Prueba teórica 1

Trineo sobre hielo

Se ha construido un trineo de juguete de masa *m*, que se desliza por una superficie horizontal de hielo con un coeficiente de rozamiento cinético μ**.**

1.a Si su velocidad inicial es v_0, calcule el tiempo que tarda en pararse, la distancia recorrida, y la energía disipada en función de m, v_0, μ**,** y g. *[1 punto]*

1.b Dé los resultados numéricos para el caso m = 2,0 kg, v_0 = 4,0 m/s, μ = 0,070. *[1 punto]*

1.c Explique por qué μ es adimensional (basta un renglón para ello). *[1 punto]*

El trineo transporta un gran recipiente lleno de agua, con dos grifos cerrados, uno ***B*** en su base, y otro lateral ***L*** en su parte posterior, como indica la figura. Por sencillez, consideraremos que el trineo se desliza sin rozamiento (μ = 0), de modo que su velocidad de deslizamiento con los grifos cerrados permanece constante $v(t) = v_0$.

2.a Se abre ahora el grifo de la base ***B*,** por donde sale el agua por gravedad a un ritmo ρ constante, de modo que la masa total del trineo con el agua que contiene disminuye* como $m(t) = m - \rho t$. Demuestre que† la velocidad del trineo sigue siendo constante. *[3 puntos]*

2.b A continuación se cierra ***B*** y se abre ***L*,** por donde sale agua con el mismo ritmo ρ de antes a una velocidad horizontal v_a constante con respecto al recipiente. Aplique como antes el principio de conservación del momento para ver si el trineo se acelera y determine, en su caso, la aceleración en un instante t en función de ρ, v_a , y $m(t)$. *[4 puntos]*

Incluyamos de nuevo en nuestras consideraciones el coeficiente de rozamiento que habíamos despreciado antes, de modo que en todo este apartado **3** se tiene $\mu \neq 0$.

3 Teniendo en cuenta que una fuerza F actuando durante un pequeño intervalo de tiempo Δt cambia el momento en una cantidad $\Delta p = F\ \Delta t$, calcule la aceleración del trineo con los dos grifos cerrados, con sólo el grifo ***B*** abierto, y por último, con sólo el grifo ***L*** abierto. *[5 puntos]*

---

[*] Evidentemente, ρ es la masa de agua que sale por unidad de tiempo. Además, se consideran solo intervalos de tiempo tales que $t < (m/\rho)$.

[†] Se sugiere aplicar el principio de conservación del momento durante un pequeño intervalo de tiempo al conjunto *trineo→trineo + agua expulsada*.

T-1 Solución

1.a $v(t) = v_0 - \mu g t \Rightarrow t = v_0/(\mu g)$,

$$x(t) = v_0 t - (½) \mu g t^2 \Rightarrow x = v_0^2/(2 \mu g),$$

$$E = (½) m v_0^2$$

1.b t = 5,8 s, x = 12 m, E = 16 J

1.c Porque es un cociente entre dos fuerzas, que tienen la misma dimensión**.**

2.a $(m(t) + \rho \Delta t) v = m(t) (v + \Delta v) + \rho \Delta t \ v \Rightarrow \Delta v = 0.$

2.b $(m(t) + \rho \Delta t) v = m(t) (v + \Delta v) + \rho \Delta t \ (v - v_a) \Rightarrow$

$$(\Delta \mathbf{v}/\Delta t) = \rho v_a / m(t) = v/ ((m/\rho) - t).$$

3. A las consideraciones del apartado anterior hay que añadir la disminución de momento debida al rozamiento. Así, con el grifo ***B*** abierto se tiene:

$$(m(t) + \rho \Delta t) v - \mu m(t) g \Delta t = m(t) (v + \Delta v) + \rho \Delta t \ v \Rightarrow$$

