas de este tipo, creemos que ésta no habría sido posible si los estudiantes no hubieran conseguido desligar la forma del área de la superficie.

	cuatro	tres	dos	una	ninguna
pre-test	10 (41'7%)	4 (16'7%)	3 (12'5%)	1 (4'2%)	6 (25'0%)
post-test	21 (87'5%)	1 (4'2%)	1 (4'2%)	1 (4'2%)	0 (0'0%)

Tabla 67. Alumnos que consiguen dibujar 4, 3, 2, 1 o ninguna superficie en el ítem 2.8.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la relación entre el área y la forma de una superficie

Tras la experimentación:

- Se observa una clara tendencia en la práctica totalidad de los alumnos del grupo a desligar la forma de la superficie del área de ésta.

4.5.6. BIDIMENSIONALIDAD DEL ÁREA

La unidad de enseñanza en ningún momento tuvo como objetivo el estudio del carácter bidimensional del área, tanto en lo que se refiere a la relación entre la variación de las dimensiones lineales y la variación ocasionada en el área, y viceversa, como al carácter bidimensional de las fórmulas del área. Por ello no esperábamos ningún cambio en el modo de actuar de los alumnos al responder a los ítemes 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 y 2.21 del test donde se estudiaba esta característica del área.

El estudio comparativo de las respuestas dadas por los alumnos a estos ítemes en el pre y post-test confirman que efectivamente la unidad didáctica no ha tenido ningún efecto en los alumnos en lo referente a la bidimensionalidad del área. Lo único apreciable es una ligera disminución, en el post-test, del número de alumnos que dejaron en blanco estos ítemes.

El comportamiento de los alumnos ante este tipo de situaciones se traduce de forma resumida en que una mayoría de los alumnos extiende la variación sufrida por las dimensiones lineales al área, y en que desconocen totalmente el significado del carácter bidimensional de las fórmulas del área. Comportamiento que es completamente similar al mostrado por los alumnos de 2° de B.U.P. y que ya fue descrito con detalle en el apartado 3.4.6. de esta memoria, por lo que no nos extendemos en ello aquí.

El hecho de que no hayamos omitido el estudio de este aspecto, como hemos hecho con algún otro y como ya explicábamos al inicio de esta sección 4.5., ha sido para comentar un cambio de actitud observado en los alumnos tras la experimentación, relacionado con el ítem 2.7 en el que estudiamos la relación entre la variación que sufre el área de una superficie y la variación ocasionada en las dimensiones lineales.

En la siguiente tabla se muestran los datos correspondientes al tipo de respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.7 en su intento de dibujar un cuadrado de 1/2 cm^2 de área, dado un cuadrado de 1 cm^2 de área. Las respuestas dadas por los alumnos han consistido en:

A) El dibujo correcto de un cuadrado de 1/2 cm^2 mediante un procedimiento geométrico.
B) El dibujo de un cuadrado de lado 1/2 cm de longitud.
C) Otras respuestas incorrectas.

	A	B	C	no contesta
pre-test	0 (0'0%)	11 (45'8%)	12 (50%)	1 (4'7%)
post-test	9 (37'5%)	8 (33'3%)	6 (25%)	1 (4'7%)

Tabla 68. Tipo de respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.7

En esta tabla es apreciable un aumento considerable de alumnos que consiguen dar la respuesta correcta. Sin embargo, este aumento no se corresponde con la leve disminución del número de alumnos que se limita a dibujar el cuadrado de longitud de lado 1/2 cm. Ello nos hace pensar que los procedimientos geométricos trabajados durante la unidad didáctica han dotado a algunos alumnos de las herramientas necesarias, que antes de la experimentación no disponían, para poder abordar la construcción deseada, pero que efectivamente la unidad de enseñanza no aporta ningún elemento clarificador sobre el carácter bidimensional del área.

Conclusión más relevante del estudio sobre la bidimensionalidad del área

- No se ha observado en los alumnos, tras la enseñanza de la unidad didáctica, ninguna mejora en lo que respecta al carácter bidimensional del área.

4.5.7. FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE ÁREAS

Conocimiento de la fórmula del área del rectángulo, círculo, triángulo y paralelogramo

Con objeto de poder valorar cualquier cambio experimentado en el conocimiento que los alumnos poseen de las fórmulas del área de estas superficies, hemos considerado conveniente comparar los datos correspondientes a los alumnos que dan la fórmula de forma correcta, incorrecta o simplemente no la dan en cada uno de los casos del ítem 1.2. Información ésta que se muestra en la tabla siguiente:

	rectángulo			círculo			triángulo			paralelogramo		
	correcta	incorrecta	en blanco	correcta	incorrecta	en blanco	correcta	incorrecta	en blanco	correcta	incorrecta	en blanco
pre-test	18	6	0	2	19	3	12	10	2	2	15	7
post-test	23	1	0	5	10	9	16	8	0	14	7	3

Tabla 69. Alumnos, que en el ítem 1.2, dan las fórmulas de forma correcta, incorrecta o las dejan en blanco.

Los resultados correspondientes tanto al pre como al post-test ratifican lo ya observado a nivel general y comentado en el capítulo 3 de esta memoria, que las fórmulas más conocidas por los alumnos son por este orden y de mayor a menor: la del rectángulo, triángulo, paralelogramo y círculo, siendo ésta la gran desconocida de los alumnos.

Tras la secuencia de enseñanza se aprecia un aumento del número de alumnos que dan de forma correcta las distintas fórmulas para el cálculo de áreas, junto con una disminución de respuestas en blanco -a excepción de lo ocurrido en el círculo-. Las actividades trabajadas durante la experimentación no necesitaban para su resolución del uso de fórmulas para el cálculo de áreas, sin embargo, dado que los alumnos sí conocían su existencia por la enseñanza recibida en cursos anteriores, en algunas tareas eran ellos los que nos preguntaban por las fórmulas, llegando a utilizarlas en la resolución de determinadas actividades. Así pues fueron los alumnos los que hicieron aparecer las fórmulas de algunos de los polígonos durante la enseñanza de la unidad didáctica, y aunque en un principio el estudio de las fórmulas del rectángulo, triángulo, paralelogramo y trapecio constituía uno de los objetivos de la experimentación, como ya hemos comentado anteriormente, no fue posible abordarlo adecuadamente por falta de tiempo, realizándose sólo una actividad al respecto. Por tanto pensamos que ha sido el uso esporádico e incluso a veces accidental que los alumnos han hecho de algunas fórmulas el que ha propiciado este aumento del conocimiento de las fórmulas de los polígonos más elementales.

Por otra parte el aumento del número de alumnos que no da ninguna fórmula en el caso del círculo podría estar justificado por un cambio de actitud experimentado en éstos, como consecuencia de la seguridad que les ha proporcionado los conocimientos que sobre el tema han adquirido, y que ante el desconocimiento de una fórmula consideran más oportuno no dar ninguna expresión que escribir "cualquier cosa", de la que ellos mismos tienen la certeza que no será correcta.

Por lo que respecta al dato referente al número de alumnos que dieron fórmulas incorrectas en el pre y post-test, éste carecería de interés si no lo acompañáramos de un análisis sobre los distintos motivos que las ocasionaron.

Analizadas las distintas expresiones incorrectas dadas por los alumnos en el pre y post-test, pudimos constatar que los errores del tipo: identificación incorrecta de algunos elementos de una figura (por ejemplo la altura), cálculo del perímetro en lugar del área, y producto de las tres dimensiones dadas del triángulo y paralelogramo, que ocasionaron determinadas incorrecciones en el pre-test, no se cometieron en el post-test. Así pues, pensamos que este análisis otorga un cierto interés a la disminución del número de alumnos que dieron una fórmula incorrecta en el post-test.

Comprensión del área del triángulo

Por los datos anteriores sabemos, que tras la secuencia de enseñanza la fórmula para el cálculo del área del triángulo es conocida por un mayor número de alumnos. Nuestro objetivo es comprobar si esta mejora cuantitativa va acompañada de una mejora cualitativa. Para ello estudiamos las respuestas dadas por los alumnos en los ítemes 2.5 y 2.22, donde los alumnos debían comparar el área de dos triángulos en un contexto numérico y geométrico, respectivamente, y en el ítem 2.13 donde se debía determinar el área de un triángulo, a partir de la de un rectángulo.

Concretamente, con objeto de analizar cualquier variación en los alumnos en lo que respecta a la aplicación correcta de la fórmula del triángulo y a la comprensión de su significado hemos estudiado los distintos modos de proceder de los estudiantes en el ítem 2.5 y 2.22, que hemos agrupado en:

A) Proceden de forma adecuada. En el ítem 2.5 calculan correctamente el área de cada triángulo y luego comparan los números obtenidos. En el ítem 2.22 comparan las áreas, refiriéndose a la base y altura de los triángulos.
B) Utilizan su percepción visual para emitir una opinión sobre las áreas de los triángulos.
C) Utilizan otros procedimientos incorrectos.

	utilizan el procedimiento correcto		utilizan la percepción visual		utilizan otros incorrectos	
	A		B		C	
	ítem 2.5	ítem 2.22	ítem 2.5	ítem 2.22	ítem 2.5	ítem 2.22
pre-test	9	5	7	4	0	4
post-test	12	8	1	4	5	5

Tabla 70. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 2.5 y 2.22.

En la Tabla 70 se aprecia un aumento no sólo de los alumnos que dan la respuesta adecuada en cada ítem, sino de los que la argumentan de forma correcta, si bien es cierto que el aumento producido no es significativo.

Por otra parte, recordemos que si fueron 12 alumnos en el pre-test, y 16 en el post-test los que dieron la fórmula correcta del área, sólo 9 y 12 de ellos respectivamente han sabido utilizarla en el ítem 2.5, y sólo 5 y 8, respectivamente, han manifestado comprender que el área del triángulo depende de su base y su altura, en el ítem 2.22. Lo que viene a confirmar que el conocimiento de la fórmula no es garantía de que los alumnos sepan cuándo y cómo utilizarla, y ni mucho menos que comprendan su significado.

La leve mejoría observada en los alumnos, en cuanto al conocimiento, uso y comprensión de la fórmula del área del triángulo como consecuencia de su aparición esporádica en alguna de las actividades de la unidad didáctica, pone de manifiesto la necesidad de realizar un estudio específico y adecuado de las fórmulas con el fin de que los alumnos alcancen, además de su conocimiento, un uso comprensivo de ellas.

También es interesante observar la apreciable disminución del número de alumnos que en el ítem 2.5 no utilizan ya su percepción visual para emitir un juicio sobre las áreas de los triángulos. Este comportamiento pensamos que está motivado porque un mayor número de alumnos están en disposición de calcular el área de los triángulos. Sin embargo, este cambio no se ha experimentado en el ítem 2.22, porque pensamos que los alumnos todavía están lejos de comprender que el área del triángulo depende de su base y su altura, lo que les conduce a utilizar, entre otros, este tipo de razonamiento.

Por lo que respecta a la relación entre el área de un triángulo y el rectángulo de igual base y altura que lo contiene podemos afirmar que en el post-test se ha observado un aumento muy significativo del número de alumnos que han sido capaces de analizar la relación entre las áreas de las dos superficies antes de "lanzarse" a un proceso de cálculo, como así lo muestran los datos de la tabla siguiente, referentes al tipo de procedimiento utilizado por los alumnos en el ítem 2.13.

El tipo de procedimientos utilizados por los estudiantes fueron:

A) Determinación del área del triángulo a partir del área del rectángulo, estableciendo la relación existente entre el área de estos dos polígonos.
B) Cálculo del área del triángulo aplicando su fórmula, determinada la longitud de su base y su altura.
C) Cálculo incorrecto del área del triángulo, ocasionado por una determinación errónea de sus dimensiones o por un error de cálculo.
D) Otras respuestas incorrectas.

	procedimientos correctos		procedimientos incorrectos		no contesta
	A	B	C	D	
pre-test	7	5	3	1	8
post-test	21	2	1	0	0

Tabla 71. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 2.13, y alumnos que lo dejan en blanco.

En el post-test se observa que todos los alumnos del grupo excepto uno han sabido determinar el área del triángulo, estableciendo la práctica totalidad de ellos la relación entre el área del triángulo y rectángulo. Pensamos que este claro cambio de proceder detectado en los alumnos está ocasionado por la familiarización que han adquirido durante la secuencia de enseñanza con tareas de comparación de áreas, utilizando procedimientos geométricos, y por los efectos que ha podido ocasionar la Actividad 33, donde se trabaja la relación entre el área del triángulo y el rectángulo de igual base y altura que lo contiene.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre el conocimiento que los alumnos poseen sobre algunas fórmulas para el cálculo de áreas

Tras la experimentación:

- Se ha producido un aumento del número de alumnos que conocen las fórmulas para el cálculo del área y la práctica erradicación de los errores del tipo, identificación errónea de alguno de los elementos de la figura, cálculo del perímetro en lugar del área, y producto de las tres dimensiones lineales dadas del triángulo y paralelogramo. Todo ello como consecuencia de un uso ocasional de las fórmulas durante la enseñanza de la unidad didáctica, propiciado por los alumnos.

- Se ha producido un ligero aumento del número de alumnos que conociendo las fórmulas las utilizan correctamente, y comprenden su significado, representando estos últimos un porcentaje muy bajo del total de alumnos.

- Se ha constatado que el conocimiento y correcta aplicación de una fórmula no lleva necesariamente asociada la comprensión de su significado. Hecho este ya detectado y comentado en el apartado 3.4.7.

- Se confirma la necesidad de una enseñanza específica y adecuada de las fórmulas del área, para que los alumnos hagan un uso comprensivo de ellas.

- Se observa que los procedimientos geométricos utilizados en las tareas de comparación de áreas realizadas durante la secuencia de enseñanza han favorecido la reflexión en los alumnos sobre la relación existente entre las áreas de dos superficies. Ello ha propiciado un aumento muy significativo del número de alumnos que han establecido correctamente la relación que existe entre el área del triángulo y del rectángulo que lo contiene de igual base y altura.

- Se confirma que la comparación del área de dos triángulos en un contexto geométrico requiere de razonamientos de mayor nivel que la planteada en un contexto numérico.

4.5.8. PAPEL DE LA PERCEPCIÓN VISUAL EN TAREAS DE COMPARACIÓN DE ÁREAS

Los datos de la Tabla 70 sobre el tipo de razonamientos utilizados por los alumnos en la comparación del área de los dos triángulos en los ítemes 2.5 y 2.22, y como ya comentamos entonces plasman una apreciable disminución, en el post-test, del número de alumnos que recurren a su percepción visual.

Por otra parte el estudio comparativo del tipo de respuestas dadas por los alumnos en el pre y post-test en el ítem 2.1, donde se les pedía a los alumnos que compararan el área de dos superficies no poligonales, muestra en el post-test un cierto abandono por parte de los alumnos del uso de la percepción visual como procedimiento válido para la comparación de áreas, pues en el pre-test 11 alumnos (45'8%) así actuaron frente a los 7 (29'2%) que lo hicieron en el post-test. El resto de los alumnos afirmaron no poder emitir ningún juicio por no disponer de los datos necesarios para ello.

Pensamos que las tareas de comparación de áreas abordadas en la unidad de enseñanza han propiciado la no utilización de la percepción visual por parte de algunos alumnos al dotarles de procedimientos alternativos y familiarizarles con situaciones diversas. Ahora bien, aunque se ha detectado una mejoría, el hecho de no haber conseguido erradicar en los estudiantes la consideración de la percepción visual como procedimiento válido para comparar áreas, pone de manifiesto la fuerza con la que ésta está arraigada en algunos alumnos.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre el papel de la percepción visual en tareas de comparación de áreas

Tras la experimentación:

- Se observa que la formación general adquirida sobre el concepto de área por los alumnos ha provocado una disminución en el número de alumnos que se dejan guiar por su apreciación visual para opinar sobre el área de una superficie, pero todavía existe un 30% aproximadamente de los alumnos que recurren a ella en determinadas ocasiones.

- Se produce una disminución significativa del uso de este procedimiento por parte de los alumnos cuando éstos han dispuesto de los procedimientos alternativos adecuados para abordar el estudio planteado. Ello nos lleva a pensar que para poder erradicar el uso inadecuado por los alumnos de su percepción visual como herramienta de razonamiento es necesario proporcionarles una buena y amplia formación específica en los distintos procedimientos de cálculo y comparación de áreas, adecuados para ser utilizados en cada situación problema.

4.5.9. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA DE UN ROMBO, PARALELOGRAMO Y TRAPECIO CON LA DE UN RECTÁNGULO

Recordemos que para este estudio se incluyeron en el test los ítemes 2.26, 2.27 y 2.28. Sin embargo, en el pre-test y con objeto de acortar su resolución sólo se les presentó a los alumnos el ítem 2.28. Este ítem fue escogido porque el análisis de las respuestas dadas por los alumnos de la muestra y presentado en el apartado 3.4.10. mostró que era más sencillo que el ítem 2.26, y más difícil que el 2.27. Es por ello que no disponemos de datos sobre el comportamiento de los alumnos en los ítemes 2.26 y 2.27 antes de la secuencia de enseñanza, y por lo tanto centramos el estudio en las respuestas dadas por los alumnos en el ítem 2.28.

La siguiente tabla muestra el número de alumnos que dio una respuesta correcta o incorrecta en el ítem 2.28, o lo dejó en blanco.

	respuesta correcta	respuesta incorrecta	no contesta
pre-test	9 (37'5%)	11 (45'8%)	4 (16'7%)
post-test	19 (79'2%)	3 (12'5%)	2 (8'3%)

Tabla 72. Alumnos que dan la respuesta correcta o incorrecta en el ítem 2.28, o lo dejan en blanco.

En los alumnos que abordaron la construcción del rectángulo de igual área que el trapecio dado observamos comportamientos diferenciados, que hemos agrupado en los tres tipos que se muestran a continuación. Los datos correspondientes a esta información se muestran en la Tabla 73.

A) Construyen el rectángulo estableciendo la relación entre las áreas de los dos cuadriláteros, ayudados del procedimiento geométrico de recorte y pegado por complementariedad de formas.
B) Construyen el rectángulo, mediante un procedimiento netamente numérico consistente en la aplicación de las fórmulas del área del trapecio y rectángulo.
C) No justifican su construcción.

	uso del recorte y pegado por complementariedad de formas	aplican directamente las fórmulas	no justifican su respuesta
pre-test	13	1	6
post-test	20	0	2

Tabla 73. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 2.28.

Se observa un aumento considerable en el post-test del número de alumnos que construyen un rectángulo de igual área que el trapecio dado. Construcción que consiguieron los alumnos utilizando el procedimiento geométrico de recorte en piezas y su posterior reconfiguración por complementariedad de formas, no registrándose ningún alumno que intentara la construcción del rectángulo a partir de las fórmulas del área.

