UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

ANÁLISIS DE DEMOSTRACIONES EN ENTORNOS DE LÁPIZ Y PAPEL Y DE CABRI POR ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Trabajo de Investigación presentado por:

FÉLIX RODRÍGUEZ DÍAZ

Dirigido por:

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, septiembre de 2006

ÍNDICE

ANEXOS

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Jaume Casasnovas por haber intermediado para posibilitar que la fase experimental de esta investigación se haya realizado en una asignatura de la Licenciatura en Matemáticas de la Universitat de les Illes Balears.

A la Dra. Mercè Llabrés por su desinteresada colaboración y por la ayuda prestada como docente de la asignatura en la que se llevó a cabo la fase experimental de este proyecto.

A los ocho alumnos matriculados en la asignatura Métodos Geométricos por su interés y dedicación en la resolución de los problemas objeto de estudio.

Al Dr. Ángel Gutiérrez por el tiempo y esfuerzo dedicado a realizar las funciones de tutor de esta investigación, por aportar sus conocimientos y experiencia a la misma y por el apoyo ofrecido en todo momento.

1. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

Marrades y Gutiérrez (2000) presentan una investigación para analizar formas en las que el Software de Geometría Dinámica (SGD) puede ser utilizado por estudiantes de Educación Secundaria para mejorar la comprensión de la naturaleza de la demostración matemática y sus destrezas de demostración. Los autores presentan también un marco teórico para describir y analizar las respuestas que dan los estudiantes a problemas de demostrar. Una de las conclusiones del estudio citado es que el SGD puede ayudar a los estudiantes de secundaria a entender la necesidad de las justificaciones abstractas y las demostraciones deductivas en matemáticas. La transición desde las justificaciones empíricas hasta las deductivas es un proceso lento y debe estar arraigado en los métodos empíricos usados por los estudiantes hasta el momento. En este proceso de transición, el SGD permite a los estudiantes realizar exploraciones empíricas antes de intentar producir una justificación deductiva. Al final del artículo apuntan que hay muchas investigaciones basadas en estudiantes de secundaria pero que los estudios basados en estudiantes universitarios son insuficientes.

Es en este punto donde comienza nuestro proyecto. El estudio ha sido realizado con alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura en Matemáticas. Esto implica un cambio en la esencia del planteamiento respecto de otras investigaciones: los alumnos supuestamente ya han finalizado la transición desde las justificaciones empíricas hacia las deductivas. Por tanto, en principio, no buscamos maneras de utilizar el SGD para favorecer o agilizar dicha transición, sino que estamos interesados en conocer si existen diferencias entre los procesos de demostración utilizados por los alumnos en un entorno de SGD, concretamente de Cabri (C), y en un entorno clásico de Lápiz y Papel (LP).

Una vez introducida la situación didáctica estudiada, describimos los objetivos que marcamos para la investigación (capítulo 2), realizamos una revisión bibliográfica de aquellos estudios que consideramos importantes para nuestro proyecto (capítulo 3), detallamos las bases teóricas sobre las que fundamentamos la investigación (capítulo 4), explicamos las condiciones y el contexto en el que llevamos a cabo la fase experimental (capítulo 5), así como algunos aspectos metodológicos relevantes (capítulo 6) tales como los tipos de datos recogidos en la fase experimental, mostramos los resultados obtenidos del análisis de dichos datos (capítulo 7) y, finalmente, revelamos las conclusiones que hemos extraído del análisis realizado y consideraciones de carácter general sobre la investigación (capítulo 8). Al final de esta memoria de investigación, como es costumbre, el lector puede encontrar la lista de la bibliografía referenciada a lo largo del texto.

2. OBJETIVOS

Como ya comentamos en el capítulo 1, realizamos la investigación con estudiantes de Matemáticas. Supuestamente estos alumnos se hallan en un terreno deductivo y, por tanto, no queremos utilizar Cabri para agilizar el paso hacia las demostraciones deductivas, como suele realizarse en las investigaciones con alumnos de enseñanza secundaria. Cabri, en el contexto de nuestra investigación, es una herramienta que los estudiantes pueden utilizar para la resolución de problemas, como lo es el compás en un entorno de resolución de Lápiz y Papel. El programa Cabri tiene un amplio abanico de herramientas que lo hacen más potente que los utensilios convencionales utilizados en un entorno de Lápiz y Papel (regla y compás). Además, se trata de software dinámico, lo que introduce nuevos aspectos a tener en cuenta en la resolución de problemas de demostrar. Por tanto, hemos considerado pertinente marcar los siguientes objetivos centrales de nuestra investigación:

O1. Identificar los tipos de demostraciones que hacen los estudiantes de Matemáticas en un entorno de Lápiz y Papel (LP) y un entorno Cabri (C).

O2. Analizar si existen diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar por estudiantes de Matemáticas entre ambos entornos de resolución y, en caso de existir, determinar de qué tipo son las diferencias.

Creemos conveniente aclarar ciertos términos utilizados en la redacción de los objetivos principales. Una aclaración es sobre el significado del término “resolución”, que aquí está utilizado en el sentido del proceso que realiza una persona para llegar al resultado del problema, donde el término “resultado” significa la respuesta final a la pregunta del problema, producto de la resolución. Nótese que utilizamos el término “problema” en lugar de “ejercicio” ya que en didáctica de las matemáticas a éste se le da la connotación de pura manipulación algorítmica o de cierta mecánica o rutina memorizadas. Para más detalle sobre la terminología propia de resolución de problemas aquí utilizada, puede consultarse Puig (1996, capítulo 2).

Otra aclaración es qué entendemos por diferencias en las resoluciones o en los procesos de demostrar. Estas diferencias no radican en la estética de las producciones ni en el material utilizado, ya que éstas son obvias. Nos referimos, por ejemplo, a diferencias en la tipología de las demostraciones realizadas, en el mismo sentido que en los trabajos de Bell (1976), Balacheff (1988), Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) e Ibañes (2001); o en las fases recorridas en los procesos de exploración-conjetura-demostración, en el sentido de los trabajos de Gallo (1994), Arzarello y otros (1998, 2002), y Olivero (1999). Para más detalle sobre estas investigaciones véase el capítulo 3.

Así pues, podríamos reformular el objetivo O2 de forma que se ajuste en mayor medida al punto de vista desde el que nos interesa realizar el primer análisis:

O2. Determinar si la categorización propuesta y procedimientos descritos en el marco teórico son útiles para analizar las diferencias, si existen, en las resoluciones de problemas de demostrar entre un entorno LP y un entorno C.

Esta reformulación hace énfasis en el hecho de que si no hallamos diferencias en las resoluciones efectuadas en ambos entornos puede significar dos cosas: que realmente no existen dichas diferencias o que la categorización de las demostraciones y estudio de fases empleados no sirven para este fin.

Por otra parte, y en la línea de lo que comentan en las conclusiones de Marrades y Gutiérrez (2000), hemos planteado otro objetivo:

O3. Intentar aportar información sobre un tema poco explorado, o inexplorado en algunos aspectos, como es la posible influencia del uso de SGD en los métodos de resolución de problemas de demostrar empleados por alumnos de la Licenciatura en Matemáticas.

3. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo realizamos una breve descripción de los estudios que consideramos más importantes por estar relacionados con algún aspecto contemplado en nuestro proyecto. En ninguno de los apartados pretendemos realizar una lista exhaustiva de las investigaciones existentes, sino que presentamos las que más relevancia han tenido en el desarrollo de este estudio. El apartado 3.1 recorre cronológicamente algunas de las clasificaciones existentes de la demostración. El apartado 3.2 muestra varias investigaciones que analizan los procesos involucrados en la resolución de problemas de demostrar como los de exploración, conjetura y demostración, así como la relación existente entre ellos. En el apartado 3.3 realizamos una revisión de investigaciones que relacionan algún aspecto de la demostración con la utilización de Software de Geometría Dinámica. Finaliza el capítulo el apartado 3.4, donde enumeramos las investigaciones halladas sobre la demostración con alumnos de la Licenciatura en Matemáticas.

Creemos conveniente aclarar que no contemplamos como objetivo de nuestro proyecto realizar un análisis didáctico y epistemológico profundo de la demostración matemática. Por tanto, en este capítulo no mencionaremos publicaciones centradas en este aspecto (de autores como Balacheff, Duval, Hanna, Mariotti, Recio y Rodino, entre otros). No obstante, como dicho análisis didáctico y epistemológico es pertinente en el tema que tratamos, remitimos al lector, por ejemplo, al primer capítulo de la tesis doctoral de Ibañes (2001), en el que dedica unos apartados a desarrollar el correspondiente análisis.

3.1. Clasificaciones de la demostración

En las páginas siguientes resumimos las tipologías de demostraciones elaboradas por varios autores (Bell, Balacheff, Harel y Sowder, Marrades y Gutiérrez e Ibañes) que son los antecedentes a partir de los cuales hemos definido las categorías de demostraciones usadas para analizar las respuestas de los estudiantes en nuestra experimentación.

3.1.1. Las categorías de respuesta de A. Bell

El propósito del trabajo de Bell (1976) es analizar los intentos de construir demostraciones y explicaciones por parte de alumnos en situaciones matemáticas sencillas, observar en qué modos difieren de los usos de la demostración que hacen los matemáticos profesionales y, de este modo, encontrar orientación sobre cómo fomentar mejor el desarrollo de los alumnos en esta área. La fase experimental la llevó a cabo con unos 40 alumnos, con edades entre 14 y 15 años, de tres escuelas distintas a los que les puso una serie de problemas de demostrar. Un ejemplo de dichos problemas es el siguiente:

> *Escoge un número entre el 1 y el 10. Súmalo a 10 y escribe debajo la respuesta. Resta el primer número a 10 y escribe debajo la respuesta. Suma tus dos respuestas.*
>
> 1. *¿Qué resultado has obtenido?*
> 2. *Prueba empezando con otros números. ¿Has obtenido el mismo resultado?*
> 3. *¿El resultado será el mismo para todos los números con los que empieces?*
> 4. *Explica por qué tu respuesta es correcta.* (p. 40)

Para el análisis de los resultados, Bell (1976) elaboró diversas *categorías de respuesta*. Distingue, en primer lugar, entre la categoría *empírica*, caracterizada por el uso de ejemplos como elemento de convicción, y la categoría *deductiva*, caracterizada por el uso de la deducción para conectar los datos con las conclusiones. Dentro de la categoría empírica, Bell define las siguientes subcategorías de respuesta:

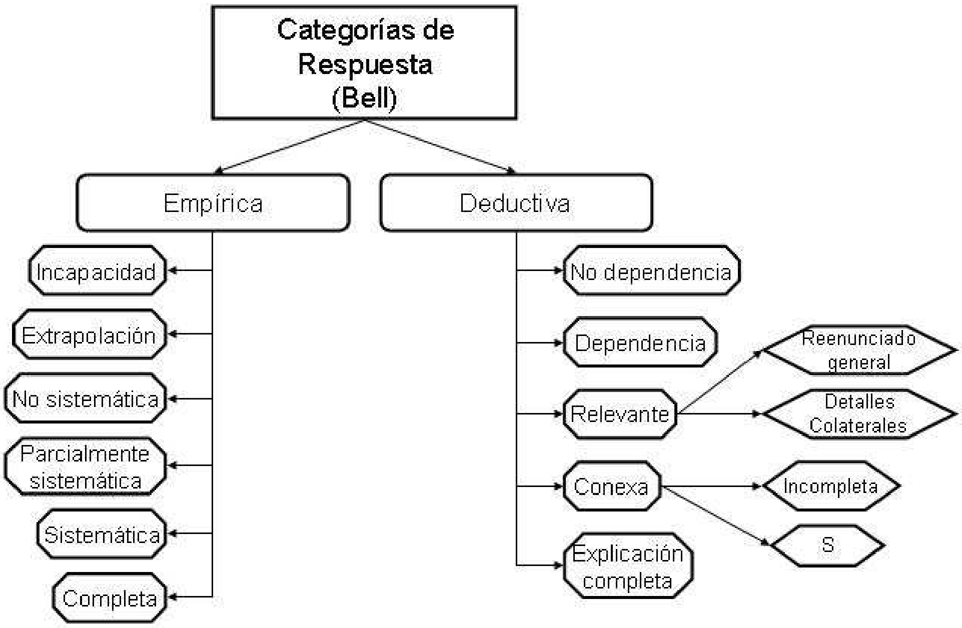
- *Incapacidad*, cuando el estudiante es incapaz de generar ejemplos correctos o que cumplan las condiciones dadas.
- *Extrapolación*, cuando la veracidad de un resultado general se infiere a partir de un subconjunto de casos relevantes.
- *No sistemática*, cuando el estudiante encuentra algunos de los casos requeridos, que no son subconjuntos completos, e ignora el requisito de encontrarlos todos.
- *Parcialmente sistemática*, cuando el estudiante encuentra algún subconjunto parcialmente completo de casos y tiene cierta conciencia del requisito de encontrarlos todos.
- *Sistemática*, cuando el estudiante encuentra al menos algún subconjunto completo de casos y está claramente intentando encontrarlos todos.

- *Completa*, cuando se comprueba el conjunto finito completo de casos.

La categoría deductiva la subdivide en:

- *No dependencia*, cuando uno o más ejemplos son trabajados correctamente, pero no usados para probar el resultado general, además de la existencia de una falta de conciencia de la conexión de los datos con la conclusión.
- *Dependencia*, si se intenta unir deductivamente los datos con la conclusión pero no se consigue alcanzar una categoría superior.
- *Relevante - reenunciado general*, cuando el estudiante no hace un análisis de la situación, menciona aspectos no relevantes más allá de los datos pero representa la situación como un todo, en términos generales como si se diera cuenta de que existe una conexión deductiva pero incapaz de exponerla.
- *Relevante - detalles colaterales*, cuando el estudiante hace algún análisis de la situación y menciona aspectos relevantes que podrían formar parte de una demostración pero es fragmentaria y falla al conectar las diferentes subclases en un argumento.
- *Conexa incompleta*, si se realiza un argumento conexo con calidad explicatoria, pero es incompleto.
- *Conexa S*, si el argumento falla sólo porque apela a hechos o principios que no están más aceptados o acordados que la propia proposición.
- *Explicación completa*, cuando el estudiante obtiene la conclusión mediante un argumento conexo a partir de los datos y de hechos o principios generalmente aceptados.

A modo de síntesis, incluimos en el siguiente diagrama las categorías de respuesta propuestas en Bell (1976).



3.1.2. Los niveles y tipos de demostración de N. Balacheff

La tesis doctoral de Balacheff, sintetizado en Balacheff (1988), versa sobre la noción de demostración desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de alumnos y no desde la lógica matemática. Trata de examinar cómo los alumnos llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta. En primer lugar realiza una revisión de los autores que han trabajado sobre el tema, como Semadeni, Bell, Piaget, Fischbein y Lakatos entre otros, para realizar una clasificación teórica que luego aplica en un estudio experimental con 28 alumnos de 13 años que trabajan en parejas. Los *tipos* y *niveles de demostraciones* que Balacheff (1988) incluye en su clasificación son los siguientes:

La primera distinción que realiza es entre *demostraciones pragmáticas* y *demostraciones conceptuales*. Las demostraciones pragmáticas son aquéllas que recurren a la acción real o a la ostensión. Las demostraciones conceptuales son las que están basadas en un razonamiento deductivo mediante la formulación de definiciones, propiedades, etc. pertinentes y de relaciones entre ellas.

Dentro de las demostraciones pragmáticas distingue tres casos:

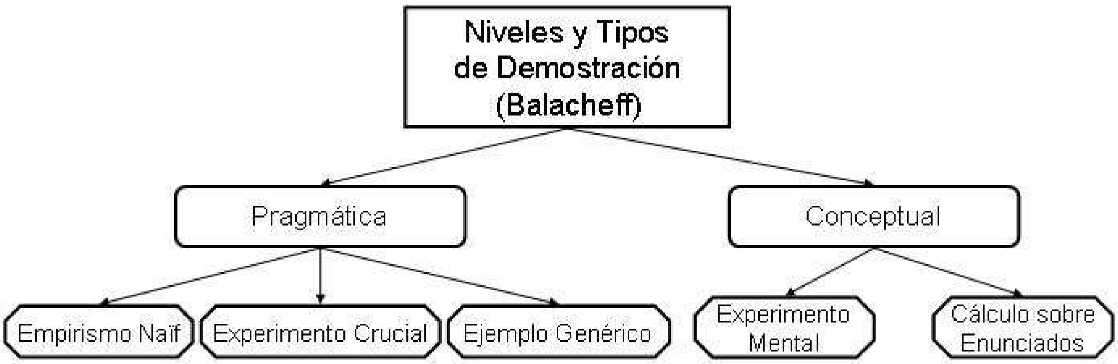
- *Empirismo naïf*, que consiste en afirmar la veracidad de un resultado tras verificarla en unos cuantos casos elegidos sin ningún criterio específico.
- *Experimento crucial*, que consiste en verificar la proposición en un ejemplo elegido cuidadosamente de forma que “si funciona aquí, funcionará siempre”.

- *Ejemplo genérico*, que involucra hacer explícitas las razones de la veracidad de una conjetura mediante operaciones o transformaciones de un objeto que se considera representante de su clase.

Las demostraciones conceptuales las divide en:

- *Experimento mental*, en las que las acciones son interiorizadas y disociadas de una representación particular.
- *Cálculo sobre enunciados*, que son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas y explícitas de las ideas en cuestión en la solución del problema, y aparecen como resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados.

A modo de síntesis, incluimos en el siguiente diagrama los niveles y tipos de demostración propuestos en Balacheff (1988).



3.1.3. Los esquemas de demostración de G. Harel y L. Sowder

Estos autores, basándose en estudios anteriores de otros investigadores, definen los *esquemas de demostración* (proof scheme) y realizan una clasificación de dichos esquemas (Harel y Sowder, 1998). Para entender la definición de esquema de demostración es necesario recoger las definiciones de otros dos conceptos previos: *indagar* (ascertaining) y *persuadir* (persuading).

