Las fórmulas de Cardano-Ferrari

Carlos Ivorra

(http://www.uv.es/ivorra)

Los métodos de resolución por radicales de las ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado son unas de esas antiguallas absolutamente inútiles que está feo que un matemático no conozca. Como es bien sabido, si K es un cuerpo de característica distinta de 2 y a, b, $c \in K$, con $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en una clausura algebraica de K vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

entendiendo que la ecuación tiene una única raíz doble $x = -b/2a$ cuando se anula el discriminante $D = b^2 - 4ac$.

También es conocido que Tartaglia y Cardano encontraron una fórmula análoga para ecuaciones cúbicas (en la que aparecen raíces cúbicas además de raíces cuadradas) y que Ferrari encontró otra más compleja para ecuaciones cuárticas. En realidad, más que fórmulas, encontraron métodos de resolución que pueden resumirse en sendas fórmulas, si bien, en el caso de las ecuaciones cuárticas, la fórmula es tan compleja que resulta inmanejable, y es preferible describir el proceso de resolución como un algoritmo de varios pasos. Por último, Abel demostró que, para $n > 4$, no existen fórmulas análogas que expresen las raíces de la ecuación general de grado n en función de sus coeficientes a través de sumas, productos, cocientes y extracción de raíces, lo que convierte a las fórmulas de Cardano-Ferrari en dos singularidades algebraicas.

Los resultados de Cardano-Ferrari llevaron al descubrimiento y al estudio de los números complejos. En principio, los algebristas trataban de resolver ecuaciones con coeficientes reales (normalmente racionales), pero tales ecuaciones pueden tener soluciones imaginarias. Ciertamente, para encontrar ejemplos sencillos de esta situación no es necesario buscar entre ecuaciones cúbicas o cuárticas, sino que modestas ecuaciones cuadráticas sirven igualmente. Ahora bien, las ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo no "inducían" a buscarles raíces imaginarias, ya que lo más natural era concluir que no tienen solución, y eso zanjaba el problema. En cambio, cuando una ecuación cúbica tiene tres raíces reales distintas —que pueden ser conocidas si uno "se la construye" para verificar la fórmula de Cardano— resulta que ésta proporciona expresiones para dichas raíces en la que aparecen raíces cuadradas de números negativos. Fue esto lo que indujo a los matemáticos a plantearse que tal vez fuera posible operar coherentemente con cantidades "imaginarias" de manera que, simplificando las expresiones imaginarias que proporciona la fórmula de Cardano, se pudiera llegar finalmente a las soluciones reales de la ecuación.

Antes de entrar en materia puede ser ilustrativo recordar la forma en que puede deducirse la fórmula para las ecuaciones cuadráticas. En primer lugar, podemos expresar la ecuación en la forma

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Esto hace que no perdamos generalidad si suponemos $a = 1$, simplificación que será útil en el caso cúbico y cuártico, pero que, dada la sencillez del caso cuadrático, no vamos a hacer aquí. Tenemos entonces que $-b/a$ es la suma de las dos raíces de la ecuación, luego $-b/2a$ es la media de las raíces. Si hacemos el cambio de variable $x = t - b/2a$, obtendremos una ecuación en t cuyas raíces serán las que resultan de restarle a cada una de las dos raíces de la ecuación original la media de ambas, y esto hace que la nueva ecuación tenga raíces con media (luego también con suma) igual a 0. Equivalentemente, la nueva ecuación debe tener nulo el monomio de primer grado. Comprobamos que así es:

$$\left(t - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(t - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = t^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones de esta ecuación son $t = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}/2a$. Deshaciendo el cambio de variables obtenemos la fórmula buscada.

1 Ecuaciones cúbicas

Empezamos enunciando el resultado general:

Teorema 1.1 (Fórmula de Cardano) *Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 o 3 y sean a, b, $c \in K$. Entonces, las raíces de la ecuación*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

en una clausura algebraica de K vienen dadas por

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}} - a/3,$$

donde

$$p = \frac{3b - a^2}{3}, \qquad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}, \qquad \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

la raíz cuadrada de Δ se escoge arbitrariamente y, fijada ésta, las raíces cúbicas u y v se escogen de modo que $p = -3uv$ (es decir, se escoge una arbitrariamente y la otra se calcula mediante esta relación).

Notemos ante todo que la relación entre las raíces cúbicas es correcta, es decir, que si

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}}$$

es una raíz cúbica arbitraria del radicando y definimos v mediante $p = -3uv$, entonces

$$v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}}.$$

En efecto, elevando al cubo vemos que $p^3 = -27(-q/2 + \sqrt{\Delta})v^3$, luego

$$v^3 = -\frac{(p/3)^3(-q/2 - \sqrt{\Delta})}{(q/2)^2 - \Delta} = -q/2 - \sqrt{\Delta},$$

como queríamos probar.

Demostración: El primer paso es el análogo al que hemos empleado en el caso de la ecuación cuadrática: tenemos que $-a$ es la suma de las raíces de la ecuación, luego $-a/3$ es su media, luego el cambio de variable

$$x = t - \frac{a}{3} \tag{2}$$

ha de llevarnos necesariamente a una ecuación cuyas raíces tengan media (luego suma) igual a 0, por lo que tendrá nulo su monomio de grado 2. En efecto, una comprobación rutinaria muestra que el cambio (2) reduce la ecuación (1) a la forma incompleta

$$t^3 + pt + q = 0, \tag{3}$$

donde p y q son los valores indicados en el enunciado. Por consiguiente, basta resolver (3), ya que la relación (2) nos proporciona las soluciones de (1) a partir de las de (3). Vamos a deducir la fórmula de Cardano bajo la hipótesis adicional $p \neq 0$, y luego veremos que es válida incluso si $p = 0$.