Pensamos que los cambios detectados en el modo de proceder de los alumnos en el ítem 2.28 están ocasionados por la habilidad adquirida por ellos durante la experimentación en el uso de procedimientos geométricos, pero desconocemos hasta qué punto estos alumnos asocian la relación que ellos mismos establecen de forma geométrica entre las áreas del rectángulo y trapecio con las fórmulas para el cálculo de su área. Como ya hemos comentado a lo largo de esta sección 4.5. no fue posible abordar en la secuencia de enseñanza actividades que justificaran la fórmulas de área de los polígonos más elementales. Por lo tanto, creemos que no se debe asociar el éxito alcanzado por los estudiantes en este ítem con una mejora en el conocimiento o comprensión de la fórmula para el cálculo del área del trapecio.

Podemos añadir como información adicional que los ítemes 2.26 y 2.27 fueron resueltos en el post-test por la totalidad de los alumnos, consiguiendo el rectángulo correcto en cada ítem 17 y 20 alumnos respectivamente. El procedimiento utilizado por estos alumnos para la construcción de un rectángulo de igual área que un rombo y un paralelogramo dados fue el mismo procedimiento geométrico empleado por ellos en el ítem 2.28.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre la relación entre el área de un rombo, paralelogramo y trapecio con la de un rectángulo

Tras al experimentación:

- Aproximadamente el 80% de los alumnos, en el post-test, logran construir mediante un procedimiento geométrico un rectángulo de igual área que el rombo, paralelogramo y trapecio dado.

- Se constata que las tareas de comparación de áreas planteadas en un contexto geométrico en la secuencia de enseñanza han dotado a los alumnos de procedimientos geométricos, y les han familiarizado con situaciones diversas que les han permitido establecer relaciones entre las áreas de dos superficies en un contexto numérico mediante procedimientos geométricos.

4.5.10. PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Recordemos que los problemas a estudio corresponden a los ítemes 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8 del test, cuyas características ya fueron descritas y comentadas en el capítulo 3 de esta memoria, concretamente en el apartado 3.4.11.

En esta ocasión nuestro interés ha estado centrado en el estudio de los posibles cambios producidos en el modo de proceder de los alumnos en la resolución de cada uno de estos problemas. Para ello y para cada problema hemos confeccionado una tabla donde se expone de forma resumida el tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el pre y post-test.

Al igual que hicimos en el apartado 3.4.11. hemos empleado las mismas letras para identificar aquellos tipos de procedimientos que se repiten en la resolución de los distintos problemas. Concretamente hemos utilizado:

C: para el conteo de los cuadrados contenidos en la superficie,
G: para los procedimientos geométricos, o numéricos simplificados por el uso de un procedimiento geométrico, y
E: para los procedimientos erróneos no descritos por falta de interés.

Como en cada problema los modos de proceder de los alumnos han sido los mismos que los descritos en el apartado 3.4.11., utilizaremos las mismas letras que las que allí empleamos para referirnos al tipo de procedimientos utilizados en cada problema.

Ítem 1.3. Cálculo del área de una superficie no poligonal

Tipo de procedimientos utilizados por los estudiantes para determinar el área de la superficie no poligonal del ítem 1.3:

C) Conteo de los cuadrados contenidos en la superficie.
T) Aproximaciones al área de la superficie curva mediante el cálculo del área de triángulos y/o rectángulos.
E) Otros procedimientos erróneos difícilmente catalogables.

	C	T	E	no contesta
pre-test	2	5	2	15
post-test	16	3	0	5

Tabla 74. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.3, y alumnos que lo dejan en blanco.

Los datos reflejan una clara mejoría de los resultados en el post-test, tanto porque muestran que tras la experimentación una amplia mayoría del grupo afronta la resolución del ítem a diferencia de lo ocurrido antes, como porque la práctica totalidad de ellos ha demostrado considerar la medida del área como el número de cuadrados contenidos en la superficie.

Ítem 1.4. Cálculo de la longitud del lado de un cuadrado, conocida el área

Para determinar la longitud del lado del cuadrado los alumnos procedieron del siguiente modo:

A_1) Si $l^2 = 36\ cm^2$, $l = 6\ cm$
A_2) Si $l^2 = 36\ cm^2$, $l = 36/2 = 18\ cm$
A_3) Si $l^2 = 36\ cm^2$, $l = 36/4 = 9\ cm$
E) Otras respuestas erróneas.

	A_1	A_2	A_3	E	no contesta
pre-test	10	8	4	2	0
post-test	20	1	0	3	0

Tabla 75. Tipo de respuestas dadas por los alumnos en el ítem 1.4, y alumnos que lo dejan en blanco.

Es patente la erradicación del cálculo erróneo de la longitud del cuadrado al dividir el valor del área entre cuatro, así como la práctica desaparición del ocasionado al dividirlo entre dos.

Creemos que estos resultados vienen a confirmar el análisis que realizamos en el apartado 4.5.11. de esta memoria, donde exponíamos las causas que según nosotros motivan estos dos tipos de errores, especialmente el (A_3) al que asociábamos a un desconocimiento geométrico, concretamente al desconocimiento del modo en el que se calcula el área del cuadrado. Pensamos que la secuencia de enseñanza ha proporcionado a la práctica totalidad de los alumnos la suficiente formación de tipo geométrico, como tal vez también de tipo aritmético, para resolver con éxito este cálculo.

Ítem 1.5. Cálculo del área de un cuadrilátero

Los alumnos determinan el área del cuadrilátero:

A) Sumando las áreas de los triángulos en los que se descompone. El área de los triángulos se calcula aplicando directamente la fórmula.
C) Contando el número de cuadrados contenidos en el cuadrilátero.
G) Sumando las áreas de los dos triángulos en los que se descompone, utilizando un procedimiento geométrico que determina el área de los triángulos como la mitad del área de los rectángulos de igual base y altura que los contiene.
E) Utilizando otros procedimientos erróneos.

	A	C	G	E	no contesta
pre-test	1	0	1	1	23
post-test	0	12	0	2	10

Tabla 76. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.5, y alumnos que lo dejan en blanco.

Es importante indicar que durante la administración del post-test constatamos que bastantes alumnos no emprendían la resolución del problema porque no comprendían el enunciado del mismo. El problema lo causaba el hecho de que el cuadrilátero lo debían construir representando las coordenadas de los cuatro puntos dados -vértices del cuadrilátero-, y algunos alumnos manifestaron no saber cómo hacerlo. Así pues este hecho pudo ser el causante del elevado número de alumnos que dejaron en blanco el ítem, antes que un desconocimiento de cómo proceder para determinar el área del cuadrilátero. En cualquier caso se aprecia, tras la experimentación, un aumento considerable del número de alumnos que consiguen calcular el área del cuadrilátero.

Ítem 1.6. Comparación del área de dos superficies poligonales

Los estudiantes compararon el área de las dos superficies:

G) Utilizando el procedimiento geométrico consistente en la descomposición de la superficie en piezas. Por G_c representamos la descomposición correcta, y por G_i cualquier descomposición infructuosa.

N) Realizando razonamientos algebraicos o numéricos que en ningún caso les permitió resolver la tarea.

E) Utilizando otros procedimientos erróneos.

	G_c	G_i	N	E	no contesta
pre-test	3	0	1	17	3
post-test	17	4	0	2	1

Tabla 77. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.6, y alumnos que lo dejan en blanco.

Se constata cómo la secuencia de enseñanza ha proporcionado a los alumnos las herramientas necesarias para hacer frente a esta actividad. Observándose un claro cambio de actitud en los alumnos. Mientras que en el pre-test son 21 los alumnos que no saben cómo abordar la tarea son precisamente 21 los que en el post-test sí saben cómo hacerlo.

Ítem 1.7. Cálculo del área de una superficie no poligonal

Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos para el cálculo del área de una superficie no poligonal:

S) Descomposición de la superficie en un semicírculo y dos superficies de la forma . La suma de estas áreas será el área de la superficie dada.
C) Conteo de los cuadrados contenidos en la superficie.
G_1) Utilización del procedimiento geométrico de recorte y encaje por complementariedad de formas, que reconvierte la superficie no poligonal en un rectángulo del que resulta muy sencillo determinar su área.
E) Otros procedimientos erróneos.

	S	C	G_1	E	no contesta
pre-test	0	1	5	6	12
post-test	1	7	14	0	2

Tabla 78. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.7, y alumnos que lo dejan en blanco.

Vemos que la práctica totalidad del grupo ha sabido cómo calcular el área de esta superficie, pero lo más interesante es observar que si bien algunos alumnos optaron por el conteo de unidades cuadradas, la mayoría lo hizo por el procedimiento geométrico, que consideramos el más adecuado, porque permite determinar el área de la forma más rápida y sencilla posible.

Ítem 1.8. Cálculo del área de un rombo inscrito en un rectángulo

Los alumnos determinan el área del rombo:

F) Mediante el uso de la fórmula del área del rombo.
R) A partir del área del rectángulo en el que está inscrito el rombo y del área de los triángulo resultantes de las distintas descomposiciones que los estudiantes realizan del rombo.
G) Estableciendo mediante el procedimiento geométrico descrito en el apartado 3.4.11. la relación entre el área del rombo y la del rectángulo que lo contiene.
E) Utilizando otros procedimientos incorrectos.

	F	R	G	E	no contesta
pre-test	2	12	4	4	2
post-test	1	1	20	0	2

Tabla 79. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos en el ítem 1.8, y alumnos que lo dejan en blanco.

Tras la experimentación se observa en los alumnos un claro abandono de su rutinario comportamiento de utilizar únicamente procedimientos numéricos para el cálculo del área. Parece que la formación que han adquirido durante la secuencia de enseñanza les ha llevado a establecer, mediante un procedimiento geométrico, la relación entre las áreas de las dos superficies, y así determinar el área del rombo a partir de la del rectángulo, realizando un sencillo cálculo.

Del estudio detenido de estas tablas se observa que tras la enseñanza de la unidad didáctica la práctica totalidad de los alumnos no sólo se enfrentan a la resolución de los cinco problemas, sino que además lo hacen de forma mucho más centrada y comprensiva, como así lo pone de manifiesto la apreciable disminución del número de alumnos que dejaron en blanco los ítemes y de los que utilizaron diversos procedimientos incorrectos carentes de sentido.

Por otra parte, el elevado número de alumnos que en los problemas 1.3 y 1.5 calcularon el área de las superficies, procediendo al conteo de los cuadrados contenidos en las respectivas superficies, pone de manifiesto que los alumnos conocen y comprenden que el área de una superficie viene dada por el número de unidades de medida que la recubren exactamente, en este caso cuadrados. Sin embargo, nos alegra comprobar que los alumnos no se han limitado a contar en todas las ocasiones las unidades contenidas en la superficie, sino que en otros problemas han sabido utilizar otros procedimientos más adecuados, como ha sucedido en el problema 1.7, donde los alumnos mayoritariamente se han ayudado de un procedimiento geométrico que les ha facilitado calcular el área de la superficie no poligonal, fácil, rápida y correctamente.

También nos parece muy importante haber comprobado cómo los alumnos aún en un problema planteado en un contexto puramente numérico como es el 1.8, mayoritariamente han sabido buscar y establecer mediante un procedimiento geométrico la relación entre las áreas de las dos superficies, rompiendo de ese modo lo que hemos comprobado que es la tendencia natural de los alumnos sin una formación adecuada en el concepto de área, la de lanzarse sin reflexión alguna al uso de fórmulas para el cálculo del área.

Estudiado el número de alumnos que utilizaron, en el pre y post-test, un procedimiento correcto en los distintos problemas, datos que se muestran en la siguiente tabla, es manifiesta la mejora experimentada por los alumnos en resolución de problemas, ya que el 83'3% de los alumnos proceden en el post-test de forma correcta en al menos 4 de los seis problemas, frente al 12'5% que lo hizo en el pre-test.

	0 problemas	1 problema	2 problemas	3 problemas	4 problemas	5 problemas	6 problemas
pre-test	3	7	7	4	2	1	0
post-test	0	0	1	3	3	9	8

Tabla 80. Alumnos que han procedido de forma correcta en 0, 1, 2, 3, 4, 5, o en los 6 problemas correspondientes a los ítemes 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8.

Realizamos también un estudio comparativo entre los problemas con objeto de determinar si la dificultad que éstos poseían para los alumnos antes de la secuencia de enseñanza había experimentado algún cambio tras ella. El grado de dificultad de un problema está asociado al porcentaje de alumnos que utilizan para su resolución procedimientos correctos, como ya comentamos en el apartado 3.4.11. Así pues calculamos los porcentajes correspondientes a los alumnos que habían procedido de forma correcta en cada uno de los problemas, y ordenamos los problemas de menor a mayor dificultad, como se muestra a continuación:

pre-test	post-test
ítem 1.8 (75'0%)	ítem 1.8 (91'7%)
ítem 1.4 (41'7%)	ítem 1.7 (91'7%)
ítem 1.3 (29'2%)	ítem 1.6 (87'5%)
ítem 1.7 (25'0%)	ítem 1.4 (83'3%)
ítem 1.6 (12'5%)	ítem 1.3 (79'2%)
ítem 1.5 (8'3%)	ítem 1.5 (50'0%)

Por lo tanto parece estar claro que el problema que resulta ser más asequible a los alumnos es el correspondiente al ítem 1.8, y el de mayor dificultad el correspondiente al ítem 1.5, aunque creemos que el grado de dificultad de este problema se ha visto incrementado por la dificultad que su enunciado ha supuesto para estos alumnos.

Observamos cómo tras la enseñanza de la unidad didáctica, problemas que quedaban fuera del alcance de los alumnos ahora son abordados adecuadamente por una gran mayoría de ellos, produciéndose incluso una mejora en aquellos cuyo estudio no ha sido planteado en la unidad didáctica como es el caso del problema del ítem 1.4.

Además del cambio de posición de los problemas en las dos ordenaciones es interesante observar cómo las diferencias, bastantes marcadas, entre los porcentajes de cada problema en el pre-test disminuyen considerablemente en el post-test. Lo que nos permite pensar que tras la secuencia de enseñanza no existen tipos de problemas con especial dificultad para los alumnos.

Podemos ampliar la información anterior afirmando que no existe ninguna relación entre el modo de proceder de los alumnos en cada uno de los problemas antes y después de la secuencia de enseñanza, ya que realizado el test de la χ^2 en cada ítem, se obtuvo en cada uno de ellos un p-valor bastante superior al 0'05.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre los procedimientos utilizados en la resolución de problemas

Tras la experimentación:

- Se ha producido un aumento considerable del número de alumnos que proceden de forma correcta en los distintos problemas.

- Ningún tipo de problema de los planteados queda fuera del alcance de los alumnos.

- Se ha producido un claro abandono del uso de procedimientos puramente numéricos. Constatándose cómo los alumnos utilizan procedimientos geométricos aún en problemas planteados en contextos puramente numéricos para facilitarse el cálculo del área.

- Los alumnos comprenden que el área de la superficie viene dada por el número de unidades que recubren exactamente la superficie, en tanto que lo han utilizado de forma selectiva y adecuada.

- La mayoría de los alumnos ha actuado de forma reflexiva, dado que no siempre han procedido de igual modo, y han optado en cada caso por los procedimientos más apropiados.

4.5.11. CONSERVACIÓN Y/O VARIACIÓN DEL ÁREA Y/O PERÍMETRO DE UNA SUPERFICIE CUANDO ÉSTA ES SOMETIDA A DETERMINADAS TRANSFORMACIONES

Dado que los alumnos procedieron en la resolución del ítem 2.22 y 2.23, tanto en el pre-test como en el post-test, de forma similar a como lo hicieran los alumnos de la muestra, no describiremos en este apartado los procedimientos utilizados por los alumnos, ya que ya fueron mostrados con detalle en el apartado 3.4.12., sino que analizaremos los posibles cambios producidos en el modo de afrontar los alumnos el estudio de las dos transformaciones planteadas, y el estudio de la relación que habitualmente establecen entre el área y el perímetro de una superficie.

Al igual a como ya lo hicimos en el apartado 3.4.12., y como consecuencia de que los alumnos utilizaron el mismo tipo de procedimientos para comparar el área y el perímetro de los triángulos y de los paralelogramos, realizaremos primero el análisis simultáneo de los resultados procedentes del estudio del área del ítem 2.22 y 2.23, y posteriormente el del perímetro. Finalmente procederemos a un estudio comparativo entre el modo proceder de los alumnos en el caso del área y del perímetro.

Hemos utilizado las mismas letras que las empleadas en 3.4.12. para identificar los tipos de procedimientos empleados por los alumnos en el estudio del área y el perímetro en el ítem 2.22 y 2.23, con objeto de poder consultar este apartado si se desea disponer de mayor información acerca de sus características.

Estudio del área

A continuación relacionamos los distintos procedimientos utilizados por los alumnos para emitir un juicio sobre las áreas de los dos triángulos del ítem 2.22, y de los dos paralelogramos del ítem 2.23.

A) Comparan las bases y alturas de los respectivos polígonos.

En el pre-test algunos alumnos identificaron incorrectamente la altura de uno o de los dos triángulos y/o paralelogramos. Este error no fue cometido por ningún alumno en el post-test.

B) Se dejan guiar por su percepción visual.

C) Extienden la variación sufrida por el perímetro al área. Ello se recoge en las implicaciones siguientes: "un mayor perímetro lleva consigo una mayor área" en el caso del triángulo e "igual perímetro lleva consigo igual área" en el caso del paralelogramo.

D) Estiman el área mediante un procedimiento geométrico, consistente en comparar los "trozos" en los que los alumnos descomponen los dos triángulos o los dos paralelogramos.

E) Afirman no poder emitir un juicio sobre las áreas de las dos superficies por no disponer de los datos necesarios para ello.

F) Utilizan otros procedimientos incorrectos difíciles de catalogar.

En la siguiente tabla se muestra la distribución de los alumnos en los distintos tipos de procedimientos.

	A (comparan las bases y alturas)		B (utilizan la percepción visual)		C (extienden la variación del perímetro al área)		D (comparan los "trozos" en los que descomponen las superficies)		E (afirman no disponer de los datos necesarios)		F (utilizan procedimientos incorrectos)	
	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.
pre-test	5	2	4	16	1	0	0	0	7	0	6	4
post-test	7	2	5	12	0	1	1	2	3	2	5	2

Tabla 81. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos para comparar el área en el ítem 2.22 y 2.23.

Es importante advertir que el número de alumnos que argumentó su elección no coincide con el total de los que sí respondieron a estos dos ítemes, ya que algunos de los alumnos emitieron un juicio sobre el área de las distintas superficies, pero no lo justificaron. Concretamente sólo un alumno en el pre-test y otro en el post-test dejó en blanco el estudio del área del paralelogramo y triángulo respectivamente.