> *Indagar es el proceso que un individuo emplea para eliminar sus propias dudas sobre la veracidad de una observación.*
> *Persuadir es el proceso que un individuo emplea para eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de una observación.* (p. 241)

El esquema de demostración de una persona es lo que constituye indagar y persuadir para esa persona. (p. 244)

Los esquemas de demostración quedan divididos en tres grandes categorías:

- *De convicción externa*, que son aquéllos en los que se apela a agentes ajenos.
- *Empíricos*, que son aquéllos en los que se apela a ejemplos, hechos físicos o experiencias sensitivas.
- *Analíticos*, que son aquéllos en los que se realizan deducciones lógicas abstractas.

Dentro de los esquemas de demostración de convicción externa, los autores distinguen tres grupos:

- *Autoritarios*, si la persona sitúa su convicción en lo que dice el profesor, un libro, etc.
- *Rituales*, si la persona fundamenta su convicción en función del aspecto o apariencia del argumento.
- *Simbólicos*, si la persona basa su convicción en la manipulación simbólica de expresiones.

Los esquemas de demostración empíricos los subdividen en dos grupos:

- *Inductivos*, en los que la convicción consiste en la comprobación de uno o varios casos concretos.
- *Perceptivos*, en los que la convicción está fundamentada en experiencias físicas o sensitivas.

En los esquemas de demostración analíticos diferencian dos clases:

- *Transformativos*, que involucran operaciones sobre objetos y anticipación del resultado.
- *Axiomáticos*, en los que las deducciones se basan en términos definidos y axiomas.

Los esquemas axiomáticos los dividen a su vez en tres grupos:

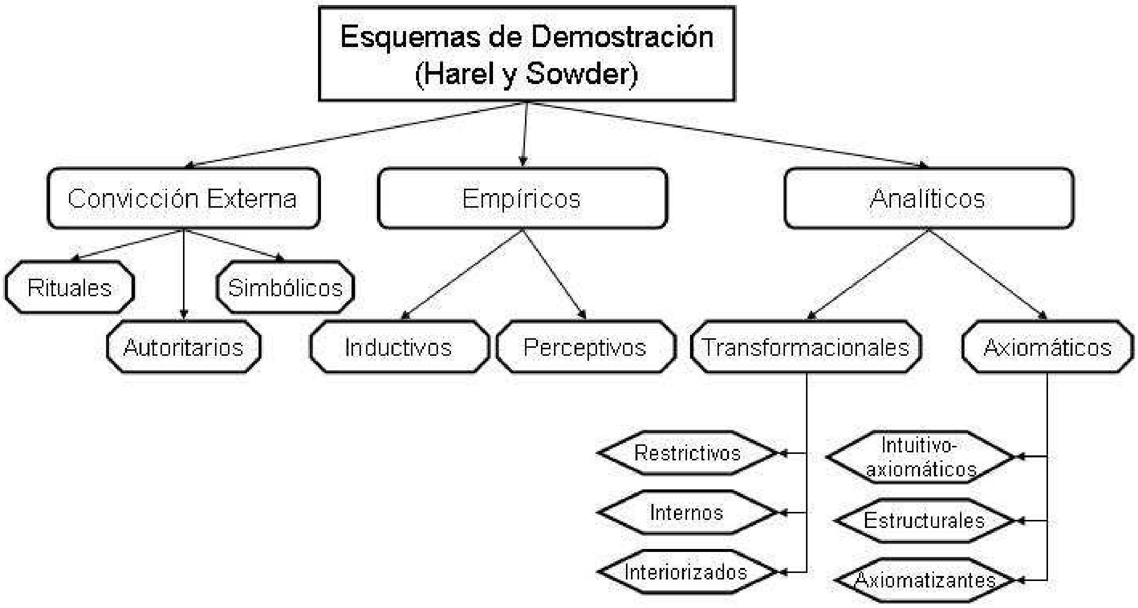
- *Intuitivo-axiomáticos*, en los que la persona sólo es capaz de manejar axiomas que corresponden a su intuición.
- *Estructurales*, en los que los teoremas se deducen a partir de una estructura formada por un conjunto fijo de axiomas.

- *Axiomatizantes*, en los que la persona es capaz de investigar las implicaciones de variar un conjunto de axiomas o axiomatizar cierto campo.

Del mismo modo, los esquemas transformativos los subdividen en tres grupos:

- *Restrictivos*, en los que la persona se limita y restringe innecesaria e inconscientemente.
- *Internos*, en los que la colección de transformaciones pueden agruparse para formar una heurística.
- *Interiorizados*, en los que un esquema de demostración interno se convierte en un objeto de reflexión permitiendo la comparación y contraste con otras heurísticas.

A modo de síntesis, incluimos en el siguiente diagrama los esquemas de demostración propuestos en Harel y Sowder (1998).



3.1.4. Las categorías de demostración de R. Marrades y A. Gutiérrez

Basándose en trabajos anteriores de Bell (1976), Balacheff (1988) y Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) proponen un marco teórico que categoriza las demostraciones. Los propios autores utilizan su categorización en una investigación llevada a cabo con estudiantes de ESO.

Estos autores distinguen entre las demostraciones *empíricas*, en las que el elemento de convicción es la verificación de la propiedad en ejemplos, y las demostraciones *deductivas*, en las que los elementos de convicción son argumentos abstractos basados en propiedades generales, operaciones abstractas y deducciones lógicas.

Las demostraciones empíricas las dividen a su vez, dependiendo de cómo se eligen los ejemplos, en:

- *Empirismo naïf*, en las que los ejemplos son escogidos sin ningún criterio específico.
- *Experimento crucial*, en las que se escoge cuidadosamente un ejemplo que sea lo menos particular posible.
- *Ejemplo genérico*, en las que se escoge un ejemplo genérico al que se le da carácter de representante de su clase.

A su vez, las demostraciones de empirismo naïf las dividen en *inductivas* y *perceptivas*, siendo su definición análoga a los esquemas de demostración empíricos con el mismo nombre en la clasificación de Harel y Sowder (1998).

Las demostraciones de experimento crucial o de ejemplo genérico, ambas, las subdividen en los siguientes tipos, dependiendo de cómo se utilizan los ejemplos:

- *De ejemplificación*, en las que únicamente se muestra la existencia de un ejemplo o la ausencia de contraejemplos.
- *Constructivas*, en las que la justificación se basa en la forma de obtener el ejemplo.
- *Analíticas*, en las que se utilizan propiedades observadas empíricamente en el ejemplo.
- *Intelectuales*, en las que a pesar de estar basadas en la observación empírica del ejemplo, principalmente se utilizan propiedades y relaciones aceptadas sobre los elementos del ejemplo.

Las demostraciones deductivas las dividen en dos clases:

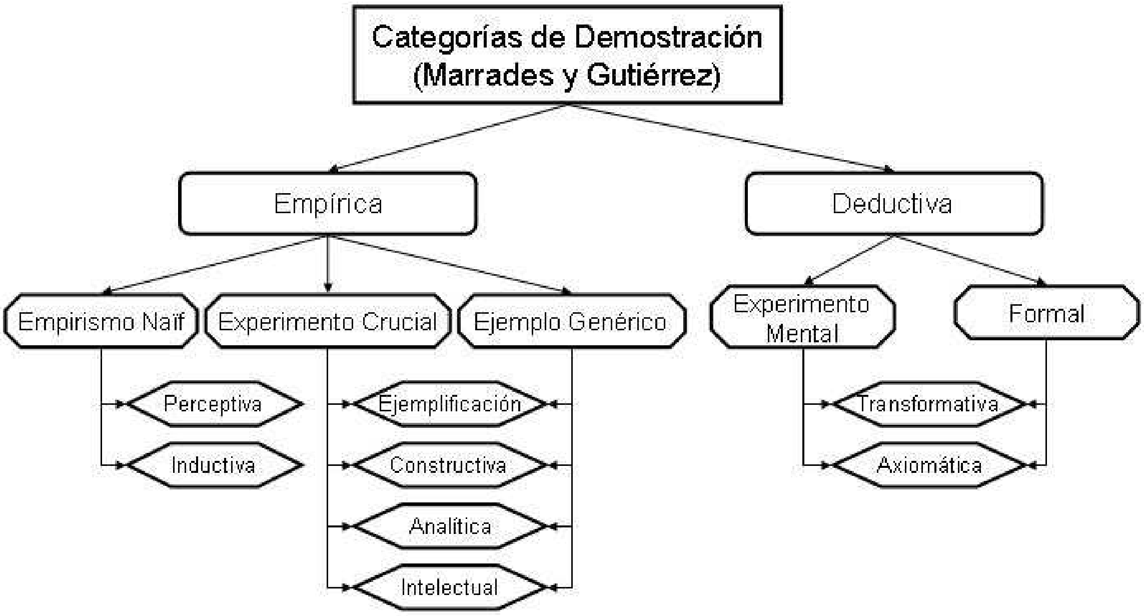
- *Experimento mental*, cuando, aún siendo deductivas y abstractas, están organizadas con la ayuda de un ejemplo.
- *Formales*, que son cadenas de deducciones lógicas y sin soporte de ejemplos.

Ambas clases las subdividen en:

- *Transformativas*, que están basadas en operaciones mentales que producen una transformación del problema inicial en otro equivalente.

- *Axiomáticas*, que son secuencias de deducciones lógicas derivadas desde los datos del problema y axiomas, definiciones o teoremas aceptados.

A modo de síntesis, incluimos en el siguiente diagrama las categorías de demostración propuestas en Marrades y Gutiérrez (2000).



3.1.5. Los esquemas de demostración de M.J. Ibañes

En la tesis doctoral de Ibañes (2001), el autor estudia el proceso de aprendizaje de la demostración en Matemáticas de Bachillerato. En su apartado “Investigaciones que definen niveles de demostración” (1.3) se halla un breve resumen de estudios referentes al tema realizados por autores como Bell, van Dormolen, Semadeni, Blum y Kirsch, Balacheff, Movshovitz-Hadar, y Miyazaki. Apartado propio (1.4) tiene la investigación de Harel y Sowder (1998) ya que es el trabajo que, según el propio autor, más ha influido en la investigación llevada a cabo.

No obstante, le surgió la necesidad de modificar la clasificación de los esquemas de demostración de Harel y Sowder (1998) para que se ajustara en mayor medida a las circunstancias de la investigación y a las respuestas de los alumnos. Ibañes (2001) mantiene las tres grandes categorías de esquemas, *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*, e introduce nuevas subclases. Dentro de los esquemas de demostración empíricos *experimentales* (denominados perceptivos por Harel y Sowder), introduce: los *estáticos*, en los que se utilizan procedimientos experimentales donde los elementos son fijos; y los *dinámicos*, en los que se utilizan procedimientos experimentales donde se realizan movimientos o se varían elementos.

En los esquemas inductivos también crea una subdivisión, atendiendo a distintos criterios:

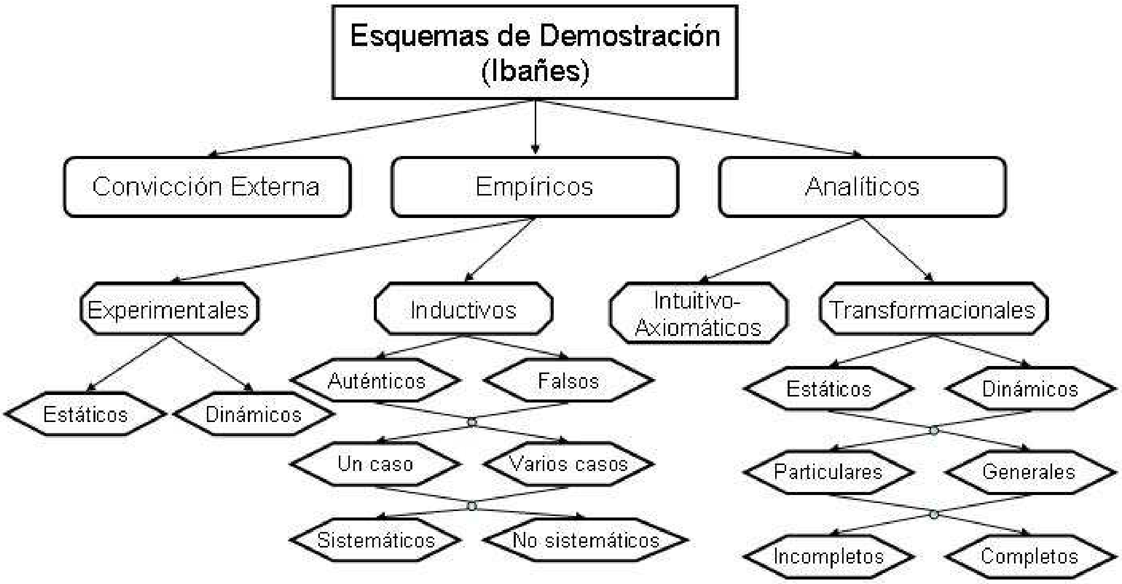
- Según su interpretación por parte de los alumnos, puede ser:
  * *Auténtico*, en el que el alumno comprueba la proposición en algún caso particular siendo consciente de que no es suficiente.
  * *Falso*, en el que la persona entiende la justificación como la comprobación en algún caso.
- Según el número de casos considerado, puede ser:
  * *De un caso*, en el que se comprueba en un único caso concreto.
  * *De varios casos*, en el que se comprueba en varios casos concretos.
- Según la forma de seleccionar los casos, puede ser:
  * S*istemático*, en el que la elección de los ejemplos sigue un criterio definido.
  * N*o sistemático*, en el que se seleccionan los ejemplos sin criterio definido.

En los esquemas *transformacionales*, Ibañes (2001) no considera las subclases de Harel y Sowder (1998) y define las siguientes, atendiendo a varios criterios:

- Según el procedimiento, pueden ser:
  * *Estáticos*, en los que los elementos son fijos.
  * D*inámicos*, en los que se realizan movimientos o se varían elementos.
- Según su extensión, pueden ser:
  * *Particulares*, en los que se razona sobre un objeto particular.
  * *Generales*, en los que se razona sobre elementos genéricos.
- Según su grado de corrección, pueden ser:
  * *Completos*, en los que el razonamiento es completo y correcto.
  * *Incompletos*, en los que el razonamiento es incompleto o incorrecto.

Creemos importante destacar que, a diferencia de las clasificaciones de Harel y Sowder (1998) y Marrades y Gutiérrez (2000), las nuevas subclases añadidas en esta investigación no son mutuamente excluyentes. Es decir, siguiendo la clasificación de Ibañes (2001), un esquema de demostración puede ser catalogado como, por poner un ejemplo, empírico inductivo auténtico de varios casos y sistemático. Un esquema de demostración analítico transformacional también podemos catalogarlo, por ejemplo, como estático general e incompleto.

A modo de síntesis, incluimos en el siguiente diagrama los esquemas de demostración propuestos en Ibañes (2001):



Una aportación importante de Ibañes (2000) es la idea de que los alumnos no poseen un determinado esquema de demostración, sino que razonan influenciados por varios de ellos y utilizan uno u otro en función de la proposición o de si se les pide que hagan una demostración o entender una que se les propone. Por ello define diferentes modalidades de esquema de demostración:

- *Esquema Utilizado*: el esquema utilizado por el estudiante para resolver un problema determinado.
- *Esquema Aceptado*: si un razonamiento presentado es aceptado como demostración.
- *Esquema Adherido*: si el estudiante, además de aceptar la demostración presentada, rechaza explícitamente las anteriores.
- *Esquema Declarado*: cuando el estudiante expone su interpretación de lo que significa demostrar.

3.2. Los procesos de exploración-conjetura-demostración

Las investigaciones de Gallo (1994), Mariotti y otros (1997), Arzarello y otros (1998, 2002), y Olivero (1999) exploran, cada una en su contexto, la manera en que se elaboran conjeturas, cómo se produce la transición desde la búsqueda de conjeturas hasta la validación o refutación de las mismas y cómo se relacionan estas etapas de la resolución de los problemas.

Por ejemplo, Arzarello y otros (1998) elaboran un modelo teórico para interpretar los procesos de exploración de situaciones geométricas, formulación de conjeturas y demostración de las mismas. Este modelo, que utilizan para investigar la transición hacia las demostraciones deductivas, surge de los experimentos realizados en diferentes entornos durante dos años con estudiantes de secundaria y universitarios, así como con sus profesores, en el área de la geometría elemental. Toman como hipótesis inicial de trabajo el estudio de Mariotti y otros (1997), que concluye que estudiantes de nivel medio y alto muestran sucesivamente dos modalidades de actuación que consisten en *explorar/seleccionar una conjetura* y *concatenar sentencias lógicamente*. Además afirman que:

> *Cualquier proceso de exploración-conjetura-demostración está caracterizado por complejos cambios desde una modalidad a la otra y viceversa.* (p. 28)

El objetivo de Arzarello y otros (1998) es analizar cuidadosamente de qué manera tiene lugar la transición desde una modalidad a la otra. Los puntos principales del marco teórico, sintetizado en Olivero (1999), son los siguientes:

- *Control ascendente*: se “observa” la figura con el objetivo de elaborar conjeturas. Se corresponde con exploraciones de la situación dada.
- *Abducción*: se escoge “de que regla esto es un caso”, es decir, se recorre el conocimiento teórico con el objetivo de encontrar parte de una teoría que encaje con la situación particular. Las exploraciones son transformadas en conjeturas.
- *Control descendente*: se ha elaborado una conjetura y se busca una demostración. Se hacen referencias a la teoría para justificar lo que previamente se ha “observado” en la figura y validar la conjetura.

Finalmente en Arzarello y otros (2002), donde estudian las relaciones existentes entre las modalidades y los tipos de arrastre en Cabri, recogen las siguientes definiciones (p. 67):

- *Procesos ascendentes*: desde las figuras a la teoría, con el objetivo de explorar libremente una situación, buscando regularidades, elementos invariantes, etc. y enunciar una conjetura.

- *Procesos descendentes*: desde la teoría a las figuras, con el objetivo de validar o refutar la conjetura, así como comprobar propiedades, etc. necesarias para la validación.