Partimos del desarrollo

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v),$$

que nos da la identidad

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - u^3 - v^3 = 0. \tag{4}$$

Por lo tanto, si encontramos valores de u, v tales que

$$p = -3uv, \qquad q = -u^3 - v^3, \tag{5}$$

tendremos que una solución de (3) será $t = u + v$. Podemos expresar (5) en términos de u despejando $v = -p/3u$. (Notemos que ha de ser $u \neq 0$, ya que suponemos $p \neq 0$.)

Concluimos que una condición suficiente para que t sea solución de (3) es que sea de la forma

$$t = u - \frac{p}{3u} \tag{6}$$

para un u que cumpla la ecuación

$$u^3 + q - (p/3u)^3 = 0 \tag{7}$$

o, equivalentemente (multiplicando por u^3):

$$u^6 + qu^3 - (p/3)^3 = 0. \tag{8}$$

Veamos ahora que la condición es necesaria, es decir, que toda raíz t de (3) es de la forma (6), para un cierto u que cumple (8). En primer lugar, dado cualquier valor de t, siempre existe un valor de $u \neq 0$ que cumple (6). Basta tomar una raíz de la ecuación

$$u^2 - tu - p/3 = 0. \tag{9}$$

Llamando $v = -p/3u$, tenemos que $t = u + v$, $p = -3uv$. Si t cumple (3), entonces

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) + q = 0$$

y, comparando con la identidad (4), vemos que se cumple (5), lo cual implica que u cumple (7) y, por consiguiente, (8).

Así pues, concluimos que resolver (3) es equivalente a resolver (8), en el sentido de que las soluciones de (3) son las que se obtienen a partir de las de (8) a través de (6). Ahora bien, las ecuación (8) es cuadrática en u^3, luego sus soluciones son

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(p/3)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$$

o, más sencillamente:

$$u^3 = -q/2 \pm \sqrt{\Delta}. \tag{10}$$

Combinando las dos raíces cuadradas de Δ con las tres raíces cúbicas, nos salen las seis raíces de (8), pero (3) sólo puede tener tres raíces. Ello se debe a que, para cada valor de t, hay dos valores de u que cumplen (6). Dado uno de ellos, el otro está determinado por la relación

$$uu' = -p/3, \tag{11}$$

que se deduce de que u y u' son las dos raíces de (9).

Fijemos un u_+ que cumpla (10) con signo positivo y una raíz cuadrada prefijada, y sea u_- una raíz de (10) con signo negativo (y la misma raíz cuadrada). Entonces,

$$(u_+u_-)^3 = (q/2)^2 - (q/2)^2 - (p/3)^3 = -(p/3)^3,$$

luego $u_+u_- = -(p/3)\omega$, donde ω es una cierta raíz cúbica de la unidad. Por consiguiente, $u_+(\omega^2 u_-) = -(p/3)$. Cambiando u_- por $\omega^2 u_-$ (que también cumple (10) con el signo negativo), concluimos que, para cada u_+ elegido arbitrariamente, existe un u_- elegido adecuadamente tal que u_+ y u_- determinan la misma raíz t de (3). En definitiva, vemos que las soluciones de (3) son de la forma (6), con

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}},$$

donde en esta expresión hay que entender que la raíz cuadrada de Δ es fija (elegida arbitrariamente de entre las dos posibilidades) y que al variar la elección de la raíz cúbica recorremos las distintas raíces de (3). Finalmente observamos que, de la segunda ecuación de (5), se sigue que

$$v^3 = -q/2 - \sqrt{\Delta},$$

luego podemos escribir

$$v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}},$$

si bien es crucial tener presente que las elecciones de las raíces cúbicas u y v no pueden hacerse de forma independiente, lo cual nos daría 9 raíces para (3), sino que u y v han de cumplir la relación $p = -3uv$.

Con esto hemos probado la fórmula de Cardano bajo el supuesto de que $p \neq 0$. Ahora bien, en caso contrario $\Delta = (q/2)^2$, luego $\sqrt{\Delta} = \pm q/2$. Al sustituir cualquiera de las dos elecciones del signo en los radicandos de las raíces cúbicas obtenemos que una de las dos se anula y la otra se reduce a $\sqrt[3]{-q}$ y, ciertamente, las tres elecciones de la raíz cúbica nos dan las tres raíces de (3) en este caso. Además, la relación $p = -3uv$ se cumple trivialmente. ■

Conviene destacar algunos casos particulares:

Caso de una raíz triple ($p = q = 0$) La ecuación (1) tiene una raíz triple α (en una clausura algebraica de K) si y sólo si es de la forma

$$(x-\alpha)^3 = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3 = 0,$$

con lo que $a = -3\alpha$ y la ecuación (3) se reduce a $t^3 = 0$, es decir, se cumple que $p = q = 0$. Recíprocamente, si $p = q = 0$, entonces (3) tiene una raíz triple y (1) también. En resumen:

> *La ecuación* (1) *tiene una raíz triple si y sólo si* $p = q = 0$, *en cuyo caso, dicha raíz es* $x = -a/3$.

Es claro que la fórmula de Cardano se reduce a $x = -a/3$ en este caso.

