Problema 5. Pequeñas variaciones orbitales (15 Puntos)

En las maniobras de las naves espaciales en órbita, los cambios que se realizan en las velocidades y alturas son habitualmente muy pequeños comparados con las velocidades y radios orbitales respectivamente. Lo mismo ocurre para las energías, momentos angulares, etc. en juego. En consecuencia, los cálculos involucran valores numéricos muy dispares y para efectuarlos con sencillez, controlando al mismo tiempo la precisión, se deben adoptar ciertas estrategias.

El objetivo de este problema es expresar los cambios que experimentan algunos parámetros de una órbita cuando variamos otros. Veremos que los efectos resultan aproximadamente proporcionales a las variaciones causantes de los mismos cuando unos y otros son muy pequeños.

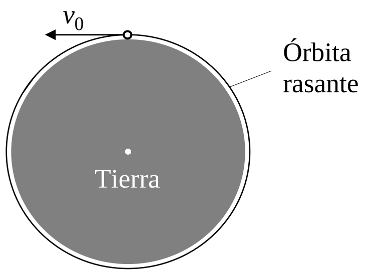

Fig. 1

Como modelo, supondremos que la Tierra es una esfera de radio $R = 6370\,km$ y que carece de atmósfera. Se sugiere emplear como dato la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}81\ ms^{-2}$.

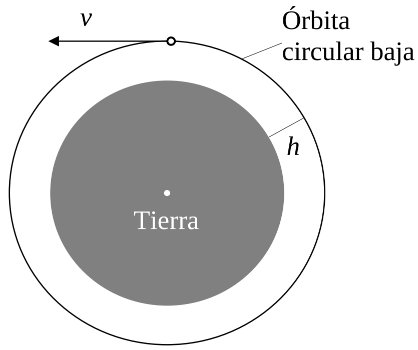

Fig. 2

a) Calcule la velocidad v_0 de un satélite que orbitase en torno a la Tierra a ras del suelo, como se muestra en la figura 1. *(2 Puntos)*

b) Calcule el período T_0 de esta órbita. *(1 Punto)*

La presencia de la atmósfera hace que las órbitas razonablemente seguras deban situarse por lo menos a una altura de unos 300 km sobre la superficie terrestre (órbitas llamadas "bajas"). Como 300 km son muy pocos frente a los 6370 km del radio terrestre, son posibles ciertos razonamientos aproximados.

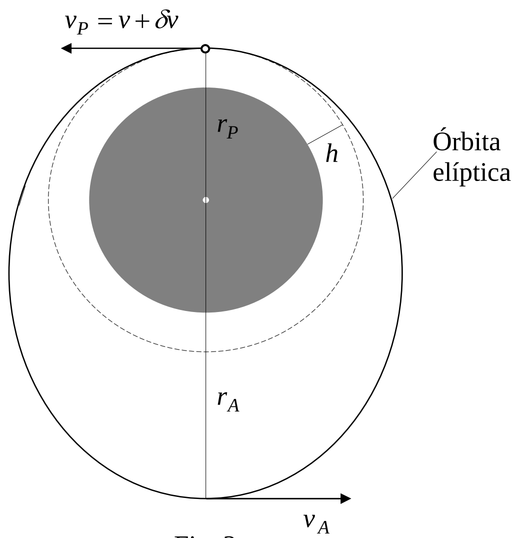

Fig. 3

c) Para una órbita baja, a una altura h = 300 km, como se muestra en la figura 2 (no está dibujada a escala), calcule de forma aproximada (a primer orden en h) la velocidad orbital v_{aprox} y determine la diferencia, Δv_{aprox}, entre dicha velocidad orbital y la velocidad v_0 de la órbita rasante en función de la altura *h*. *(2 Puntos)*

d) Efectúe el cálculo numérico exacto de *v*, determine la diferencia $\Delta v = v - v_0$ y compárela con la obtenida en el apartado anterior, Δv_{aprox}. *(1 Punto)*

e) Calcule también la diferencia ΔT entre el periodo exacto de la órbita baja (*h* = 300 km) con su valor aproximado a primer orden en *h*. *(2 Puntos)*

Consideremos ahora la órbita circular baja del apartado anterior. Con un breve encendido de los motores de maniobra de la nave, se incrementa ligeramente el módulo de su velocidad en δv, sin modificar su dirección (véase la figura 3). Con esta operación, la nave pasa de la órbita circular a una órbita elíptica y se incorpora a la nueva órbita en su perigeo, a una distancia $r_P = R + h$ del centro de la Tierra, con una velocidad $v_P = v + \delta v$ siendo $\delta v << v$. El apogeo de la órbita se encontrará a una distancia r_A y en él la velocidad de la nave será v_A, ambas magnitudes estarán relacionadas con sus correspondientes en el perigeo a través de la conservación de la energía mecánica de la nave y de su momento angular, $L = mvr$, respecto al centro de la Tierra.

f) Suponiendo que $\delta v = 10\, m/s$, calcule, en términos de δv a primer orden de aproximación, la diferencia entre las distancias del centro de la Tierra al apogeo y perigeo de la nueva órbita, es decir $\delta r = r_A - r_P$. *(3 Puntos)*

g) En el mismo orden de aproximación que el apartado anterior, calcule la diferencia, δT, entre el período de la nueva órbita elíptica *T´* y el de la órbita circular inicial, *T*. *(4 Puntos)*

<u>Ayuda matemática</u>

Binomio de Newton: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2} n(n-1)x^2 + ...$

Si $\varepsilon << 1$, podemos despreciar ε^2 y las potencias más elevadas y escribir $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$

Esta expresión, que vale también para *n* no entero, nos da el valor de $(1+\varepsilon)^n$ "a primer orden en ε ".