3.3. Demostración y software de geometría dinámica.

Es este apartado mostramos algunos estudios relacionados con la demostración y el uso de software de geometría dinámica.

Si realizamos una revisión de las investigaciones que tratan este tema, merecen especial mención los artículos incluidos en “Proof in Dynamic Geometry Environments”, número especial (44) de Educational Studies in Mathematics. Además del estudio de Marrades y Gutiérrez (2000) explicado en anteriores apartados, se incluyen otros artículos cuya temática comentamos a continuación muy brevemente, ya que no es objetivo de nuestro trabajo realizar una descripción pormenorizada de los mismos.

El artículo de Hanna (2000) explora el papel de la demostración en la educación matemática y justifica su importancia en el currículum. También discute tres aplicaciones del software de geometría dinámica como herramientas valiosas en la enseñanza de la demostración y como retos potenciales para la importancia de la demostración. Destacamos especialmente el apartado en el que trata el tema de la visualización y las denominadas demostraciones visuales.

Mariotti (2000) estudia el papel de Cabri-géomètre en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Asumiendo una perspectiva Vigotskiana, centra la atención en la construcción social de conocimiento y en la mediación semiótica alcanzada a través de objetos culturales. En un artículo posterior, Mariotti (2001), sugiere la posibilidad de utilizar tareas de construcción en Cabri como una llave para acceder al mundo teórico de la geometría. Además, concluye que la evolución de las justificaciones del lenguaje natural hacia las demostraciones no es algo simple ni espontáneo, sino que se revela como algo complejo.

Jones (2000) analiza los datos obtenidos en un estudio longitudinal de las interpretaciones de objetos geométricos, y sus relaciones, por parte de estudiantes de 12 años cuando utilizan software de geometría dinámica. El foco del artículo es la progresiva matematización del software por parte del estudiante. La investigación sugiere que las explicaciones del estudiante evolucionan desde la imprecisión de las expresiones del lenguaje común hacia las explicaciones matemáticas de situaciones geométricas, gracias al razonamiento propiciado por el uso del software.

Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2000) afirman que, en muchos problemas geométricos, los estudiantes pueden sentir que la universalidad de una propiedad conjeturada de una figura es validada por sus acciones en un entorno de geometría dinámica. Por el contrario, generalmente no sienten que una explicación deductiva fortalezca su convicción acerca de que una figura geométrica cumpla cierta propiedad. Con el objetivo de crear en los estudiantes una necesidad de argumentar de forma deductiva, los autores desarrollaron una colección de actividades innovadoras con la intención de causar sorpresa e incertidumbre. En el artículo describen dos actividades y analizan las conjeturas, métodos de trabajo y explicaciones utilizadas por los estudiantes.

Finalmente, Laborde (2000), partiendo de los artículos anteriores, intenta desarrollar una discusión sobre el papel del SGD en cuatro sentidos: la variedad de posibles contextos para la demostración en SGD, la naturaleza dual de la demostración (cognitiva y social) como reflejo en el entorno construido sobre el uso de SGD, desde la observación hasta la demostración, y la oposición entre hacer y demostrar.

Al margen de las publicaciones mencionadas, podemos encontrar numerosas referencias bibliográficas en torno a la demostración y el software de geometría dinámica. Unos pocos ejemplos son los siguientes:

Healy y Hoyles (2001) exploran el papel de las herramientas informáticas en la resolución de problemas de geometría y cómo estas herramientas median en los procesos de resolución de problemas. A través del análisis de las respuestas con éxito de los estudiantes, las autoras muestran la manera en que las herramientas informáticas dinámicas pueden no sólo fundamentar el proceso de resolución sino también ayudar a los estudiantes a moverse desde la argumentación en lenguaje común hacia la deducción lógica. Sin embargo, haciendo referencia al trabajo de estudiantes que no tuvieron tanto éxito en las respuestas, las investigadoras ilustran cómo las herramientas informáticas que no pueden ser programadas para ajustarse a los objetivos de los estudiantes pueden impedirles expresar sus (correctas) ideas matemáticas y de esta forma imposibilitar que lleguen a su solución del problema.

Según Mogetta (2001), un análisis de los procesos de resolución necesita tener en cuenta tres componentes principales: el problema, el agente y el contexto de resolución.

Cuando el contexto incorpora un software de geometría dinámica, aspectos adicionales relacionados con la disponibilidad de las herramientas dinámicas necesitan ser considerados. El artículo ilustra y analiza el papel de las herramientas heterogéneas, tales como herramientas concretas y herramientas conceptuales y teóricas, en los procesos de elaboración de conjeturas y demostrarlas. La autora realiza una discusión sobre los posibles conflictos debidos a la naturaleza estática de la teoría y la naturaleza dinámica de las herramientas de exploración.

Leung y López-Real (2002) describen y estudian una demostración por contradicción en Cabri de un teorema de cuadriláteros cíclicos realizada por estudiantes de 16 años de edad en un instituto de Hong Kong. Realizan una discusión de los datos obtenidos desde la óptica de la unidad cognitiva de teoremas. Los autores proponen una posible perspectiva para superar el salto experimental-teórico en SGD introduciendo la idea de "plantilla dinámica" (dynamic template) como un visualizador de la justificación y adquisición de teoremas geométricos.

3.4. Demostración y alumnos de los estudios universitarios de Matemáticas.

Ya comentamos anteriormente que, hasta el momento, no hemos encontrado ninguna investigación que estudie los procesos de demostración y la influencia del uso de Cabri con alumnos de la Licenciatura en Matemáticas. Desde este punto de vista, nuestra investigación se convierte en un estudio exploratorio ya que, al no disponer de experiencias previas, ni personales ni procedentes de las publicaciones consultadas, una finalidad de nuestro estudio es obtener datos que nos permitan empezar a conocer cuál es la situación.

No obstante, hallamos una investigación que trata sobre la demostración en este tipo de alumnos. En dos artículos, Almeida (1998, 2000), el autor relata una experiencia con alumnos de los primeros cursos de los estudios universitarios de Matemáticas en el Reino Unido. El investigador realiza un análisis cuantitativo y otro cualitativo acerca de las concepciones sobre la demostración y las prácticas relacionadas con la demostración que poseen estos alumnos. Finalmente, también realiza una comparación entre las concepciones sobre la demostración declaradas públicamente y sus proclividades cuando demuestran en la práctica.

4. MARCO TEÓRICO

En este capítulo describimos el marco teórico sobre el que fundamentamos nuestra investigación en los diversos aspectos que tratamos. En el apartado 4.1 describimos una clasificación propia en categorías de demostración, surgida de los estudios revisados en el apartado 3.1, con alguna aportación nuestra. Para facilitar una visión global, el apartado 4.2 incluye una tabla con las relaciones entre categorías que pueden considerarse análogas de las diferentes clasificaciones de los autores aquí recogidos. Finalmente, tras la revisión bibliográfica realizada sobre el tema en el apartado 3.2, definimos en el apartado 4.3 las fases de los procesos de exploración-conjetura-demostración que utilizamos en nuestra investigación para analizar los datos obtenidos en la fase experimental.

4.1. Determinación de una clasificación de las demostraciones

Para el análisis de los datos de nuestra investigación, en lo referente a categorías de demostración, hemos intentado reunir aquellos aspectos de las clasificaciones de los autores comentados anteriormente (apartado 3.1) que consideramos más adecuados para alcanzar los objetivos marcados en nuestro estudio.

Antes de describir la clasificación definitiva es necesario realizar una aclaración terminológica. Utilizaremos el término *demostración* en un sentido amplio, de modo que incluya cualquier tipo de argumento o justificación elaborado para convencer de la veracidad de una afirmación matemática. Ibañes (2001) concluye que no podemos hablar del esquema de demostración de una persona ya que en distintas situaciones puede utilizar distintos tipos de demostración, y por eso añade lo que denomina las *modalidades de los esquemas*. Por tanto hablaremos de *tipos* o *categorías* de demostración en lugar de utilizar el término esquema de demostración.

Así pues, la clasificación de las categorías de demostración sobre la que hemos trabajado queda de la siguiente forma:

Distinguimos entre demostraciones de *convicción externa*, que son aquellas en las que la fuente principal o decisoria de convicción es un agente ajeno a la propia persona, y demostraciones *de convicción propia*, en las que el origen de convicción radica en la propia persona. Es importante destacar que, en el caso de la demostración de convicción externa, no se trata exclusivamente de aceptar o rechazar demostraciones de otros, sino que la clave está en dónde reside el origen de convicción sobre la veracidad o falsedad de una demostración, que puede ser realizada por uno mismo.

Dependiendo de cuál sea el agente ajeno de convicción, las demostraciones de convicción externa las clasificamos en:

- *Rituales,* si la fuente de convicción es una cierta apariencia de los argumentos.
- *Simbólicas,* si la fuente de convicción radica en la manipulación simbólica de expresiones.
- *Autoritarias,* si la fuente de convicción es otra persona, un libro de texto u otro elemento que constituya una autoridad o referencia superior de conocimiento.

Una vez determinado que la demostración es de convicción propia, diferenciamos dos tipos:

- *Empíricas*, aquéllas en las que la convicción proviene, a modo general, de la comprobación en ejemplos, experiencias físicas o sensitivas y de argumentos inductivos.
- *Deductivas*, en las que la convicción proviene, principalmente, de una argumentación lógico-deductiva.

Para clasificar las demostraciones empíricas analizamos 3 aspectos distintos: la naturaleza de las comprobaciones realizadas, la forma de escoger los ejemplos y, por último, la presencia o ausencia de razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas.

I. Una demostración empírica puede ser:

- *Inductiva,* si la convicción de que la propiedad se cumple, o no, proviene de uno o varios ejemplos en los que se realizan comprobaciones empíricas como, por ejemplo, recuentos, mediciones de los elementos de los ejemplos o identificación de relaciones y propiedades matemáticas observadas en los mismos.

- *Perceptiva*, si la convicción proviene sólo de una experiencia física o sensitiva como, por ejemplo, el reconocimiento visual de que en un ejemplo la propiedad se satisface, o explicitar la sensación de que así es sin llegar a comprobarlo por otros métodos.

II. Si centramos la atención en la forma de escoger los ejemplos, una demostración empírica la clasificamos en:

- *Empirismo naïf*, si se verifica en uno o varios ejemplos escogidos al azar o sin ningún criterio específico.
- *Experimento crucial*, si se verifica en un ejemplo escogido de forma que sea "lo menos particular posible".
- *Ejemplo genérico*, si se verifica en un ejemplo al que se le da carácter de representante de su clase.
- *Exhaustiva*, si se verifica en todos los casos posibles.

La categoría exhaustiva sólo es aplicable en conjuntos finitos y, a pesar de que no aparece en los trabajos de la mayoría de los autores citados anteriormente, sí que aparece en el texto original de Bell (1976). La hemos recuperado e incluido en esta clasificación por considerar que contempla una situación no abarcada en las otras clasificaciones.

III. Por último, clasificamos una demostración empírica como:

- *Pura* si la justificación consiste en realizar comprobaciones empíricas de que la propiedad se cumple.
- *Con inferencia* si, a pesar de seguir basándose en ejemplos, se realizan razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas como, por ejemplo, la utilización de propiedades aceptadas o relaciones entre elementos matemáticos del ejemplo.

Hay que destacar como hecho diferenciador de las demostraciones deductivas, que los razonamientos que existen en una demostración empírica con inferencia no se desligan del ejemplo sobre el que se trabaja. Este último aspecto de las demostraciones no aparece en las investigaciones de los autores comentados anteriormente. Tan sólo en Marrades y Gutiérrez (2000) hallamos un planteamiento similar, aunque en otra dirección, cuando subdividen las categorías empírica de experimento crucial y empírica de ejemplo genérico en los tipos analítica e intelectual. La inclusión de este aspecto en la clasificación de las demostraciones empíricas es, a nuestro juicio, positiva puesto que en caso contrario quedan catalogadas bajo un mismo nombre demostraciones con un nivel de razonamiento distinto.

Del mismo modo, para clasificar las demostraciones deductivas analizamos dos aspectos: la utilización o no de ejemplos y la naturaleza del razonamiento realizado.

I. En primer lugar, centrándonos en la utilización o no de ejemplos, clasificamos una demostración deductiva como:

- *Experimento mental* si, aún siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de ejemplos.
- *Formal*, si la demostración está elaborada sin la ayuda de ejemplos.

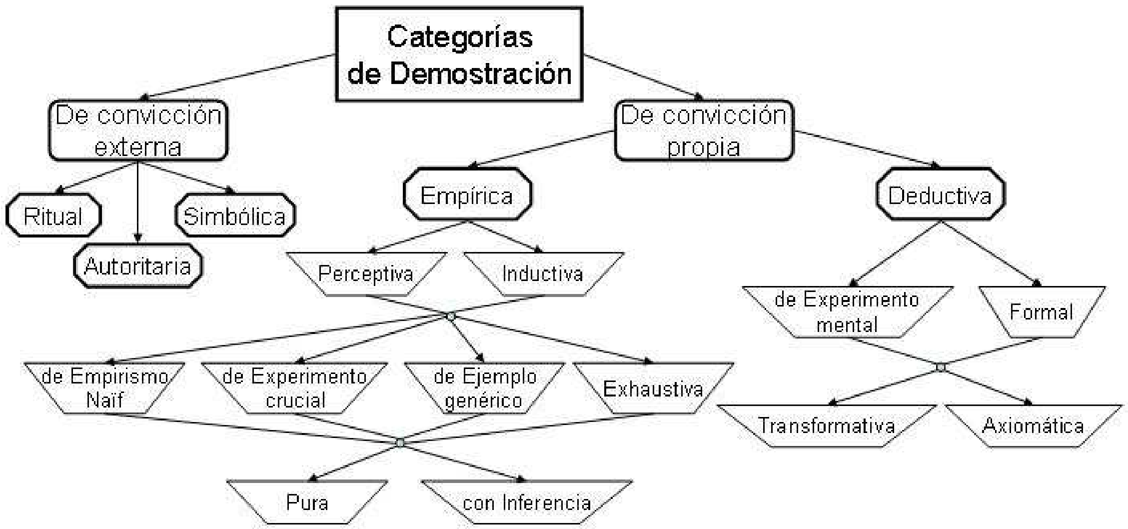
Para diferenciar la categoría de experimento mental de la demostración empírica con inferencia, podemos observar que los razonamientos utilizados en una demostración deductiva de experimento mental se desligan totalmente de los ejemplos concretos sobre los que se trabaja. Es importante destacar que en una demostración deductiva formal también puede haber presencia de ejemplos, pero éstos nunca aparecerán condicionando o encauzando el razonamiento.

II. En segundo lugar, atendiendo al tipo de razonamientos realizados, clasificamos una demostración deductiva en dos tipos:

- *Transformativa*, si está basada en operaciones mentales que producen una transformación del problema inicial en otro equivalente.
- *Axiomática,* si, para demostrar la tesis, se parte de los datos del problema, términos definidos y axiomas que se organizan en una cadena deductiva.

Obsérvese que en esta clasificación tenemos tres aspectos en las demostraciones empíricas. Por tanto, una demostración empírica puede ser catalogada como, por ejemplo, inductiva de experimento crucial con inferencia. Del mismo modo, tenemos dos aspectos en las demostraciones deductivas. Así pues, una demostración deductiva puede ser catalogada como, por ejemplo, de experimento mental transformativa. Una cuestión que, de momento, no entraremos a analizar es si todas las combinaciones posibles entre los elementos de los tres aspectos de las demostraciones de convicción propia empírica son teórica o realmente posibles, aportan incongruencias o simplemente son situaciones demasiado artificiales que en la práctica difícilmente pueden aparecer.

A modo de síntesis, incluimos en el siguiente diagrama las categorías de demostraciones que proponemos y que hemos utilizado en nuestro estudio.



4.2. Relaciones entre las diversas clasificaciones

Para facilitar la discriminación de categorías análogas en las diversas clasificaciones, adjuntamos la siguiente tabla. Las columnas corresponden a las clasificaciones de los diferentes autores. En una misma fila se hallan categorías análogas. El guión, –, denota que en la clasificación de esa columna no existe análogo a la categoría contenida en esa fila. En la tabla sólo aparecen las categorías de las clasificaciones que tienen análogo en alguna otra clasificación.

Bell	**Balacheff**	**Harel y Sowder**	**Marrades y Gutiérrez**	**Ibañes**	**Clasificación Propia**
-	-	Convicción externa	-	Convicción externa	Convicción externa
-	-	Ritual	-	-	Ritual
-	-	Simbólica	-	-	Simbólica
-	-	Autoritaria	-	-	Autoritaria
Empírica	Pragmática	Empírico	Empírica	Empírico	Empírica
-	Empirismo naïf	-	Empirismo naïf	No sistemático	Empirismo naïf
-	Experimento crucial	-	Experimento crucial	Sistemático	Experimento crucial

Bell	**Balacheff**	**Harel y Sowder**	**Marrades y Gutiérrez**	**Ibañes**	**Clasificación Propia**
-	Ejemplo genérico	-	Ejemplo genérico		Ejemplo genérico
-	-	Inductivo	Inductiva, subtipo de naïf	Inductivo	Inductiva
-	-	Perceptivo	Perceptiva, subtipo de naïf	Experimental	Perceptiva
Deductiva	Conceptual	Analítico	Deductiva	Analítico	Deductiva
-	Experimento mental	-	Experimento mental	-	Experimento mental
-	Cálculo sobre enunciados	-	Formal	-	Formal
-	-	Transformacional	Transformativa	Transformacional	Transformativa
-	-	Axiomático	Axiomática	-	Axiomática
-	-	Intuitivo-Axiomático	-	Intuitivo-Axiomático	-
No sistemática	-	-	-	Falso	-
Parcialmente sistemática	-	-	-	Auténtico	-
Sistemática	-	-	-		-
Completa	-	-	-	-	Exhaustiva
Explicación completa	-	-	-	Completo	-
Resto de subcategorías deductivas	-	-	-	Incompleto	-

4.3. Estudio de los procesos de exploración-conjetura-demostración

Comenzamos este apartado haciendo eco de un párrafo contenido en el artículo de Marrades y Gutiérrez (2000):

Las diferentes clasificaciones de demostraciones descritas en esta sección, incluida la nuestra, implícitamente asumen que los estudiantes trabajan de una forma lineal y coherente desde el principio hasta el final de la solución de un problema. Sin embargo, la realidad es, en muchos casos, diferente. Normalmente, muchos estudiantes comienzan realizando *comprobaciones empíricas y, cuando han entendido el problema y la manera de demostrar la conjetura, continúan escribiendo una justificación deductiva. También es habitual realizar varios saltos entre métodos empíricos y deductivos durante la resolución de un problema.* (p. 94-95)

Así pues, es necesario ampliar el marco teórico de las clasificaciones de la demostración y el análisis de las resoluciones de manera que queden recogidos de alguna forma el tipo de trabajo realizado en cada momento de la resolución de un problema y los diferentes saltos entre unas modalidades y otras. Para ello, basándonos en las investigaciones sobre los procesos de exploración-conjetura-demostración descritos en el apartado 3.2 y en la línea de Arzarello y otros (1998) y Marrades y Gutiérrez (2000), definimos:

- *Fase ascendente*: toda actividad empírica que ayuda a entender el problema, generar conjeturas o verificarlas.
- *Fase descendente*: toda actividad encaminada a construir una demostración deductiva de una conjetura realizada.

5. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Una vez introducida la situación didáctica que queremos estudiar, descritos los objetivos de nuestra investigación, revisada la bibliografía referente al tema y fundamentada la base teórica, en este capítulo relatamos los aspectos que consideramos más importantes de la parte experimental llevada a cabo con los estudiantes.

La fase experimental de la investigación fue realizada durante el curso 2004-2005 con los 8 alumnos matriculados en la asignatura “Métodos Geométricos”, optativa cuatrimestral del segundo ciclo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universitat de les Illes Balears. Dicha asignatura constaba de clases de aproximadamente 100 minutos, dos días a la semana durante el primer cuatrimestre.

En años anteriores, la primera parte del curso de esta asignatura estaba dedicada a que los alumnos, trabajando en pequeños grupos en un entorno de lápiz y papel (LP), resolvieran en clase una batería de problemas de geometría plana euclídea propuestos por la docente. Además, la última parte del curso, impartida por otro docente, estaba dedicaba a la didáctica de la geometría. La docente, cuando estimaba que era necesario, realizaba las indicaciones oportunas con el fin de ayudar a los alumnos. Además, si para la resolución del problema propuesto era necesario refrescar algún concepto o introducir algún otro, la docente lo realizaba antes de enunciar el problema o cuando aparecía la necesidad de utilizarlo. Si no daba tiempo a acabar la resolución de un problema en el número de clases que la docente había establecido, éste quedaba como tarea para casa, debiendo los alumnos entregar a la docente la resolución final pasada a limpio.

Teniendo en cuenta que la docente titular de la asignatura seguía siendo la misma que en cursos anteriores y que, previsiblemente, la estructura de la asignatura sería similar, si no idéntica, tuvimos que consensuar con ella una serie de cambios para que las condiciones en las que realizáramos la fase experimental de la investigación fueran óptimas, dentro de lo posible, y tener controladas algunas variables.

Una de las novedades fue la introducción del entorno Cabri (C). Esto suponía que debíamos dedicar algunas sesiones de clase al aprendizaje del software por parte de los alumnos. Otra de las cuestiones que hubo que resolver era la disponibilidad de una sala de ordenadores con el software Cabri II Plus instalado.

Otra novedad que decidimos antes de empezar la experimentación fue cambiar la forma de introducir o refrescar los conceptos geométricos que los alumnos necesitarían durante el curso. Creímos conveniente introducir los conceptos geométricos necesarios a principio del curso ya que si continuábamos introduciéndolos en el momento en qué los necesitaban, entonces esto podía dar una idea a los alumnos de los conceptos y propiedades involucradas en la resolución del problema y, en cierto modo, estaríamos influyendo en sus procesos de resolución al indicarles el camino a seguir. Al comenzar el curso fue asignado un tema a cada pareja de alumnos y fueron ellos los que introdujeron o refrescaron los conceptos al resto de sus compañeros.

Para formar las cuatro parejas dimos libertad a los alumnos para que las formaran, con la única consigna de que al menos un miembro de cada pareja hubiera cursado la asignatura de geometría de primer curso del plan nuevo. Debido a que coexistían dos planes de estudios y en el antiguo no existía ninguna asignatura de geometría euclídea, la directriz dada impedía que formaran una pareja sin una base establecida de conocimientos en este tipo de geometría.

Una vez introducidos los conceptos básicos necesarios, comenzamos con las clases de resolución de problemas. La estructura general de una clase fue la siguiente:

i) se enuncia el problema,

ii) cada pareja intenta resolverlo por separado,

iii) la docente supervisa las resoluciones de cada pareja, evaluando si es necesario dar alguna ayuda o resolver alguna duda que surja,

iv) si dentro del tiempo de la clase se resuelve el problema, entonces alguna de las parejas que lo han resuelto expone su resolución en la pizarra y se discute entre toda la clase bajo la moderación de la docente.

Si no da tiempo a terminar el problema dentro de la clase, éste queda pendiente como tarea para casa que las parejas deben entregar a la docente en las próximas clases. Tanto si el problema queda resuelto como si no, al terminar la clase, los alumnos deben entregar al investigador las resoluciones que han realizado durante la clase. El papel que jugó el investigador durante las clases fue el de observador participativo, tomando notas de campo, y colaborando con la docente en la tarea de supervisión de las resoluciones y evaluación de la necesidad de dar ayudas o resolver dudas.

La batería de problemas fue dividida en dos bloques. El primero corresponde a los problemas que debían resolverse en el entorno LP, y el segundo corresponde a aquellos que debían resolverse en el entorno C. Cada uno de estos bloques comienza con varios problemas de construir (problemas dónde el objetivo es construir cierta figura geométrica y justificar la corrección de los pasos dados para realizarla)[1] que sirvieron de recordatorio para la resolución de problemas de geometría euclídea, de entrenamiento en la nueva forma de escribir las resoluciones de los problemas y para familiarizarse con el compañero de pareja, la dinámica de las clases y con el entorno (especialmente en el uso de Cabri). Además, una vez finalizados los problemas de LP y antes de comenzar los de C, dedicamos dos clases completas a explicar a los alumnos el funcionamiento del programa Cabri-Géomètre (versión II plus para Windows) y sus comandos y funciones con ejercicios prácticos para que fueran adquiriendo cierta destreza en su manejo, que acabarían de obtener con los problemas de construir.

En cada bloque, una vez finalizados los problemas de construir, fueron resueltos los problemas de demostrar[2] que han sido objeto de estudio en este trabajo. Los problemas de cada tipo (construir y demostrar) de la lista que habíamos elaborado para el curso fueron repartidos en los dos bloques sin seguir un criterio específico. Dicho de otro modo, los problemas del bloque de C no son problemas que cumplan ciertas condiciones ni que hayan sido elegidos porque sea más fácil o difícil su resolución con dicho software.

La siguiente tabla resume la temporalización del curso experimental, con la cantidad de clases dedicadas a cada tipo de actividad.

[1] En la clasificación de Polya (1981) son problemas de construir y demostrar.

[2] En problemas de demostrar englobamos, según la clasificación de Polya (1981), problemas de demostrar y problemas de encontrar y demostrar.

Tipo de actividad	Número de clases
Presentación, recordatorio de contenidos matemáticos, aprendizaje del auto-protocolo	3
Problemas de construir en LP	4
Problemas de demostrar en LP	5
Aprendizaje de Cabri	2
Problemas de construir en C	2
Problemas de demostrar en C	5

La siguiente tabla muestra la cantidad de problemas de construir (c) y de demostrar (d) planteados a los estudiantes a lo largo del curso y la distribución de los problemas entre los dos entornos (LP y C). Las celdas de la tabla indican si cada pareja de estudiantes trabajó (S) o no (N) en los problemas.

	Parejas de estudiantes			
Nº de problema	**G01**	**G02**	**G03**	**G04**
LP01 (c)	S	S	S	S
LP02 (c)	S	S	S	S
LP03 (c)	S	S	S	N
LP04 (c)	S	S	N	S
LP05 (d)	S	S	S	S
LP06 (d)	S	S	S	S
LP07 (d)	S	S	S	S
LP08 (d)	S	S	S	S
LP09 (d)	S	S	S	S
C01 (c)	S	S	S	S
C02 (c)	S	S	S	S
C03 (d)	S	S	S	S
C04 (d)	S	S	S	S
C05 (d)	S	S	S	S
C06 (d)	S	S	S	S
C07 (d)	S	S	S	S

6. METODOLOGÍA

En el capítulo anterior mostramos los aspectos más relevantes de la fase experimental de la investigación. En este capítulo centramos la atención en la metodología empleada tanto para la recogida de datos como para el análisis de los mismos con el objetivo de extraer los resultados del estudio. También discutimos aspectos de algunas herramientas metodológicas existentes para la recogida de datos en este tipo de investigaciones y proponemos una nueva, el auto-protocolo, que utilizamos de forma experimental en nuestra investigación.

Uno de los dilemas que surgieron a la hora de planificar la investigación fue hallar una herramienta metodológica que nos permitiera obtener la máxima información posible sobre los procesos cognitivos realizados por los alumnos durante la resolución de los problemas, es decir en sus intentos de llegar a escribir demostraciones que sean las soluciones de los problemas.

La información aportada por pruebas de tipo test puede ser útil si lo que nos interesa es la solución del problema, pero es insuficiente para estudiar los procesos realizados en la resolución del mismo.

Por otra parte, la información que aporta una demostración formal “pasada a limpio” y saneada de conjeturas refutadas y comprobaciones empíricas es escasa. La valoración de las demostraciones finales producidas por los estudiantes, comparadas con las resoluciones de “experto”, no es lo que más interesa en esta investigación.

Si son recogidas las producciones “en sucio” de los alumnos, esto es, las hojas de papel que contienen sus conjeturas, comprobaciones empíricas, fragmentos de demostraciones informales y formales, sin más orden que el espacial del lugar en que han sido escritas por los alumnos, obtenemos una información mucho más rica, aunque, al mismo tiempo, mucho más compleja y difícil de analizar.

Realizar entrevistas clínicas sería útil y productivo, pero entrevistar a todas las parejas de alumnos después de cada problema era, en la práctica, imposible dado el número de problemas y el tiempo disponible para ello, y entrevistar sólo a parte de los estudiantes o sólo después de unos pocos problemas podría dar insuficiente información.

Para solventar esta serie de inconvenientes de los métodos tradicionales de recogida de datos pensamos que, como novedad de la investigación y a modo experimental, podríamos hacer que fueran los propios alumnos quienes, mientras resolvían los problemas, escribieran un "guión" de lo que hacían y pensaban, qué decisiones tomaban y por qué las tomaban, y cualquier otro aspecto que ellos consideraran interesante o que había influido en su trabajo. Hemos denominado *auto-protocolo* a estos textos escritos por los estudiantes, que, generalmente, incluyen, entremezclados pero ordenados temporalmente, sus progresos en la resolución de los problemas y sus comentarios de tipo descriptivo o metacognitivo.

Como esta forma de escribir las resoluciones era totalmente nueva para los alumnos, dedicamos una sesión de clase a explicar cómo debían escribir un auto-protocolo y qué esperábamos que escribieran. Para ello resolvimos un problema de forma conjunta entre los alumnos, la docente y el investigador. Al final de esta clase entregamos a cada alumno un auto-protocolo del problema resuelto escrito por el investigador, para que éstos tuvieran un ejemplo en el que fijarse (ver anexo 4.1). Además, resaltamos, entre otras cosas, que es muy importante que la escritura del auto-protocolo no la realizaran tras haber finalizado la resolución del problema, sino que debían hacerla paralelamente a ésta, a la vez. Si escriben el auto-protocolo después de haber terminado de resolver un problema, lo más probable es que los estudiantes olviden algunos de los pasos seguidos, especialmente aquéllos que no le condujeron a ninguna conclusión útil para su resolución del problema. Además, los problemas de construir resueltos al principio del curso, antes de los primeros problemas de demostrar, sirvieron a los estudiantes de entrenamiento en la elaboración de auto-protocolos; el investigador los supervisó diariamente y comentó a los alumnos lo que consideraba que era necesario cambiar o corregir en los mismos.

Otra de las instrucciones dadas a los estudiantes sobre cómo debían organizar los auto-protocolos es que no incluyeran en las mismas hojas las figuras de las construcciones geométricas que realizaran durante sus resoluciones de los problemas, sino que las hicieran en hojas aparte (numeradas para su identificación) y las entregaran al final de la clase junto con el texto del auto-protocolo. El motivo de esta decisión es que en los problemas resueltos con Cabri, previsiblemente, la mayor parte de las figuras las realizarían en la pantalla del ordenador y no en papel, por lo que no sería posible tener un auto-protocolo que incluyera el guión y las figuras. Por eso decidimos que en el entorno LP lo hicieran de la misma manera (guión y figuras en hojas separadas), para que al llegar a los problemas del entorno C los alumnos siguieran empleando el mismo formato de auto-protocolo y no tuvieran que modificar una costumbre ya adquirida.

Los auto-protocolos pueden ser considerados una variante de lo que es conocido como “pensar en voz alta”. Este método consiste en pedir al alumno que mientras resuelve el problema vaya comentando oralmente al investigador lo que hace. En el caso de los auto-protocolos, el alumno en vez de comentar los pasos al investigador de forma oral, lo hace de forma escrita (y no necesariamente en presencia de éste). Los investigadores más críticos con el método de “pensar en voz alta” alegan que el hecho de que el alumno tenga que explicar lo que hace, obliga a este a realizar meta-cognición, interrumpe su flujo de ideas, influye en sus razonamientos y, por tanto, distorsiona la resolución que hubiera realizado sin tener que explicar lo que hace. En las condiciones bajo las que hemos llevado a cabo nuestra investigación, y después de ver cómo fue el desarrollo de las clases experimentales, creemos que la metodología del auto-protocolo produce una distorsión mínima en la actividad de resolución, ya que de todos modos el flujo de pensamientos es interrumpido por el hecho de que los alumnos trabajan en parejas y deben ponerse de acuerdo en lo que hacen.

El lector puede encontrar en el anexo 4.2, a modo de ejemplo, los auto-protocolos realizados por una pareja de estudiantes al resolver dos problemas, uno en entorno LP y otro en entorno C.

Además de los auto-protocolos, recogimos notas de campo del investigador, los archivos de las figuras de Cabri guardadas en el ordenador y los registros de sesión de Cabri.

Para integrar la información procedente de los diferentes tipos de datos obtenidos sobre la resolución de un problema por una pareja de estudiantes, y para facilitar su posterior análisis, especialmente en los problemas resueltos con Cabri, hemos elaborado unas tablas (ver anexo 3) que incluyen

- un resumen detallado del auto-protocolo correspondiente, con transcripciones de los fragmentos significativos,

- comentarios del investigador y

- los dibujos en papel o figuras de Cabri correspondientes al trabajo realizado en esos párrafo.

7. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo presentamos el análisis de las resoluciones de los problemas de demostración hechas por los estudiantes. Dicho análisis de basa en las dos variables consideradas en el marco teórico (capítulo 4), las categorías de demostración mostradas y las fases ascendentes y descendentes que marcan los cambios de objetivo (búsqueda de una conjetura o propiedad y demostración de su veracidad) de los estudiantes durante la resolución de un problema.

Iniciamos este capítulo con el apartado 7.1, que contiene ejemplos de las diferentes categorías de demostración aparecidas en las respuestas de los estudiantes, así como de sus correspondientes sucesiones de fases ascendentes y descendentes. El apartado 7.2 muestra, utilizando los ejemplos incluidos en el apartado 7.1, diferentes secuencias de fases ascendentes y descendentes encontradas en las resoluciones de los estudiantes. En el apartado 7.3 hacemos un resumen de los resultados obtenidos por las cuatro parejas de estudiantes en los problemas resueltos. Finalmente, el apartado 7.4 presenta un análisis de la información aportada por los diferentes tipos de datos obtenidos y la manera en que esta información se complementa.

En el anexo 1 el lector puede encontrar los enunciados de todos los problemas y en el anexo 2 las soluciones formales matemáticamente correctas, resoluciones de “experto”, de aquéllos cuyas resoluciones por los estudiantes son analizadas en este capítulo. Para algunos problemas hay otras formas diferentes de resolución; en estos casos hemos elegido la que más se aproxima a las resoluciones de los estudiantes.

Los estudiantes disponían para resolver cada problema de una sesión de clase. En bastantes casos los estudiantes no llegaron a completar la solución, unas veces por falta de tiempo y otras porque no lograron encontrar una vía de resolución correcta. En este contexto, el principal objetivo de las resoluciones de experto no es evaluar o calificar académicamente las respuestas de los estudiantes, sino ayudar al investigador y al lector a valorar las resoluciones inacabadas y tener una idea más clara de si los estudiantes iban bien encaminados o no y de cómo de cerca se quedaron de completar la solución.

7.1. Categorías de demostración en las respuestas de los estudiantes

En este apartado mostraremos el análisis de cuatro resoluciones de problemas de demostrar: resolución del problema LP 05 por la pareja 03, del problema C 03 por la pareja 02, del problema LP 07 por la pareja 02 y del problema C 05 por la pareja 01. Las hemos seleccionado porque corresponden a categorías de demostración diferentes, de ambos entornos y pueden considerarse como representativas de las otras resoluciones de las mismas categorías. Las únicas tres categorías de demostración obtenidas al analizar las resoluciones de los estudiantes son: de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa, de convicción propia empírica inductiva de ejemplo genérico con inferencia y de convicción propia empírica perceptiva de empirismo naïf con inferencia. La siguiente tabla organiza en categorías los diferentes problemas resueltos por las parejas:

Categoría	Pareja	Problema								
		LP05	LP06	LP07	LP09	C03	C04	C05	C06	C07
Experimento mental transformativa	01	x	x	x	x	x	x	**X**	x	x
	02		x	**X**	x		x	x	x	x
	03		x	x	x	x	x	x	x	x
	04		x	x	x	x	x	x	x	x
Inductiva de ejemplo genérico con inferencia	01									
	02	x				**X**				
	03									
	04									
Perceptiva de empirismo naïf con inferencia	01									
	02									
	03	**X**								
	04	x								

X (mayúscula y negrita) indican los problemas seleccionados para describir en este apartado.