$$(\Delta v/\Delta t) = - \mu g,$$

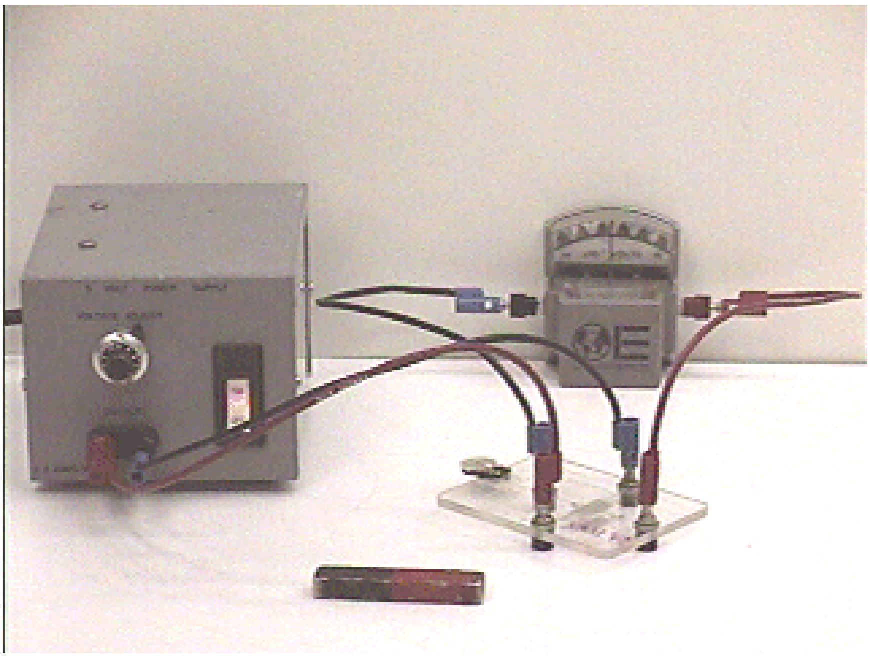
es decir, la aceleración es la misma esté ***B*** abierto o cerrado. Sin embargo, con el grifo ***L*** abierto:

$$(m(t) + \rho \Delta t) v - \mu m(t) g \Delta t = m(t) (v + \Delta v) + \rho \Delta t \ (v - v_a) \Rightarrow$$

$$(\Delta v/\Delta t) = (\rho v_a / m(t)) - \mu g.$$

PRUEBA TEÓRICA 2

Tarragona, 30 de marzo de 2001 (12,00 h.)



EFECTO HALL

Prueba Teórica 2 **Conducción, Inducción y Efecto Hall**

I) Corriente eléctrica en el interior de un conductor.

La corriente eléctrica es un desplazamiento colectivo de cargas. Se define la intensidad, I, como la carga, Q, que atraviesa la sección transversal del conductor por unidad de tiempo: $I = Q/t$.

Microscópicamente, la corriente se debe a que una gran cantidad de portadores de carga, de carga q cada uno (electrones o iones), se mueven con una cierta velocidad media, v. Es fácil demostrar que la corriente viene dada por $I = n\ q\ v\ A$, donde n es el número de *portadores* por unidad de volumen y A el área de la sección transversal del conductor.

1.a) Calcule la velocidad media de los portadores de carga (electrones) en un conductor de Cu de sección $A = 1\ \text{mm}^2$ por el que circula una intensidad $I = 2$ A**.** *[2 Puntos]*

Datos: ρ_{Cu} = 8,9·10^3 kg/m^3; Masa atómica del Cu = 63 g/mol; N_A = 6,022·10^{23} mol^{-1}.

Cada átomo de Cu aporta un electrón. e =1,60·10^{-19} C.

II) Inducción electromagnética.

Por otra parte, la ley de Faraday establece una relación entre la fuerza electromotriz, ε, (fem) inducida en un circuito cerrado y la variación temporal de flujo magnético, Φ, a través de la superficie limitada por dicho circuito.

El circuito de la Fig. 1 consiste en un alambre ABCD de resistencia despreciable doblado en forma de U (ver figura), por el que se mueve con velocidad constante, *V*, una varilla de longitud *L* y resistencia *R*. En la región existe un campo magnético uniforme, de intensidad *B*, perpendicular al plano del circuito.