Caso $p = 0$ Ya hemos observado que si $p = 0$ (y $q \neq 0$) la ecuación (3) tiene tres raíces distintas, dadas por $t = \sqrt[3]{-q}$ y que la fórmula de Cardano se reduce, ciertamente, a $x = \sqrt[3]{-q} - a/3$.

Caso $q = 0$ En este caso (3) se reduce a $t^3 + pt = t(t^2 + p) = 0$, con lo que (si $p \neq 0$) tiene tres raíces simples, dadas por $t = 0$, $t = \sqrt{-p}$. Si aplicamos la fórmula de Cardano llegamos al mismo resultado. En efecto, ahora tenemos que $\Delta = (p/3)^3$, luego podemos tomar $\sqrt{\Delta} = (\sqrt{p/3}\,)^3$, donde la raíz cuadrada se elige arbitrariamente. Entonces, una de las posibilidades para u es $u = \sqrt{p/3}$, y la ecuación $p = -3uv$ implica que $v = -u$, con lo cual obtenemos la raíz $t = u + v = 0$.

Las otras elecciones posibles para u son ωu y $\omega^2 u$, donde ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Los valores de v correspondientes son $-\omega^2 u$ y $-\omega u$, respectivamente, luego las raíces de (3) son $t = \pm(\omega - \omega^2)u$. Teniendo en cuenta que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, porque ω es raíz del polinomio ciclotómico tercero, vemos que

$$t^2 = (\omega^2 + \omega - 2)p/3 = -p,$$

luego $t = \sqrt{-p}$, como tenía que ser.

Caso $\Delta = 0$ Vamos a probar que (1) tiene una raíz doble (sin excluir que sea triple) si y sólo si[1] $\Delta = 0$. Es obvio que (1) tiene una raíz doble si y sólo si la tiene (3), luego podemos trabajar con la ecuación incompleta. Ya hemos visto que si $p = q = 0$ se cumple $\Delta = 0$ y la raíz es triple, mientras que si sólo una de las dos cantidades p, q es nula, entonces $\Delta \neq 0$ y las raíces son simples. Por consiguiente, sólo falta estudiar el caso en que $pq \neq 0$.

Una raíz t es múltiple si y sólo si anula a la derivada de (3), es decir, si y sólo si cumple

$$t^3 + pt + q = 0, \qquad 3t^2 + p = 0. \tag{12}$$

Ahora bien:

$$3(t^3 + pt + q) - t(3t^2 + p) = 2pt + 3q, \tag{13}$$

luego (12) implica que $t = -3q/2p$. Sustituyendo en la segunda ecuación de (12) queda

$$\frac{3^3 q^2}{2^2 p^2} + p = 0, \tag{14}$$

que claramente equivale a $\Delta = 0$. Recíprocamente, si $\Delta = 0$, tenemos (14), lo que implica que $t = -3q/2p$ es raíz de la derivada de (3) y, por (13), también lo es de (3), luego t es una raíz doble. Con esto casi tenemos probado lo siguiente:

La ecuación (1) tiene una raíz doble si y sólo si $\Delta = 0$. Si $pq \neq 0$, tiene también una raíz simple y, en tal caso, la raíz doble y la simple son, respectivamente

$$x = -\frac{3q}{2p} - \frac{a}{3}, \quad y \quad x = -\frac{4p^2}{9q} - \frac{a}{3}.$$

[1] Esto se debe a que Δ es, salvo una constante, el discriminante de (3). Concretamente, el discriminante de (3), al igual que el de (1), es $D = -2^2 3^3 \Delta$.

En efecto, sólo nos falta calcular la raíz simple, que podemos obtener del hecho de que el producto de las raíces de (3) es igual a $-q$, luego la raíz simple ha de cumplir

$$t\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 = -q,$$

y al despejar queda $t = -4p^2/9q$.

Naturalmente, con la fórmula de Cardano se llega al mismo resultado. Ahora tenemos que

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3,$$

con lo que $u = \sqrt{-p/3}$ cumple $(u^3)^2 = (q/2)^2$. Por consiguiente, $(\pm u)^3 = -q/2$. Esto significa que, eligiendo adecuadamente la raíz cuadrada que define a u, se cumple que $u = \sqrt[3]{-q/2}$ es una elección posible, a la que corresponde $v = u$ y $t = 2u$. Las otras elecciones posibles son ωu y $\omega^2 u$, donde ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad, y los valores de v correspondientes son $\omega^2 u$ y ωu, respectivamente, y ambos dan lugar al mismo valor de $t = (\omega + \omega^2)u = -u$.

Notemos que $t = -u = -\sqrt{-p/3}$ cumple la segunda ecuación de (12), luego se trata de la raíz doble de (3). Así pues, la raíz que aparece repetida al aplicar la fórmula de Cardano es precisamente la raíz doble de la ecuación.