A pesar de que en este apartado sólo incluimos el análisis realizado a los cuatro problemas escogidos para ser presentados, el lector puede encontrar en el anexo 3 los análisis y clasificaciones de todas las resoluciones de todos los problemas de demostrar hechas por cada una de las parejas.

Para facilitar la comprensión por parte del lector de las transcripciones-resumen creemos necesario realizar las siguientes explicaciones:

A petición del investigador, los estudiantes numeraron los sucesivos párrafos o fragmentos cortos del auto-protocolo. La columna “Párrafos” contiene los números de los párrafos del auto-protocolo descritos en la fila correspondiente.

La columna “Descripción” contiene el resumen del auto-protocolo, dividido en conjuntos de párrafos consecutivos relacionados, así como transcripciones de fragmentos significativos de estos párrafos.

La columna “Comentarios del investigador” contiene análisis, comentarios o aclaraciones referentes a los párrafos correspondientes. Unas anotaciones, como “comprobación perceptiva”, “razonamiento deductivo”, etc., indican que en el fragmento de auto-protocolo en el que se encuentra la anotación hay evidencias de que han realizado una comprobación del tipo especificado, independientemente de que la demostración global sea del mismo tipo o de otro. Otras anotaciones, como “actuación externa con función de guía”, etc., se refieren a sucesos relevantes por haber influido en la actuación posterior de los estudiantes.

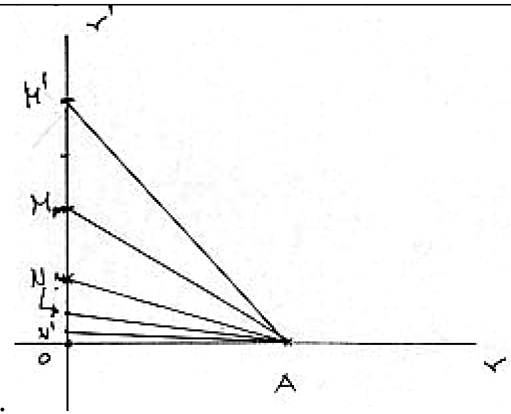
La columna “Figuras” contiene dibujos en papel o figuras de Cabri hechos por los estudiantes correspondientes al fragmento de auto-protocolo resumido (sólo hemos incluido los dibujos o figuras necesarios para entender la actividad de los estudiantes).

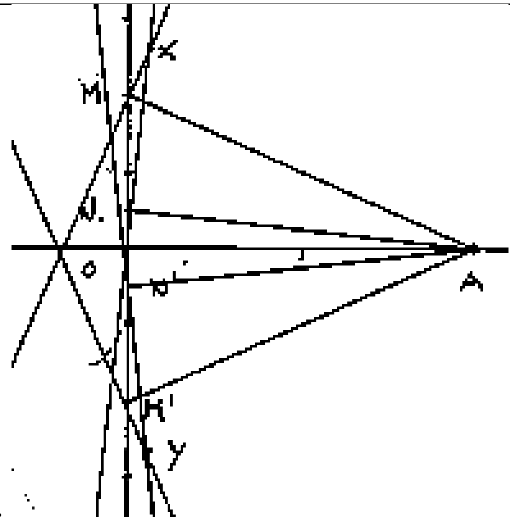
Al final de cada tabla se halla una secuencia de las fases recorridas en la resolución del problema correspondiente. Es preciso aclarar la codificación empleada. Utilizamos el símbolo $\uparrow$ para indicar una fase ascendente y el símbolo $\downarrow$ para una fase descendente.

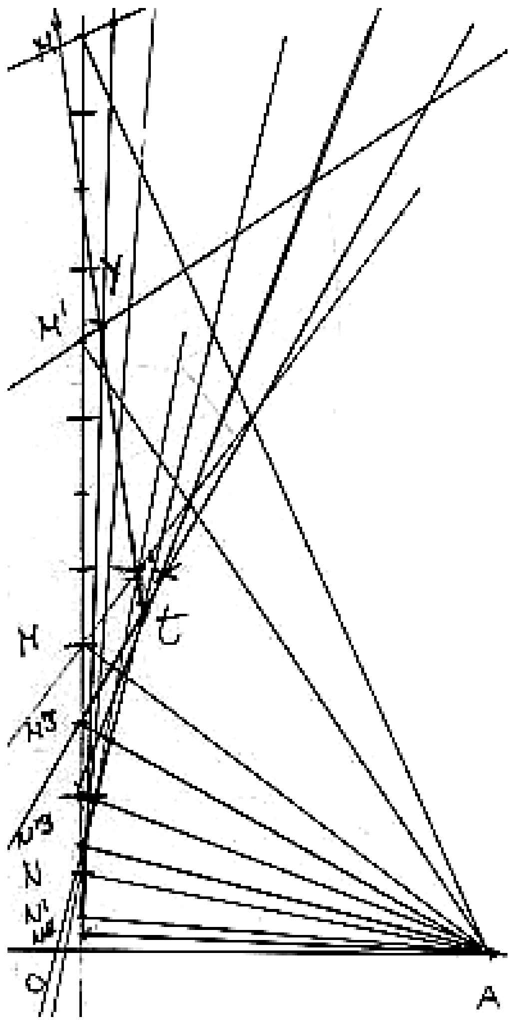
7.1.1. Ejemplo de demostración de convicción propia empírica perceptiva de empirismo naïf con inferencia en LP.

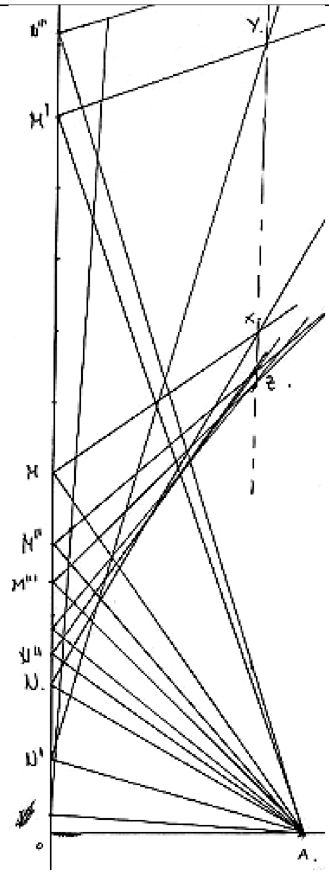
Problema LP 05. Sean *r* y *r'* dos rectas perpendiculares y *O* su punto de intersección. Sea *A* un punto (fijo) de *r* y sean *M* y *N* dos puntos (variables) de *r'* tales que $OM \cdot ON = k^2$. Si consideramos las perpendiculares a las rectas *AM* y *AN* por los puntos *M* y *N* respectivamente, determinar el lugar geométrico del punto *P* de intersección de dichas perpendiculares.

Resolución de la pareja 03.

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
1-6	Construcción (fig. 1): Rectas perpendiculares r, r'e intersección O. Punto A sobre r. k=1 puntos M, N, M' y M'' t.q. OM·ON=1 y OM'·ON'=1 (al mismo lado de r)	*La elección de una constante numérica implica la utilización de medidas numéricas concretas. Puede comprobarse en las figuras que el alumno ha optado por realizar las construcciones con regla numerada.*	 Fig. 1.

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
7	Reconstrucción de la figura (fig. 2). Esta vez los pares (M, N) y (M’, N’) a lados distintos de r. Perpendiculares a AM, AN por M y N respectivamente. X punto de intersección. Perpendiculares a AM’, AN’ por M y N respectivamente. Y punto de intersección.		
8	“Veo que el lugar geométrico de los puntos de intersección de dichas perpendiculares es simétrico respecto a r.” Por tanto, se centrará sólo en uno de los lados de r.	*Comprobación empírica-perceptiva ya que no hay constancia de que lo compruebe por otros métodos (además de la utilización de la palabra “veo”).*	Fig. 2.

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
9	Reconstrucción de la figura (fig. 3). (M, N), (M’, N’), (M’’, N’’), (M’’’, N’’’) perpendiculares y puntos de intersección X, Y, Z, T respectivamente.		 Fig. 3.
10	“No veo ningún lugar geométrico conocido.” $M=N \Rightarrow$ la intersección es toda una recta $M>N \Rightarrow$ si disminuye M entonces N crecerá (hasta que M=N) $M<N \Rightarrow$ M y N se intercambian los papeles y se vuelven a construir los mismos puntos de intersección que en M>N.	*Observación que indica un nivel de comprobación perceptivo.* *Podemos observar un razonamiento dinámico (según la clasificación de Ibañes) con alto grado de empirismo-perceptivo. Al mismo tiempo se está realizando una subdivisión exhaustiva de casos posibles (respecto a M y N).*	

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
11	La constante elegida no es muy cómoda así que toma otra y redibuja la figura (fig. 4).	*Aunque no lo especifica en el auto-protocolo, la constante elegida es k=40 (extraída del dibujo).*	 Fig. 4.
12	“He hecho un dibujo más significativo y parece que forman una recta que parece paralela a r’. ” FIN	*Afirmación con base empírica-perceptiva.*	

Observaciones:

- Los ejemplos son tomados mediante medidas numéricas concretas sin criterio específico.
- El desarrollo de la demostración está claramente marcado por observaciones perceptivas sobre los ejemplos escogidos.

- El único razonamiento más allá de la pura comprobación empírica es el del párrafo 10 cuando estudia los diferentes casos de la relación entre M y N. En principio, la existencia de este razonamiento ya es suficiente para catalogarlo como empírica con inferencia en lugar de empírica pura.

Categoría: Demostración de convicción propia empírica perceptiva de empirismo naïf con inferencia.

Demostración terminada.

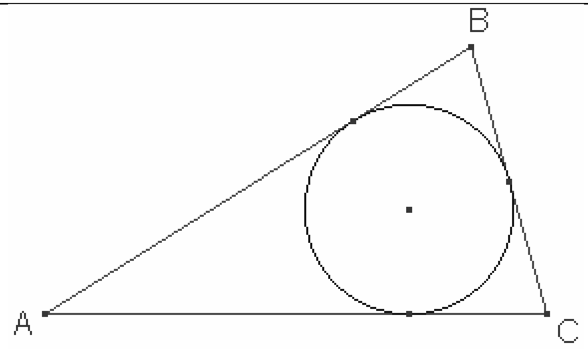
Fases ascendentes y descendentes:

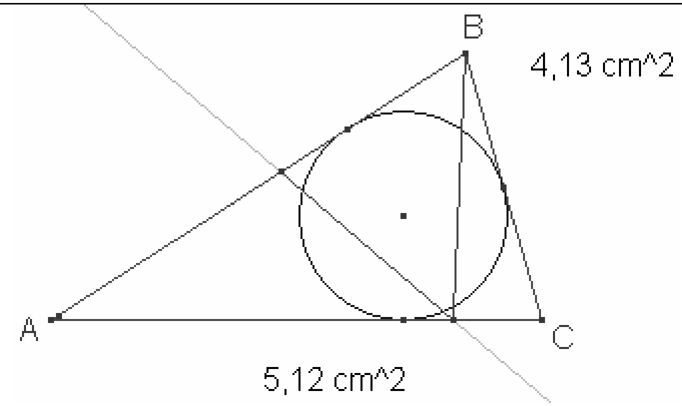
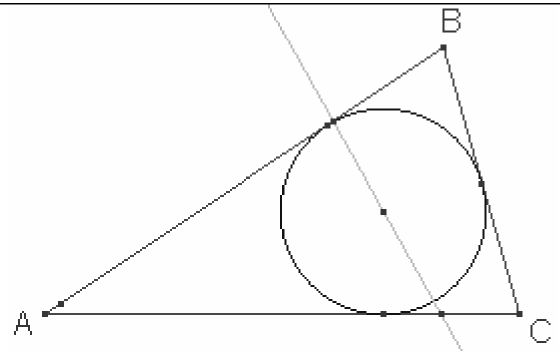
Párrafo nº	1-8	9-10	11-12
Asc / Desc	↑	↑	↑

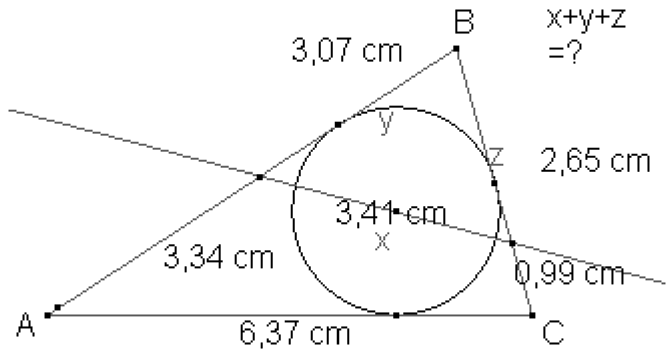
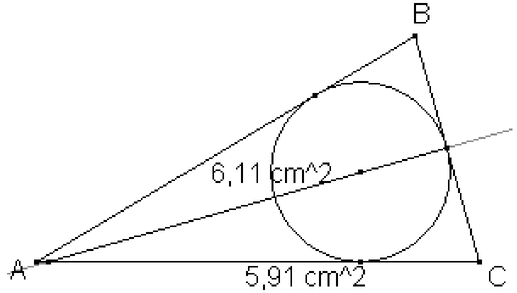
7.1.2. Ejemplo de demostración de convicción propia empírica inductiva de ejemplo genérico con inferencia en C.

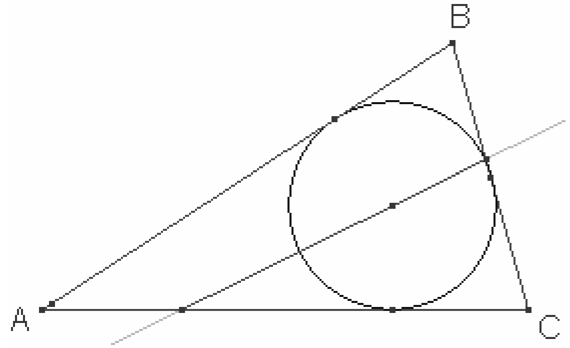
<u>Problema C 03</u>. Demostrar que una recta que divide un triángulo cualquiera *ABC* en dos polígonos de igual perímetro y área pasa por el centro de la circunferencia inscrita al triángulo *ABC*.

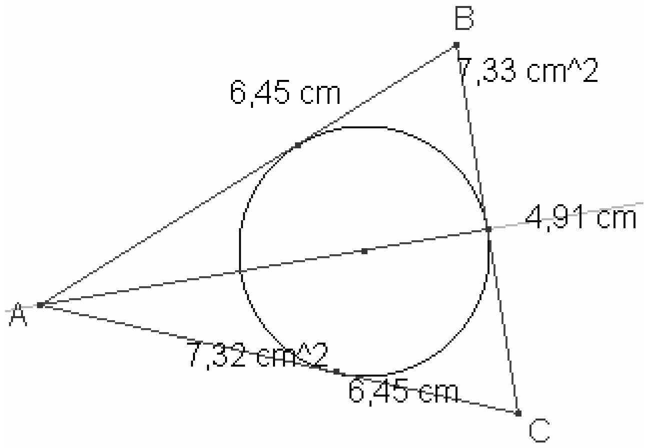
Resolución de la pareja 02.

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
1-6	Construcción: Triángulo cualquiera ABC. Bisectrices del triángulo. Punto de intersección de las bisectrices. Circunferencia inscrita. Puntos de tangencia de la circunferencia con el triángulo ABC. “No sabemos por qué, pero las dibujamos.”		 *(se01 nº 39)*
7	Revisión de las herramientas disponibles en Cabri.		