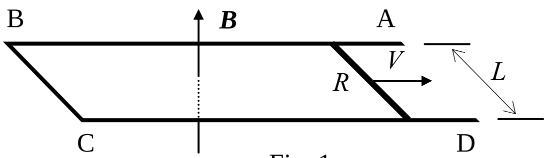


Fig. 1

2.a) Deduzca las expresiones de la fem inducida en el circuito, de la intensidad de la corriente que circula por él y de la potencia eléctrica disipada por efecto Joule. Así mismo indique justificadamente el sentido de la corriente inducida. *[3 Puntos]*

2.b) Para mantener uniforme la velocidad de la varilla, ¿con qué fuerza hay que actuar externamente sobre ella?. *[2 Puntos]*

III) Efecto Hall.

En la Fig. 2 se muestra una cinta conductora de anchura *L* y grosor *d*, por la que circula una corriente, *I*, en presencia de un campo magnético uniforme, *B*, perpendicular a la cinta.

3.a) Demuestre que entre los bordes de la cinta aparece una diferencia de potencial inducida $V_H = BI/nqd$ (Efecto Hall). *[2 Puntos]*

3.b) ¿Cómo puede deducirse el signo de la carga de los portadores a partir de la polaridad de V_H ? *[1 Punto]*

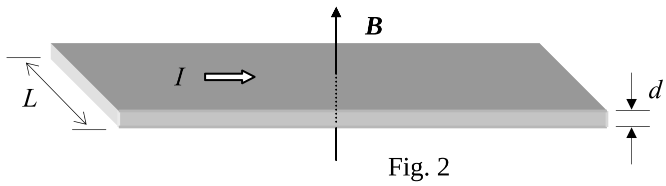


Fig. 2

T-2 Solución

1.a) $$v = \frac{I}{nqA}$$

$$n = \rho_{\mathrm{Cu}} \frac{N_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{Cu}}} = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}}{63 \cdot 10^{-3}} = 8{,}51 \cdot 10^{28} \text{ portadores/m}^3 \qquad \boxed{v = 1{,}47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}}$$

2.a) $$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}\,; \qquad \Phi = BLx\,; \qquad \frac{dx}{dt} = V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\Phi}{dt} = BLV$$

$$|\varepsilon| = BLV\,;$$

$$I = \frac{BLV}{R}$$ Sentido horario

Potencia disipada: $P_{\mathrm{dis}} = RI^2$

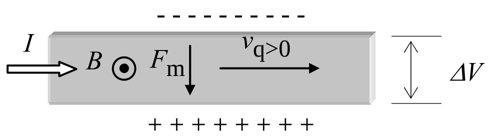
2.b) $$F_{\mathrm{m}} = ILB = \frac{B^2 L^2 v}{R}\,;$$ opuesta a $\vec{v}$

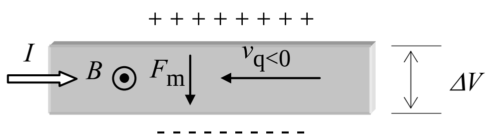
$$\vec{v} = \vec{cte} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{ext}} + \vec{F}_{\mathrm{m}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{\mathrm{ext}} = \frac{B^2 L^2 v}{R}}$$ Sentido de $\vec{v}$

3.a) Un elemento de grosor Δx equivale a la varilla del apartado anterior, con velocidad $V = v$ $\Rightarrow$

$$V_H = BLV = BL\frac{I}{nqA}\,; \qquad A = L\,d \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_H = \frac{BI}{nqd}}$$

3.b)





PRUEBA TEÓRICA 3

Tarragona, 30 de marzo de 2001 (13,00 h.)