2 Cúbicas en el caso clásico

Todo lo dicho en la sección anterior era válido para ecuaciones sobre cualquier cuerpo de característica distinta de 2 o 3. Ahora vamos a considerar específicamente el caso en que K es el cuerpo de los números reales (o, más en general, uno de sus subcuerpos). Así podemos distinguir entre raíces reales o imaginarias. Como las raíces imaginarias han de aparecer en parejas de números conjugados, las únicas posibilidades para una cúbica son que tenga tres raíces simples, de las cuales una sea real y dos sean imaginarias conjugadas, o bien que tenga tres raíces reales (simples o no). Vamos a probar que el signo de Δ determina completamente la situación:

Teorema 2.1 *Consideremos una ecuación* (1) *con coeficientes reales. Entonces:*

1. *Si* $\Delta = 0$ *todas sus raíces son reales, y al menos dos de ellas son iguales.*

2. *Si* $\Delta > 0$ *la ecuación tiene una raíz real y dos raíces imaginarias.*

3. *Si* $\Delta < 0$ *la ecuación tiene tres raíces reales simples.*

Demostraremos este teorema desglosándolo en tres teoremas independientes que nos den formas específicas para las soluciones en cada uno de los casos. El caso $\Delta = 0$ lo tenemos completamente tratado en la sección anterior, pero lo repetimos aquí por completitud:

Teorema 2.2 *Si $\Delta = 0$ hay dos posibilidades:*

1. *Si $p = q = 0$, entonces la ecuación tiene una raíz triple $x = -a/3$.*

2. *Si $pq \neq 0$, entonces la ecuación tiene una raíz doble y una raíz simple, dadas respectivamente por*
$$x = -\frac{3q}{2p} - \frac{a}{3}, \quad y \quad x = -\frac{4p^2}{9q} - \frac{a}{3}.$$

Observemos que, en este caso, las raíces de la ecuación pertenecen al mismo cuerpo K al que pertenecen sus coeficientes (y no a una cierta extensión algebraica, como en el caso general).

Teorema 2.3 *Si $\Delta > 0$, una raíz real viene dada por*
$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}} - a/3,$$
donde las raíces cúbicas u y v son reales. Las otras dos raíces son imaginarias, y vienen dadas por
$$x = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\, i.$$

Así pues, para alguien (como Cardano) que desconozca los números complejos, la fórmula de Cardano proporciona la única solución (real) que tiene la ecuación en este caso exclusivamente en términos de operaciones con números reales.

Demostración: El radicando de u es un número real, por lo que la única raíz cúbica real es una elección posible para u. La relación $p = -3uv$, implica que la raíz cúbica v correspondiente es también la raíz cúbica real, luego $t = u + v$ es una raíz real. Las otras elecciones para u son ωu y $\omega^2 u$, donde
$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i,$$
es una raíz cúbica de la unidad, y el valor de v correspondiente es, respectivamente, $\omega^2 v$ y ωv. Por lo tanto, una raíz imaginaria de (3) es
$$t = \omega u + \omega^2 v = -\frac{u+v}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\, i$$
(y la otra ha de ser su conjugada), de donde se sigue inmediatamente la expresión dada para las raíces de (1) en este caso. ■

Ejemplo Vamos a resolver la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0.$$

El cambio de variable $x = t + 1$ la transforma en $t^3 + 6t + 2 = 0$. Por consiguiente, $\Delta = 1^2 + 2^3 = 9 > 0$. La raíz real es

$$x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{9}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{9}} + 1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-4} + 1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 1,$$

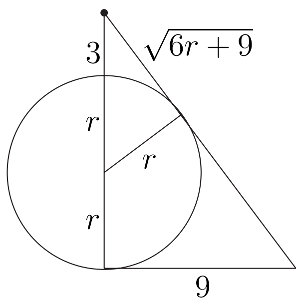
y las raíces imaginarias son

$$x = -\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{2} + 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})\, i.$$

■

Ejemplo El problema siguiente fue planteado en el siglo XIII por el matemático chino Qin Jinshao:

> *Una ciudad está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puerta norte y caminando 3 li hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar 9 li hacia el este para ver el mismo árbol. Calcular el diámetro de la ciudad.*



Los dos triángulos que muestra la figura son semejantes, de modo que se ha de cumplir

$$\frac{2r+3}{9} = \frac{\sqrt{3(2r+3)}}{r}.$$

Elevando al cuadrado, simplificando un factor $2r+3$ y operando llegamos a la ecuación

$$r^3 + \frac{3}{2}r^2 - \frac{243}{2} = 0.$$

El cambio $r = t - 1/2$ la reduce a $t^3 - \dfrac{3}{4}t - \dfrac{485}{4} = 0$. Como $\Delta = 29403/8 > 0$, sólo tiene una raíz real, que viene dada por

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[3]{\frac{485}{8} + \frac{198}{8}\sqrt{6}} + \sqrt[3]{\frac{485}{8} - \frac{198}{8}\sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{485 + 198\sqrt{6}} + \sqrt[3]{485 + 198\sqrt{6}}\right) = 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto,[2] concluimos que $r = 4.5$ y que el diámetro de la ciudad es de 9 li. ■

Antes de estudiar en teoría el caso $\Delta < 0$ veamos con un ejemplo qué es lo que sucede en la práctica:

---

[2]El resultado $t = 5$ puede obtenerse de forma exacta observando que $\alpha = 485^2 - 198^2 \cdot 6 = 1$, lo que significa que $485 + 198\sqrt{6}$ es una unidad en el anillo de enteros algebraicos $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$, y que una unidad fundamental de este anillo es $\epsilon = 5 + 2\sqrt{6}$. (Véase la tabla 13.2 de mi libro de *Álgebra.)* Por consiguiente, α ha de ser una potencia de ϵ y, concretamente, se comprueba que $\alpha = \epsilon^3$. Por lo tanto, las raíces cúbicas que hemos de calcular son $5/2 \pm \sqrt{6}$, y su suma es igual a 5.