De todos estos datos se comprueba que no existen grandes diferencias en el modo de proceder de los alumnos antes y después de la experimentación, tanto en lo que respecta al estudio del área en la transformación sufrida por el triángulo, como por el paralelogramo. La práctica totalidad de los alumnos no ha sabido como analizar el área de los polígonos y ha empleado, tanto en el pre-test como en el post-test, procedimientos basados en razonamientos incorrectos o inconsistentes. Estos resultados nos parecen razonables en tanto que en la unidad didáctica no se había abordado ninguna actividad que tuviera por objeto analizar las posibles variaciones sufridas por el área de una superficie cuando ésta experimenta determinadas transformaciones en un contexto geométrico, requiriéndose para ello del conocimiento y comprensión de las fórmulas para el cálculo del área del triángulo y paralelogramo. Sin embargo, desconocíamos el efecto que podría tener el estudio de la fórmula del área del triángulo planteado en la Actividad 33, en el análisis del área de los triángulos en el ítem 2.22, comprobando que la incidencia ha sido mínima.

Cabe destacar el elevado número de alumnos que opinan sobre el área de los triángulos y especialmente de los paralelogramos, dejándose guiar por su percepción visual. Así pues parece que se confirma que los alumnos ante la carencia de los conocimientos necesarios para abordar la resolución de una tarea se dejan guiar por una apreciación visual.

Se aprecia una ligerísima incidencia de los métodos geométricos empleados durante la enseñanza de la unidad didáctica en los alumnos que en el post-test utilizaron el procedimiento geométrico de recorte y pegado para poder opinar sobre el área de las superficies.

Todo ello evidencia que la unidad didáctica no ha proporcionado a los alumnos los conocimientos necesarios para afrontar con éxito esta tarea. Está claro que sólo cuando los alumnos conozcan los elementos de los que depende el área de un polígono podrán utilizar el razonamiento adecuado para comparar el área de dos superficies poligonales en un contexto geométrico. Este conocimiento sólo se podrá lograr con un estudio específico, en el que las transformaciones a las que se sometan las superficies, juegan un papel fundamental ya que obligan a razonar sobre las posibles variaciones que puede experimentar el área observando las posibles variaciones que sufren los elementos de los polígonos de los que depende el área.

Estudio del perímetro

Para emitir un juicio sobre los perímetros de las superficies en el ítem 2.22 y 2.23, los alumnos:

A) Comparan las longitudes de los lados de los triángulos o paralelogramos.

B) Se dejan guiar por su percepción visual.

C) Extienden la variación sufrida por el área al perímetro. Registrándose dos implicaciones distintas que pueden resumirse de la siguiente forma: "igual área lleva consigo un perímetro igual" en el caso del triángulo y "mayor/menor área lleva consigo mayor/menor perímetro" en el caso del paralelogramo.

D) Afirman no poder responder a esta pregunta por desconocer el significado del concepto "perímetro".

E) Manifiestan no poder emitir un juicio sobre los perímetros por no disponer de los datos necesarios para ello.

F) Utilizan otros procedimientos incorrectos difíciles de catalogar.

Los datos correspondientes a la distribución de los alumnos en los procedimientos anteriores se muestran en la siguiente tabla.

	A (comparan las longitudes de los lados)		B (utilizan la percepción visual)		C (extienden la variación del área al perímetro)		D (afirman no conocer el significado del perímetro)		E (afirman no disponer de los datos necesarios)		F (utilizan procedimientos incorrectos)	
	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.	triángulo	paralelog.
pre-test	12	4	0	15	0	1	0	0	4	0	4	1
post-test	17	9	1	7	0	0	0	0	0	0	3	3

Tabla 82. Tipo de procedimientos utilizados por los alumnos para comparar los perímetros en el ítem 2.22 y 2.23.

Tampoco esta vez el número de alumnos que argumenta su respuesta coincide con el número de alumnos que emite una opinión sobre los perímetros en cada caso, ya que no todos los estudiantes que responden, justifican su respuesta. Podemos aportar que mientras que en el pre-test dos alumnos dejan en blanco este estudio en el triángulo y otros dos en el paralelogramo, en el post-test todos los alumnos emitieron una opinión sobre el perímetro en los dos casos.

En esta ocasión sí se aprecia una mejora en el tipo de respuestas dadas por los alumnos, ya que aumenta el número de estudiantes que para comparar los perímetros de las superficies poligonales se refieren a la longitud de sus lados. Lo que nos hace pensar que la secuencia de enseñanza ha propiciado un aumento del conocimiento y comprensión del concepto "perímetro", aunque que no ha resultado lo suficientemente significativo como esperábamos, especialmente en el caso del paralelogramo.

Por otra parte se confirma que el estudio del perímetro de dos polígonos resulta más sencillo a los alumnos que el del área.

Estudio comparativo entre el área y el perímetro

En el estudio efectuado en el apartado 3.4.12. detectamos la existencia de una dependencia entre las elecciones realizadas por los alumnos en el caso del área y las realizadas en el caso del perímetro, tanto en el ítem 2.22 como en el 2.23. Ello nos lleva a estudiar si también en esta ocasión los alumnos ligan sus respuestas del área a las del perímetro y/o viceversa, antes y después de la secuencia de enseñanza, y así poder valorar el efecto de ésta.

Para ello realizamos el test de la χ^2 para comprobar si las variables categóricas que representaban la elección realizada por cada alumno en el área y el perímetro en cada ítem eran o no independientes. Los p-valores obtenidos fueron los siguientes:

	triángulo (ítem 2.22)	paralelogramo (ítem 2.23)
pre-test	p = 0'08566	p = 0'00480 (**)
post-test	p = 0'60176	p = 0'30796

Tabla 83. p-valores correspondientes al estudio de la existencia de una posible relación entre la elección realizada por los alumnos en el área y en el perímetro en el ítem 2.22 y 2.23.

Los p-valores obtenidos del análisis de las respuestas dadas en el pre-test por los alumnos ponen de manifiesto la existencia de una dependencia entre la elección realizada en el área y en el perímetro. Aunque en el caso del triángulo el p-valor no haya resultado inferior al 0'05, creemos que su valor denota una cierta tendencia en los alumnos a relacionar el área con el perímetro. Las relaciones producidas entre el área y el perímetro en el caso del triángulo y paralelogramo han sido del tipo de las ya descritas en el apartado 3.4.12.

Si bien no son fiables los valores de los niveles de significación resultantes de este contraste de hipótesis por el reducido número de casos estudiados, sí nos advierten de la tendencia, tras la experimentación, de un claro alejamiento de los alumnos a relacionar su elección del área con la del perímetro. Ello nos hace pensar que la secuencia de enseñanza ha cumplido con uno de sus principales objetivos, que los estudiantes comprendieran la independencia que existe entre estas dos características de una superficie.

Conclusiones más relevantes del estudio sobre conservación y/o variación del área y/o perímetro de una superficie cuando ésta es sometida a determinadas transformaciones

Tras la experimentación:

- Se observa que el análisis de la conservación y/o variación del área de una superficie sometida a una determinada transformación, como son las dos aquí a estudio, sigue resultando de gran dificultad a los alumnos, y creemos que queda fuera del alcance de los estudiantes mientras que éstos no realicen un estudio comprensivo de las fórmulas para el cálculo de áreas, que les permita conocer y comprender de qué elementos en cada superficie depende su área.

- Se ha comprobado que el estudio comprensivo de las fórmulas para el cálculo de áreas debe enmarcarse en situaciones diversas, especialmente en transformaciones planteadas en contextos geométricos donde los alumnos se ven obligados a analizar las posibles variaciones del área de una superficie, estudiando los posibles cambios sufridos por los elementos de ésta.

- Que el estudio de la transformación del paralelogramo, consistente en el abatimiento del lado paralelo a la base, ha supuesto mayor dificultad que el estudio de la transformación del triángulo, consistente en el deslizamiento de un vértice sobre una línea paralela a la base.

- Una mejora considerable en los alumnos del conocimiento del concepto "perímetro".

- Una ruptura en la fuerte relación que los alumnos establecen entre el área y el perímetro de una superficie, con claros indicios de la existencia de una comprensión por parte de los alumnos de la independencia entre estas dos propiedades de una superficie.

4.6. CONCLUSIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

Además de las conclusiones específicas extraídas de los estudios de cada uno de los aspectos del área considerados y ya expuestas en la sección 4.5., deseamos aportar algunas conclusiones de carácter general:

- Creemos que la unidad de enseñanza ha permitido a los alumnos disociar el área de la forma de la superficie y del número que la mide.

- Si bien no todos los alumnos del grupo, sí una amplia mayoría de ellos ha llegado, tras la experimentación, a disociar el área del perímetro de la superficie. Sin embargo, el hecho de no haberlo conseguido todos pone de manifiesto la fuerza con la que está arraigada la relación entre el área y el perímetro en los alumnos.

- El estudio cualitativo del área ha propiciado en los alumnos el uso adecuado de procedimientos geométricos en contextos numéricos, simplificando el procedimiento numérico necesario para cuantificar el área.

- A pesar de haberse trabajado durante la unidad de enseñanza la interpretación geométrica del área y la numérica como el número de unidades que recubren la superficie, y estar convencidos de que los alumnos han comprendido las dos, la totalidad de los alumnos, excepto uno, cuando se refieren al área, tras la experimentación, lo hacen como porción de plano ocupado por una superficie.

- Los alumnos se familiarizan rápidamente con los procedimientos geométricos basados tanto en una comparación directa como indirecta de las superficies. En ocasiones han demostrado su dominio utilizando razonamientos basados en descomposiciones y reconfiguraciones por complementariedad de formas realmente ingeniosas.

- Para los alumnos no supone ninguna dificultad proceder a la medida del área de una superficie utilizando unidades bidimensionales diferentes. Ello les conduce inmediatamente a comprender que al área de una superficie le pueden corresponder números distintos según la unidad de medida empleada.

- Del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes antes y después de la secuencia de enseñanza hemos comprobado que tras la experimentación los alumnos poseen un mayor conocimiento de los distintos aspectos del área estudiados, y una mayor capacidad de hacer frente con corrección a distintas situaciones problemas de forma comprensiva.

- Los distintos aspectos del área y conceptos estudiados en la unidad didáctica no han tenido una repercusión significativa fuera de lo que representa su propio campo de acción. Es decir, los aspectos del área, como por ejemplo el carácter bidimensional, que no han sido objeto de estudio de la unidad de enseñanza no se han visto beneficiados por ésta. Ello viene a confirmar la necesidad de tratamientos específicos en la enseñanza para ampliar los conocimientos y rectificar errores.

- Para que los alumnos puedan abordar significativamente, en un contexto geométrico, el estudio comparativo del área de dos superficies -donde los procedimientos geométricos estudiados en la unidad de enseñanza se muestran insuficientes-, o analizar las posibles variaciones que puede sufrir el área de una superficie cuando es sometida a determinadas transformaciones, es necesario que éstos realicen un uso comprensivo de las fórmulas del área, es decir, que sean conocedores de los elementos de los que depende el área de una determinada superficie, y sean capaces de analizar las posibles variaciones de estos elementos. Por lo tanto, si queremos hacer frente a tareas cuya resolución precisa de razonamientos de nivel superior al requerido por las actividades de la unidad didáctica es necesario abordar en la enseñanza del área el estudio de las fórmulas.

CONCLUSIONES

En cada uno de los capítulos de la presente memoria se ha presentando de diferente modo las conclusiones correspondientes a las distintas etapas del estudio realizado. En particular en los capítulos 3 y 4 donde el número de resultados obtenidos fue muy elevado, se consideró oportuno dedicar una sección específica a las conclusiones más importantes. Finalizada la exposición del estudio creemos interesante relacionar los resultados de carácter general más relevantes como conclusiones globales del trabajo realizado, indicando la parte del estudio al que corresponde.

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del área

- Todos los investigadores que han realizado algún tipo de estudio sobre el área coinciden en llamar la atención sobre el elevado grado de incomprensión de este concepto por parte de los alumnos, y en considerar como causa fundamental de ello la insuficiente dedicación y el incorrecto modo en el que se realiza su enseñanza.

Análisis didáctico del concepto de área

- El análisis didáctico realizado indica que para el logro de un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto es necesario abordar la enseñanza progresiva de las diferentes manifestaciones (a las que a lo largo de esta memoria nos hemos referido como interpretaciones) del área:

  a) El área como parte (cantidad) del plano ocupado por la superficie.
  b) El área como magnitud autónoma.
  c) El área como número de unidades que recubren la superficie.
  d) El área como el límite de la suma de áreas de polígonos.
  e) El área como producto de dos dimensiones lineales.
  f) El área como aplicación que asocia a cada región del plano un número real positivo.

  El conjunto de todas ellas constituye en definitiva el concepto de área.

- Dos de estas manifestaciones se recogen en partes distintas de la Matemática como definiciones del área, concretamente la (d) en Cálculo Integral, y la (f) en la Teoría de la Medida. Por ello, identificamos el concepto matemático de área con cualquiera de estas dos definiciones o con las dos simultáneamente.

- La complejidad que posee dicho concepto matemático de área impide que pueda ser estudiado en los niveles de primaria y secundaria obligatoria.

- La enseñanza del área debería centrarse en el estudio de procedimientos para comparar y medir áreas de superficies planas. El análisis de las características de los distintos tipos de procedimientos, con las dificultades que éstos encierran, y de los conocimientos que requieren para ser utilizados de forma comprensiva, será el que determine en qué niveles educativos y de qué forma pueden abordarse cada uno de ellos.

- Teniendo en cuenta el gran número y la diversidad de las manifestaciones del área se puede comprender la pobreza de los conocimientos que poseen los alumnos sobre este concepto, ya que el tratamiento habitual que recibe el área en la enseñanza está limitado en el nivel de primaria al estudio de las fórmulas para el cálculo de áreas, y en secundaria post-obligatoria (bachilleratos) al estudio de la Integral de Riemann, como método de cálculo.

- De igual modo se puede entender la manifiesta incomprensión que poseen en general los alumnos sobre las fórmulas para el cálculo de áreas, ya que comprender el área como producto de dos dimensiones lineales, requiere una madurez mental y una formación matemática específica que no poseen los estudiantes cuando éstas les son presentadas. Concretamente los alumnos, antes de estudiar las fórmulas, deberían estar familiarizados con las manifestaciones del área como la cantidad de espacio ocupado por una región, como magnitud autónoma y como número de unidades que recubren la superficie.

Etapa diagnóstica

- Los resultados del test han puesto de manifiesto la existencia de un elevado número de alumnos de todos los niveles educativos que no comprenden las fórmulas para el cálculo de áreas, lo que les impide la resolución correcta de cualquier tarea que requiera del uso comprensivo de ellas. Hemos constatado que la enseñanza recibida sólo les permite, y no a todos, aplicar estas fórmulas de forma rutinaria. También hemos comprobado que las tareas que habitualmente se proponen durante la enseñanza del área, y que en su mayoría se plantean como una aplicación directa de una fórmula no favorecen en ningún caso el aprendizaje del concepto, y no constituyen ninguna medida del grado de comprensión que poseen los alumnos del mismo.

- El insuficiente y deficiente tratamiento que recibe el área normalmente en la enseñanza obstaculiza la comprensión del concepto al conducir a los alumnos a asociar el área con una única de sus manifestaciones (fórmulas de cálculo), y provoca errores conceptuales, algunos de ellos difíciles de corregir posteriormente, como por ejemplo, el que conduce a los alumnos a establecer una fuerte relación entre el área y el perímetro de una misma superficie.

- El análisis de las respuestas dadas por los alumnos en el test ha permitido comprobar que en general la práctica totalidad de los estudiantes, independientemente del nivel al que pertenecen conocen el significado del término área de una superficie plana en el sentido siguiente: dibujada cualquier superficie plana y preguntado el alumno por lo que él entiende por área, señalará y rayará inmediatamente el interior de la superficie. También se ha comprobado que la principal causa de los errores que cometen los estudiantes de los niveles de primaria y secundaria es su casi total desconocimiento acerca de los diversos procedimientos para el cálculo y comparación de áreas.

- Los resultados del test han permitido constatar que el grado de conocimiento y comprensión de los aspectos estudiados del área, que poseen los alumnos de los distintos niveles educativos y en particular los de 3° de la Escuela de Magisterio (3° E.M.) y 5° de la Facultad de Matemáticas (5° F.M.) es insuficiente y en algún caso deficiente (ver sección 3.5.). Para nosotros esto es un hecho preocupante, ya que la incomprensión se transmite, y serán los alumnos de estos dos cursos los responsables, en un futuro, de enseñar el área a los también futuros estudiantes. Dado que la enseñanza del área debería iniciarse en el nivel de primaria es muy preocupante la deficiente formación que han demostrado tener los futuros profesores (3° E.M.) de este nivel educativo, que han obtenido incluso, resultados inferiores a los de los estudiantes del Curso de Orientación Universitaria de la especialidad de ciencias (C.O.U.-C.)

Experimentación de una unidad de enseñanza

- Creemos que la unidad de enseñanza dirigida a los alumnos de secundaria (15-16 años) ha cumplido con los objetivos generales para los que fue diseñada: corregir algunos de los errores detectados en los estudiantes de este nivel y dotarles de algún conocimiento sobre procedimientos geométricos.

- El comportamiento observado en los alumnos antes, durante y después de la experimentación ratifica el interés que tiene presentar el área como magnitud autónoma, es decir, disociada de la forma de la superficie y del número que la mide, ya que por un lado ayuda a evitar confusiones entre el área y otras propiedades de la superficie como son la forma e indirectamente el perímetro, y por otro porque colabora en la comprensión del significado de la unidad de medida, y en consecuencia con el de medida de área, entendida como un proceso de comparación entre dos superficies.

- La facilidad con la que los alumnos se han familiarizado durante la experimentación con los procedimientos geométricos estudiados en la unidad de enseñanza permite pensar en la viabilidad de trabajarlos en el nivel de primaria.

- Si bien como ya hemos comentado anteriormente el objetivo de la enseñanza del área no debe limitarse al estudio de las fórmulas, la experimentación ha demostrado que su conocimiento es necesario para poder realizar con éxito y comprensión tareas de comparación de áreas, planteadas en un contexto geométrico, en las que no es posible

BIBLIOGRAFIA

ARGÜELLES, J. (1989): *Historia de la Matemática*. Akal, Madrid.

ARMSTRONG, B. E. (1990): *The use of rational number reasoning in area comparison tasks by elementary and junior high school students*. (University of Arizona, 1989.) Dissertation Abstracts International, 50A, 3877.

ARMSTRONG, B. E. & NOVILLIS, C. (1995): Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, pp. 2-19.

BANG, V. (1976): Two experiments on the relations between perimeter and area, in Eric/Smeac (1976), *Space and Geometry*. Papers from a research Workshop. Eric/Smeac: Columbus, Ohio, pp. 99-128.