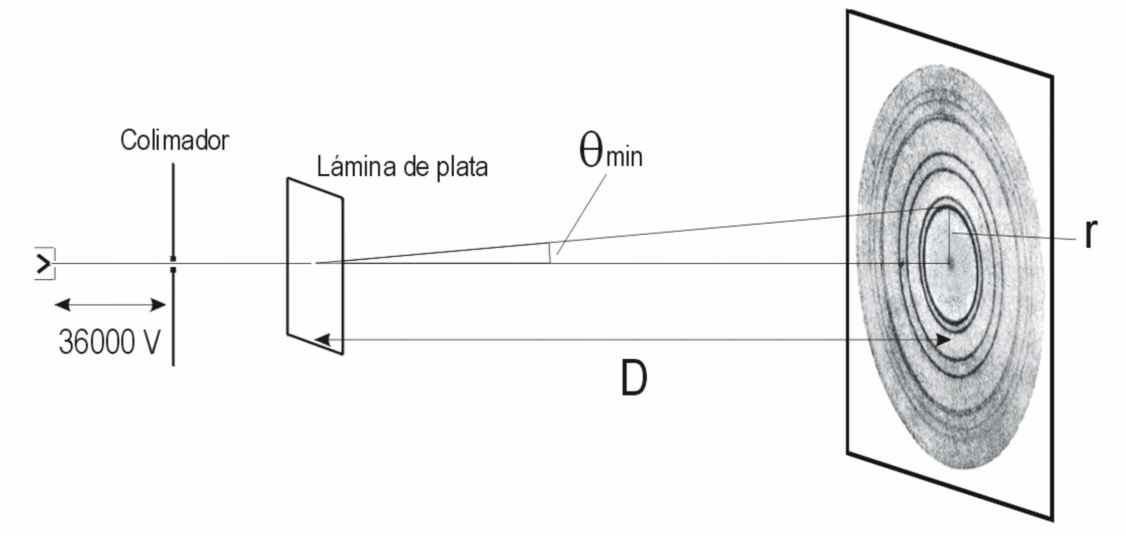
DUALIDAD ONDA-CORPÚSCULO

Prueba teórica 3

Dualidad onda-corpúsculo

En el año 1924 el físico francés Louis de Broglie introdujo una hipótesis revolucionaria, según la cual a toda partícula atómica podía asociársele una onda, cuya longitud de onda dependía de su masa y de su velocidad. Esto significaba que los electrones podían difractarse como lo hacen la luz o los rayos X.

En un experimento realizado por H. Mark y R. Wierl en 1931, se aceleraron electrones con una diferencia de potencial de ΔV = 3,6·10^4 V. Estos electrones, después de pasar a través de la ventana colimadora (ver Figura), atravesaban una lámina de plata y se difractaban dando lugar a círculos



concéntricos claros y obscuros (anillos de difracción) sobre una placa fotográfica.

Para una distancia entre la lámina y la placa fotográfica D = 30 cm, el radio del primer círculo obscuro observado era r = 7,0 mm.

La teoría de la difracción establece que el seno del ángulo de difracción θ_{min}, correspondiente al primer anillo oscuro, es proporcional a la longitud de onda λ de la onda difractada:

$$\text{sen}\ \theta_{\text{min}} = k\,\lambda,$$

donde el valor de la constante k para la lámina de plata empleada es $3{,}68 \cdot 10^{9}\ \text{m}^{-1}$.

1) Determine la longitud de onda de los electrones según este experimento. *[5 Puntos]*

2) Calcule la longitud de onda λ_B prevista para los electrones según la teoría de Broglie en este experimento y compárela con la obtenida en el apartado anterior. . *[5 Puntos]*

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C; $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$

T-3 Solución

1) $$-\ \lambda = \frac{\text{sen}\,\theta_{\text{min}}}{k} \approx \frac{\text{tg}\,\theta_{\text{min}}}{k} = \frac{r}{Dk} \qquad \boxed{\lambda = 6{,}34 \cdot 10^{-12}\ \text{m}}$$

2) $$\lambda_B = \frac{h}{p}$$

Cálculo clásico de p:

$$p = m_e v = m_e \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{2em_e\Delta V} \qquad \boxed{\lambda_B = 6{,}47 \cdot 10^{-12}\ \text{m}}$$

Discrepancia teoría-experimento: 2%

La velocidad de estos electrones es $v = \sqrt{\dfrac{2e\Delta V}{m_e}} = 1{,}12 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$, no despreciable frente a c.