Ejemplo Vamos a resolver la ecuación

$$x^3 - 6x - 4 = 0.$$

Ya está en forma incompleta, y $\Delta = 2^2 - 2^3 = -4 < 0$ luego, según demostraremos luego, ha de tener tres raíces reales. Sin embargo, si aplicamos la fórmula de Cardano obtenemos que las raíces son de la forma

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-4}}.$$

Cardano no supo qué hacer con este tipo de expresiones. Fue Bombelli el primero que calculó una raíz cúbica compleja (sin saber muy bien lo que hacía) similar a éstas que nos acabamos de encontrar. En nuestro caso, si llamamos $U = 2+2i$, tenemos que el módulo de U es $|U| = \sqrt{8}$ y su argumento es $\theta = \pi/4$, luego las raíces cúbicas $u = \sqrt[3]{2+2i}$ son los números complejos de módulo $|u| = \sqrt{2}$ y argumento $\theta = \pi/12 + 2k\pi/3$, para $k = 0, 1, 2$. Explícitamente:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right), \\ u_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right), \\ u_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Centrémonos en la segunda, que es la más sencilla de las tres[3]:

$$u_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i.$$

El valor v_2 correspondiente viene dado por la ecuación $-3u_2v_2 = p$, de modo que

$$v_2 = \frac{-6}{-3(-1+i)} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1-i.$$

(Luego veremos que este cálculo no era necesario, porque v_2 tenía que ser el conjugado de u_2, precisamente porque la raíz $x = u_2 + v_2$ ha de ser real.) En total, vemos que una raíz de la ecuación es

$$x_2 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-4}} = (-1+i) + (-1-i) = -2.$$

[3]Otra forma, puramente algebraica, de calcular la raíz cúbica de $2+2i$ es suponer que ha de ser de la forma $a+bi$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, teniendo en cuenta además que ha de cumplir $a^2+b^2 = 2$, lo que sólo deja las opciones $a = \pm 1$, $b = \pm 1$. Así fue como razonó Bombelli en un caso ligeramente más complicado. El lector familiarizado con la aritmética de los enteros de Gauss puede demostrar que todo elemento de $\mathbb{Z}[i]$ de norma 8^n tiene raíz cúbica en $\mathbb{Z}[i]$.

Las otras raíces pueden calcularse del mismo modo, pero, una vez tenemos una de ellas, es más fácil dividir $x^3 - 6x - 4 = (x+2)(x^2 - 2x - 2) = 0$, con lo que las otras dos raíces resultan ser

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

■

Ejercicio: Usar las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad para calcular u_1 y u_3, y obtener a partir de ellas las raíces correspondientes de la ecuación.

Ejercicio: Alternativamente calcular u_1 y u_3 usando que han de ser de la forma ωu_2, donde ω es una raíz cúbica de la unidad.

Vamos a demostrar que el ejemplo anterior es completamente "típico" (salvo por la "suerte" que hemos tenido de encontrar un ángulo con razones trigonométricas calculables fácilmente):

Teorema 2.4 *Si $\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales simples, que vienen dadas por*

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - \frac{a}{3},$$

donde $k = 0, 1, 2$ y el ángulo $0 < \theta < \pi$ está determinado por

$$\cos\theta = \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}}. \tag{15}$$

Demostración: Para aplicar la fórmula de Cardano podemos elegir

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|}\, i = \sqrt{-(q/2)^2 - (p/3)^3}\, i,$$

es decir, nos quedamos con la raíz cuadrada con parte imaginaria positiva. El módulo de $-q/2 + \sqrt{\Delta}$ es

$$\rho = \sqrt{(q/2)^2 - (q/2)^2 - (p/3)^3} = \sqrt{-(p/3)^3},$$

y su argumento es el ángulo $0 < \theta < \pi$ que cumple (15). Por consiguiente, los valores posibles de u son los dados por

$$u = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right).$$

La ecuación $p = -3uv$ nos da que

$$v = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right),$$

y al calcular $x = u + v - a/3$ obtenemos la expresión anunciada. En particular vemos que las raíces son reales. ■

Veamos otro ejemplo un poco menos amañado que el precedente:

Ejemplo Vamos a resolver la ecuación

$$x^3 + 5x^2 - 8x - 42 = 0.$$

El cambio $x = t - 5/3$ la convierte en

$$t^3 - \frac{49}{3}t - \frac{524}{27} = 0.$$

Ahora $\Delta = -605/9 < 0$. Tenemos, pues, que

$$\cos\theta = \frac{524/54}{\sqrt{(49/9)^3}} = 0.7638483965\ldots$$

luego

$$\theta = 0,701541222489\ldots$$

Aplicando la fórmula

$$x = \frac{14}{3}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - \frac{5}{3}$$

para $k = 0, 1, 2$ obtenemos los valores

$$x = 2.872983346\ldots, \quad -4.872983346\ldots, \quad -3.$$

Comprobamos que $x = -3$ es realmente una raíz entera de la ecuación (y no un error de redondeo), dividimos

$$x^3 + 5x^2 - 8x - 42 = (x+3)(x^2 + 2x - 14)$$

y, resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos expresiones algebraicas para las otras dos raíces:

$$x = -1 \pm \sqrt{15}.$$

■

3 Ecuaciones cuárticas

El caso de los polinomios de cuarto grado es más complicado:

Teorema (Ferrari) *Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 o 3 y sean a, b, c, $d \in K$. Entonces, las raíces de la ecuación*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{16}$$

en una clausura algebraica de K vienen dadas por

$$x = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4(P-R)}}{2} - \frac{a}{4}, \qquad x = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4(P+R)}}{2} - \frac{a}{4},$$

donde, llamando

$$p = \frac{8b - 3a^2}{8}, \quad q = \frac{8c - 4ab + a^3}{8}, \quad r = \frac{256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4}{256}, \tag{17}$$

P es una raíz de la ecuación

$$P^3 - \frac{p}{2}P^2 - rP + \frac{4pr - q^2}{8} = 0, \tag{18}$$

y Q, R se determinan mediante las ecuaciones

$$p = 2P - Q^2, \quad q = -2QR, \quad r = P^2 - R^2. \tag{19}$$

En la prueba veremos, más concretamente, que, si $q \neq 0$, la primera ecuación de (19) es redundante, de modo que, a partir de una solución P de (18), la tercera ecuación de (19) nos da un valor para R, necesariamente no nulo, y la segunda ecuación nos da un valor para Q que necesariamente cumplirá la primera ecuación. Si $q = 0$ el sistema (19) tiene también una solución fácil de calcular, pero enseguida veremos que en este caso hay un procedimiento más rápido para encontrar las raíces de la ecuación. En efecto, el cambio de variable

$$x = t - \frac{a}{4}$$

nos lleva a la ecuación incompleta

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0, \tag{20}$$

donde p, q, r son los dados por (17). Así, si $q = 0$, tenemos lo que se conoce como una ecuación bicuadrada, cuyas raíces cumplen:

$$t^2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - r}}{2},$$

luego las cuatro raíces de (16) son

$$x = \pm\sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - r}}{2}} - \frac{a}{4}.$$

Demostración: Ya hemos visto que basta resolver la ecuación incompleta (20). Para ello observamos que

$$(t^2 + P)^2 - (Qt + R)^2 = t^4 + (2P - Q^2)t^2 - 2QRt + P^2 - R^2$$

Por lo tanto, si encontramos valores P, Q, R que cumplan (19), las soluciones de (20) serán las mismas que las de la ecuación

$$(t^2 + P)^2 = (Qt + R)^2.$$

Ésta puede descomponerse en dos ecuaciones cuadráticas:

$$t^2 + P = \pm(Qt + R).$$

Equivalentemente,

$$t^2 - Qt + P - R = 0, \qquad t^2 + Qt + P + R = 0,$$

y las raíces de estas ecuaciones son las indicadas en el enunciado.

Así pues, sólo hemos de encontrar una solución de (19). Para ello despejamos

$$Q = -\frac{q}{2R}, \quad Q^2 = \frac{q^2}{4R^2} = \frac{q^2}{4(P^2 - r)},$$

con lo que la primera ecuación se convierte en

$$p = 2P - \frac{q^2}{4(P^2 - r)}$$

o, equivalentemente, en la cúbica

$$4(P^2 - r)(2P - p) = q^2 \tag{21}$$

que se simplifica hasta (18).

De este modo, podemos tomar una raíz cualquiera P de (18), luego una raíz cualquiera R de $r = P^2 - R^2$ y, por último, si $R \neq 0$, hacemos $Q = -q/2R$. Así, las dos últimas ecuaciones de (19) se cumplen por las elecciones de Q y R, mientras que la primera se cumple porque es equivalente a (18).

Si nos encontramos con $R = 0$ es porque $P^2 - r = 0$ y, a la vista de (21), para que esto pueda suceder ha de ser $q = 0$. Más aún, en tal caso, esta misma ecuación muestra que las raíces de (18) son $P = \sqrt{r}$ o bien $P = p/2$ y, tomando $R = 0$ en el primer caso o $Q = 0$ en el segundo, encontramos igualmente una solución de (19).

En cualquier caso, vemos que cualquier raíz P de (18) se puede completar (fácilmente) hasta una solución (P, Q, R) del sistema (19). ■

Nota Si en (18) hacemos el cambio de variable $P = T/2$, obtenemos el polinomio

$$T^3 - pT^2 - 4rT + 4pr - q^2.$$

Este polinomio se llama *resolvente cúbica* de (20) y tiene una interpretación algebraica: si las raíces de (20) son α_1, α_2, α_3, α_4, las de la resolvente cúbica son

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3.$$

■

Ejercicio: Reformular el teorema anterior usando la resolvente cúbica en lugar de (18), es decir, sustituyendo $P = 2P_0$. Las fórmulas quedan más sencillas si también se sustituye $R = 2R_0$.

Ejemplo (Euler) Vamos a resolver la ecuación

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0.$$

El cambio de variable $x = t + 2$ la reduce a

$$t^4 - 10t^2 - 4t + 8 = 0.$$

La cúbica auxiliar es

$$P^3 + 5P^2 - 8P - 42 = 0.$$

Esta ecuación la hemos resuelto en un ejemplo anterior, en el que hemos visto que una raíz es $P = -3$, y ahora hemos de resolver

$$-4 = -2QR, \quad 8 = 9 - R^2.$$

Tomamos $R = 1$, $Q = 2$. Por consiguiente, las cuatro raíces de la ecuación original son:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3-1)}}{2} - \frac{-8}{4} = 3 \pm \sqrt{5},$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3+1)}}{2} - \frac{-8}{4} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

■

Ejemplo Vamos a resolver la ecuación

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

cuyas raíces son las raíces quintas no triviales de la unidad.