BATTISTA, M. (1982): Understanding area and area formulas. *Mathematics Teacher*, vol. 75, pp. 362-368.

BEATTYS, C. B. & MAHER, C. A. (1985): Approaches to learning area measurement and its relation to spatial skill. *Proceedings of the Seventh Annual Meeting PME-NA*, Columbus, Ohio, pp. 2-7.

BIGGS, E. (1987): Understanding area. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 6, pp. 183-190.

BRIGHT, G. W. (1976): Estimation as part of learning to measure, in Nelson, D. & Reys, R. E., eds. (1976), *Measurement in school Mathematics*. 1976 Yearbook. NCTM: Reston VA, pp. 87-104.

BRUÑO, G. M. (1951): *Geometría. Curso superior*. Cuarta edición. Bruño, Madrid.

CARPENTER, T. P., CORBITT, M. K., KEPNER, H. S., LINDQUIST, M. M. & REYS, R. (1980): Results of the second NAEP mathematics assessment: secondary school. *Mathematics Teacher*, vol. 73, pp. 329-338.

CASTELNUOVO, E. (1981): *La Matemàtica. La Geometria*. Ketres, Barcelona.

CLAPPONI, P. (1991-1992): Comparons les aires. *Petit X*, num. 29, pp. 89-91.

CLAPPONI, P. (1991-1992): Moitié? *Petit X*, num. 30, pp. 41-42.

CLAYTON, B. (1983): How is area related to perimeter? *Mathematics Teacher*, vol. 76, pp. 360-363.

CORBERÁN, R., HUERTA, P., MARGARIT, J., PEÑAS, A. y RUIZ, E. (1989): *Didáctica de la geometría: modelo de Van Hiele*. Universitat de València, Valencia.

CORBERÁN, R., GUTIÉRREZ, A., HUERTA, P., JAIME, A., MARGARIT, J., PEÑAS, A. y RUIZ, E. (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele*. CIDE (MEC), Madrid.

DEL OLMO, M. A., MORENO, M. F. y GIL, F. (1989): *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis, Madrid.

DICKSON, L., BROWN, M. & GIBSON, O. (1988): *Children learning mathematics*. Cassell for the Schools Council, Oxford. [Traducción castellana de Luis Bou, El aprendizaje de las matemáticas (Labor/M.E.C., Barcelona/Madrid).]

DOUADY, R. (1983): Dialectique outil-objet, jeux de cadres. *Cahier de didactique des mathématiques*, num. 3. I.R.E.M Université Paris VII, Paris.

DOUADY, R. et PERRIN-GLORIAN, M. J. (1983): *Mesure des longueurs et des aires*. Brochure, num. 48. I.R.E.M Université Paris VII, Paris.

DOUADY, R. et PERRIN-GLORIAN, M. J. (1984): Aires de surfaces planes (première partie). *Petit X*, num. 6, pp. 5-33.

DOUADY, R. et PERRIN-GLORIAN, M. J. (1985): Aires de surfaces planes (deuxième partie). *Petit X*, num. 8, pp. 5-30.

DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M. J. (1986): Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of the tenth Annual Meeting PME*, London, pp. 253-258.

DOUADY, R. et PERRIN-GLORIAN, M. J. (1989): Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20, pp. 387-424.

DREYFUS, T. (1987): Approximation of area under a curve: A conceptual approach. *Mathematics Teacher*, vol. 80, pp. 538-543.

EDWARDS, C. H. (1991): *The Historical Development of the Calculus*. Springer, Berlin.

EUCLIDES. (1819): *Les oeuvres d'Euclide*. Traduites littéralement par F. Peyrard. Patris, C. F., Paris. (Nouveau tirage avec une introduction par Jean Itard. (1966). Albert Blanchard, Paris).

EUCLIDES. (1991): *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Traducción y notas de Mª. L. Puertas. Gredos, Madrid.

FIGUERAS, O. & WALDEGG, G. (1984): A first approach to measuring. (Children between 11-13 years old). *Proceedings of the 6th Annual Meeting PME-NA*, Madison, WI, pp. 95-100.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht. [Traducción castellana de tres capítulos de Luis Puig, Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, México, D.F.).]

GARDNER, M. (1981): *Inspiración ¡ajá!*. Labor, Barcelona.

GONZÁLEZ, P. M. (1992): *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Universidad, Madrid.

GUILLÉN, G. (1983): *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en E.G.B. y escuelas de Magisterio*. (Anexo II). Memoria de Proyecto de Investigación, financiado por el MEC.

GUILLÉN, G. (1985): Estudio de áreas de figuras planas como fuente para desarrollar actividad matemática en E.G.B. *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*, Almería, pp. 376-385.

HART, K. M., ed. (1981): *Children's understanding of mathematics, 11-16*. John Murray, London.

HÉRAUD, B. (1987): Conceptions of area units by 8-9 year-old children. *Proceedings of the Eleventh International Conference PME*, Montreal, pp. 299-304.

HÉRAUD, B. (1989): L'Intégration de la compréhension de l'aire au curriculum. *Actes de la 44ème Rencontre Internationale de la CIEAEM*, Bruxelles, pp. 1-12.

HERSCOVICS, N. et BERGERON, J. C. (1982): Des modèles de la compréhension. *Revue des Sciences de L'Éducation*, vol. 8, pp. 576-596.

HERSHKOWITZ, R., BEN-CHAIM, D., HOYLES, C., LAPPAN, G., MITCHELMORE, M. & VINNER, S. (1990): Psychological aspects of learning geometry in Nesher, P. & Kilpatrick, J., eds. (1990), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 70-95.

HIEBERT, J. (1981): Units of Measure: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, vol. 28, pp. 38-43.

HILDRETH, D. J. (1983): The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*, vol. 30, pp. 50-54.

HIRSTEIN, J. J., LAMB, C. E. & OSBORNE, A. (1978): Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, vol. 25, pp. 10-16.

HIRSTEIN, J. J. (1981): The Second National Assessment in Mathematics: Area and volume. *Mathematics Teacher*, vol. 74, pp. 704-708.

HOFFER, A. R. (1979): *Geometry. A Model of the Universe*. Addison Wesley, London.

HOLLOWAY, G. E. T. (1986): *Concepción de la Geometría en el niño según Piaget*. Paidós, Barcelona.

HORAK, V. M. & HORAK, W. J. (1982): Let's do it. Making measurement meaningful. *Arithmetic Teacher*, vol. 30, pp. 18-23.

HUGHES, E. R., BELL, D. & ROGERS, J. (1975): *Area, weight and volume-monitoring and encouraging children's conceptual development*. Schools Council Published by Nelson and son, Londres.

HUGHES, E. R. (1979): *Conceptual powers of children: an approach through Mathematics and Science*. Macmillan Education, London.

HUGHES, E. R. (1979): Should we check children? Papers relating to aspects of piagetian stage theory and the development of logical abilities, in Archenhold, W. F., Driver, R. H., Orton, A. & Wood-Robinson, C., eds. (1979), *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*. Proceedings of an International Seminar, The University of Leeds, pp. 87-104.

KOUBA, V. L., BROWN, C. A., CARPENTER, T. P., LINDQUIST, M. M., SILVER, E. A. & SWAFFORD, J. O. (1988): Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: measurement, geometry, data interpretation, attitudes, and other topics. *Arithmetic Teacher*, vol. 35, pp. 10-16.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid.

LEBESGUE, H. (1975): *La measure des grandeurs*. Albert Blanchard, Paris.

LEUTZINGER, L. P. & NELSON, G. (1980): Meaningful Measurements. *Arithmetic Teacher*, vol. 27, pp. 6-11.

LEUTZINGER, L. P. & NELSON, G. (1980): Let's Dolt. *Arithmetic Teacher*, vol. 27, pp. 6-9.

LOWRY, J. A. (1987): *An investigation of nine-year olds' geometric concepts of area and perimeter*. Doctoral dissertation, University of Maryland College Park, 1987. University Microfilms International: Ann Arbor, MI.

MAHER, C. A. & BEATTYS, C. B. (1986): Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old children. *Proceedings of the Eighth Annual Meeting PME-NA*, East Lansing, MI, pp. 163-168.

MILAUSKAS, G. A. (1987): Creative geometry problems can lead to creative problem solvers, in Lindquist, M. M. & Shulte, A. P., eds. (1987), *Learning an teaching geometry, K-12*. 1987 Yearbook. NCTM: Reston, VA, pp. 69-84.

MULLEN, G. S. (1985): How do you measure up? *Arithmetic Teacher*, vol. 33, pp. 16-21.

MUSSER, G. L. & BURGER, W. F. (1988): *Mathematics for elementary teachers a contemporany approach*. Macmillan, New York.

O'DAFFER, P. G. & CLEMENS, S. R. (1977): *Geometry: an Investigative Approach*. Addison-Wesley, London.

PACE, J. P. (1990): *A model for teaching area and perimeter concepts from a constructivist perspective to adult community college students through applied problem-solving and activity-based instruction*. (Rutgers, The State University of New Jersey-New Brunswick, 1989.) Dissertation Abstracts International, 51A.

PADILLA, V. (1990): Les figures aident-elles à voir en geometrie?, en Duval, R., ed. (1990), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM, Strasbourg, vol. 3, pp. 223-252.

PERRIN-GLORIAN, M. J. et DOUADY, R. (1988): Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes, en Laborde, C., ed. (1988), *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 161-172.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (1989-1990): L'aire et la mesure. *Petit X*, num. 24, pp. 5-36.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (1992): *Aires de surfaces planes et nombres decimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse de Doctorat D'Etat. Université Paris 7.

PETERSON, J. C. (1973): Informal Geometry in grades 7-14, in NCTM (1973), *Geometry in the Mathematics Curriculum*. Thirty-sixth Yearbook. NCTM: Reston, VA, pp. 52-91.

RAMALHO, G. & CORREIA, T. (1995): Analysis of errors and strategies used by 9-year-old portuguese students in measurement and geometry items. *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting PME*, Brasil, vol. 2, pp. 122-129.

READ, R. D. (1965): *Tangrams. 330 Puzzles*. Dover Publications, Inc., New York.

REY, J., PI, P. y TREJO, C. A. (1952): *Análisis matemático*. Kapelusz, Buenos Aires.

ROGALSKI, J. (1982): Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales. (Longueur, Surface). *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 3, pp. 343-396.

ROJANO, T. (1985): *De la aritmética al algebra. Un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad*. Tesis de Doctorado. CINVESTAV de México, D.F.

S.M.P 11-16 (1985): *Area 2*. Cambridge University Press. Cambridge.

S.M.P 11-16 (1985): *Area 2: extension*. Cambridge University Press. Cambridge.

SPITLER, G. (1982): The shear joy of area. *Arithmetic Teacher*, vol. 29, pp. 36-38.

TIERNEY, C., BOYD C. & DAVIS, G. (1990): Prospective primary teachers' conceptions of area. *Proceedings Fourteenth PME*, México, vol. 2, pp. 307-315.

TURÉGANO, P. (1994): *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*. Tesis de Doctorado. Universidad de Valencia.

UPTON, G. J. G. (1980): *The analysis of cross-tabulated data*. John Wiley and sons, New-York.

VERGNAUD, G., RICCO, G., ROUCHIER, A., MARTHE, P. et METREGISTE, R. (1978): Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des "structures multiplicatives" élémentaires? Un sondage. *Bulletin de l'APMEP*, num. 313, pp. 331-357.

WAGMAN, H. G. (1982): The child's conception of area measure, in Rosskopf, M. F., ed. (1982), *Children's mathematical concepts. Six piagetian studies in mathematics education.* Teachers College Press, New York, pp. 71-110.

WATKINS, A. E. (1982): The Isoperimetric Theorem. *Mathematics Teacher*, vol. 72, pp. 118-122.

ANEXOS

Anexo 1

Test

TEST 1. AREA DE SUPERFICIE PLANAS.

Nombre del alumno ....

Edad ....

Curso ....

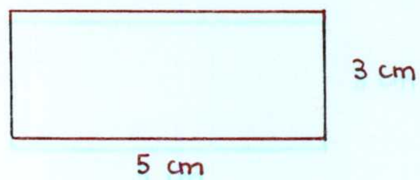
Centro Escolar ....

Ultimo curso en el que estudiaste este concepto ....

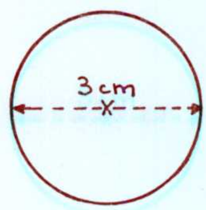
1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

2. Calcula:

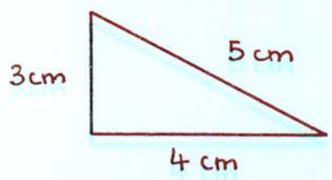
2.1 El área del rectángulo



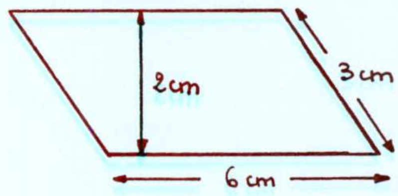
2.2 el área del círculo



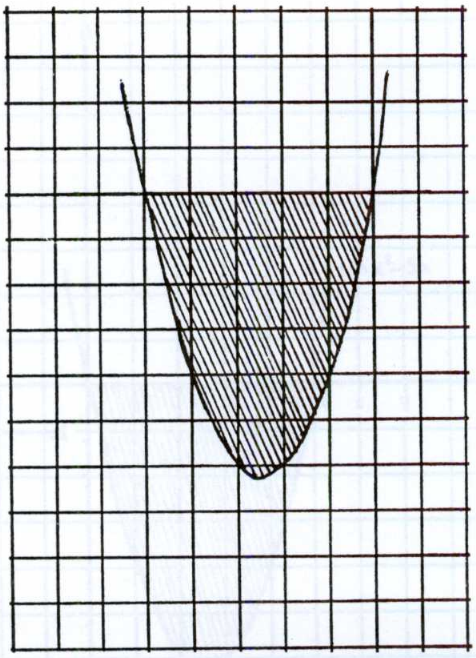
2.3 el área del triángulo



2.4 el área del paralelogramo



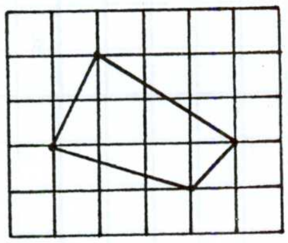
3. Calcula el área de la zona sombreada:



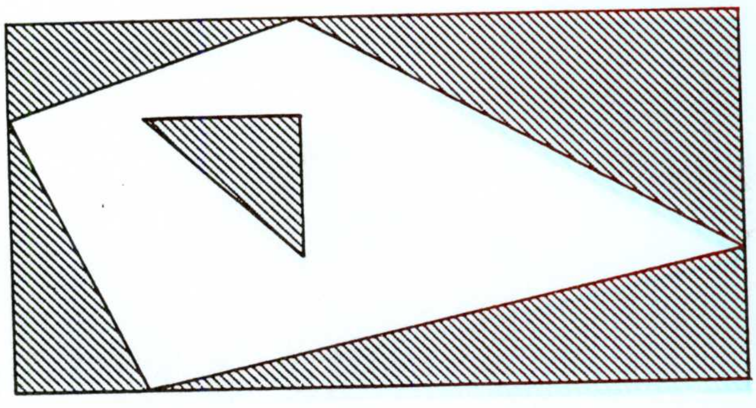
4. Sabiendo que el área de un cuadrado es de 36 cm^2, ¿cuál es la longitud de sus lados?

5. Encuentra el área del cuadrilátero de la figura.

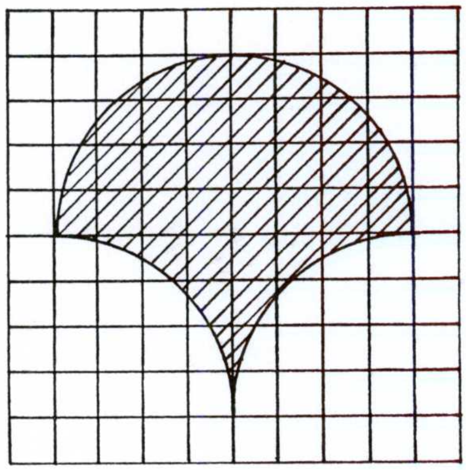
Realiza sobre la figura cualquier indicación que te ayude a determinar el área, y permita conocer el procedimiento que has utilizado para ello.



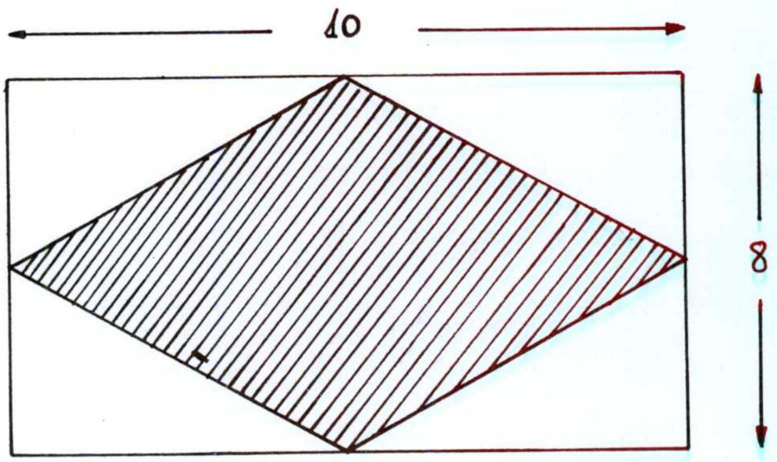
6. ¿La parte sombreada es la mitad del rectángulo?. Razónalo.



7. Encuentra el área de la zona sombreada.



8. Encuentra el área de la zona sombreada.



TEST 2. EL CONCEPTO DE AREA.

Nombre del alumno...

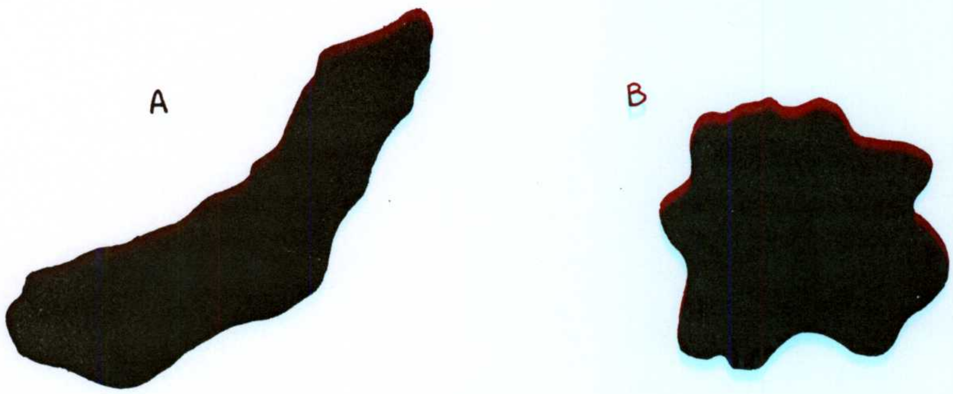
Edad..