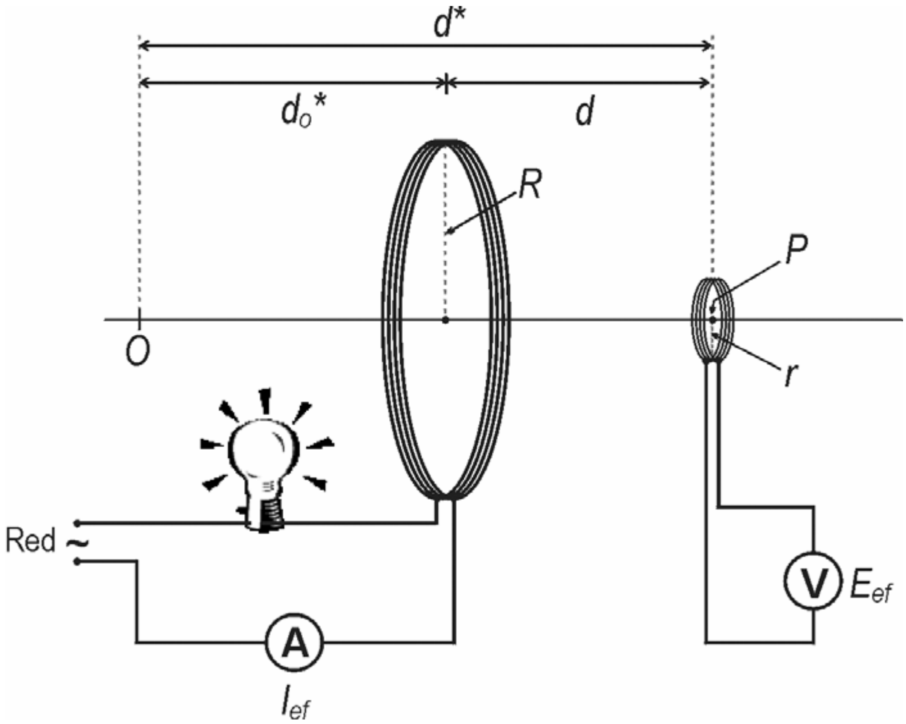
Cálculo relativista de p:

$$m_e c^2 + e\Delta V = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} \qquad \Rightarrow \qquad p = \sqrt{2em_e\Delta V + \left(\frac{e\Delta V}{c}\right)^2}$$

$$\boxed{\lambda_B = 6{,}36 \cdot 10^{-12}\ \text{m}}$$

Discrepancia teoría-experimento: 0,3%

CORRIENTES INDUCIDAS A TRAVÉS DEL ESPACIO



Esquema del montaje experimental

La bobina grande de la Figura, constituida por $N = 400$ espiras de cobre, de radio medio $R = 13{,}21$ cm (± 0,03 cm), está conectada en serie con una bombilla y un amperímetro **A** a la red de corriente alterna. Cuando el circuito está cerrado, por la bobina circula una intensidad de corriente $I = I_0$ sen $\omega\, t$, cuyo valor eficaz, medido con el amperímetro, es $I_{ef} = 0{,}832$ A (± 0,001 A). Esta corriente sinusoidal crea un campo magnético en el punto ***P*** del eje de la bobina, paralelo a éste y que varía también de forma sinusoidal con el tiempo t.

Si en torno al punto ***P*** se coloca otra bobina de $n = 500$ espiras, de radio medio $r = 1{,}53$ cm (± 0,01 cm), sobre ella se genera una fuerza electromotriz inducida $E = E_0 \cos \omega\, t$, cuyo valor eficaz E_{ef} puede ser determinado con el voltímetro **V**. Dicho valor depende de la intensidad eficaz I_{ef}, de la frecuencia angular ω y de la distancia d del punto ***P*** al centro de la bobina grande (ver Figura).