El cambio $x = t - 1/4$ la reduce a

$$t^4 + \frac{5}{8}t^2 + \frac{5}{8}t + \frac{205}{256} = 0.$$

La cúbica auxiliar es

$$P^3 - \frac{5}{2^4}P^2 - \frac{205}{2^8}P + \frac{825}{2^{12}} = 0,$$

El cambio $P = T + 5/(3 \cdot 2^4)$ la reduce a

$$T^3 - \frac{5}{6}T + \frac{25}{6^3} = 0.$$

Podemos simplificarla aún más con el cambio $T = T'/6$, pues entonces se queda en

$$T'^3 - 30T' + 25 = 0,$$

y es fácil ver que una solución es $T' = 5$, luego $T = 5/6$, luego $P = 15/16$. Esto nos lleva a las ecuaciones

$$\frac{5}{8} = -2QR, \quad \frac{205}{256} = \left(\frac{15}{16}\right)^2 - R^2,$$

que nos dan $R = \sqrt{5}/8$, $Q = -\sqrt{5}/2$. Finalmente, las raíces de la ecuación dada son

$$x = \frac{-\sqrt{5}/2 \pm \sqrt{5/4 - 4(15/16 - \sqrt{5}/8)}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$x = \frac{\sqrt{5}/2 \pm \sqrt{5/4 - 4(15/16 + \sqrt{5}/8)}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Por otra parte, las raíces quintas de la unidad son de la forma

$$x = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{5},$$

de donde se sigue inmediatamente[4] que

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

■

Ejercicio: Nicolaus Bernoulli afirmó que no era cierta la conjetura según la cual todo polinomio (con coeficientes reales) puede descomponerse en producto de polinomios de grados 1 y 2, y presentó como contraejemplo el polinomio

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4.$$

Sin embargo, Euler demostró que dicho polinomio factoriza como

$$\left(x^2 - \left(2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)\left(x^2 - \left(2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right)x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right).$$

Demostrar esta factorización (sin hacer uso de ella, es decir, que no vale limitarse a multiplicar y ver que el resultado es correcto).

4 Resolución de cúbicas mediante raíces reales

Hemos visto que, cuando una cúbica tiene tres raíces reales simples, la fórmula de Cardano las expresa como suma de dos raíces cúbicas imaginarias conjugadas. Sin embargo, en los ejemplos que hemos presentado, al final hemos expresado dichas raíces en términos de raíces cuadradas reales, pero ello ha sido gracias a que en dichos ejemplos siempre había al menos una raíz entera (hubiera servido igualmente que fuera racional) lo cual nos permitía factorizar la ecuación y aplicar la fórmula de las ecuaciones cuadráticas. En

[4]Hay caminos mucho más cortos para llegar a este resultado y, por consiguiente, para resolver la ecuación. Por ejemplo, si llamamos $\omega = \cos(2\pi/5) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/5)$, $\eta = \omega + \omega^4 = 2\cos(2\pi/5)$ y $\eta' = \omega^2 + \omega^3$, se comprueba fácilmente que $\eta + \eta' = \eta\eta' = -1$, con lo que η y η' son las raíces del polinomio $x^2 + x - 1$.

general, al aplicar el teorema 2.4 sólo obtenemos aproximaciones decimales de las raíces (salvo que podamos calcular algebraicamente los cosenos involucrados). Cabe preguntarse si es posible obtener en general expresiones para las raíces en términos de raíces cúbicas y raíces cuadradas de números positivos, pero sucede que la respuesta es negativa salvo en el caso trivial que hemos considerado en los ejemplos, es decir, cuando al menos una de las raíces es racional (si partimos de un polinomio con coeficientes racionales). Concretamente, vamos a demostrar el teorema siguiente:

Teorema 4.1 *Sea K un subcuerpo del cuerpo de los números reales, y consideremos una cúbica con coeficientes en K que cumpla $\Delta < 0$ y que no tenga raíces en K. Entonces no es posible expresar (ninguna de) sus raíces en función de sus coeficientes mediante sumas, productos, cocientes y raíces que sean números reales (es decir, con radicando positivo cuando el índice sea par).*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que un número real α se puede expresar en función de elementos de K mediante sumas, productos, cocientes y raíces reales si y sólo si existe una cadena de cuerpos

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

tales que $\alpha \in K_n$ y cada cuerpo intermedio es de la forma $K_i = K_{i-1}(\alpha_i)$, para un cierto $\alpha_i \in K_i$ tal que existe un número natural $m_i \geq 2$ tal que $\alpha_i^{m_i} \in K_{i-1}$.

Por ejemplo, si $K = \mathbb{Q}$ y

$$\alpha = \frac{\sqrt{3 + \sqrt[4]{7} - \sqrt[3]{-2}}}{1 - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}},$$

una cadena de cuerpos sería la determinada por

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{7}, \quad \alpha_2 = \sqrt[3]{-2}, \quad \alpha_3 = \sqrt{5}, \quad \alpha_4 = \sqrt{3 + \alpha_1 - \alpha_2}, \quad \alpha_5 = \sqrt[3]{2 + \alpha_3}.$$

En general, pongamos que la ecuación es la definida por el polinomio

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3),$$

donde $\alpha_i \notin K$, y supongamos que existe una cadena de cuerpos

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

en las condiciones anteriores y tal que un $\alpha_i \in K_n$. Vamos a llegar a una contradicción.