Curso...

Centro escolar..

Ultimo curso en el que estudiaste este concepto ....

1. Observa detenidamente las superficies que se te presentan.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

1.1 La superficie A tiene mayor área que la B ....

1.2 La superficie A tiene menor área que la B ....

1.3 Las superficies A y B tienen igual área ....

1.4 No puedes decir si una tiene mayor área que la otra...

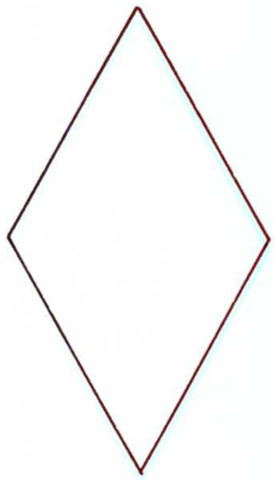
Da una razón para tu respuesta ....

....

....

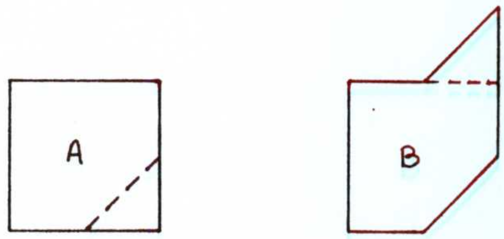
....

2. La siguiente superficie, tiene una determinada área y un cierto perímetro. Realiza sobre ella la modificación que creas oportuna, de manera, que se obtenga una nueva superficie de menor área y con un perímetro mayor.



test 2

3. La superficie "A" ha sido cortada en dos piezas que han sido reorganizadas sin superponerlas para construir una nueva superficie, la superficie B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

3.1 La superficie "A" tiene mayor área que la "B"..........

3.2 La superficie "A" tiene menor área que la "B"..........

3.3 Las superficies "A" y "B" tienen igual área ....

3.4 No puedes decir si una tiene mayor área que la otra ...

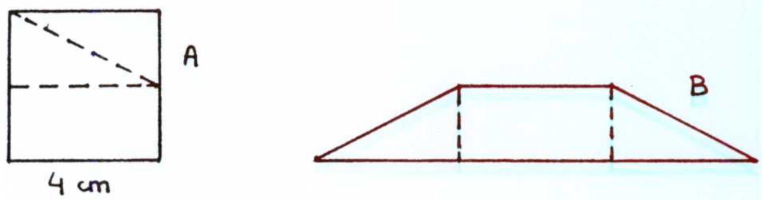
Da una razón para tu respuesta ....

....

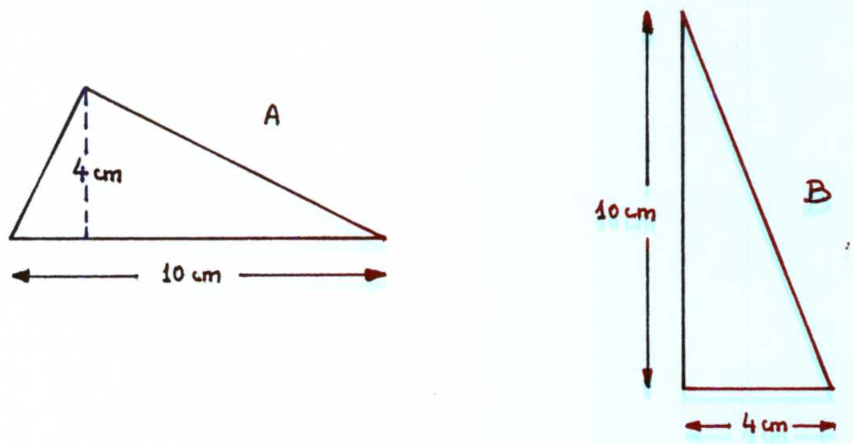
....

4. El cuadrado A ha sido cortado en varias piezas que han sido reorganizadas sin superponerlas para construir una nueva superficie, la B. Calcula el área de la superficie B.

Si crees que esto no es posible, explícalo.



5. La figura muestra dos triángulos diferentes, A y B.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

5.1 El triángulo A tiene mayor área que el B ....

5.2 El triángulo A tiene menor área que el B ....

5.3 Los triángulos A y B tienen igual área ....

5.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro ...

Da una razón para tu respuesta ....

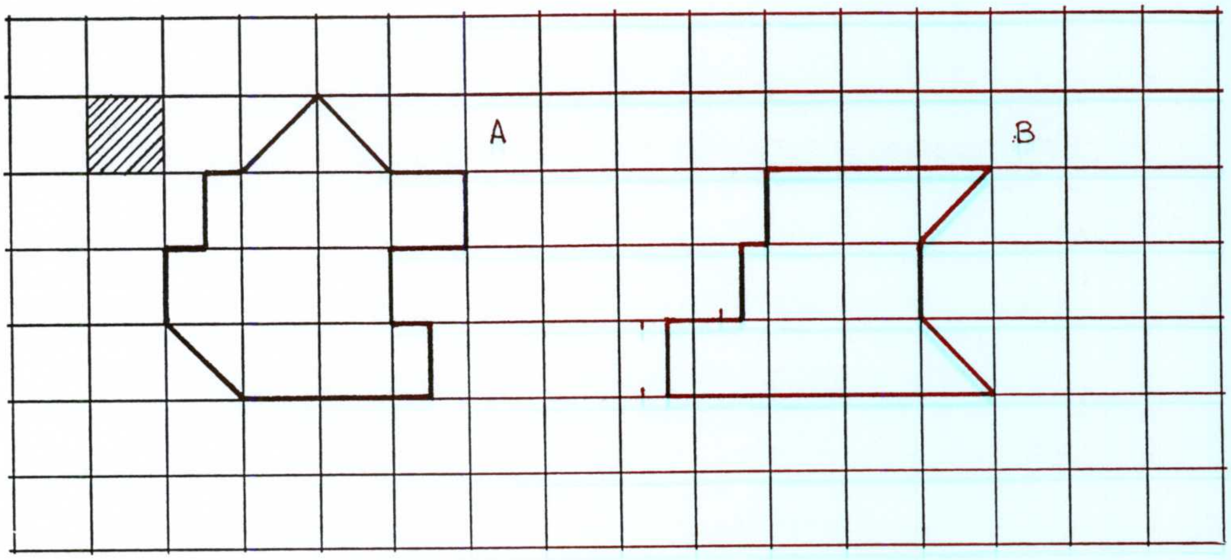
....

....

....

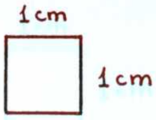
6. El área de la figura rayada mide un centímetro cuadrado. Encuentra el área en centímetros cuadrados de cada una de las figuras A y B.

Realiza sobre la figura cualquier indicación que te ayude a determinar el área, y permita conocer el procedimiento que has utilizado para ello.



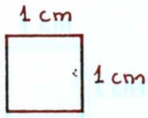
6.1 El área de A es ....

6.2 El área de B es ....

7. El área de la figura 

mide un centímetro cuadrado. Sobre el papel cuadriculado dibuja:

un cuadrado que tenga de área 1/2 centímetro cuadrado.

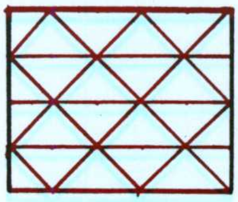
8. El área de la figura 

mide un centímetro cuadrado. Sobre el papel cuadriculado dibuja:

cuatro figuras (no cuadradas) diferentes que tengan de área un centímetro cuadrado.

9. a)

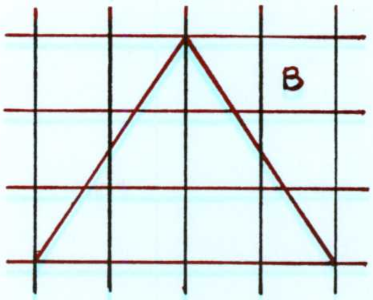
9.1 Se ha calculado el área del rectángulo A de la figura, obteniéndose el siguiente resultado.



área del rectángulo A: 40 unidades de superficie.

Dibuja la unidad de medida que se ha utilizado en el cálculo el área del rectángulo A:

9.2 Se ha calculado el área del triángulo B de la figura, obteniéndose el siguiente resultado.



área del triángulo B: 6 unidades de superficie.

Dibuja la unidad de medida que se ha utilizado en el cálculo del área del triángulo B:

b) Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

9.3 La superficie A tiene mayor área que la B ....

9.4 La superficie A tiene menor área que la B ....

9.5 Las superficies A y B tienen igual área ....

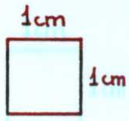
9.6 No puedes decir si una tiene mayor área que la otra

Da una razón para tu respuesta ....

....

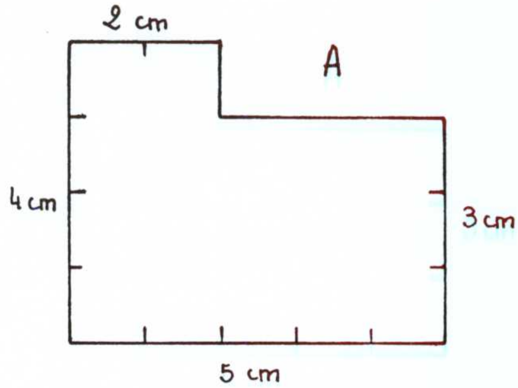
....

....

10. ¿Cuántas baldosas como esta 

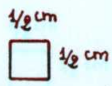
serían necesarias para cubrir la superficie A?.

Indica como lo haces.



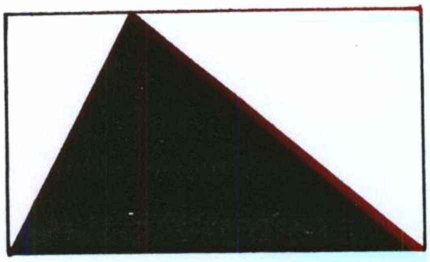
Número de baldosas superficie A : ....

11. Si ahora usáramos una baldosa más pequeña que la anterior para cubrir la misma superficie A, ¿necesitaríamos mayor o menor número de baldosas que antes?.

12. Si ahora utilizáramos una baldosa como esta 

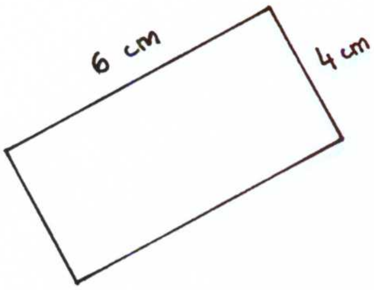
¿cuántas de éstas serían necesarias para cubrir la superficie A?

13. Calcula el área del triángulo sabiendo que la del rectángulo es de 20 cm^2.



14. Dibuja un rectángulo que tenga el mismo perímetro que el rectángulo de la figura pero con un área menor.

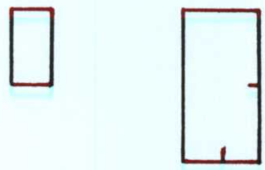
Si crees que esto no es posible indícalo, y explica el por qué de ello.



Indica el razonamiento que utilices para responder a cada una de las situaciones que a continuación se te plantean.

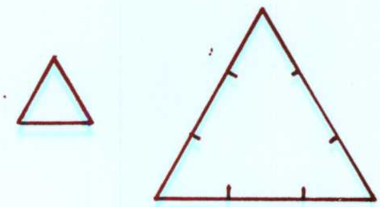
15. ¿Cuántos rectángulos pequeños hay en el grande?.

....



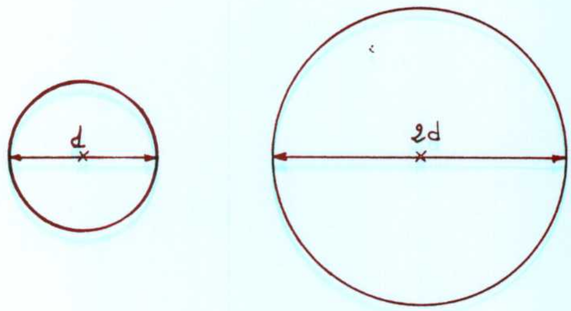
16. ¿Cuántos triángulos pequeños hay en el grande?.

....



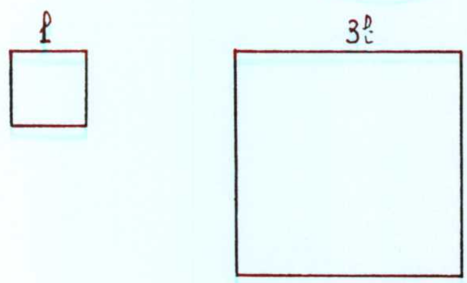
17. El área del círculo pequeño mide 6 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.

....



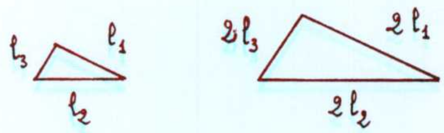
18. El área del cuadrado pequeño mide 4 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.

....



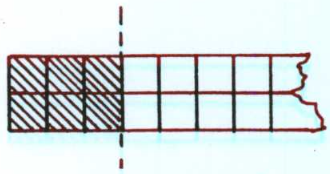
19. El área del triángulo pequeño mide 1'5 cm^2, ¿cuánto mide el área del grande?.

....



20. Para cada figura A y B, efectúa un único corte vertical sobre la cinta correspondiente, de manera que obtengas un rectángulo de igual área a la figura dada. Deberás respetar por lo tanto la altura de la cinta. Sombrea el rectángulo así definido.

El siguiente ejemplo te mostrará como debes utilizar la cinta.



uso correcto de la cinta

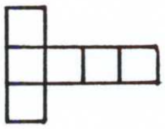
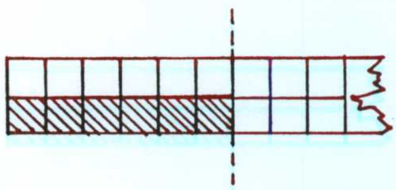
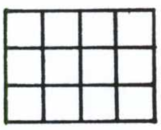


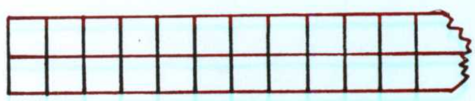
figura ejemplo

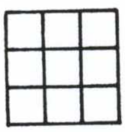


uso incorrecto de la cinta.

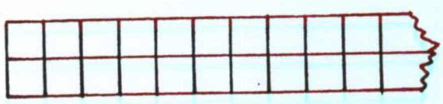


A





B

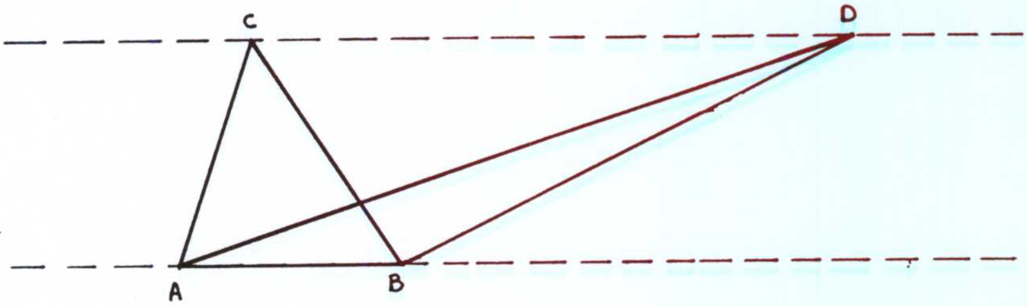


21. A continuación se te presenta una colección de fórmulas ficticias, para ti desconocidas. Sabiendo que las "letras" representan el valor de una dimensión, señala de todas la fórmulas, las que creas pueden corresponder al área de una determinada figura y escribe el razonamiento por ti utilizado para realizar esta selección.

Nota. En ningún caso, los números que aquí aparecen, representan el valor de una dimensión.

(1) $A = 3a$	(2) $A = 3a \cdot b$	(3) $A = 4\pi \cdot a^2$
(4) $A = 2b^3$	(5) $A = (4/3)\pi \cdot b$	(6) $A = 2a+2b$
(7) $A = 2a^2 \cdot b$	(8) $A = a^2/2$	(9) $A = (b+b') \cdot a$
(10) $A = 6c/5$	(11) $A = c \cdot a \cdot b$	(12) $A = a+b+c+d$

22. El triángulo ABC se ha transformado en el nuevo triángulo ABD. Compara las áreas y los perímetros de estos dos triángulos.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

a)

22.1 El área de ABC es mayor que la de ABD ....

22.2 El área de ABC es menor que la de ABD ....

22.3 Los dos triángulos tienen igual área ....

22.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro...

Razona la respuesta ....

....

....

....

b)

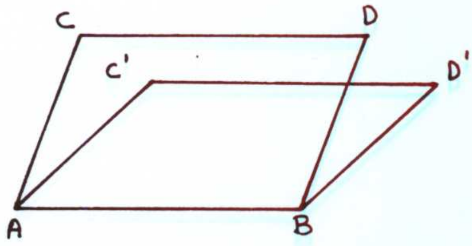
- El perímetro de ABC es mayor que el de ABD ....
- El perímetro de ABC es menor que el de ABD ....
- Los dos triángulos tienen igual perímetro ....
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro ....

Razona la respuesta ....

....

....

23. El paralelogramo de la figura ABCD se ha transformado en un nuevo paralelogramo ABC'D'. Compara sus áreas y sus perímetros.



Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera:

a)

23.1 El paralelogramo ABCD tiene mayor área que el ABC'D'...

23.2 El paralelogramo ABCD tiene menor área que el ABC'D'...

23.3 Los dos paralelogramos tienen igual área ....

23.4 No puedes decir si uno tiene mayor área que el otro...

Da una razón para tu respuesta ....

....

....

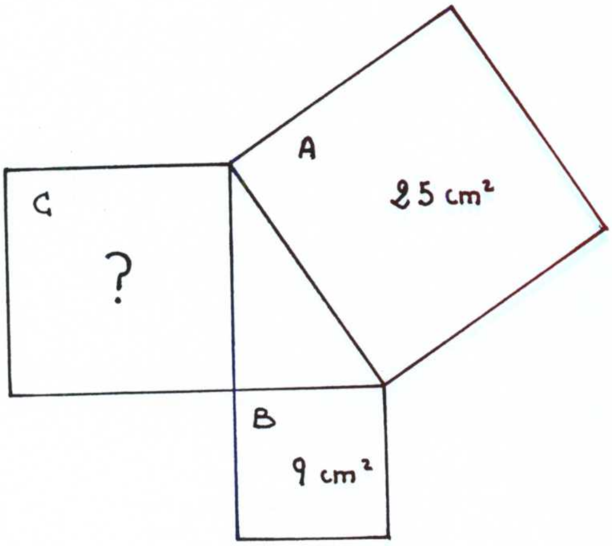
b)

- El paralelogramo ABCD tiene mayor perímetro que el ABC'D'...
- El paralelogramo ABCD tiene menor perímetro que el ABC'D'...
- Los dos paralelogramos tienen igual perímetro ......
- No puedes decir si uno tiene mayor perímetro que el otro ....