La expresión que proporciona E_{ef} es la siguiente:

$$E_{ef} = A\, \omega\, X(d),$$

donde:

$A = (\mu_0/2)\ \pi\ N\ n\ r^2\ I_{ef}$; $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ N A^{-2} ; $X(d) = R^2\ (R^2 + d^2)^{-3/2}$

En la Tabla I se indica un ejemplo de medida de $\mathbf{E_{ef}}$ ***para distintas posiciones del punto*** P ***sobre el eje de la bobina grande;*** $\mathbf{d^*}$ ***es la coordenada del punto*** P ***respecto a un origen*** **O** ***arbitrariamente elegido (ver Figura).***

Haciendo uso de los datos de la Tabla I se pueden determinar los valores de la frecuencia angular ω, del número de ciclos por segundo de la corriente alterna (frecuencia ν de la red) y del valor máximo de la fuerza electromotriz inducida eficaz, E_{ef}, que se obtiene en la bobina pequeña.

TABLA I

d^* (m)	E_{ef} (10^{-2} V)
0,31	4,09
0,33	5,08
0,35	6,35
0,37	7,96
0,39	9,95
0,41	12,17
0,43	14,56
0,45	16,69
0,51	17,69
0,53	15,77
0,55	13,34
0,57	10,97
0,59	8,82
0,61	7,09
0,63	5,61
0,65	4,48

Para llevar esto a cabo se pide realizar las siguientes tareas:

1. Representar gráficamente E_{ef} frente a d^* en la hoja de papel milimetrado que se adjunta y, a partir de la representación, determinar el valor d_0^* correspondiente al máximo de E_{ef}. Consignar el resultado en la casilla correspondiente de la hoja de respuestas *(hasta 3 puntos).*
2. Calcular la coordenada d de cada punto ***P*** respecto a d_0^* y llevar los valores a la Tabla II de la hoja de respuestas. Escoger 8 parejas de valores (d, E_{ef}) y determinar en cada caso la variable $X(d)$, consignando el resultado en dicha Tabla *(hasta 3 puntos).*
3. Representar E_{ef} frente a $X(d)$ en papel milimetrado y determinar la pendiente de la línea recta que resulta *(hasta 2 puntos).*
4. Calcular el valor máximo de E_{ef}, ω y ν, indicando sus correspondientes unidades *(hasta 2 puntos).*

HOJA DE OPERACIONES
(no hace falta entregarla)

Se añaden columnas en blanco por si fueran útiles en los cálculos parciales.

d^* (m)	E_{ef} (10^{-2} V)	d (m)	$X(d)$ (m^{-1})				
0,31	4,09						
0,33	5,08						
0,35	6,35						
0,37	7,96						
0,39	9,95						
0,41	12,17						
0,43	14,56						
0,45	16,69						
0,51	17,69						
0,53	15,77						
0,55	13,34						
0,57	10,97						
0,59	8,82						
0,61	7,09						
0,63	5,61						
0,65	4,48						

HOJA DE RESULTADOS

Apellidos: *Nombre:* *DNI:*

Resultado 1:

Presentar la gráfica en papel milimetrado y proporcionar el valor de d_0^*:

d_0^* =

Resultado 2:

TABLA II

d^* (m)	E_{ef} (10^{-2} V)	d (m)	$X(d)$ (m^{-1})
0,31	4,09		
0,33	5,08		
0,35	6,35		
0,37	7,96		
0,39	9,95		
0,41	12,17		
0,43	14,56		
0,45	16,69		
0,51	17,69		
0,53	15,77		
0,55	13,34		
0,57	10,97		
0,59	8,82		
0,61	7,09		
0,63	5,61		
0,65	4,48		

Resultado 3:

Presentar la gráfica en papel milimetrado y proporcionar el valor de la pendiente:

Pendiente =

Resultado 4:

E_{ef} =

ω =

ν =

HOJA DE RESULTADOS

Resultado 1:

Se hace la representación gráfica de E_{ef} frente a d^* eligiendo adecuadamente las unidades en los ejes, de manera que la figura ocupe el máximo espacio posible en la hoja de papel milimetrado. **(Hasta 1,5 puntos.)**

Aplicando la simetría de la función teórica, seleccionando pares de puntos sobre líneas horizontales, se determina la posición del centro d_0^*. Para ello se puntuará que haya dibujado una función continua que pase por los puntos de la gráfica. **(Hasta 1,5 puntos.)**

$$d_0^* = 0{,}484 \text{ m} \quad (\pm\ 0{,}001 \text{ m})$$

Resultado 2:

Para calcular d basta que se dé cuenta en el propio esquema que: $d = d^* - d_0^*$. De esta manera calcula los valores de la tercera columna de la Tabla I.