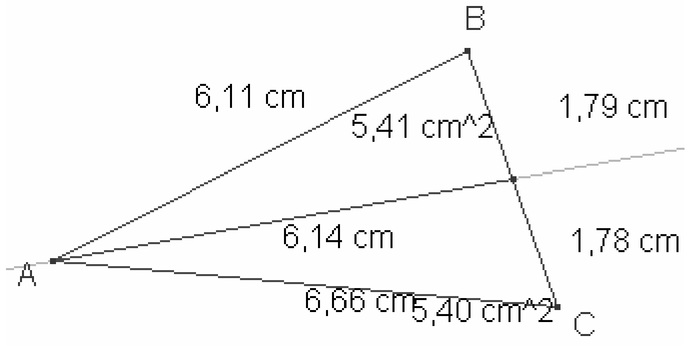
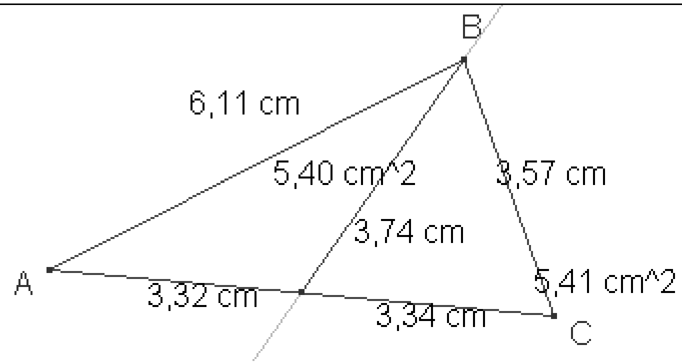
Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
8	Construcción: Recta *d* que pasa por un punto del lado AB y por un punto del lado BC. "Marcamos los polígonos y ponemos la opción Área." "Al mover la recta *d* va cambiando la cantidad de área, pero también se nos mueven los polígonos. No vamos bien."	*Por lo que viene después se sabe que para construir la recta han utilizado dos puntos construidos con la herramienta "Punto sobre objeto" (sobre el triángulo ABC)* *En principio no se entiende esto de que "se mueven los polígonos". Revisando el registro de sesión se puede observar que se refieren a que los polígonos dejan de estar sobre el triángulo ABC cuando mueven la recta de forma que corte al triángulo en los lados AB y AC (en lugar de BC)*	 *(se01 nº 81)*
9	Construcción: "Ahora hacemos lo mismo que antes, pero la recta *d* ahora pasa por el centro de la circunferencia y por un punto exterior." "Marcamos los dos polígonos y movemos la recta. Ahora no se mueven los polígonos pero en un momento dado, al mover la recta, desaparecen los polígonos."	*Cuando dicen "no se mueven los polígonos" se refieren a que están siempre sobre el triángulo ABC.* *En el registro de sesión puede observarse que desaparecen los polígonos cuando el punto de intersección entre la recta y el triángulo cambia de lado del triángulo.*	 *(se01 nº 123)*

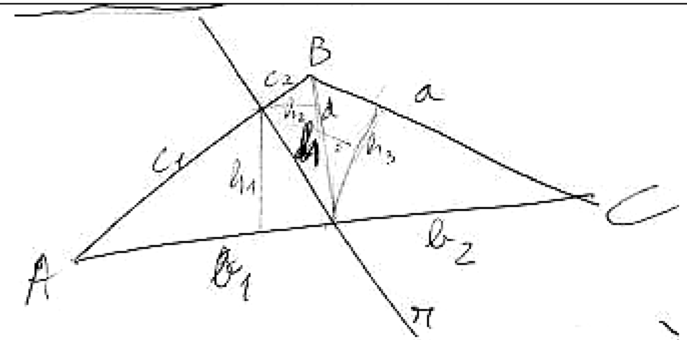
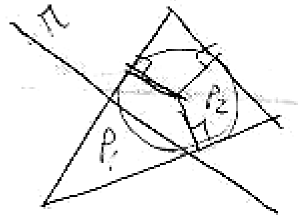
Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
10-11	"Nos damos cuenta de que no está la opción Perímetro y ponemos el valor de las distancias de cada segmento." "Dejamos esta idea de lado."	*No recuerdan que con la herramienta "Distancia o longitud" también puede hallarse el perímetro de un polígono.*	 *(se01 nº 251)*
12-13	"Creemos que a lo mejor la recta ha de pasar por uno de los puntos de tangencia (y por el centro, claro)." "Lo hacemos. No va bien, sólo iría bien si fuese isósceles o equilátero??."		 *(se01 nº 289)*

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
14	"Solucionamos el problema que teníamos en el párrafo 9, dónde a veces nos desaparecían los polígonos: donde no nos quedaban polígonos, lo volvemos a marcar como polígonos y ya está."		 *(se01 nº 325)*

<table>
<tr><th>Párrafo</th><th>Descripción</th><th>Comentarios del Investigador</th><th>Figuras</th></tr>
<tr><td>15</td><td>“Decidimos hacer casos.”
“Si es isósceles todo va bien, pero ¿es la única recta?</td><td></td><td rowspan="3">

(se01 nº 453)</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Actuación externa de guía:
Están utilizando (imponiendo) lo que quieren demostrar (que la recta pase por el centro de la circunferencia).</td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>“Vamos a hacer casos:”
- Que la recta pase por A y un punto de BC.
- Que la recta pase por B y un punto de AC.
- Que la recta pase por C y un punto de AB.
- Dos puntos cualesquiera.</td><td>*En este punto se cuelga el ordenador y pierden el fichero de la figura. Tienen que reiniciar y volver a empezar con la construcción. Afortunadamente el registro de sesión ha quedado guardado.*</td></tr>
</table>

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
18	“Hacemos el caso que la recta pasa por A y un punto cualquiera de BC.” “Si hacemos esto Cabri no nos deja mover la recta, entonces cogemos el punto A y un punto cualquiera.”	*Sí que deja mover la recta (y con ella el punto). Lo que no deja mover es directamente el punto porque lo han construido como punto fijo de intersección entre la recta y el triángulo.*	 *(se02 nº 47)*
19	“Movemos la recta y en un punto dado encontramos que las áreas son iguales.”	*Búsqueda inductiva-dinámica*	
20	“Ahora damos valores [Herramienta Distancia o Longitud] a los segmentos y sumamos con la calculadora a ver si tienen el mismo perímetro. No.”	*Comprobación inductiva.*	
21	“Hacemos el incentro y ocultamos.”		
22-23	“Hacemos el caso que la recta pasa por B y por un punto cualquiera de AB*. Repetimos los pasos 18, 19 y 20.” “Por aquí no vamos bien.”	** debe decir AC.*	 *(se02 nº 55)*

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
24-26	Decidimos hacerlo aparte sin el Cabri y meter formulitas." "No vemos nada." FIN	*Éste es el primer problema de demostrar que hacen con Cabri. A lo largo de todo el problema se ha visto que esta pareja no domina el manejo de Cabri y finalmente optan por irse a un entorno de Lápiz y Papel dónde seguramente tienen más confianza.* *Podemos observar en la hoja de papel que han dibujado 3 triángulos, han dado nombres a los diferentes segmentos y han intentado encontrar relaciones entre ellos, pero sin resultados satisfactorios.*	 

Observaciones:

- Interesante el comentario a los párrafos 24-26.
- La demostración está fuertemente marcada por las comprobaciones de tipo empírico sin que haya evidencia de razonamientos deductivos. Tampoco se manifiesta una inconformidad con las comprobaciones empíricas realizadas. Por tanto, no tenemos datos que indiquen que se trata de una demostración deductiva.
- Los ejemplos escogidos son genéricos, sin medidas concretas.
- Existen razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas puras.

Categoría: Demostración de convicción propia empírica inductiva de ejemplo genérico con inferencia.

Demostración inacabada y sin camino establecido.

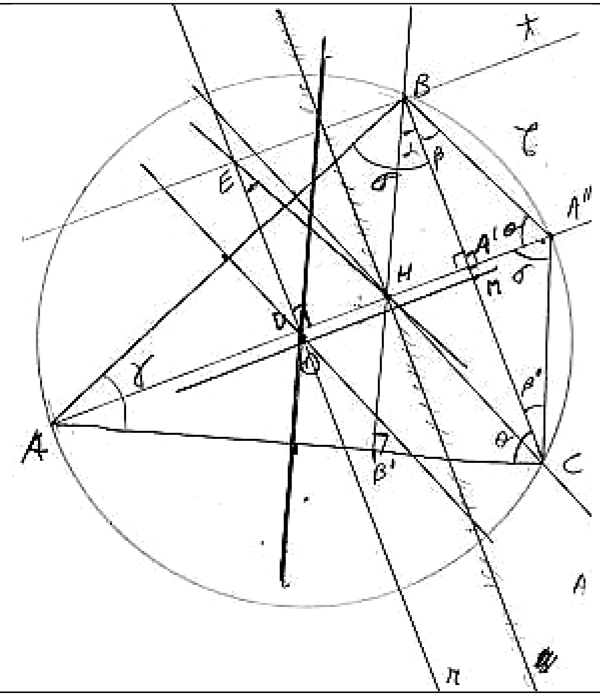
Fases ascendentes y descendentes:

Párrafo nº	1-8	9-11	12-13	14-23	24-26
Asc / Desc	↑	↑	↑	↑	↑

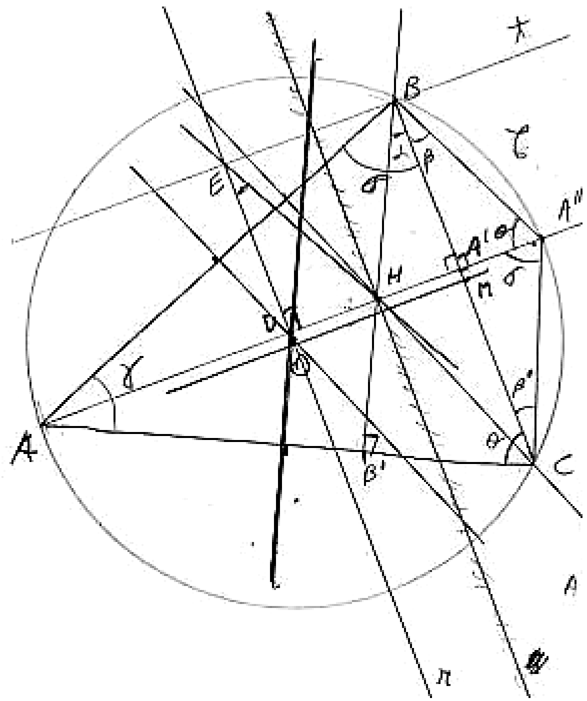
7.1.3. Ejemplo de demostración de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa en LP.

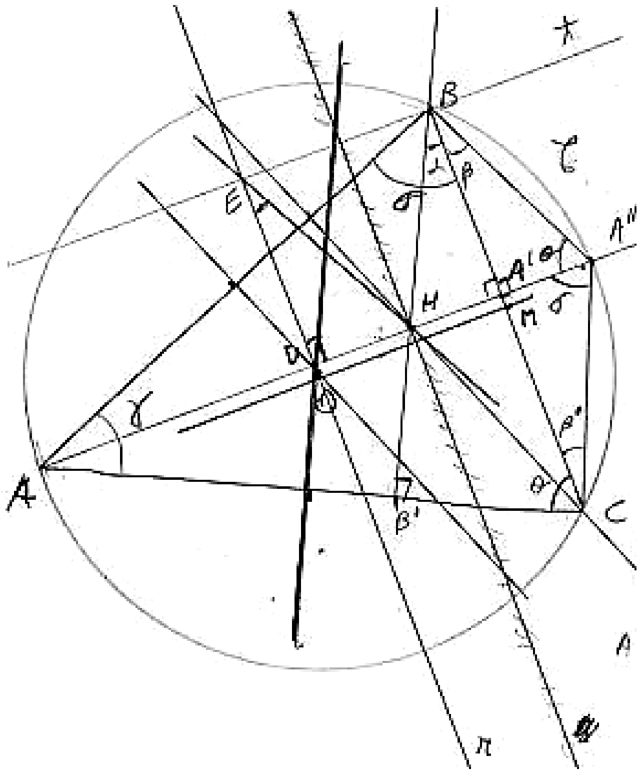
Problema LP 07. Sea *ABC* un triángulo con ortocentro *H*. La altura *AH* corta a *BC* en *A'* y a la circunferencia circunscrita de centro *O* en *A''*. Sea *M* el punto medio de *BC* y *r* la paralela por *O* a *BC*. a) Demostrar que *H* es la imagen de *A* por la composición de una simetría de eje *r* y una simetría de eje *BC*. ¿Existe alguna relación entre *AH* y *OM* ? b) La mediana *AM* corta a *OH* en un punto *G*. Demostrar que *G* es el baricentro de *ABC*. ¿Existe alguna relación entre *OH* y *OG*?

Resolución de la pareja 02.

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
1-4	Construcción: (fig. 1) Triángulo ABC (acutángulo escaleno) Alturas del triángulo. Ortocentro H. Punto A' de intersección de la altura AH con el lado BC.	*Utilizan una plantilla de un triángulo dónde tienen marcadas las rectas más importantes (alturas…).*	
5	Recta paralela a BC que pasa por H. "Está mal. NO. La tachamos."		
6	Mediatrices. Circuncentro O.	*Con la plantilla.*	
7	Circunferencia Z circunscrita del triángulo.	*Ellos utilizan otra letra para la nomenclatura. La he cambiado por comodidad en el procesador de textos.*	
8	Punto M sobre BC. ¿?		

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
9-10	Recta r paralela a BC que pasa por O. Punto A’’ de intersección de la altura AH con circunferencia Z.		
11	“Observamos que la recta r es el diámetro de la circunferencia Z.”	*Sería más correcto decir que r contiene a un diámetro de Z o, equivalentemente, que r pasa por el centro de Z. En ausencia de cualquier tipo de justificación debo concluir que es una comprobación perceptiva. Aunque lo lógico sería pensar que es por la propia construcción de la recta r.*	

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
12	AA’’ es perpendicular a r y r es diámetro de Z, entonces la imagen de A por la simetría de eje r es A’’	*No se justifica que AA’’ sea perpendicular a r. Comprobación perceptiva. Se podría justificar diciendo que r es paralela a BC y AA’’ es altura (perpendicular a BC) del triángulo.*	
13	“ Pensamos que si vemos que |HA’| = |A’A’’| ya estará, ya que tenemos que hacer la simetría ahora de A’’ respecto de BC ”		
14-15	Segmento A’’B. Triángulos HBA’ y A’BA’’ “Intentamos ver que sean congruentes. - Tienen un lado común: A’B. - Tienen un ángulo recto cada uno: HA’B y A’’A’B. Si viésemos que los ángulos HBA’ y A’BA’’ son iguales ya estaría.		
16-19	Segmento CA’’. Los ángulos ACB y AA’’B son iguales porque están en el mismo arco capaz. Análogamente para los ángulos ABC y AA’’C. Nombran los ángulos.	*Razonamiento deductivo.*	
20-21	Mediante relaciones de ángulos y utilizando que los ángulos de un triángulo suman 180º llegan a la conclusión que buscaban: Los ángulos HBA’ y A’BA’’ son iguales.		

Párrafos	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
22	"Resumiendo. Queríamos ver que |HA'|=|AA''|, para esto queríamos ver que los triángulos HBA' y A'BA'' son congruentes. Sabíamos que tenían 1 lado común (A'B) y 1 ángulo recto cada uno (HA'B y A''A'B). Por tanto, si viésemos que los ángulos HBA' y A'BA'' son iguales ya estaría, que es lo que hemos visto en el paso 21."	*Han llegado correctamente de una forma deductiva al resultado. Se podría señalar la falta de rigor en algunos pasos que quedan sin justificar.*	
23	¿Hay alguna relación entre los segmentos AH y OM? Punto D intersección de AH con r.		
24	AA'' es la altura del triángulo y OM es la mediatriz, que siempre son paralelas. Por tanto, OM y AA'' son paralelas.		
25	La "intuición" de uno de los miembros dice que |AH| = 2 · |OM|. "Para esto queremos ver que |DH| = |HA'| = |A'A''|	*Esa intuición claramente debe provenir de comprobaciones de tipo empírico (perceptivas o inductivas).*	
26	"Pensamos y pensamos."		
27	Recta t paralela a AA'' que pasa por B. Punto E intersección de t y r. "De esta forma queremos ver que los triángulos DEH y HBA' son congruentes". FIN		

Observaciones:

- La resolución del problema se basa en la transformación del problema original en otros problemas equivalentes que surgen del trabajo realizado con los ejemplos tomados.

Categoría: Demostración de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa.

Demostración de las simetrías terminada. Demostración de la relación inacabada, tienen un camino marcado.

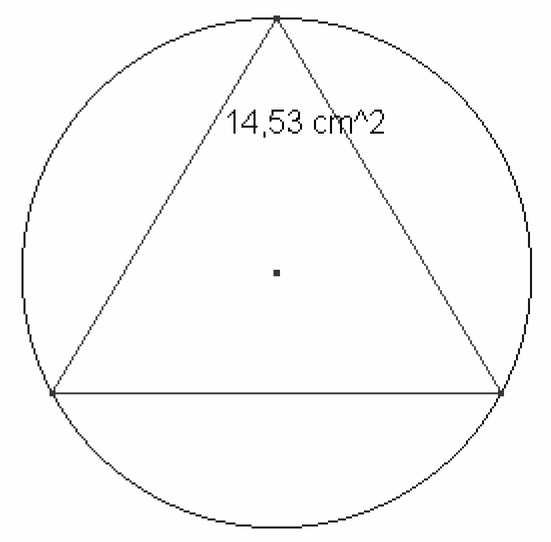
Fases ascendentes y descendentes:

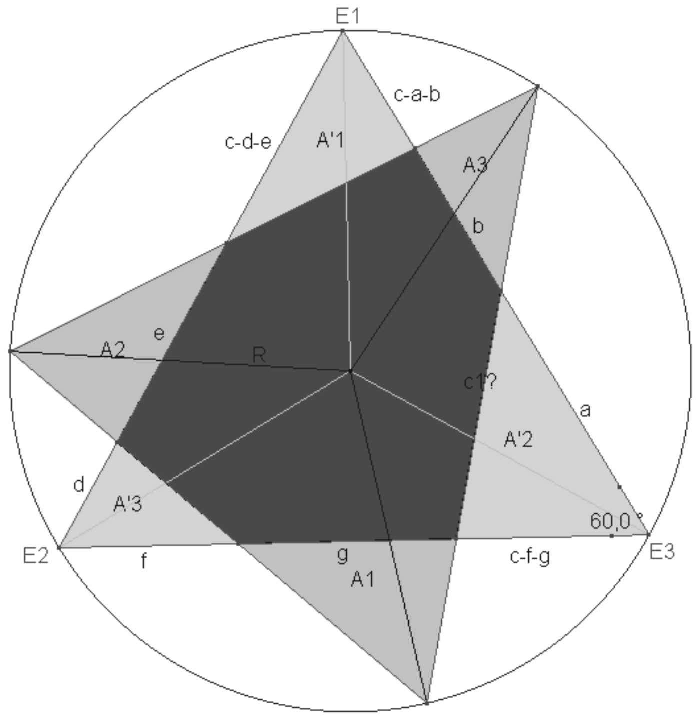
Párrafo nº	1-11	12-13	14	15	16	17-22	23	24	25-27
Asc / Desc	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑

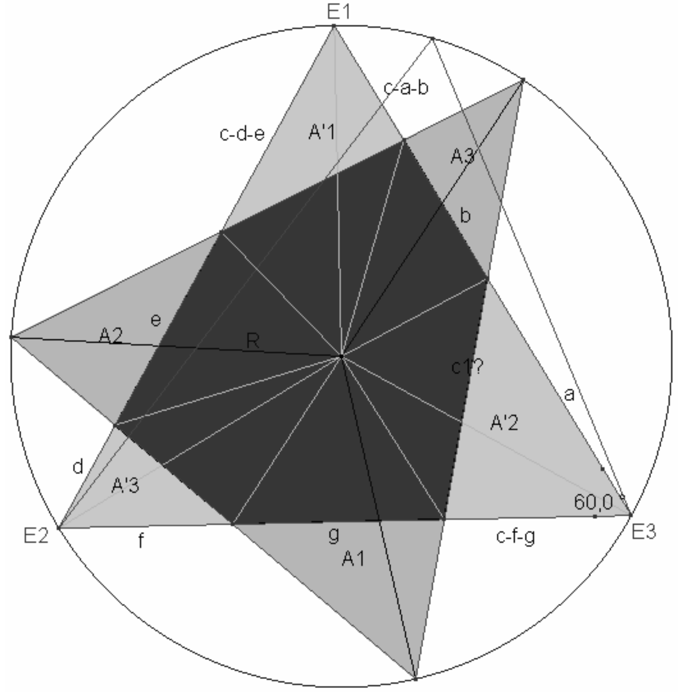
7.1.4. Ejemplo de demostración de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa en C.