Por ejemplo, a primer orden en ε tenemos: $(1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \varepsilon/2$

Aplicación: Si $b << a$, tendremos $(a+b)^n \approx a^n (1 + nb/a)$, " a primer orden en *b*"

SOLUCIÓN

a) Orbita circular: $m\dfrac{v_0^2}{R} = G\dfrac{Mm}{R^2} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{gR} = 7{,}90 \cdot 10^3\,\text{ms}^{-1}}$ $\quad \left(g = \dfrac{GM}{R^2}\right)$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5{,}06 \cdot 10^3\ \text{s} = 84{,}4\ \text{min}}$$

b) Órbita baja: $r = R + h \qquad \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM}{r^2} = g\dfrac{R^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{g\dfrac{R^2}{r}}$.

Utilizando la aproximación a primer orden obtenemos:

$$v_0 + \Delta v_{approx} = \sqrt{gR}\left(1 - \frac{h}{2R}\right)$$

y por tanto, $\boxed{\Delta v_{approx} = -\dfrac{h}{2}\sqrt{\dfrac{g}{R}} = -1{,}86 \cdot 10^2\,\text{ms}^{-1}}$

Por otro lado, el cálculo exacto de $\Delta v = v - v_0$:

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{gR}\left(\sqrt{\frac{R}{r}} - 1\right) = -1{,}80 \cdot 10^2\,\text{ms}^{-1}}$$

La aproximación comete un error del 6% del valor exacto.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\frac{r^{3/2}}{\sqrt{gR^2}} \Rightarrow \Delta T = T_0\frac{3h}{2R} = 2\pi\frac{3h}{2R}\sqrt{\frac{R}{g}} \Rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{3\pi}{\sqrt{gR}}h = 3{,}57 \cdot 10^2\ \text{s}}$$

c) Orbita elíptica

Conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_P} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2}v_P^2\left(1 - \frac{v_A^2}{v_P^2}\right) = GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Conservación del momento angular:

$$mv_Pr_P = mv_Ar_A \Rightarrow \frac{v_A}{v_P} = \frac{r_P}{r_A} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{v_P^2}{r_A^2}\left(r_A^2 - r_P^2\right) = \frac{GM}{r_Pr_A}\left(r_A - r_P\right) \Rightarrow \frac{1}{2}v_P^2\left(r_A + r_P\right) = GM\frac{r_A}{r_P} \Rightarrow \left(r_A - r_P\right) = \frac{GM - v_P^2 r_P}{\dfrac{1}{2}v_P^2 - \dfrac{GM}{r_P}}$$

Cálculo a primer orden en δv:

$$v_P = v + \delta v \quad \Rightarrow \quad v_P^2 = v^2\left(1 + 2\frac{\delta v}{v}\right) \quad \Rightarrow \quad v_P^2 r_P = GM\left(1 + 2\frac{\delta v}{v}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\delta r = r_A - r_P = \frac{2\dfrac{\delta v}{v}}{\dfrac{1}{2r_P} - \dfrac{\delta v}{r_P v}} = 4r_P\,\frac{\delta v}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta r = \frac{4r_P^{3/2}}{R\sqrt{g}}\delta v = 3{,}45\cdot 10^4\,\mathrm{m}}$$

Semieje mayor de la órbita circular: $a = r = r_P$; Semieje mayor de la órbita elíptica: $a' = \frac{1}{2}(r_A + r_P)$

Tercera ley de Kepler: $\frac{T'^2}{T^2} = \frac{a'^3}{a^3} \quad \Rightarrow$

$$T' = T\left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} = T\left(\frac{r_a + r_P}{2r_P}\right)^{3/2} = T\left[\frac{1}{2}\left(2 + \frac{\delta\ r}{r_P}\right)\right]^{3/2} =$$

$$= T\left(1 + \frac{\delta\ r}{2r_P}\right)^{3/2} = T\left(1 + 2\frac{\delta\ v}{v}\right)^{3/2} = T\left(1 + 3\frac{\delta\ v}{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta T = 3\frac{\delta v}{v} = \frac{3}{R}\sqrt{\frac{r_P}{g}}\delta v = 3{,}88.10^{-3}\,s}$$

En estos cálculos la precisión de la aproximación es elevada porque $\delta v << v$.