Este cálculo es muy rápido y no tiene ninguna dificultad. **(Hasta 1 punto.)**

Para determinar los 8 valores de $X(d)$, aunque no hay ninguna dificultad conceptual, su cálculo es laborioso. Se necesita una calculadora científica. Se valorará que razonen qué puntos han elegido (si son todos seguidos, si están en diferentes zonas repartidos, etc.) . Este apartado es el que requiere más tiempo y ha de hacerse con más cuidado. **(Hasta 2 puntos.)**

d^* (m)	E_{ef} (10^{-2} V)	d (m)	$X(d)$ (m^{-1})
0,31	4,09	- 0,174	1,674
0,33	5,08	- 0,154	2,089
0,35	6,35	- 0,134	2,619
0,37	7,96	- 0,114	3,285
0,39	9,95	- 0,094	4,095
0,41	12,17	- 0,074	5,027
0,43	14,56	- 0,054	6,004
0,45	16,69	- 0,034	6,876
0,51	17,69	+ 0,026	7,151
0,53	15,77	+ 0,046	6,376
0,55	13,34	+ 0,066	5,419
0,57	10,97	+ 0,086	4,456
0,59	8,82	+ 0,106	3,592
0,61	7,09	+ 0,126	2,868
0,63	5,61	+ 0,146	2,286
0,65	4,48	+ 0,166	1,828

Resultado 3:

Se hace la representación de gráfica de E_{ef} frente a $X(d)$ en papel milimetrado y se proporciona el valor de la pendiente de la línea recta que resulta.

$$\text{Pendiente} = 2{,}45 \times 10^{-2} \text{ V m}$$

Se valorará que tomen el origen como punto de la línea recta que se obtiene y que proporcionen adecuadamente las unidades de la pendiente. **(Hasta 2 puntos.)**

Resultado 4:

En primer lugar, determinamos el valor de $X(d)$ para d_0^*, es decir, pra $d = 0$:

$$X(d=0) = R^2 / (R^2 + 0)^{3/2} = 1/R = 7{,}57 \text{ m}^{-1}$$

A partir de la gráfica anterior, se puede determinar el valor de E_{ef} correspondiente a este valor, que será el valor máximo de E_{ef}.

$$E_{ef} \text{ (máximo)} = 18{,}55 \times 10^{-2} \text{ V}$$

También puede determinarse a partir del valor de la pendiente:

$$E_{ef} \text{ (máximo)} = 2{,}45 \times 10^{-2} \text{ V m} \times 7{,}57 \text{ m}^{-1} = 18{,}55 \times 10^{-2} \text{ V}$$ **(hasta 0,75 puntos)**

De la expresión $E_{ef} = A\,\omega\, X(d)$ se deduce que la pendiente es $A\,\omega$. Por lo tanto, si calculamos A (utilizando la expresión del enunciado) determinaremos el valor de ω:

$$A = (\mu_0/2)\,\pi N n r^2 I_{ef} = 2\,\pi \times 10^{-7} \times \pi \times 400 \times 500 \times (0{,}0153)^2 \times 0{,}832 =$$

$$= 7{,}689 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ N A}^{-1}$$ **(hasta 0,75 puntos)**

$$\text{Pendiente} = A\,\omega \Rightarrow \omega = 318{,}6 \text{ s}^{-1}$$

$$\nu = \omega / 2\,\pi = 50{,}7 \text{ s}^{-1}$$ **(hasta 0,5 puntos)**