Problema C 05. Hallar el triángulo de área máxima inscrito en una circunferencia dada.

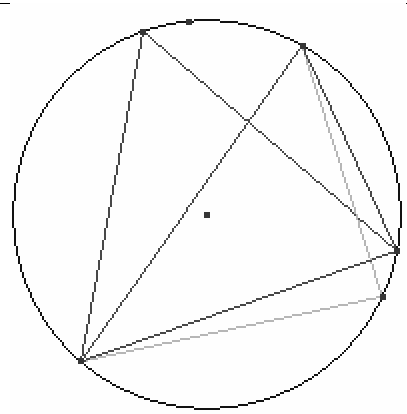
Resolución de la pareja 01.

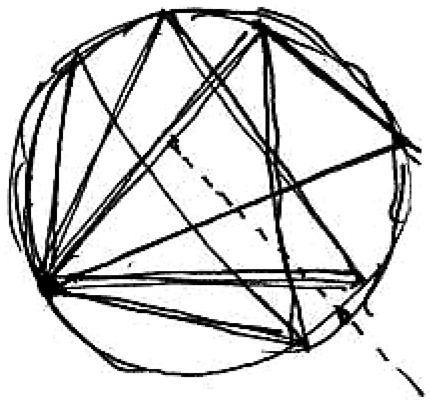
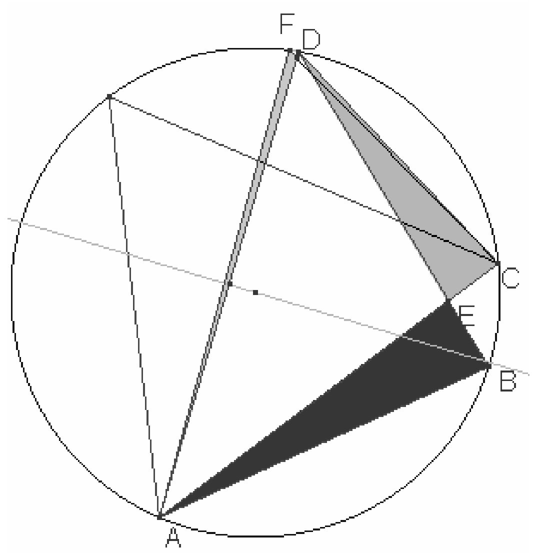
Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
1	Construcción: (Fig. 1) Circunferencia de radio *r*. Triángulo inscrito.		 *(se01 nº 34)*
2	“Si queremos maximizar el área del triángulo tenemos que maximizar el producto $b \cdot h$ donde $b \leq 2r;\;\; h < 2r;$ y $b \cdot h \leq 2 \cdot \pi \cdot r^2$ ”		
3	“¿Podríamos encontrar qué relación hay entre la base y la altura de un triángulo inscrito en una circunferencia?”		
4	“Comprobamos que si movemos el vértice opuesto al lado que nosotros tomamos como base, vemos que no se conservan las áreas.”	*Herramienta área aplicada sobre el triángulo. Mueven el triángulo y observan cómo varía el área.* *Comprobación inductiva-dinámica*	
5	“Si tenemos un equilátero, nosotros pensamos que el área será la máxima.” “¿Podríamos ver que todo otro triángulo distinto tiene un área menor?”		

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
6	Construcción: Triángulo equilátero inscrito. Triángulo inscrito no equilátero. A1, A2 y A3 triángulos que forman parte del no-equilátero pero no pertenecen al equilátero. B1, B2 y B3 triángulos que forman parte del equilátero pero no pertenecen al no-equilátero.	*B1, B2 y B3 aparecen en el auto-protocolo y en las figuras como A'1, A'2 y A'3. Por comodidad he cambiado la nomenclatura.*	 *(se02 nº 01)*
7	"Queremos ver que A1+A2+A3 < B1+B2+B3 para cualquier triángulo, donde A1+A2+A3 es el área del triángulo cualquiera menos el área del triángulo equilátero."	*Es incorrecto o está mal expresado. A1+A2+A3 es el área del triángulo cualquiera que no es común a los dos triángulos.*	
8	"Yo creo que es una locura ver relaciones de áreas con un triángulo cualquiera porque no tenemos ningún dato para poder calcular el área."	*De nuevo en esta pareja hay desacuerdo entre los miembros. Y como siempre, prevalece la opinión del mismo.*	
9	"Tiene que haber una relación entre el área del triángulo y el radio de la circunferencia ($A = a \cdot b \cdot c / 4r$) pero tampoco nos sirve, porque maximizar un área teniendo 3 incógnitas (a, b, c) es muy difícil."		

<table>
<tr><th>Párrafo</th><th>Descripción</th><th>Comentarios del Investigador</th><th>Figuras</th></tr>
<tr><td>10</td><td>“Otra manera que se nos ha ocurrido es: Podemos calcular el área del triángulo rectángulo dependiendo del radio de la circunferencia, por el teorema del coseno.”
“De la misma forma podríamos encontrar el lado de cualquier triángulo. Entonces el ángulo dónde aplicamos el coseno sería para cada lado: α, β y 180-α-β. Pero entonces tendríamos que minimizar dependiendo de 2 parámetros (una superficie).”</td><td></td><td rowspan="3">


(se02 nº 21)</td></tr>
<tr><td>11-13</td><td>“Hemos decidido calcular los lados de los triángulos A1, A2, A3, B1, B2 y B3.”
“Podemos aplicar el teorema del coseno para todos los triángulos, pero nos saldría un sistema muy grande con muchas incógnitas. Buscamos otro método.”</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>La docente les comenta que también pueden pensarlo como minimizar el área del círculo menos el triángulo.
“Pero no lo haremos por aquí.”</td><td>Actuación externa con función de guía.</td></tr>
</table>

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
15	Construcción (Fig. 3) Reconstrucción de la figura.		
16	"Si [los dos triángulos] comparten un lado está claro que el área del equilátero será mayor que la del otro porque el equilátero tiene altura máxima." "Miramos de estudiarlo en el caso en que los dos triángulos, el equilátero y el otro, comparten un vértice."	*Habría que justificar un poco más esta afirmación.*	*(se02 nº 48)*

Párrafo	Descripción	Comentarios del Investigador	Figuras
17	"Haremos una demostración constructiva." "Dado un triángulo equilátero cualquiera construido sobre un vértice del triángulo equilátero (Fig. 4) [Sobre papel]. Pueden pasar 3 casos (vistos en la figura 4)." Caso iii (Fig. 5) "Marcamos la mediatriz de AB, la altura máxima sobre esta base será del punto medio a la intersección con la circunferencia." "Consideramos el triángulo ADC con la misma base que el triángulo equilátero." FIN	*No dicen qué 3 casos pueden darse. Por la figura 4 puedo conjeturar que, sobre el ángulo que forman los lados del vértice en común, los 3 casos son:* *i) que el ángulo del triángulo equilátero contenga el ángulo del otro triángulo;* *ii) que el ángulo del triángulo cualquiera contenga el ángulo del equilátero; iii) ninguno de los ángulos contiene al otro.* *No dio tiempo para más.*	  *(se03 nº 70)*

Observaciones:

- Transforman el problema original en otros equivalentes e incluso utilizan varias estrategias (como la demostración constructiva) para intentar demostrarlos.
- El trabajo realizado con los ejemplos marca la estructura de la demostración.

Categoría: Demostración de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa.

Demostración inacabada pero con camino establecido, aunque en estado medio.

Fases ascendentes y descendentes:

Párrafo nº	1	2	3-6	7	8-9	10	11-13	14	15	16-17	17
Asc / Desc	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑

7.2. Fases ascendentes y descendentes en las respuestas de los estudiantes.

Del mismo modo que mostramos en el apartado anterior diferentes categorías de demostración en las resoluciones de los estudiantes, en este apartado mostramos distintas secuencias de fases ascendentes y descendentes que hemos hallado en dichas resoluciones. Para ello utilizamos los mismos ejemplos incluidos en el apartado anterior, pero centrando la atención en la secuencia de fases.

En las respuestas de los estudiantes hemos encontrado dos tipos de secuencias de fases: i) secuencias formadas sólo por fases ascendentes y ii) secuencias formadas por fases ascendentes y descendentes alternadas.

El primer tipo, secuencia de fases ascendentes, es típico de demostraciones de convicción propia empírica, donde no hay argumento de tipo deductivo y, por tanto, no existen fases descendentes. Podemos hallar dos ejemplos, uno de LP y otro de C, en las resoluciones por las parejas 03 y 02 de los problemas LP 05 y C 03, respectivamente.

Fases del problema LP 05 por la pareja 03:

Párrafo nº	1-8	9-10	11-12
Asc / Desc	↑	↑	↑

Fases del problema C 03 por la pareja 02:

Párrafo nº	1-8	9-11	12-13	14-23	24-26
Asc / Desc	↑	↑	↑	↑	↑

El segundo tipo, secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas, es habitual encontrarlo en demostraciones de convicción propia deductiva. Las fases ascendentes denotan una exploración de las figuras, elaboración de conjeturas y, en ocasiones, corroboración o refutación empírica de dichas conjeturas. Las fases descendentes se corresponden con argumentos deductivos para justificar la veracidad o falsedad de las conjeturas, generalmente elaboradas en las fases ascendentes. Las resoluciones por las parejas 02 y 01 de los problemas LP 07 y C 05, respectivamente, son ejemplos de este tipo de secuencia de fases:

Fases del problema LP07 por la pareja 02:

Párrafo nº	1-11	12-13	14	15	16	17-22	23	24	25-27
Asc / Desc	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑

Fases del problema C 05 por la pareja 01:

Párrafo nº	1	2	3-6	7	8-9	10	11-13	14	15	16-17	17
Asc / Desc	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑

La siguiente tabla sintetiza el tipo de secuencia de fases al que corresponde cada resolución de todos los problemas realizados por cada una de las parejas:

Pareja	Problema								
	LP05	LP06	LP07	LP09	C03	C04	C05	C06	C07
01	II	II	II	II	II	II	II	II	II
02	I*	II	II	II	I	II	II	II	II
03	I	II	II	II	II	II	II	II	II
04	I*	II	II	II	II	II	II	II	II

I = Secuencia de fases ascendentes

II = Secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas.

* Aunque es catalogada como secuencia de fases ascendentes, aparece alguna fase descendente. En un caso la aparición de fases descendentes está motivada por la actuación externa de la docente y en el otro porque existe un pequeño razonamiento deductivo dentro de la secuencia de comprobaciones empíricas.

7.3. Tablas-resumen de los resultados por parejas

En este apartado, para facilitar una visión global, hemos resumido en tablas los resultados de los análisis de las resoluciones de los problemas planteados. Cada tabla pertenece a una pareja de alumnos diferente. La primera columna de las tablas indica el entorno en el que debía resolverse el problema (LP o C), la segunda columna corresponde al número de problema, la tercera describe la categoría de demostración en la que hemos incluido la resolución del problema, la cuarta el estado en el que se ha quedado la resolución y, por último, la quinta incluye una tabla con la secuencia de fases que los alumnos han realizado al intentar resolver el problema. Para que pueda entenderse la codificación empleada en las tablas, incluimos la siguiente leyenda, que corresponde a los códigos que aparecen en la columna “Estados”.

I = inacabada X = algún apartado o caso terminado F = finalizada	Ep = estado primario Em = estado medio Ea = estado avanzado	Sc = sin camino determinado a seguir Cc = con camino establecido

Pareja 01

<table>
<tr><th>Bloque</th><th>Problema</th><th>Categoría</th><th>Estados</th><th>Fases</th></tr>
<tr><td rowspan="4">LP</td><td>LP05</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Ea</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-12</td><td>13-14</td><td>15-17</td><td>18-23</td><td>24-26</td><td>27-28</td><td>29-32</td><td>33-34</td><td>35</td><td>36</td><td>37-39</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-5</td><td>6</td><td>7-16</td><td>17</td><td>18-24</td><td>25-28</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1</td><td>2</td><td>3-6</td><td>7</td><td>8-10</td><td>11-12</td><td>13-14</td><td>15</td><td>16-17</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP09</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Ea</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-3</td><td>4-9</td><td>10-11</td><td>12-15</td><td>16</td><td>17-26</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="5">C</td><td>C03</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-3</td><td>3-4</td><td>5-6</td><td>6</td><td>7</td><td>8-9</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C04</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-3</td><td>4-5</td><td>6-25</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C05</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Cc Em</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1</td><td>2</td><td>3-6</td><td>7</td><td>8-9</td><td>10</td><td>11-13</td><td>14</td><td>15</td><td>16-17</td><td>17</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-2</td><td>3</td><td>4-6</td><td>7</td><td>8-9</td><td>10-11</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Cc Em</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-3</td><td>4-5</td><td>6</td><td>6-8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
</table>

Observaciones:

- Todas las demostraciones, tanto de LP como de C, están catalogadas como de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa.
- Hay tres problemas, uno de LP y dos de C, con la demostración de un subcaso o un apartado finalizada.

- No se observan diferencias entre las secuencias de fases de los problemas de LP y los de C.

Pareja 02

<table>
<tr><th>Bloque</th><th>Problema</th><th>Categoría</th><th>Estados</th><th>Fases</th></tr>
<tr><td rowspan="4">LP</td><td>LP05</td><td>Inductiva de Ejemplo Genérico con Inferencia</td><td>I Ea</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-20</td><td>21-22</td><td>23-24</td><td>25-27</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-17</td><td>17</td><td>18-19</td><td>20</td><td>21-24</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-11</td><td>12-13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17-22</td><td>23</td><td>24</td><td>25-27</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP09</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Em</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>5-8</td><td>9</td><td>10-16</td><td>17</td><td>18-21</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="5">C</td><td>C03</td><td>Inductiva de Ejemplo Genérico con Inferencia</td><td>I Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-8</td><td>9-11</td><td>12-13</td><td>14-23</td><td>24-26</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↑</td><td>↑</td><td>↑</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C04</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Cc Ep</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-12</td><td>13</td><td>14-18</td><td>19</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C05</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-10</td><td>11-17</td><td>18</td><td>18</td><td>19</td><td>20-24</td><td>25-26</td><td>27-30</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>5</td><td>6-12</td><td>13-16</td><td>17-23</td><td>24-27</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-7</td><td>8-9</td><td>10-14</td><td>14</td><td>15-19</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
</table>

Observaciones:

- Las demostraciones, tanto de LP como de C, están catalogadas como de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa, salvo las primeras de cada bloque que son de convicción propia empíricas inductivas de ejemplo genérico con inferencia.

- Hay cuatro problemas, uno de LP y tres de C, con la demostración de un subcaso o un apartado finalizada.
- No se observan diferencias entre las secuencias de fases de los problemas de LP y los de C.

Pareja 03

<table>
<tr><th>Bloque</th><th>Problema</th><th>Categoría</th><th>Estados</th><th>Fases</th></tr>
<tr><td rowspan="4">LP</td><td>LP05</td><td>Perceptiva de Empirismo Naïf con Inferencia</td><td>F</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-8</td><td>9-10</td><td>11-12</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↑</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Ea</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-12</td><td>13-14</td><td>15-16</td><td>17</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-2</td><td>3-4</td><td>5-6</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP09</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Em Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>5-14</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="5">C</td><td>C03</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-8</td><td>9</td><td>10</td><td>10-11</td><td>12</td><td>12</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C04</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Em Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-5</td><td>6-7</td><td>8-10</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C05</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>5</td><td>6-9</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-5</td><td>6</td><td>7-8</td><td>9-12</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1</td><td>2-4</td><td>5</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
</table>

Observaciones:

- Las demostraciones, tanto de LP como de C, están catalogadas como de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa, salvo la primera de LP que es de convicción propia empírica inductiva de empirismo naïf con inferencia.
- Hay un problema, el primero de LP, con la demostración finalizada (empírica).

- Hay cinco problemas, uno de LP y cuatro de C, con la demostración de un subcaso o un apartado finalizada.
- No se observan diferencias entre las secuencias de fases de los problemas de LP y los de C.

Pareja 04

<table>
<tr><th>Bloque</th><th>Problema</th><th>Categoría</th><th>Estados</th><th>Fases</th></tr>
<tr><td rowspan="4">LP</td><td>LP05</td><td>Perceptiva de Empirismo Naïf con Inferencia</td><td>I Em</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-8</td><td>8</td><td>9-27</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-7</td><td>8-9</td><td>10-13</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>5</td><td>6</td><td>6-8</td><td>9</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>LP09</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Em Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-3</td><td>3-5</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="5">C</td><td>C03</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Em Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-8</td><td>9</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C04</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>I Ep Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-8</td><td>8</td><td>9-13</td><td>14</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C05</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Em Cc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-5</td><td>6</td><td>7-11</td><td>11-12</td><td>12</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C06</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>5</td><td>6-7</td><td>8</td><td>8-10</td><td>11</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>C07</td><td>Experimento Mental Transformativa</td><td>X Sc</td><td><table><tr><td>Párrafo</td><td>1-4</td><td>4</td><td>5-6</td><td>6-8</td></tr><tr><td>Fase</td><td>↑</td><td>↓</td><td>↑</td><td>↓</td></tr></table></td></tr>
</table>

Observaciones:

- Las demostraciones, tanto de LP como de C, están catalogadas como de convicción propia deductiva de experimento mental transformativa, salvo la primera de LP que es de convicción propia empírica inductiva de empirismo naïf con inferencia.
- Hay cuatro problemas, uno de LP y tres de C, con la demostración de un subcaso o un apartado finalizada.