Da una razón para tu respuesta ....

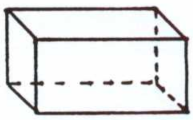
....

24. Calcula el área del cuadrado C. Indica como lo haces.



25. Observa las unidades de medida siguientes:

unidad A

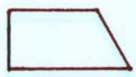


unidad B

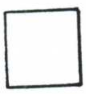
unidad C

dm

unidad D



unidad E



unidad F

cm^3

unidad G

unidad H

hm^2

unidad I

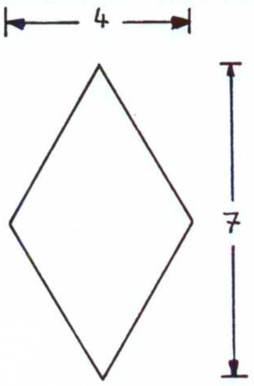
Cada una de ellas ha sido utilizada para efectuar una medida determinada. Indica las unidades que han sido utilizadas para:

25.1 medir una longitud: ....

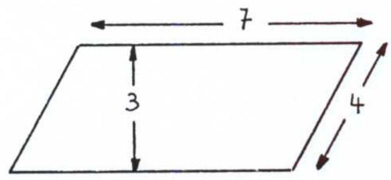
25.2 medir un área: ....

25.3 medir un volumen: ....

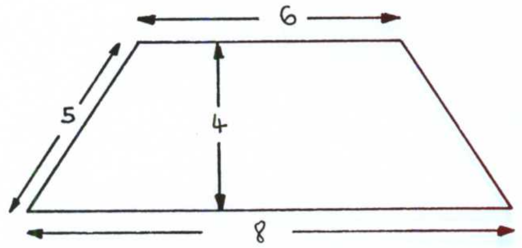
26. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el rombo de la figura. Muestra como lo haces.



27. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el paralelogramo de la figura. Muestra como lo haces.



28. Dibuja un rectángulo que tenga igual área que el trapecio de la figura. Muestra como lo haces.



Anexo 2

Codificación del test

CODIFICACION DEL TEST

NOMBRE DEL ALUMNO

casillas nº: 1, 2 y 3

EDAD

casillas nº: 5 y 6

CURSO

08: 8º de E.G.B.
02: 2º de B.U.P.
C.L: C.O.U. de Letras
C.C: C.O.U. de Ciencias
03: 3º de Magisterio
05: 5º Facultad de Matemáticas

casillas nº: 8 y 9

CENTRO ESCOLAR

I1: I.B.U.P. Campanar
I2: I.B.U.P. Font de Sant Lluis
I3: I.B.U.P. Sant Vicent Ferrer
I4: I.B.U.P. Estensió Antic-Regne
C1: Colegio Público Ballester Fandos
C2: Colegio Público Lluis Guarner
C3: Colegio Público Niño Jesús
C4: Colegio Público Rodriguez Fornos
FM: Facultad de Matemáticas
EM: Escuela de Magisterio

casillas nº: 11 y 12

ÚLTIMO CURSO EN EL QUE ESTUDIÓ EL CONCEPTO

5: 5º de E.G.B.
6: 6º de E.G.B.
7: 7º de E.G.B.
8: 8º de E.G.B.
E: E.G.B.
1: 1º de B.U.P.
2: 2º de B.U.P.
3: 3º de Escuela de Magisterio.
C: C.O.U.

casila nº: 14

TEST 1

ítem nº 2

2.1 Área del rectángulo

Fórmula correcta	1	
Fórmula incorrecta	2	
Confusión área/perímetro	3	
		variable: x211 casilla nº: 16

Unidad correcta	1	
Unidad incorrecta	2	
Unidad omitida	3	
		variable: x212 casilla nº: 18

2.2 Área del círculo

Fórmula correcta	1	
Fórmula incorrecta	2	
		variable: x221 casilla nº: 20

Cálculo correcto	1	
Cál. inco./confusión r-d	2	
Cál. inco./confusión r^2-2r	3	
Cál. inco./otros motivos	4	
		variable: x222 casilla nº: 22

Unidad correcta	1	
Unidad incorrecta	2	
Unidad omitida	3	
		variable: x223 casilla nº: 24

2.3 Área del triángulo

Fórmula correcta	1	
Fórmula incorrecta (otras)	2	
Confusión área/perímetro	3	
Producto de tres dimensiones	4	
		variable: x231 casilla nº: 26

Cálculo correcto	1	
Cál. inco./toma mal "h"	2	
Cál. inco./otros motivos	3	
		variable: x232 casilla nº: 28

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta	2
Unidad omitida	3

variable: x233 casilla nº: 30

2.4 Área del paralelogramo

Fórmula correcta	1
Fórmula incorrecta (otras)	2
Confusión área/perímetro	3
Producto de 2 o 3 dimensiones	4
Otros métodos (por ej. con triángulos)	5

variable: x241 casilla nº: 32

Cálculo correcto	1
Cál. inco./toma l-h	2
Cál. inco./otros motivos	3

variable: x242 casilla nº: 34

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta	2
Unidad omitida	3

variable: x243 casilla nº: 36

ítem nº 3. Cálculo del área de una superficie plana curva

Cálculo correcto/ 19 < cuadrados < 22	1
Cálculo correcto/ c. integral	2
Cálculo integral correcto/no razona "-"	3
Cálculo correcto/ 19<estim. triángulos<22	4
Cálculo inco./ est.tri.<19 y est.tri.>22	5
Cálculo inco./ cuadrado<19 y cuadrado>22	6
Cálculo incorrecto integral	7
Estimación <14 o 15	8
Intentos algebraicos sin llegar a nada (resolución de la ec. de 2º grado en 2º BUP; cálculo del perímetro en E.G.B., etc...)	9

variable: x31 casilla nº: 38

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta estandard	2
Unidad omitida	3
Unidad inapropiada estandard "cm^2"	4
Unidad inapropiada estandard $\neq cm^2$	5

variable: x32 casilla nº: 40

ítem nº 4. Conocida el área del cuadrado, determinar la longitud de su lado

Cálculo correcto	1
Cál. inco./ confusión "l^2" con "4l"	2
Cál. inco./ confusión "l^2" con "2l"	3
Cál. inco./ fórmula área incorrecta	4
Cálculo incorrecto (otros)	5

variable: x41 casilla nº: 42

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta	2
Unidad omitida	3

variable: x42 casilla nº: 44

ítem nº5. Cálculo del área de un cuadrilátero

Razona. correcto/suma áreas 2 triángulos	1
Razona. correcto/suma áreas 3 triángulos	2
Razona. correcto/suma áreas 4 triángulos	3
Razona. correcto/ A_R - $4A_T$	4
Razona. correcto/ $A_{T1}+A_{T2} = 1/2A_{R1}+1/2A_{R2}$	5
Razona. correcto/ conteo de cuadrados	6
....	7
Razona. inco./cálculo de las longitudes de los lados y se quedan bloqueados	8
Razonamiento incorrecto (otros)	9

variable: x51 casilla nº: 46

Cálculo correcto. Para el conteo: $5<$cuadra.<7	1
Cálculo incorrecto/error de cálculo	2
Cálc. inco./nº cuadrados<5 y nº cuadrados>7	3
Cálc. inco./representación incorrecta ptos.	4
Cálc. inco./error de fórmula	5
....	6
....	7
....	8
Otros tipos de errores	9

variable: x52 casilla nº 48

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta estandard	2
Unidad omitida	3
Unidad inapropiada estandard "cm^2"	4
Otra unidad estandard inapropiada "$\neq cm^2$"	5

variable: x53 casilla nº: 50

ítem n°6. Comparación de áreas en un contexto geométrico

Razona.geométrico correcto	1
Razona. inco./planteamiento algebraico o numérico complejos que les bloquean	2
Intentos sin llegar a nada	3
"Si" o "No", con razonamiento verbal inconsistente	4

variable: x61 casilla n°: 52

ítem n°7. Cálculo del área de una superficie curva.

Razo. correcto/semicírculo + 2	1
Razo. correcto/semicírculo + 2	2
Razo. correcto/semicírculo + 2	3
Razo. geo. correcto/recomposición rectángulo	4
Conteo cuadrados	5
Razona. Incorrecto/Numéricos o algebraicos	6
Sólo semicircunferencia/numérico incompleto	7
Razo. geo. correcto/recomposición cuadrado, pero no pueden determinar el lado del cuadrado.	8
....	9

variable: x71 casilla n°: 54

Cálc. correcto. Para el conteo:30<cuadra.<34	1
Cálculo incorrecto/error de cálculo	2
Cálculo incorrecto/error fórmula	3
Cálculos incorrectos (otros)	4
Cál. inco./cuadrados<30 y cuadrados>34	5

variable: x72 casilla n°: 56

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta estandard	2
Unidad omitida	3
Unidad inapropiada estandard "cm^2"	4
Unidad inapropiada estandard "$\neq cm^2$"	5

variable: x73 casilla n°: 58

ítem n°8. Cálculo del área de un rombo inscrito en un rectángulo

Razona. correcto/fórmula área del rombo	1
Razona. correcto/ 4 áreas de triángulos	2
Razona. correcto/ 2 áreas de triángulos	3
Razona. correcto/ A_R - $4A_{triángulos}$	4

Razona. correcto-geométrico/ $A_{Ro.} = 1/2\ A_{rect.}$	5
....	6
....	7
Razonamientos incorrectos numéricos	8
....	9

variable: x81 casilla nº: 60

Cálculo correcto	1
Cálculo incorrecto/error de cálculo	2
Cálculo incorrecto/error de fórmula	3
Cálculos incorrectos (otros)	4

variable: x82 casilla nº: 62

Unidad correcta	1
Unidad incorrecta estandard	2
Unidad omitida	3
Unidad inapropiada estandard "cm^2"	4
Unidad inapropiada estandard "$\neq cm^2$"	5

variable: x83 casilla nº: 64

TEST 2

ítem nº 1. Comparación del área de dos superficies irregulares curvas

A > B	1
A < B	2
A = B	3
No se puede	4

variable: y11 casilla nº: 66

Efectúan una medida a su modo: 1
- "lo he medido con mis dedos"
- cuadriculan las figuras para compararlas
- las inscriben en cuadrados

Afirmaciones del tipo: 2
- "si recompongo A me daría B"
- "ocupan más o menos lo mismo"
- "lo que una no tiene de largo lo tiene de ancho"

Afirmaciones del tipo: 3
- "a simple vista"
- "me da la impresión"

Afirmaciones del tipo: 4
- "no tengo datos"
- "no puedo medirlas"
- "a simple vista no lo se"

Afirmaciones del tipo: 5
- "A ocupa mucho más a lo largo que B y es casi tan ancha"

Afirmaciones del tipo: 6
- "no son figuras geométricas que se puedan descomponer y calcular"
- "son figuras irregulares"
- "no tienen lados"

Afirmaciones del tipo: 7
- "no hay fórmulas para calcular esas áreas"
- "no conozco las fórmulas para poder calcular las áreas"

Aún escogiendo una superficie, manifiestan que no se sabe.	8	
Otras respuestas	9	
		variable: y12 casilla nº: 68

ítem nº 2. Modificación de una superficie para obtener una nueva de menor área y mayor perímetro

Modificación correcta	1	
Modificación incorrecta	2	
Manifiesta la imposibilidad de ésta	3	
		variable: y21 casilla nº: 70

Conserva la forma	1	
No conserva la forma	2	
		variable: y22 casilla nº: 72

Menor área - menor perímetro	1	
Menor área - igual perímetro	2	
Igual área - mayor perímetro	3	
Igual área - menor perímetro	4	
Mayor área - mayor perímetro	5	
Razonamiento algebraico	6	
....	7	
El perímetro deberá ser siempre el mismo	8	
Otras	9	
		variable: y23 casilla nº: 74

ítem nº 3. Conservación del área. (Recorte y pegado)

A > B	1	
A < B	2	
A = B	3	
No se puede	4	
		variable: y31 casilla nº: 76

Lo que se quita abajo, se le añade arriba	1
Es lo mismo dispuesto de otra forma	2
Simplemente se le ha cambiado la forma no el tamaño	3
Porque B tiene mayor porción de superficie	4
Me parece (E.G.B) - Es evidente (>E.G.B)	5
A "B" le falta un trozo	6
....	7

....	8
Respuestas confusas o incatalogables	9

variable: y32 casilla nº: 78

ítem nº 4. Conservación del área por recorte y pegado. Cálculo de un área

Área correcta por conservación directa	1
Área correcta por cálculo numérico	2
Indican que tendrán igual área pero no la calculan	3
Área incorrecta: - se lían en el cálculo - error de cálculo - utilizan fórmulas erróneas	4
Área incorrecta: - planteamiento algebraico donde se lían y no llegan a nada - ponen sólo la fórmula (E.G.B)	5
Afirman que no se puede: - "por falta de datos" - "porque no me acuerdo de la fórmula"	6
....	7
....	8
Otras respuestas confusas o incatalogables. Por ej. "es imposible (sin más comentario)"	9

variable: y41 casilla nº: 80

ítem nº 5. Comparación de las áreas de dos triángulos

A > B	1
A < B	2
A = B	3
No se puede	4

variable: y51 casilla nº: 82

Se fijan en una única dimensión	1
Calcula las áreas y compara los resultados	2
Razona sobre el valor de "b" y "h"	3
Es la misma figura en distinta posición	4
"A" tiene una parte más que "B"	5
"Parece la misma"-"Creo que es así"-"Se ve"	6
Me faltan datos/ Me falta el valor de "x"	7
"A" le falta una parte de "B"	8
Otras respuestas confusas o incatalogables Por ej. "no lo se"/ "Porque sí"	9

variable: y52 casilla nº: 84

ítem nº 6. Cálculo de área por conteo de u.c.

Figura A

Correcto	1
Ignora las fracciones	2
Toma las fracciones como u. enteras	3
Otro valor incorrecto pero "**lógico**"	4
....	5
....	6
....	7
Valores numéricos **injustificables**	8
Respuestas incorrectas no numéricas.	9

variable: y61 casilla nº: 86

Figura B

Correcto	1
Ignora las fracciones	2
Toma las fracciones como u. enteras	3
Aproximación de 1/3: 8'75 o 8'6	4
Interpretación errónea de la fracción:	5
- "9" (toma 1/3 como 1/2)	
- "8'5" (toma 1/3 como 1/4)	
Otro valor incorrecto pero "**lógico**"	6
....	7
Valores numéricos **injustificables**	8
Respuestas incorrectas no numéricas	9

variable: y62 casilla nº: 88

ítem nº 7. Dibujo de un cuadrado de 1/2 cm^2 de área

Correcto geométricamente	1
Correcto numéricamente:	2
- cálculo de la longitud del lado	
Incorrecto/cuadrado de lado 1/2 cm	3
Otras figuras incorrectas	4

variable: y71 casilla nº: 90

ítem nº 8. Dibujo de 4 figuras distintas de 1 cm^2 de área

4 correctas	1
3 correctas	2
2 correctas	3
1 correcta	4
0 correctas	5

variable: y81 casilla nº: 92

ítem nº 9. Comparación de áreas con unidades de medida distintas

Figura A

Unidad correcta de área	1
Unidad incorrecta de área	2
Unidad correcta de longitud	3
Pone "cm"	4
....	5
....	6
....	7
....	8
Otras respuestas	9

variable: y91 casilla nº: 94

Figura B

Unidad correcta de área	1
Unidad incorrecta de área	2
Unidad correcta de longitud	3
Pone "cm"	4
....	5
....	6
....	7
....	8
Otras respuestas	9

variable: y92 casilla nº: 96

$A > B$	1
$A < B$	2
$A = B$	3
No se puede	4

variable: y93 casilla nº: 98

Establece una relación correcta entre las unidades de A y B	1
Establece una relación incorrecta entre las unidades de A y B	2
Manifiesta que no se puede porque: - las unidades de medida son diferentes	3
Manifiesta que no se puede porque: - "no tengo las medidas" - "no sabemos cual es la unidad con la que se mide"	4
"A>B" porque 40 >6	5
No ha encontrado una de las unidades de medida, y por lo tanto no lo sabe	6
Me parece	7
Porque la unidad de A es menor que la de B	8
Otras respuestas	9

variable: y94 casilla nº: 100

ítem nº 10. Cálculo del área de una superficie por iteración de la unidad de medida (u.c)

Cálculo correcto	1
Cálculo incorrecto	2
Confunden la figura A, con el recorte que posee la figura, en forma de rectángulo	3

variable: y101 casilla nº: 102

Cuadriculan y cuentan	1
Suman áreas de rectángulos	2

variable: y102 casilla nº: 104

ítem nº 11. Menor tamaño de unidad --- mayor número de unidades

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y111 casilla nº: 106

ítem nº 12. Determinar el número de baldosas contenidas en la figura del ítem 10, siendo ahora éstas, cuadrados de longitud 1/2

Correcto	1
Incorrecto./Duplican	2
Incorrecto./Otros errores	3

variable: y121 casilla nº: 108

ítem nº 13. Cálculo del área de un triángulo contenido en un rectángulo de igual base y altura

Razonamiento correcto geométrico	1
Razonamiento correcto por significado de la fórmula. $A_T = 1/2\ A_R$	2
Indican que $A_T = 1/2\ A_R$ pero no lo calculan	3
Cálculo correcto del área, a partir de las dimensiones, incluyendo, cuando éstas son representadas por letras	4
....	5
Razonamientos y cálculos incorrectos.	6
....	7
....	8
Otras respuestas. Por ej. - "me faltan datos" - "no se hacerlo"	9

variable: y131 casilla nº: 110

ítem nº 14. Transformación de un rectángulo en otro de igual perímetro y menor área

Modificación correcta	1
Modificación incorrecta (lo intenta)	2
Manifiesta que es imposible	3
Planteamiento algebraico sin salida	4
Sería posible si se pudiera construir otra figura, pero no, un rectángulo	5

variable: y141 casilla nº: 112

ítem nº 15. Embaldosamiento de un rectángulo

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y151 casilla nº: 114

ítem nº 16. Embaldosamiento de un triángulo

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y161 casilla nº: 116

ítem nº 17. Duplicación del diámetro de un círculo, ¿área?