Podemos suponer que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, con lo que

$$D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1) > 0.$$

Como $f(x)$ tiene grado 3, el hecho de que no tenga raíces en K equivale a que sea irreducible en $K[x]$. Por lo tanto, $|K(\alpha_i) : K| = 3$.

Sea $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ el cuerpo de escisión de $f(x)$ sobre K, que es una extensión finita de Galois de K. Es claro que

$$D^2 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_3 - \alpha_2)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2$$

es invariante por los automorfismos de $G(L/K)$, luego $D^2 \in K$. Si $D \notin K$, entonces la extensión $K(D)/K$ tiene grado 2, luego $\alpha_i \notin K(D)$. Así pues, $f(x)$ tampoco tiene raíces en K y, cambiando K por $K(D)$, podemos suponer que $D \in K$.

Cada $\sigma \in G(L/K)$ permuta las raíces α_i, pero σ no puede inducir una permutación impar, ya que entonces sería $\sigma(D) = -D$, en contradicción con que $D \in K$. Así pues, $G(L/K)$, identificado con un subgrupo del grupo de permutaciones Σ_6, tiene que ser el grupo alternado A_3, que tiene orden 3, lo cual implica que $|L : K| = 3$, luego $L = K(\alpha_i)$ para cualquier i.

Consecuentemente, aunque estábamos suponiendo que un $\alpha_i \in K_n$, ahora podemos afirmar que K_n contiene a todas las raíces de $f(x)$ o, equivalentemente, que $L \subset K_n$.

Podemos suponer que n es el mínimo natural tal que K_n contiene a un α_i (o, equivalentemente, a todos los α_i), con lo que $f(x)$ no tiene raíces en K_{n-1} y, cambiando K por K_{n-1}, podemos suponer que $n = 1$.

En definitiva, tenemos que $K \subset L \subset K(\alpha)$, donde $\alpha^m \in K$, para cierto $m \geq 2$. Podemos suponer que el número natural m es el mínimo posible que cumple esto. Sea p un divisor primo de m. Entonces $K(\alpha^{m/p}) \subsetneq K(\alpha)$, luego, por la minimalidad de m, tenemos que $f(x)$ no tiene raíces en este subcuerpo y, cambiando K por $K(\alpha^{m/p})$, podemos suponer que $\alpha^p \in K$.

Sea ω una raíz p-ésima primitiva de la unidad. Entonces $\alpha \notin K(\omega)$, porque la extensión $K(\omega)/K$ es abeliana, luego, si $K(\alpha) \subset K(\omega)$, tendríamos que $K(\alpha)/K$ sería de Galois, lo cual es absurdo, porque los conjugados de α son imaginarios. Por consiguiente, la extensión $K(\omega, \alpha)/K(\omega)$ no es trivial y, de hecho,[5] tiene grado p. Así pues, p divide al grado

$$|K(\omega, \alpha) : K| = |K(\alpha, \omega) : K(\alpha)||K(\alpha) : K|,$$

pero el primer factor tiene grado $\leq p - 1$, luego $p \mid |K(\alpha) : K|$ luego $|K(\alpha) : K| = p$.

Como $3 = |L : K| \mid |K(\alpha) : K|$, de hecho, ha de ser $p = 3$ y $K(\alpha) = L$, pero esto es absurdo, porque L/K es una extensión de Galois y $K(\alpha)/K$ no lo es. ■

Ejemplo Consideremos una raíz séptima de la unidad:

$$\omega = \cos(2\pi/7) + i \operatorname{sen}(2\pi/7)$$

y sean $\eta_1 = \omega + \omega^6$, $\eta_2 = \omega^2 + \omega^5$, $\eta_3 = \omega^3 + \omega^4$. Notemos que $\eta_1 = 2\cos(2\pi/7)$. Teniendo en cuenta que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$, es fácil ver que

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = -1, \quad \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 = -2, \quad \eta_1\eta_2\eta_3 = 1.$$

[5] Véase el teorema 17.3 de mi libro de *Álgebra*.

Por consiguiente, η_1, η_2, η_3 son las raíces de la ecuación $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$. Haciendo $u = 2x$ concluimos que $\cos(2\pi/7)$ es una de las raíces de la ecuación

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0.$$

La fórmula de Cardano nos da que

$$\cos\frac{2\pi}{7} = \sqrt[3]{\frac{7}{144}\left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}\,i\right)} + \sqrt[3]{\frac{7}{144}\left(\frac{1}{3} - \sqrt{3}\,i\right)},$$

para cierta elección de las raíces cúbicas. (Las otras dos elecciones nos dan $\cos(4\pi/7)$ y $\cos(8\pi/7)$.) Ahora bien, el teorema anterior nos asegura que esta expresión es "esencialmente imaginaria", en el sentido de que es imposible obtener el resultado

$$\cos\frac{2\pi}{7} = 0.6234898019\ldots$$

con una calculadora pulsando únicamente las teclas numéricas y las de las operaciones de suma, resta, producto, división y extracción de raíces.[6] Por supuesto, podemos llegar a este resultado usando el teorema 2.4, pero, puestos a calcular funciones trascendentes, es más sencillo calcular directamente $\cos(2\pi/7)$. ■

[6] El hecho de que no sea posible construir con regla y compás un heptágono regular es equivalente al hecho de que $\cos(2\pi/7)$ no puede calcularse a partir de números racionales mediante sumas, productos, cocientes y extracción de raíces cuadradas. Aquí hemos probado que tampoco es posible calcularlo mediante raíces de índices superiores, que es algo más fuerte.