- No se observan diferencias entre las secuencias de fases de los problemas de LP y los de C.

7.4. Complementariedad de los tipos de datos analizados.

Ya hemos comentado en el capítulo anterior que una de las novedades de esta investigación es la elaboración de una trascripción-resumen de las resoluciones que integra la información obtenida en los diversos tipos de datos recogidos durante la fase experimental: auto-protocolos, hojas de figuras en papel, ficheros de Cabri, registros de sesión de Cabri y notas de campo. El objetivo que perseguimos en este apartado es mostrar cómo las informaciones contenidas en estos tipos de datos se complementan de tal forma que, en ocasiones, una determinada información aparece exclusivamente en un tipo de dato. Dado que el resto de tipos de datos son utilizados para el análisis de los resultados en muchos de los estudios que utilizan Cabri para la resolución de problemas, pondremos especial énfasis en la complementariedad de la información aportada por el auto-protocolo.

A la vista de los análisis realizados en los apartados anteriores, queda probada la utilidad de los auto-protocolos como fuente de información sobre la actividad de los estudiantes, pues habríamos perdido una elevada cantidad de datos si hubiéramos tenido que hacer las transcripciones-resumen de las resoluciones, y sus correspondientes análisis didácticos, basándonos en unas resoluciones "tradicionales" de los problemas, sin la información contenida en los auto-protocolos, ya que éstos informan sobre la actividad de los estudiantes descrita y comentada por ellos mismos, cosa que una pura resolución formal de los problemas no hace. Uno de los objetivos que perseguimos con los auto-protocolos es que el alumno no entregue sólo la demostración final pasada a limpio sin aportar información sobre las conjeturas elaboradas, la forma de corroborarlas/refutarlas o las ideas descartadas. Destacamos que, por ejemplo, sin dicha información es difícil realizar un estudio detallado de las fases ascendentes y descendentes de la resolución del problema. A continuación exponemos unos ejemplos seleccionados que muestran que, en este aspecto, nuestras expectativas iniciales se han cumplido:

Resolución del problema C04 por la pareja 02, párrafo 10:

> *"Pensamos que podríamos aplicar el teorema de Ceva con d1, d2 y d3, pero después vemos que no son cevianas, ya que no tienen porqué pasar por un vértice del triángulo."*

Escriben en el auto-protocolo una idea que luego se dan cuenta que no pueden aplicar. Esto no aparecería en una descripción "tradicional" de la resolución del problema.

Resolución del problema C06 por la pareja 01, párrafo 10:

> *"Antes habíamos pensado ver que el arco que describe el ángulo BM'A y el que describe el ángulo BOA suman la circunferencia entera, pero no lo podemos utilizar porque no sabemos si O pertenece a la circunferencia. Por eso lo hacemos de la otra manera."*

Aparece en el auto-protocolo una idea que más tarde descartan, cosa que no se haría en una descripción "tradicional".

Resolución del problema C05 por la pareja 04, párrafo 10:

> *"Vamos a calcular en el dibujo los ángulos para relacionarlos con la fórmula del sector."*
> *"Abandonamos."*

Aparece una idea que comienzan a desarrollar pero luego, sin explicar los motivos, abandonan.

En otros casos es el resto de tipos de datos los que aportan información que, por algún motivo, no aparece en los auto-protocolos. Por ejemplo, en la trascripción-resumen de la resolución del problema C03 por la pareja 01, hemos añadido entre los párrafos 1-2 y el párrafo 3 un párrafo, numerado como 2.5, que incluye información sobre unas construcciones y unas comprobaciones dinámicas que no aparece en el auto-protocolo pero que advertimos tanto al revisar la construcción del fichero de Cabri como en el registro de sesión del programa. En este nuevo párrafo de la trascripción describimos la construcción de un triángulo, un cuadrilátero, la utilización de la herramienta Área para medir dichas figuras y unos arrastres guiados con el objetivo de hacer coincidir las áreas. Estos pasos no aparecerían en caso de analizar únicamente la información contenida en los auto-protocolos.

Es fácil observar en los análisis de las resoluciones que en muchas ocasiones la información que aportan los diferentes tipos de datos es redundante. Aunque en principio pueda parecer que esto supone un exceso de información innecesaria, en algunos casos dicha redundancia es útil para poder estar seguros de lo que se realizó en un momento determinado de la resolución, corroborando hechos observados que, de otro modo, sólo serían conjeturas del investigador sobre lo que cree que hicieron o pensaron los estudiantes. A continuación exponemos unos cuantos ejemplos en los que se amplía una información existente en el auto-protocolo mediante los otros tipos de datos:

Resolución del problema C03 por la pareja 02, párrafo 8:

> *"Al mover la recta d va cambiando la cantidad de área, pero también se nos mueven los polígonos. No vamos bien."*

La expresión "*…se nos mueven los polígonos*" no se entiende en este contexto. Necesitamos más información para poder aclarar lo que querían decir. Revisando el registro de sesión de Cabri podemos observar que se refieren a que, al mover una recta a ciertas posiciones, los polígonos dejan de estar sobre el triángulo.

Resolución del problema C04 por la pareja 04, párrafo 2:

> *"Hacemos la construcción en Cabri para más precisión y comprobamos que sí son concurrentes."*

En el auto-protocolo dejan constancia de una comprobación de la concurrencia de unas rectas. Sin embargo, no explican cómo realizan esa comprobación. Si acudimos al registro de sesión de Cabri podemos observar como mueven los elementos de la construcción para, presumiblemente, comprobar que las rectas siguen siendo concurrentes. Por tanto, con esta nueva información podemos afirmar que se trata de una comprobación perceptiva-dinámica.

Resolución del problema C05 por la pareja 04, párrafo 1:

> *"Intentamos observar cómo será el triángulo [de área máxima]. A priori pensamos que la solución que queremos obtener será un triángulo equilátero."*

Afirman en el auto-protocolo que tienen la sospecha de que el triángulo de área máxima inscrito en una circunferencia es equilátero. Al revisar el registro de sesión de Cabri puede observarse que utilizan la herramienta Área y mueven los vértices del triángulo inscrito buscando área máxima. La información del registro de sesión complementa la información del auto-protocolo. Por tanto, podemos afirmar que la sospecha que tenían proviene de una comprobación inductiva-dinámica en Cabri.

Más adelante, en el párrafo 5 escriben:

> *"Dibujamos un triángulo equilátero y hemos observado que parece que realmente es el de área máxima."*

En este caso, si acudimos al registro de sesión de Cabri, observamos que dibujan un triángulo cualquiera y un triángulo equilátero, miden sus áreas y comparan. Por tanto, la información aportada por el registro de sesión corrobora, y amplía, la información aportada por el auto-protocolo.

Además de los datos referentes a la resolución del problema, en algunos casos es posible encontrar en el auto-protocolo información acerca de cuestiones relacionadas con otros temas como, por ejemplo, interacciones con otras personas o elementos del entorno. Así, en numerosas ocasiones los auto-protocolos hacen referencia a la intervención de la docente o el investigador con el fin de guiarles en las resoluciones o aclarar sus dudas. Otros ejemplos de esto son los siguientes:

Resolución del problema C04 por la pareja 02, párrafo 14:

"*Intercambiamos opiniones con F [otra pareja de estudiantes (G03)] para ver cómo lo hacemos (cada 1).*"

Resolución del problema C04 por la pareja 03, párrafo 8:

"He comentado con los vecinos (G02) mi idea y ellos han comentado la suya conmigo."

Aparecen en los auto-protocolos referencias a una interacción entre los miembros de parejas distintas. Aunque dimos la directriz de que no hubiera comunicación entre parejas distintas, en este caso rompieron la norma aunque dejaron constancia de ello. Además, aparecen referencias de esto en los auto-protocolos de ambas parejas.

Resolución del problema LP09 por la pareja 02, párrafo 9:

"Cogemos un libro que hay por clase y justamente tiene un pentágono."

Describen en el auto-protocolo una interacción con un elemento del entorno: un libro.

Resolución del problema LP07 por la pareja 02, párrafo 2:

"Dibujamos el triángulo ABC con una falsilla donde también están señaladas las alturas, medianas, bisectrices y mediatrices"

Describen en el auto-protocolo una interacción con un elemento del entorno: una plantilla para dibujar de forma rápida un triángulo y sus rectas notables. En una descripción "tradicional" de la resolución no se suele indicar este tipo de cosas.

Resolución del problema C05 por la pareja 04, párrafos 8-9:

"*Buscamos en Internet cómo es el área de un sector circular ya que se nos ha ocurrido que la circunferencia no cambia. Por tanto, podemos encontrar el área del triángulo restando al área de la circunferencia los sectores circulares.*"

Describen en el auto-protocolo una interacción con un elemento del entorno: Internet.

Resolución del problema C04 por la pareja 01, párrafo 11:

"M [un miembro de la pareja 04] nos ha preguntado cómo funciona Cabri para encontrar el lugar geométrico."

Describen en el auto-protocolo una interacción con un miembro de otra pareja. En este caso, no encontramos la referencia en el auto-protocolo de la otra pareja implicada.

Mención aparte merece un aspecto de los auto-protocolos de la pareja 01. Durante las clases podíamos observar claramente que esta pareja rara vez trabajaba en equipo. Uno de los miembros era poco colaborador y su objetivo principal era acabar los problemas antes que el resto, por encima del trabajo en equipo con su compañera. Este hecho quedó registrado en las notas de campo del investigador. Los siguientes fragmentos muestran que los auto-protocolos también recogen evidencias de este hecho:

Resolución del problema LP09 por la pareja 01:

Párrafo 7:

"*Lo ha hecho sumando ángulos internos de P y de triángulos. (No sé como lo ha hecho)*"

Párrafo 14:

"*Hace cuentas pero no sé muy bien qué hace.*"

Uno de los miembros afirma en el auto-protocolo que no está al corriente de lo que el otro miembro hace. Esto demuestra que esta pareja no trabaja en equipo, que uno de los miembros trabaja de forma individual y que el otro ha querido dejar constancia de este hecho.

No obstante, aunque este miembro no hubiera querido dejar constancia del hecho, que por otra parte ya había sido advertido por el investigador, podemos encontrar otro tipo de frases en los auto-protocolos que indican que algo sucede en la forma de trabajar de esta pareja. Un indicio claro son las oraciones en tercera persona del singular, que son numerosas en los auto-protocolos: "*Ha visto que se ha equivocado al calcular R*" (LP09 párrafo 7), "*ha cogido un triángulo […] y ha calculado […]*" (LP09 párrafos 8-9), "*Hace rallas y no tiene muy claro qué hace.*" (LP05 párrafos 24-25)…

8. COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

El tema central de nuestra investigación es analizar los procesos de demostración que realizan alumnos de la Licenciatura en Matemáticas al resolver problemas de demostrar en un entorno convencional de Lápiz y Papel y en un entorno de Software de Geometría Dinámica, concretamente Cabri. A modo de resumen, diremos que los primeros objetivos de nuestro estudio son identificar las categorías de demostración y las secuencias de fases ascendentes y descendentes presentes en las resoluciones de los estudiantes. Una vez identificadas las categorías y secuencias de fases, otro objetivo marcado es analizar los resultados en busca de diferencias entre las resoluciones pertenecientes al entorno LP y las del entorno C.

Tras la revisión bibliográfica de algunas de las investigaciones relacionadas con el tema, elaboramos una clasificación para las categorías de la demostración y tomamos una definición de fase ascendente y descendente que constituyen los fundamentos teóricos de nuestra investigación. Al revisar la bibliografía confirmamos que hay numerosas investigaciones que tratan este tema con alumnos de enseñanza secundaria pero que son escasos, inexistentes en algunos aspectos, los estudios con alumnos universitarios que poseen ciertas destrezas para la demostración, como alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura en Matemáticas. Así pues, hacemos explícito otro objetivo que es aportar información sobre este tema en el ámbito de los estudios universitarios de Matemáticas.

Después de explicar el contexto en el que llevamos a cabo la fase experimental del estudio, describimos los aspectos más relevantes de la parte metodológica. Además de los tipos de datos que usualmente son recogidos en este tipo de investigaciones, introducimos una nueva herramienta metodológica para la obtención de datos, que denominamos auto-protocolo, que aplicamos en nuestra investigación de forma experimental. Una labor de conjunción de la información contenida en los diferentes tipos de datos recogidos nos permite realizar un análisis de los resultados desde la perspectiva planteada desde un principio y elaborar las siguientes conclusiones:

1. En problemas de demostrar de geometría euclídea, salvo muy pocas excepciones, los estudiantes de la experiencia, alumnos de la licenciatura en Matemáticas, han realizado demostraciones deductivas del tipo experimento mental transformativo, independientemente del entorno de resolución (LP o C).

2. En los aspectos analizados, y en el nivel educativo estudiado, no hemos hallado evidencias de que existan diferencias significativas entre las resoluciones del entorno LP y las del entorno C.

3. Las categorizaciones de la demostración propuestas y el estudio de fases nos han permitido hacer un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes a problemas de demostrar en ambos entornos, LP y C, pero no han mostrado que existan diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar con alumnos de este nivel entre ambos entornos, ya que todas quedan etiquetadas en la misma categoría y no hay diferencias evidentes en las secuencias de fases.

4. El auto-protocolo ha resultado ser una herramienta metodológica útil para obtener información acerca de la actividad de los estudiantes durante la resolución de problemas que, en unos casos, no aparece en la información que obtenemos a través de otros tipos de datos y, en otros, la complementa.

Sin intención de dar carácter general a las conclusiones de nuestro estudio, al revisarlas inducen al establecimiento de una hipótesis de trabajo para futuras investigaciones: el software de geometría dinámica no influye en la categoría de demostración ni en la secuencia de fases realizadas por alumnos que han finalizado la transición hacia las demostraciones deductivas. Por consiguiente, y a diferencia de lo que algunas publicaciones informan sobre alumnos de enseñanza secundaria, la utilización de Cabri parece que no hace que los alumnos de la licenciatura en Matemáticas muestren menos necesidad de realizar demostraciones deductivas para justificar los resultados.

Como en los aspectos analizados no hemos hallado diferencias entre las resoluciones de ambos entornos, es necesario ampliar el análisis a otros aspectos, además de las categorías de demostración y las secuencias de fases. Igualmente, en futuros estudios deben tenerse en cuenta las limitaciones de esta investigación con el objetivo de fortalecer sus puntos débiles:

- El auto-protocolo ha dado buenos resultados como herramienta metodológica experimental, no obstante hay que depurarlo y determinar los contextos en los que es útil aplicarlo.
- Se debe realizar un análisis más profundo de los procesos de exploración-conjetura-demostración. Identificar las fases ascendentes y descendentes es insuficientes para una descripción detallada de los procesos seguidos en la resolución de un problema de demostrar. Puede resultar conveniente combinar estas fases con otros conceptos como, por ejemplo, la abducción descrita en Olivero (1999).
- Tal y como afirmamos en la conclusión 2, no hemos hallado evidencias de que existan diferencias significativas entre las resoluciones del entorno LP y las del entorno C. Esta conclusión surge de la comparación de los resultados obtenidos en el entorno LP con los obtenidos en el entorno C. En el caso de las categorías de demostración, en nuestro estudio, el resultado de la comparación es obvio ya que casi la totalidad de las resoluciones quedan descritas como deductivas de experimento mental transformativas. La comparación no es tan sencilla si hablamos de secuencias de fases. Si clasificamos las secuencias de fases en tipos, como hacemos en el apartado 7.2, resulta que casi la totalidad de las resoluciones quedan catalogadas por un mismo tipo (secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas). Sin embargo, esa clasificación en dos tipos es muy simple. Es necesario, junto con la sugerencia del punto anterior, disponer de un método o una herramienta para poder comparar las secuencias de fases de dos resoluciones. Sin unos criterios específicos establecidos, la comparación queda reducida a una visión simplista de las fases o a una apreciación subjetiva del investigador.

A modo de comentario final, esperamos que nuestro estudio arroje un poquito de luz sobre aspectos insuficientemente investigados y, sobre todo, abra el camino a nuevas líneas de investigación.

9. BIBLIOGRAFÍA

9.1. Referencias.

Almeida, D. (1996): Proof in undergraduate mathematics in the UK: a case of bridging from the informal to the formal? En M. de Villiers y F. Furinghetti (Eds.), *Proceedings of the Topic Group 8 “Proofs and proving: why, when and how?”* (p. 86-93).

Almeida, D. (2000): A survey of mathematics undergraduates’ interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.

Arzarello, F. y otros (1998): A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, 24-31.

Arzarello F. y otros (2002): A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt dur Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). Hodder & Stoughton: Londres.

Bell, A.W. (1976): A study of pupils’ proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.

Gallo, E. (1994): Control and solution of “algebraic problems”. *Rendiconti del Seminario matematico dell’Università e del Politecnico di Torino*, 52(3), 263-278.

Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000): The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127-150.

Hanna, G. (2000): Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Harel, G. y Sowder, L. (1998): Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (p. 234-283). American Mathematical Society: Providence, EE.UU.

Healy, L. y Hoyles, C. (2001): Software tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235-256.

Ibañes, M.J. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Jones, K. (2000): Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85.

Laborde, C. (2000): Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161.

Leung, A. y López-Real, F. (2002): Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: a case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 145-165.

Mariotti, M. A. y otros (1997): Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceedings of the 21 PME International Conference*, 1, 180-195.

Mariotti, M.A. (2000): Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.

Mariotti, M.A. (2001): Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 257-281.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Mogetta, C. (2001): Argumentative processes in problem solving situations: the mediation of tools. *Proceedings of the 25 PME International Conference*, 3, 375-382.

Olivero, F. (1999): Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *Proceedings of ICTMT4*.

Polya, G. (1981): *Mathematical Discovery*. John Wiley & Sons: N. York.

Puig, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. (Colección Mathema, 6). Comares: Granada.

9.2. Publicaciones derivadas de esta investigación.

Rodríguez, F.; Gutiérrez, A. (2006): Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 4, 433.