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y171 casilla nº: 118

Razonamiento algebraico	1
Cálculo del lado --- área círculo	2
Por recubrimiento	3
Por duplicación del área	4
Error en el cálculo numérico o algebraico	5
Error en la fórmula	6
Sólo da el número de círculos contenidos	7
Valor directo correcto	8
Otros valores incorrectos	9

variable: y172 casilla nº: 120

ítem nº 18. Triplicación del lado del cuadrado, ¿área?

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y181 casilla nº: 122

Razonamiento algebraico	1
Cálculo del lado --- área cuadrado	2
Por recubrimiento	3
Por triplicación del área	4
Error en el cálculo numérico o algebraico	5
Error en la fórmula	6
Sólo da el número de cuadrados contenidos	7
Valor directo correcto	8
Otros valores incorrectos	9

variable: y182 casilla nº: 124

ítem nº 19. Duplicación de los lados de un triángulo. ¿área?

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y191 casilla nº: 126

Razonamiento algebraico	1
Cálculo lado y altura --- área triángulo	2
Por recubrimiento	3
Por duplicación del área	4
Error de cálculo numérico o algebraico	5

Error de fórmula	6
Sólo da el número de triángulos contenidos	7
Valor directo correcto	8
Otros valores incorrectos	9

variable: y192 casilla nº: 128

ítem nº 20. Construcción de rectángulos sobre una cinta dada

Correctos A y B	1
Correcto sólo A	2
Incorrecto los dos	3

variable: y201 casilla nº: 130

Lo hace bien	1
No respeta las condiciones	2
Manifiesta la imposibilidad de B, o la deja en blanco	3

variable: y202 casilla nº: 132

ítem nº 21. Reconocimiento de fórmulas de área

Razona. correcto/Elección correcta completa	1
Razona. correcto/Elección correcta incompleta	2
Razona. correcto/Elección con algún error	3
Razonamiento incorrecto	4
Elecciones incorrectas, sin razonamiento	5
Elecciones correctas, pero con razonamientos inapropiados	6

variable: y211 casilla nº: 134

ítem nº 22. Transformación de un triángulo: Conservación del área pero no del perímetro

Área

A > B	1
A < B	2
A = B	3
No se puede	4

variable: y221 casilla nº: 136

Perímetro

A > B	1
A < B	2

A = B	3
No se puede	4

variable: y222 casilla nº: 138

Razonamientos áreas

Tienen igual base y altura	1
Identificación incorrecta altura	2
Lo intuyo/se ve/me parece/me da la sensación	3
No tengo datos/no tengo medidas/ /no se encuentra la relación entre ellos	4
Perímetro mayor implica área mayor	5
Sólo se ha deformado/se ha transformado/ /sólo ha variado la forma/, el área es la misma	6
Compara geométricamente áreas de trozos	7
Al estirarse se hace más pequeño/más alargado	8
Otros razonamientos confusos, inconsistentes o incatalogables	9

variable: y223 casilla nº: 140

Razonamientos perímetros

Se refiere a las longitudes de los lados	1
Porque la altura es mayor	2
Lo intuyo/se ve/me parece/me da la impresión	3
No tengo datos/no tengo medidas/ /no hay relación entre ellos	4
Igual área implica igual perímetro/ /mayor área implica mayor perímetro	5
Es la proyección del otro, luego tendrán igual perímetro	6
No recuerda lo que es el perímetro	7
....	8
Otros razonamientos confusos, inconsistentes o incatalogables	9

variable: y224 casilla nº: 142

ítem nº 23. Transformación de un paralelogramo. Variación del área, pero no del perímetro

Área

A > B	1
A < B	2
A = B	3
No se puede	4

variable: y231 casilla nº: 144

Perímetro

A > B	1
A < B	2
A = B	3
No se puede	4

variable: y232 casilla nº: 146

Razonamientos área

Igual base, altura mayor/menor	1
Identificación incorrecta de la altura	2
Lo intuyo/se ve/me parece/me da la sensación	3
No tengo datos/no tengo medidas/ /no encuentro relación entre ellos	4
Igual perímetro implica igual área/ /mayor perímetro implica mayor área	5
Sólo ha cambiado su posición, son iguales /uno está como elevado/sólo ha girado un ángulo "a"/ /sólo se ha abatido/sólo se ha desplazado/ /uno es la proyección del otro	6
Compara geométricamente áreas de trozos	7
....	8
Otros razona. confusos, inconsistentes o incatalogables	9

variable: y233 casilla nº: 148

Razonamientos perímetro

Lados iguales	1
Razonamiento sobre la altura: /la altura es menor/	2
Lo intuyo/se ve/me parece/me da la sensación	3
No tengo datos/no tengo medidas/ /no encuentro relación entre ellos	4
Igual área implica igual perímetro/ /menor área implica menor perímetro	5
Sólo ha cambiado su posición, son iguales /uno está como elevado/sólo ha girado un ángulo "a"/ /sólo se ha abatido/sólo se ha desplazado/ /uno es la proyección del otro	6
No sabe lo que es el perímetro	7
....	8
Otros razona. confusos, inconsistentes o incatalogables	9

variable: y234 casilla nº: 150

ítem nº 24. Interpretación geométrica del teorema de Pitágoras

Cálculo correcto/Interpretación geométrica	1
Cálculo correcto/cálculo del lado del cua.	2
Cálculo incorrecto/error de cálculo	3
Cálculo incorrecto/confunden: área con el lado	4
Cálculo incorrecto/Incorrecto Th. Pitágoras	5
Valor numérico o razonamiento sin sentido	6
....	7
....	8
Otros razonamientos o situaciones: Por ej. no lo acaba.	9

variable: y241 casilla nº: 152

ítem nº 25. Reconocimiento de unidades de medida

Unidad de longitud

Unidad standard correcta	1
Unidad estándar incorrecta	2
No indica ninguna	3

variable: y2511 casilla nº: 154

Unidad no standard correcta	1
Unidad no standard incorrecta	2
No indica ninguna	3

variable: y2512 casilla nº: 156

Unidad de superficie

Unidad standard correcta	1
Unidad standard incorrecta	2
No indica ninguna	3

variable: y2521 casilla nº: 158

Unidad no standard correcta	1
Unidad no standard incorrecta	2
No indica ninguna	3
Sólo pone el cuadrado	4

variable: y2522 casilla nº: 160

Unidad de volumen

Unidad standard correcta	1
Unidad standard incorrecta	2
No indica ninguna	3

variable: y2531 casilla nº: 162

Unidad no standard correcta	1
Unidad no standard incorrecta	2
No indica ninguna	3

variable: y2532 casilla nº: 164

ítem nº 26. Transformación de un rombo en un rectángulo

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y261 casilla nº: 166

Recortando y pegando	1
Mediante el uso de fórmulas	2
Rectángulo con valores numéricos, sin justificar	3

variable: y262 casilla nº: 168

ítem nº 27. Transformación de un paralelogramo en un rectángulo

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y271 casilla nº: 170

Recortando y pegando	1
Mediante el uso de fórmulas	2
Rectángulo con valores numéricos, sin justificar	3

variable: y272 casilla nº: 172

ítem nº 28. Transformación de un trapecio en un rectángulo

Correcto	1
Incorrecto	2

variable: y281 casilla nº: 174

Recortando y pegando	1
Mediante el uso de fórmulas	2
Rectángulo con valores numéricos, sin justificar	3

variable: y282 casilla nº: 176

ítem nº1. Test 1. ¿Qué es para ti el área de una superficie plana?

CONFUSIÓN ÁREA-PERÍMETRO

01 Son los límites que tiene una superficie

EL ÁREA ES BASE X ALTURA

02 El área es el producto de base x altura

EL ÁREA ES UNA FÓRMULA DE CÁLCULO

03 El área es una fórmula para efectuar su resultado de esa superficie

CONCEPCIÓN GEOMÉTRICA DEL ÁREA

10 El área es la superficie de un terreno

11 El área es el sitio que ocupa la superficie/ El área es el espacio dentro de una figura

12 El área es el espacio dentro de una figura

13 Dibujo de una superficie, marcando lo de dentro de ella

CONCEPCIÓN NUMÉRICA

20 El área es un número

21 El área es el nº de unidades cuadradas que tiene la superficie

22 El área es el espacio que ocupa en "m^2" una figura en el plano

23 El área es el espacio medido en unidades de longitud elevadas al cuadrado, que ocupa un determinado cuerpo en un plano

24 El área es el concepto que expresa la cantidad de unidades patrón que existe en una superficie (dimensión 2)

Se menciona el término "magnitud":

30 El área es una magnitud que designa el número de veces que se podría repetir una porción de superficie tomada como unidad en otra superior a inferior.

31 El área es un concepto para nombrar la magnitud de una figura plana.

40 El área es la medida de una superficie.

42 El área es lo que mide una figura, tanto a lo largo como a lo ancho.

CONFUSIÓN ÁREA-ÁREA + PERÍMETRO

41 El área es el perímetro más el espacio del interior

CONFUSIÓN ÁREA-VOLUMEN

60 La superficie comprendida de un objeto en sus tres dimensiones: alto, largo y ancho

CONFUSIÓN ÁREA- SUPERFICIE PLANA

80 Para mi el área de una superficie es el tablero de una mesa

INCATALOGABLES

70 Es la superficie que está en contacto con el exterior

variable: y291 casillas nº:178 y 179

1 2 3 CODIGO ALUMNO		5 6 EDAD		8 9 CURSO	10 12 CENTRO	14 U.CURSO	16 2.1 Formula	18 2.1 unidad	20 2.2 Formula	22 2.2 Cálculo	24 2.2 unidad		
26 2.3 formula	28 2.3 Cálculo	30 2.3 unidad	32 2.4 Formula	34 2.4 Cálculo	36 2.4 unidad	38 3 cálculo	40 3 unidad	42 4 cálculo	44 4 unidad	46 5 razona.	48 5 cálculo	50 5 unidad	52 6
54 7 razona.	56 7 cálculo	58 7 unidad	60 8 razona.	62 8 cálculo	64 8 unidad	66 1 elección	68 1 razones	70 2	72 2	74 2	76 3 elección	78 3 razones	80 4
82 5 elección	84 5 razones	86 6 Figura A	88 6 Figura B	90 7	92 8	94 9 Figura A	96 9 Figura B	98 9 elección	100 9 razones	102 10 cálculo	104 10 método	106 11	108 12
110 13	112 14	114 15	116 16	118 17	120 17 métodos	122 18	124 18 métodos	186 19	128 19 método	130 20	132 20	134 21	
136 22 área	138 22 perime.	140 22 razones áreas	142 22 razones perime.	144 23 área	146 23 perime.	148 23 razones áreas	150 23 razones perime.	152 24	154 25 longitud	156 25 longitud	158 25 superficie	160 25 superficie	
162 25 volumen	164 25 volumen	166 26	168 26 método	170 27	172 27 método	174 28	176 28 método	178 179 concepción ítem 1.					

Anexo 3

Guión de las entrevistas

ENTREVISTA

CENTRO: FECHA:

ALUMNO: HORA COMIENZO:

CURSO: HORA FINALIZACIÓN:

1.- En la pregunta nº1 del test1, escribiste lo que para ti es el área de una superficie plana. Después de realizar el test, ¿cambiarías tú opinión, o la mantendrías?

no la cambia sí la cambia

2.- ¿Crees que superficies de formas distintas, pueden tener igual área?

SÍ NO

respuesta dada en el ítem nº8 test2	correcta (o incompleta)
	incorrecta
	en blanco

3.- ¿Crees que al área de una superficie le pueden corresponder números diferentes?

SÍ NO

respuesta dada en el ítem nº 10, 11 y 12 test2	correcta
	incorrecta

4.- ¿Tienen los términos "superficie" y "área" el mismo significado para ti?

5.- Figuras de igual perímetro ¿pueden tener diferente área?

SÍ NO

Sobre otra superficie diferente a un rectángulo ¿podrías realizar la construcción que se te pide?

SÍ NO

respuesta dada en el ítem n°14 test2	correcta incorrecta imposible en blanco

6.- ¿Crees que se pueden comparar áreas que han sido medidas con unidades diferentes?

SÍ NO

respuesta dada en el ítem n°9 test2	correcta incorrecta en blanco

7.- ¿Crees que la unidad se puede partir para efectuar la medida o que siempre se debe trabajar con unidades enteras?

SÍ NO

8.- a) Comparar las respuestas dadas en los ítemes:

ítem n°2 test1	ítem n°25 test2
unidades correctas	clasificación correcta
unidades incorrectas	clasificación incompleta o con algún error
unidades omitidas	en blanco

b) Estudio de las respuestas dadas en los ítemes n° 3, 5 y 7 del test1.

unidades omitidas	utiliza "cm^2"
¿Qué unidad de medida pondrías?	¿Por que la utilizas?

9.- Estudio de la respuesta dada en el ítem n°3 del test1.

a) en blanco

¿Por qué la dejaste en blanco?

	correcto
b) resuelto por C. Integral	planteado sin resolver
	incorrecto

¿Qué representa el número que has obtenido? ¿Cómo puedes comprobar que tú cálculo es correcto?

¿Existe algún método alternativo al Cálculo Integral?

10.- Estudio de la respuesta dada en el ítem nº4 del test1. Sólo para los alumnos de E.G.B.

fórmula del área del rectángulo	correcta
	incorrecta

¿Por qué realizas la operación 1=36/4 o 1=36/2?

11.- Estudio de la respuesta dada en el ítem n°2 del test2.

respuesta dada en el ítem n°2 test2
- correcta
  - conserva la forma
  - no conserva la forma
- no lo consigue
- imposible
- en blanco

a) Intenta la modificación que se te pedía en este ítem pero ahora sobre un polígono cóncavo.

- ahora sí lo consigue
  - conserva la forma
  - no conserva la forma
- sigue sin saberlo hacer
- sigue afirmando que es imposible

b) ¿Te ha incomodado de algún modo que la forma de la superficie dada? ¿Te ha resultado más fácil la modificación sobre el polígono cóncavo que sobre el rombo?

SÍ NO

12.- Estudio de la respuesta dada en el ítem n°4 del test2. Respuesta ítem n°3 test2: correcta

a) en blanco

¿Por qué lo dejaste en blanco?

b) procedimiento numérico largo	correcto
	incorrecto

¿Podías haber calculado el área del trapecio de un modo más breve?

13.- Estudio de la respuesta dada en el ítem nº20 del test2. Corte cinta A correcta

a) B en blanco

¿Por qué has dejado el caso B sin resolver?

b) B incorrecto

¿Te parece correcto el corte efectuado sobre la cinta? ¿Qué deberías hacer? ¿Cómo lo harías?

14.- ¿Quieres hacer cualquier tipo de comentario acerca del contenido del test, duración de éste, etc...?

Anexo 4

Tablas de contingencia

Estudio 1

Estudio de la existencia de una posible relación entre las **concepciones** manifestadas por los alumnos y el **curso** al que pertenecen (apartado 3.4.1.; p. 89).

nº de casos % fila % columna	concepción errónea	concepción fórmula	concepción geométrica	concepción numérica	total
8º E.G.B.	26 26'5% 32'5%	10 10'2% 52'6%	46 46'9% 15'0%	16 16'3% 19'0%	98
2º B.U.P.	21 16'7% 26'3%	3 2'4% 15'8%	84 66'7% 27'5%	18 14'3% 21'4%	126
C.O.U.-L	17 18'3% 21'3%	5 5'4% 26'3%	61 65'6% 19'9%	10 10'8% 11'9%	93
C.O.U.-C	11 11'3% 13'8%	1 1'0% 5'3%	70 72'2% 22'9%	15 15'5% 17'9%	97
3º E.M.	1 2'3% 1'3%	0 0'0% 0'0%	30 69'8% 9'8%	12 27'9% 14'3%	43
5º F.M.	4 12'5% 5'0%	0 0'0% 0'0%	15 46'9% 4'9%	13 40'6% 15'5%	32
total	80	19	306	84	**489**

p = 0'00000

Estudio 2

Estudio de la existencia de una posible relación entre el **tipo de procedimiento** utilizado en la resolución de los problemas y el **tipo de unidad** empleada (apartado 3.4.2.; p. 99).

ítem 1.3. 8º E.G.B.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	21 65'6% 80'8%	6 18'8% 50'0%	5 15'6% 41'7%	32
razonamiento numérico	5 31'3% 19'2%	6 37'5% 50'0%	5 31'3% 41'7%	16
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	2 100'0% 16'7%	2
total	26	12	12	**50**

p = 0'01999

ítem 1.3. 2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	4 57'1% 100'0%	1 14'3% 20'0%	2 28'6% 11'1%	7
razonamiento numérico	0 0'0% 0'0%	3 37'5% 60'0%	5 62'5% 27'8%	8
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	1 8'3% 20'0%	11 91'7% 61'1%	12
total	4	5	18	**27**

p = 0'00253

ítem 1.3. C.O.U.-L

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	0 0'0% 0'0%	2 66'7% 66'7%	1 33'3% 6'3%	3
razonamiento numérico	4 28'6% 100'0%	1 7'1% 33'3%	9 64'3% 56'3%	14
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	6 100'0% 37'5%	6
total	4	3	16	**23**

p = 0'01921

ítem 1.3. C.O.U.-C

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	3 60'0% 16'7%	0 0'0% 0'0%	2 40'0% 5'6%	5
razonamiento numérico	15 31'3% 83'3%	4 8'3% 100'0%	29 60'4% 80'6%	48
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	5 100'0% 13'9%	5
total	18	4	36	**58**

p = 0'25695

ítem 1.3. 3º E.M.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	6 66'7% 85'7%	0 0'0% 0'0%	3 33'3% 25'0%	9
razonamiento numérico	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	7 100'0% 58'3%	7
otros razonamientos	1 33'3% 14'3%	0 0'0% 0'0%	2 66'7% 16'7%	3
total	7	0	12	**19**

p = 0'02306

ítem 1.3. 5º F.M.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 4'0%	1
razonamiento numérico	3 10'0% 100'0%	3 10'0% 100'0%	24 80'0% 96'0%	30
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0
total	3	3	25	**31**

p = 0'88338

ítem 1.5. 8º E.G.B.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	18 66'7% 100'0%	3 11'1% 37'5%	6 22'2% 30'0%	27
razonamiento numérico	0 0'0% 0'0%	0 0'% 0'0%	1 100'0% 5'0%	1
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	5 27'8% 62'5%	13 72'2% 65'0%	18
total	18	8	20	**46**

$p = 0'00025$

ítem 1.5. 2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	1 100'0% 16'7%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
razonamiento numérico	4 23'5% 66'7%	9 52'9% 64'3%	4 23'5% 66'7%	17
otros razonamientos	1 12'5% 16'7%	5 62'5% 35'7%	2 25'0% 33'3%	8
total	6	14	6	**26**

$p = 0'42657$

ítem 1.5. C.O.U.-L

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	1 100'0% 33'3%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
razonamiento numérico	2 40'0% 66'7%	3 60'0% 100'0%	0 0'0% 0'0%	5
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	10 100'0% 100'0%	10
total	3	3	10	**16**

p = 0'00072

ítem 1.5. C.O.U.-C

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	4 50'0% 13'8%	2 25'0% 20'0%	2 25'0% 5'0%	8
razonamiento numérico	23 51'1% 79'3%	6 13'3% 60'0%	16 35'6% 40'0%	45
otros razonamientos	2 7'7% 6'9%	2 7'7% 20'0%	22 84'7% 55'0%	26
total	29	10	40	**79**

p = 0'00067

ítem 1.5. 3º E.M.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	3 50'0% 75'0%	0 0'0% 0'0%	3 50'0% 27'3%	6
razonamiento numérico	1 14'3% 25'0%	0 0'0% 0'0%	6 85'7% 54'5%	7
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	1 33'3% 100'0%	2 66'7% 18'2%	3
total	4	1	11	**16**

p = 0'11142

ítem 1.5. 5º F.M.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 6'25%	1
razonamiento numérico	3 17'6% 75'0%	3 17'6% 75'0%	11 64'7% 68'8%	17
otros razonamientos	1 16'7% 25'0%	1 16'7% 25'0%	4 66'7% 25'0%	6
total	4	4	16	**24**

p = 0'97058

ítem 1.7. 8º E.G.B.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	11 44'0% 68'8%	5 20'0% 55'6%	9 36'0% 56'3%	25
razonamiento numérico	0 0'0% 0'0%	0 0'% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0
otros razonamientos	5 31'3% 31'3%	4 25'0% 44'4%	7 43'8% 43'8%	16
total	16	9	16	**41**

p = 0'71617

ítem 1.7. 2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	4 36'4% 30'8%	3 27'3% 11'5%	4 36'4% 14'8%	11
razonamiento numérico	4 20'0% 30'8%	8 40'0% 30'8%	8 40'0% 29'7%	20
otros razonamientos	5 14'3% 38'5%	15 42'9% 57'8%	15 42'9% 55'6%	35
total	13	26	27	**66**

p = 0'61214

ítem 1.7. C.O.U.-L

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	2 16'7% 66'7%	4 33'3% 36'4%	6 50'0% 27'3%	12
razonamiento numérico	1 20'0% 33'3%	1 20'0% 9'1%	3 60'0% 13'6%	5
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	6 31'6% 54'5%	13 68'4% 59'1%	19
total	3	11	22	**36**

p = 0'40213

ítem 1.7. C.O.U.-C

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	10 66'7% 34'5%	3 20'0% 25'0%	2 13'3% 4'0%	15
razonamiento numérico	14 30'4% 48'3%	8 17'4% 66'7%	24 52'2% 48'0%	46
otros razonamientos	5 16'7% 17'2%	1 3'3% 8'3%	24 80'0% 48'0%	30
total	29	12	50	**91**

p = 0'00063

ítem 1.7. 3º E.M.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	5 33'3% 83'3%	0 0'0% 0'0%	10 66'7% 50'0%	15
razonamiento numérico	1 25'0% 16'7%	0 0'0% 0'0%	3 75'0% 15'0%	4
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	3 30'0% 100'0%	7 70'0% 35'0%	10
total	6	3	20	**29**

p = 0'06115

ítem 1.7. 5º F.M.

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	1 33'3% 50'0%	0 0'0% 0'0%	2 66'7% 10'5%	3
razonamiento numérico	1 5'3% 50'0%	3 15'8% 75'0%	15 78'9% 78'9%	19
otros razonamientos	0 0'0% 0'0%	1 33'3% 25'0%	2 66'7% 10'5%	3
total	2	4	19	**25**

p = 0'41160

Estudio 3

Estudio de la existencia de una posible relación entre los alumnos que **dejan en blanco el ítem 2.6 y los que lo hacen en los ítemes 1.3, 1.5, 1.7 y 2.9** (apartado 3.4.2.; p. 107).

8º E.G.B.	ítem 1.3		ítem 1.5		ítem 1.7		ítem 2.9	
	en blanco	otras	en blanco	otras	en blanco	otras	en blanco	otras
en blanco ítem 2.6	15 93'8% 28'3%	1 6'3% 2'0%	14 87'5% 25'0%	2 12'5% 4'3%	15 93'8% 24'6%	1 6'3% 2'4%	13 81'3% 28'9%	3 18'8% 5'3%
otras ítem 2.6	38 44'2% 71'7%	48 55'8% 98'0%	42 48'8% 75'0%	44 51'2% 95'7%	46 53'5% 75'4%	40 46'5% 97'6%	32 37'2% 71'1%	54 62'8% 94'7%
p-valor	p = 0'00027		p = 0'00432		p = 0'00256		p = 0'00112	

2º B.U.P.	ítem 2.9	
	en blanco	otras
en blanco (ítem 2.6)	4 80'0% 17'4%	1 20'0% 0'9%
otras (ítem 2.6)	19 15'1% 82'6%	107 84'9% 99'1%
p-valor	p = 0'00018	

C.O.U.-L	ítem 2.9	
	en blanco	otras
en blanco (ítem 2.6)	6 66'7% 23'1%	3 33'3% 3'9%
otras (ítem 2.6)	20 21'5% 76'9%	73 78'5% 96'1%
p-valor	p = 0'00299	

Estudio 4

Estudio de la existencia de una posible relación entre los **comportamientos** mostrados por los alumnos en la resolución del **ítem 2.14 y el 2.2** (apartado 3.4.4.; p. 137).

8º E.G.B.

nº de casos % fila % columna	ítem 2.14				
ítem 2.2	en blanco	modificación correta	modificación incorrecta	afirma que es imposible la modificación	total
en blanco	17 53'1% 48'6%	1 3'1% 14'3%	5 15'6% 22'7%	9 28'1% 23'7%	32
modificación correcta	3 15'0% 8'6%	1 5'0% 14'3%	8 40'0% 36'4%	8 40'0% 21'1%	20
modificación incorrecta	13 35'1% 37'1%	3 8'1% 42'9%	9 24'3% 40'9%	12 32'4% 31'6%	37
afirma que es imposible la modificación	2 15'4% 5'7%	2 15'4% 28'6%	0 0'0% 0'0%	9 69'2% 23'7%	13
total	35	7	22	38	**102**

p = 0'01663

2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	ítem 2.14				
ítem 2.2	en blanco	modificación correta	modificación incorrecta	afirma que es imposible la modificación	total
en blanco	13 32'5% 54'2%	8 20'0% 25'8%	4 10'0% 36'4%	15 37'5% 23'1%	40
modificación correcta	6 11'8% 25'0%	18 35'3% 58'1%	4 7'8% 36'4%	23 45'1% 35'4%	51
modificación incorrecta	4 13'3% 16'7%	5 16'7% 16'1%	2 6'7% 18'2%	19 63'3% 29'2%	30
afirma que es imposible la modificación	1 10'0% 4'2%	0 0'0% 0'0%	1 10'0% 9'1%	8 80'0% 12'3%	10
total	24	31	11	65	**131**

p = 0'04611

C.O.U.-L

nº de casos % fila % columna	ítem 2.14				
ítem 2.2	en blanco	modificación correta	modificación incorrecta	afirma que es imposible la modificación	total
en blanco	15 36'6% 65'2%	9 22'0% 47'4%	3 7'3% 25'0%	14 34'1% 29'2%	41
modificación correcta	4 11'8% 17'4%	8 23'5% 42'1%	5 14'7% 41'7%	17 50'0% 35'4%	34
modificación incorrecta	4 15'4% 17'4%	2 7'7% 10'5%	4 15'4% 33'3%	16 61'5% 33'3%	26
afirma que es imposible la modificación	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 2'1%	1
total	23	19	12	48	**102**

p = 0'14924

C.O.U.-C

nº de casos % fila % columna	ítem 2.14				
ítem 2.2	en blanco	modificación correta	modificación incorrecta	afirma que es imposible la modificación	total
en blanco	1 3'7% 20'0%	14 51'9% 25'5%	2 7'4% 15'4%	10 37'0% 27'0%	27
modificación correcta	1 2'2% 20'0%	24 53'3% 43'6%	8 17'8% 61'5%	12 26'7% 32'4%	45
modificación incorrecta	3 14'3% 60'0%	11 52'4% 20'0%	2 9'5% 15'4%	5 23'8% 13'5%	21
afirma que es imposible la modificación	0 0'0% 0'0%	6 35'3% 10'9%	1 5'9% 7'7%	10 58'8% 27'0%	17
total	5	55	13	37	**110**

$p = 0'13890$

3º E.M.

nº de casos % fila % columna	ítem 2.14				
ítem 2.2	en blanco	modificación correta	modificación incorrecta	afirma que es imposible la modificación	total
en blanco	6 50'0% 60'0%	4 33'3% 44'4%	1 8'3% 16'7%	1 8'3% 5'3%	12
modificación correcta	1 14'3% 10'0%	3 42'9% 33'3%	2 28'6% 33'3%	1 14'3% 5'3%	7
modificación incorrecta	2 16'7% 20'0%	1 8'3% 11'1%	3 25'0% 50'0%	6 50'0% 31'6%	12
afirma que es imposible la modificación	1 7'7% 10'0%	1 7'7% 11'1%	0 0'0% 0'0%	11 84'6% 57'9%	13
total	10	9	6	19	**44**

p = 0'00351

5º F.M.

nº de casos % fila % columna	ítem 2.14				
ítem 2.2	en blanco	modificación correta	modificación incorrecta	afirma que es imposible la modificación	total
en blanco	1 11'1% 100'0%	2 22'2% 10'5%	3 33'3% 75'0%	3 33'3% 37'5%	9
modificación correcta	0 0'0% 0'0%	16 76'2% 84'2%	0 0'0% 0'0%	5 23'8% 62'5%	21
modificación incorrecta	0 0'0% 0'0%	1 50'0% 5'3%	1 50'0%% 25'0%	0 0'0% 0'0%	2
afirma que es imposible la modificación	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0
total	1	19	4	8	**32**

$p = 0'02509$

Estudio 5

Estudio de la existencia de una posible relación entre el **tipo de respuesta** dada por los alumnos en el **ítem 2.1** y el dado en el estudio del área del **ítem 2.22** (apartado 3.4.9.; p. 183).

2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	ítem 2.22				total
ítem 2.1	A > B	A < B	A = B	no se puede	
A > B	1 16'7% 5'6%	3 50'0% 25'0%	2 33'3% 2'6%	0 0'0% 0'0%	6
A < B	2 50'0% 11'1%	0 0'0% 0'0%	1 25'0% 1'3%	1 25'0% 6'3%	4
A = B	5 13'2% 27'8%	3 7'9% 25'0%	26 68'4% 34'2%	4 10'5% 25'0%	38
no se puede	10 55'6% 13'5	6 8'1% 50'0%	47 63'5% 61'8%	11 14'9% 68'8%	74
total	18	12	76	16	**122**

p = 0'03931

Estudio 6

Estudio de la existencia de una posible relación entre el tipo de respuesta dada por los alumnos en el análisis del **área** y en el del **perímetro** en el ítem **2.22 y 2.23** (apartado 3.4.12.; p.241).

ítem 2.22. 8º E.G.B.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	10 100'0% 55'6%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	10
A > B	3 25'0% 16'7%	1 8'3% 11'1%	8 66'7% 14'5%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	12
A < B	4 20'0% 22'2%	3 15'0% 33'3%	12 60'0% 21'8%	0 0'0% 0'0%	1 5'0% 9'1%	20
A = B	0 0'0% 0'0%	4 9'3% 44'4%	29 67'4% 52'7%	9 20'9% 100'0%	1 2'3% 9'1%	43
no se puede	1 5'9% 5'6%	1 5'9% 11'1%	6 35'3% 10'9%	0 0'0% 0'0%	9 52'9% 81'8%	17
total	18	9	55	9	11	**102**

p = 0'00000

ítem 2.22. 2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	7 77'8% 87'5%	0 0'0% 0'0%	2 22'2% 2'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	9
A > B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	16 88'9% 16'2%	1 5'6% 6'7%	1 5'6% 25'0%	18
A < B	0 0'0% 0'0%	1 8'3% 20'0%	10 83'3% 10'1%	1 8'3% 6'7%	0 0'0% 0'0%	12
A = B	1 1'3% 12'5%	4 5'3% 80'0%	59 77'6% 59'6%	12 15'8% 80'0%	0 0'0% 0'0%	76
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	12 75'0% 12'1%	1 6'3% 6'7%	3 18'8% 75'0%	16
total	8	5	99	15	4	**131**

$p = 0'00000$

ítem 2.22. C.O.U.-L

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	11 91'7% 68'8%	0 0'0% 0'0%	1 8'3% 1'5%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	12
A > B	2 16'7% 12'5%	1 8'3% 25'0%	9 75'0% 13'2%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	12
A < B	1 11'1% 6'3%	1 11'1% 25'0%	6 66'7% 8'8%	1 11'1% 8'3%	0 0'0% 0'0%	9
A = B	2 3'6% 12'5%	2 3'6% 50'0%	41 74'5% 60'3%	10 18'2% 83'3%	0 0'0% 0'0%	55
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	11 78'6% 16'2%	1 7'1% 8'3%	2 14'3% 100'0%	14
total	16	4	68	12	2	**102**

p = 0'00000

ítem 2.22. C.O.U.-C

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	7 70'0% 70'0%	0 0'0% 0'0%	3 30'0% 3'2%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	10
A > B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	3 100'0% 3'2%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	3
A < B	1 25'0% 10'0%	0 0'0% 0'0%	3 75'0% 3'2%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	4
A = B	2 2'3% 20'0%	1 1'2% 50'0%	80 93'0% 84'2%	2 2'3% 100'0%	1 1'2% 100'0%	86
no se puede	0 0'0% 0'0%	1 14'3% 50'0%	6 85'7% 6'3%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	7
total	10	2	95	2	1	**110**

p = 0'00000

ítem 2.22. 5º F.M.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	2 33'3% 100'0%	0 0'0% 0'0%	4 66'7% 15'4%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	6
A > B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 3'8%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
A < B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 3'8%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
A = B	0 0'0% 0'0%	1 5'9% 100'0%	16 94'1% 61'5%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	17
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	4 57'1% 15'4%	0 0'0% 0'0%	3 42'9% 100'0%	7
total	2	1	26	0	3	32

$p = 0'04543$

ítem 2.23. 8º E.G.B.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	9 100'0% 52'9%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	9
A > B	0 0'0% 0'0%	3 42'9% 50'0%	1 14'3% 14'3%	3 42'9% 4'6%	0 0'0% 0'0%	7
A < B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	2 66'7% 28'6%	1 33'3% 1'5%	0 0'0% 0'0%	3
A = B	8 10'4% 47'1%	2 2'6% 33'3%	4 5'2% 57'1%	61 79'2% 93'8%	2 2'6% 28'6%	77
no se puede	0 0'0% 0'0%	1 16'7% 16'7%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	5 83'3% 71'4%	6
total	17	6	7	65	7	**102**

$p = 0'00000$

ítem 2.23. 2º B.U.P.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	7 100'0% 70'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	7
A > B	0 0'0% 0'0%	11 39'3% 68'8%	3 10'7% 42'9%	10 35'7% 10'8%	3 10'7% 75'0%	28
A < B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	2 50'0% 28'6%	2 50'0% 2'2%	0 0'0% 0'0%	4
A = B	3 3'4% 30'0%	5 5'6% 31'3%	2 2'2% 28'6%	79 88'8% 84'9%	0 0'0% 0'0%	89
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	2 66'7% 2'2%	1 33'3% 25'0%	3
total	10	16	7	93	4	**131**

p = 0'00000

ítem 2.23. C.O.U.-L

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	13 100'0% 81'3%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	13
A > B	0 0'0% 0'0%	8 44'4% 80'0%	1 5'6% 25'0%	8 44'4% 11'6%	1 5'6% 33'3%	18
A < B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 25'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
A = B	2 3'0% 12'5%	2 3'0% 20'0%	2 3'0% 50'0%	60 89'6% 87'0%	1 1'5% 33'3%	67
no se puede	1 33'3% 6'3%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 33'3% 1'4%	1 33'3% 33'3%	3
total	16	10	4	69	3	**102**

p = 0'00000

ítem 2.23. C.O.U.-C

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	12 100'0% 75'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	12
A > B	1 2'1% 6'3%	8 17'0% 72'7%	3 6'4% 60'0%	34 72'3% 44'7%	1 2'1% 50'0%	47
A < B	1 33'3% 6'3%	1 33'3% 9'1%	0 0'0% 0'0%	1 33'3% 1'3%	0 0'0% 0'0%	3
A = B	2 4'3% 12'5%	2 4'3% 19'2%	2 4'3% 40'0%	41 87'2% 53'9%	0 0'0% 0'0%	47
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 50'0%	1
total	16	11	5	76	2	**110**

$p = 0'00000$

ítem 2.23. 3º E.M.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	en blanco	A > B	A < B	A = B	no se puede	total
en blanco	4 100'0% 100'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	4
A > B	0 0'0% 0'0%	3 30'0% 100'0%	0 0'0% 0'0%	6 60'0% 17'6%	1 10'0% 50'0%	10
A < B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	2 100'0% 5'9%	0 0'0% 0'0%	2
A = B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 3'8% 100'0%	25 96'2% 73'5%	0 0'0% 0'0%	26
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 50'0% 2'9%	1 50'0% 50'0%	2
total	4	3	1	34	2	**44**

$p = 0'00000$

ítem 2.23. 5º F.M.

nº de casos % fila % columna	perímetro					total
área	**en blanco**	**A > B**	**A < B**	**A = B**	**no se puede**	**total**
en blanco	2 66'7% 66'7%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 33'3% 5'6%	0 0'0% 0'0%	3
A > B	0 0'0% 0'0%	4 30'8% 100'0%	0 0'0% 0'0%	8 61'5% 44'4%	1 7'7% 16'7%	13
A < B	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1 100'0% 100'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
A = B	1 10'0% 33'3%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	9 90'0% 50'0%	0 0'0% 0'0%	10
no se puede	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	5 100'0% 83'3%	5
total	3	4	1	18	6	32

$p = 0'00000$

ítem 1.7

nº de casos % fila % columna	unidad no estándar	unidad estándar	unidad omitida	en blanco	total
razonamiento geométrico o conteo de unidades	12 57'1% 92'3%	3 14'3% 100'0%	6 28'6% 100'0%	0 0'0% 0'0%	21
razonamiento numérico	1 100'0% 7'7%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	1
otros	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	0 0'0% 0'0%	2 100'0% 100'0%	2
total	13	3	6	2	**24**